Roger Martin

Voir : Mémoires de l'académie des Sciences de Toulouse

11e Série tome 7. pp. 107

1919.

Notice par Mr Gros.

Pf XVIII-437

ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DES ÉCOLES DE PHILOSOPHIE

DU COLLÉGE ROYAL

DE TOULOUSE,

Ouvrage servant d'introduction à l'étude des sciences Physico-Mathématiques.

Par M. l'Abbé MARTIN, de l'Académie Royale des Sciences, Inscriptions & Belles-Lettres, & Professeur en Philosophie au Collége Royal de Toulouse.

B.

A TOULOUSE,

De l'Imprimerie de J. J. ROBERT, Maître-ès-Arts de la Faculté de Paris, Imprimeur du Collége Royal.

Et se trouve à Paris chez LAPORTE, Libraire, rue des Noyers

M. DCC. LXXXI.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE UNIVERSITAIRE

ÉLÉMENS
DE
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES ÉCOLES DE PHILOSOPHIE
DU COLLÉGE ROYAL
DE TOULOUSE,

Ouvrage servant d'introduction à l'étude des sciences Physico-Mathématiques.

Par M. l'Abbé MARTIN, de l'Académie Royale des Sciences, Inscriptions & Belles-Lettres, & Professeur en Philosophie au Collége Royal de Toulouse.

A TOULOUSE,

De l'Imprimerie de J. J. ROBERT, Maître-ès-Arts de la Faculté de Paris, Imprimeur du Collége Royal.

Et se trouve à Paris chez LAPORTE, Libraire, rue des Noyers.

M. DCC. LXXXI.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

AVERTISSEMENT.

CET Ouvrage devant servir d'introduction à l'étude des Sciences Physico-Mathématiques, telles qu'on peut les enseigner dans un cours ordinaire de Philosophie; on a tâché d'y réunir tous les principes de calcul & de Géométrie, dont on peut avoir besoin dans ce genre d'enseignement. On s'est même permis quelquefois d'aller un peu plus loin que cet objet ne demande, afin que ceux qui n'auront d'autres vues que d'apprendre les Élémens de Mathématiques pures, les trouvent ici avec assez d'étendue. On a fait en sorte de développer, dans le Discours Préliminaire, plusieurs notions Métaphysiques, dont les unes sont le fondement des Sciences Mathématiques en général, & les autres contiennent des éclaircissemens relatifs à quelques endroits de cet Ouvrage. De telles discussions qui seroient sans doute utiles dans tous les Livres Élémentaires, deviennent presque indispensables dans ceux qui sont destinés pour un cours de Philosophie. Cependant, comme il est plus facile d'entendre les Élémens d'une Science, que de saisir cette espèce de Métaphysique, souvent très-profonde, qui a présidé à ses principes, il nous paroît que dans une première lecture on doit omettre ici le Discours Préliminaire en entier, pour ne s'occuper que des Élémens. On y reviendra ensuite avec plus de fruit, & sur-tout avec plus d'intérêt, parce qu'on en aura déjà senti la nécessité dans plusieurs endroits de l'Ouvrage.

Au reste, comme l'étendue qu'on peut donner aux Élé-

mens de Mathématiques dans les divers cours de Philosophie, dépend & du temps qu'on y peut employer, & des vues qu'on se propose dans l'enseignement ; il n'est pas possible qu'un Livre Élémentaire ne contienne précisément que les connoissances Mathématiques, dont chaque Professeur voudra faire usage dans sa classe. C'est pourquoi on a cherché à renfermer dans celui-ci tout ce qui peut s'enseigner dans un cours où l'on étendra le plus ce genre d'instruction ; & dans ceux où l'on voudra le restreindre, il sera toujours loisible d'omettre certains chapitres en tout ou en partie, ce qui se peut faire sans que les autres deviennent plus difficiles à entendre. A la vérité il nous paroît qu'on ne peut guère retrancher de l'Arithmétique ni de la Géométrie ; mais dans l'Algèbre on peut passer les Chapitres IV & VI, de la seconde Section, VII, IX & X de la troisième, & IV, VI & VII de la quatrième. Et pour tout le reste, savoir, l'abregé sur les Sections Coniques & les notions de Calcul Infinitésimal, les vues qu'on aura en enseignant ces Élémens, doivent uniquement décider s'il faut s'en occuper ou non. Quel que soit le but qu'on se propose, il paroît cependant qu'on ne peut se passer du Chapitre où l'on a tâché de donner des notions exactes sur l'infini, parce que ces notions sont d'un fréquent usage dans toutes les Sciences Mathématiques.

PRIVILÉGE GÉNÉRAL.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conseillers, les gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra. SALUT : Ayant jugé à propos de mettre sous notre protection l'Académie des Sciences, Inscriptions & Belles-lettres de Toulouse, & encourager les travaux littéraires des membres qui composent ladite Académie ; Nous avons cru devoir lui accorder nos Lettres de Privilege de faire imprimer tous les Ouvrages qu'elle pourra produire. A CES CAUSES, Nous avons permis à ladite Académie & nous lui permettons par ces présentes de faire imprimer par tel *Imprimeur qu'elle voudra choisir & autant* de fois que bon lui semblera, de faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de douze années consécutives, à compter du jour de la date des présentes, *tous les Ouvrages que l'Académie des Sciences, Inscriptions & Belles-lettres de Toulouse desirera faire imprimer en son nom*, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages & les avoir jugés dignes de l'impression. Faisons défenses à tous Imprimeurs-Libraires & autres, de quelque qualité & condition qu'ils soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance, comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, debiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit de ladite Académie ou de ceux qui auront droit d'elle, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers à ladite Académie, ou à celui qui aura droit d'elle, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces présentes seront enrégistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles, que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en beau papier & beau caractère, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, à peine de déchéance du présent Privilege ; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le sieur Hue de Miromenil, qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans

celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le sieur de Maupeou ; & un dans celle dudit sieur Hue de Miromenil. Le tout à peine de nullité des présentes, & du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ladite Académie & ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement ; voulons que la copie des présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, charte normande & lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le vingt-huitieme jour d'Août l'an de grace mil sept cent soixante-seize, & de notre Regne le troisieme. Par le Roi en son Conseil.

LEBEGUE.

Registré sur le Registre XX. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 739, fol. 212, conformément au Réglement de 1723, qui fait défense, article IV, à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la susdite Chambre huit exemplaires prescrits par l'article CVIII. du même Réglement. A Paris ce quatre Septembre mil sept cent soixante-seize.

LAMBERT, Adjoint.

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences, Inſcriptions & Belles-Lettres de Toulouſe.

Du Mercredi 2 Mai 1781.

Messieurs de Garipuy & Benet, nommés pour examiner un Ouvrage de M. l'Abbé MARTIN, intitulé *Élémens de Mathématiques, à l'uſage des Écoles de Philoſophie du Collége Royal de Toulouſe*; ayant jugé que cet Ouvrage réuniſſoit au mérite de la clarté & de la préciſion, des vues neuves & intéreſſantes; l'Académie a cru qu'il étoit digne de ſon approbation, & qu'il pouvoit être imprimé ſous ſon privilége. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent certificat. A Toulouſe le 8 Mai 1781.

du Mas, Vice-Secretaire.

ERRATA.

PAge 9, *ligne* 23, Disc. prél. n°. VIII. *lisez*, Disc. prél. n°. X.

P. 28, *lig.* 4, dixaines.... centaines, *lis.* dixièmes, centièmes.

P. 66, *lig.* 9 & 10, -1, *lis.* $+1$.

P. 79, *lig.* 8, $\frac{1}{66384}$, *lis.* $\frac{1}{16384}$

P. 91, *lig.* 17, minorité, *lis.* majorité.

P. 145, *lig.* 4, $a = d$, *lis.* $x = d$.

P. 151, *lig.* 6 & 7, $a^3 - b^3 c^2 p$, *lis.* $a^3 b^3 c^2 p$.

P. 152, *lig.* 24, a^2, *lis.* a^3.

P. 157, *lig.* 20, $1x$, *lis.* $1x^3$

P. 191, *lig.* 16, A b, *lis.* B b.

P. 265, *lig.* 26, $\frac{1}{6} a \times s$, *lis.* $\frac{1}{6} a \times s$.

DISCOURS

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

I.

L'EMPRESSEMENT que l'on montre aujourd'hui pour s'instruire dans les Mathématiques, le zele avec lequel on les enseigne dans la plupart des Écoles, la multitude d'Ouvrages Élémentaires qui paroissent dans ce genre, tout enfin semble annoncer que l'utilité de cette Science est généralement reconnue. Qui pourroit douter en effet que la rigueur, la précision, & même les difficultés qui l'accompagnent, ne donnent plus d'étendue à l'esprit, & n'impriment à nos idées un caractère de justesse & de profondeur, qu'on chercheroit vainement dans l'étude des autres sciences? Quiconque a cultivé celle-ci avec application, en a éprouvé ces heureux effets; & quant à ceux qui n'y sont pas initiés encore, le suffrage de tous les grands hommes suffiroit pour leur rendre cette étude recommandable. Les anciens Philosophes lui avoient assigné un rang distingué dans l'éducation publique; ils la cultivoient avec un rare succès, & l'ont enrichie des plus précieuses découvertes. Parmi les modernes, il ne faut que nommer Descartes, Leibnitz, Newton, Pascal, &c. pour prouver que dans tout temps les génies rares qui ont éclairé les hommes, ont été les premiers

Utilité des Sciences Mathématiques.

Géometres de leur ſiecle. Si je voulois parler de ceux qui vivent encore, combien n'en pourrois-je pas citer qui ſe ſont illuſtrés dans la Philoſophie & dans les Lettres, & qui ne doivent qu'à une étude approfondie de la Géométrie la juſteſſe, la force & la préciſion qu'on admire dans leurs ouvrages ? Il paroît donc hors de doute que l'étude des ſciences mathématiques a la plus grande influence ſur les progrès de l'eſprit humain, & qu'on ne ſauroit trop tôt en occuper les jeunes gens, à quelque état qu'on les deſtine. C'eſt pour eux une Logique pratique qui, en ornant leur eſprit de connoiſſances utiles, ſubſtitue aux regles du raiſonnement l'habitude de raiſonner juſte, que ces regles ne donnent pas toujours.

II.

Rareté des bons Livres Élémentaires : qualités qu'ils doivent avoir.

QUOIQU'ON n'ait jamais douté de tous ces avantages & d'une infinité d'autres dont je ne parle pas ici, comment ſe peut-il faire qu'il nous manque encore de bons Livres Élémentaires de cette ſcience, & qu'au milieu d'une multitude d'Élémens qui paroiſſent chaque jour, un Géometre célebre (1) ne trouve qu'une *ſtérile abondance*, qui nous embarraſſe ſans nous enrichir ? Mais cette apparente contradiction n'étonnera perſonne, ſi l'on fait attention que, ſuivant le plan différent qu'un Auteur ſe propoſe, un Livre Élémentaire de Mathématiques (& l'on en peut dire autant de toute ſorte d'Élémens) eſt le plus facile ou le plus difficile des ouvrages qu'on peut entreprendre Il eſt le plus facile, ſi l'Auteur ne ſe propoſe que de faire

(1) M. d'Alembert, Mélanges de Littérature, tom. 5, p. 201.

un livre, ou plutôt une compilation, à laquelle la mémoire a plus de part que l'intelligence & la réflexion : il eſt le plus difficile, ſi l'Auteur ne veut écrire que d'après ſes idées, s'il ne veut employer celles d'autrui qu'après ſe les être appropriées par la méditation & l'examen, s'il veut allier la clarté avec la rigueur & la préciſion, occuper l'entendement ſans fatiguer la mémoire, ne dire que ce qu'il faut, laiſſer deviner quelque choſe, pour exercer l'eſprit des commençans ſans le rebuter : s'il veut encore remonter aux notions primitives, ſaiſir le génie des inventeurs, applanir les difficultés qu'ils ont laiſſées, uſer à propos des ſecours que la Philoſophie peut prêter à la Géométrie ; en un mot, s'il veut enrichir la Science de quelque idée neuve, c'eſt alors qu'il ſentira la difficulté de cette entrepriſe. Parmi les diverſes cauſes du peu de ſuccès de la plupart des Élémens modernes, je ne puis m'empêcher d'en citer une principale, c'eſt l'eſpece d'oubli où l'on a laiſſé dans ces derniers temps la Géométrie des anciens. En effet, ſeroit-il poſſible qu'après une étude approfondie d'Euclide, la plupart des Auteurs Élémentaires manquaſſent d'exactitude dans les définitions & de liaiſon dans leurs idées ; qu'ils ſacrifiaſſent la rigueur des preuves à la facilité d'une méthode ſouvent incertaine & quelquefois fauſſe, ainſi qu'on le leur a ſouvent reproché ? Il me ſemble que de tels écarts ne ſont point compatibles avec l'eſprit géométrique, qu'on doit néceſſairement acquérir en méditant cet immortel ouvrage. Que je me féliciterois de m'en être ſervi à propos dans les endroits où il m'étoit permis d'en ſuivre la marche & d'en employer la doctrine pour enrichir mes Élé-

mens de Géométrie ! Avant de justifier l'usage assez fréquent que j'en ai fait, je vais exposer quelques notions métaphysiques, qui sont le fondement de cette Science, & je tâcherai en même temps de justifier les légeres innovations que je me suis permises dans le cours de cet Ouvrage.

III.

Notion de la quantité en général.

NOTRE esprit ne s'élevant aux idées générales qu'après avoir considéré les objets particuliers ou individuels, l'ordre de nos connoissances fait voir que la notion de la quantité en général suppose déjà celle de plusieurs quantités particulieres ou individuelles. Or, pour savoir comment se forme en nous cette derniere notion, il suffit d'observer que parmi les êtres divers qui se présentent à notre esprit, plusieurs sont tels qu'on en peut toujour imaginer dans la même espèce, & de plus grands & de plus petits qu'eux. C'est ainsi que nous nous représentons un espace déterminé quelconque, par ex. une toise, une durée fixe, comme une heure : un mouvement, une masse, &c. de façon que quelque grands ou petits que ces êtres soient conçus, nous pouvons en concevoir & de plus grands & de plus petits encore, sans que rien borne notre imagination à cet égard. C'est là ce qu'on entend quand on dit de ces êtres qu'ils sont *susceptibles* d'augmentation & de diminution sans fin ; & en les considérant sous ce rapport, on les appelle des *quantités*. Tant que cette notion de quantité s'applique à des êtres particuliers, comme à un espace, à une durée, &c. elle se présente à nous avec les attributs ou qualités inhérentes à la nature de ces êtres, & alors nous l'appellons

quantité concrete. Mais si, laissant à part tous les caractères particuliers à chaque espèce de quantité, on ne considere dans ces êtres divers que l'aptitude qu'ils ont tous à devenir plus grands & plus petits, alors on se forme l'idée de la *quantité abstraite* (1) ou séparée de toutes ses qualités, & considérée sous le point de vue le plus général. Par là on voit que l'idée de la quantité abstraite représente un objet simple & toujours le même; tandis que les quantités concretes s'offrent à l'esprit comme des êtres différens, quelquefois même opposés entr'eux par les qualités qui les accompagnent. Ces deux sortes de quantités sont l'objet de la Science Mathématique, & les rapports qui résultent de leur comparaison sont ce qu'on appelle des *propriétés* de la quantité; ce sont ces propriétés qui forment toutes les vérités que cette science enseigne.

IV.

L'IDÉE que nous venons de donner des quantités concretes en particulier doit faire conclure qu'il y en a dans ce genre & d'*homogènes* & d'*hétérogènes* entr'elles; ou bien que certaines peuvent être conçues, si on les compare ensemble, sous le rapport de tout & de partie, & que d'autres ne le peuvent pas. Pour se former une notion exacte de cette différence, on dira, d'après Euclide, que deux quantités sont homogènes lorsque l'une ajoutée un

Quantités homogènes & hétérogènes.

(1) Ce mot vient du terme latin *abstrahere*, qui veut dire *séparer*, *diviser*; ainsi que *Concret* vient ou de *concrescere*, s'assembler, se réunir en un seul, ou de *concernere*, voir ensemble.

certain nombre de fois à elle-même peut surpasser l'autre, & qu'elles sont hétérogènes quand cet excès de l'une sur l'autre ne peut jamais avoir lieu. Ainsi une durée & une étendue, une ligne & une surface sont des quantités hétérogènes entr'elles, parce que l'une ajoutée à elle-même ne peut jamais produire l'autre. Or, une somme de plusieurs quantités n'étant autre chose qu'une autre quantité résultante de celles-là, comme un tout résulte de ses parties; de même une différence de deux quantités supposant toujours une espèce de superposition ou de mesure de l'une par l'autre, il s'ensuit qu'on ne peut ni réduire en une somme des quantités hétérogènes, ni concevoir entr'elles une différence de grandeur quelconque.

V.

Toute quantité est limitée, & contient une multitude de parties.

MAIS quelle que soit une quantité, on ne sauroit se la représenter sans concevoir en même temps des limites qui la terminent. En effet, la notion de la quantité suppose une aptitude à recevoir des augmentations quelconques. Or, ces augmentations ne pouvant avoir lieu sans imaginer que là où se termine une quantité, commence une autre qui va se terminer plus loin; il s'ensuit que la notion de limites fixes entre nécessairement dans l'idée de la quantité. Celle d'une multitude de parties en est aussi un attribut essentiel; car toute quantité étant un être composé, elle renferme nécessairement plusieurs autres êtres de même nature qu'elle, & n'est autre chose que tous ceux-là pris ensemble. Or, si A est la même chose que B, C, D pris ensemble, A sera dit un tout & B, C, D, en seront les parties. Ainsi la notion d'une

multitude de parties eſt encore inſéparable de l'idée de la quantité.

VI.

Ce ſeroit une manifeſte contradiction de dire que l'idée d'un être en particulier eſt auſſi celle d'une multitude d'êtres ou ſemblables ou différens de lui, puiſqu'alors cette idée ſeroit & ne ſeroit pas en même temps la notion qui repréſente l'être dont il s'agit. Or, pour exprimer que la notion d'un être quelconque ne ſauroit être celle d'une multitude d'autres, nous diſons de celui-là qu'il eſt *un*. Ainſi chaque objet qu'on peut imaginer eſt *un*, & ne ſauroit être conçu autrement ſans la plus évidente contradiction. Lorſque notre eſprit veut ſe repréſenter à la fois & l'attribut d'être *un*, & le ſujet où cet attribut réſide, nous employons le terme adjectif *un*, qui, ainſi que tous tous les autres adjectifs, déſigne à la fois & la qualité dont on parle, & le ſujet auquel on l'attribue. Mais ſi nous voulons parler de cette qualité ſeule, ſans penſer au ſujet, nous faiſons abſtraction de ce ſujet; & conſidérant la qualité comme un être indépendant & ſubſtantiel, nous la déſignons par le nom ſubſtantif d'*unité*. Que doit-on donc entendre par *unité*, en prenant ce mot dans un ſens exact & rigoureux? On doit entendre, ainſi que l'a dit Euclide, (1) *la notion abſtraite de ce qui fait qu'un être quelconque eſt dit un*. Si notre eſprit ſe repréſente à la fois pluſieurs êtres A, B, C, comme des unités, il ſe forme la notion abſ-

Notion de l'unité & du nombre.

(1) *Unitas eſt, ſecundum quam unumquodque eorum quæ ſunt, unum dicitur.* Eucl. l. 7, déf. 1.

traite de *multitude* : & s'il donne des limites à cette multitude, & qu'en outre la même notion lui repréſente chacune des unités qui la compoſent, il ſe formera l'idée du *nombre*. Qu'eſt-ce donc qu'un nombre ? Ce n'eſt autre choſe *qu'une multitude limitée d'unités ſemblables ou conſidérées comme ſemblables*. D'où l'on voit qu'un nombre *infini*, c'eſt-à-dire, un nombre ſans limites eſt abſolument impoſſible. Il n'en eſt pas de même d'un nombre *indéfini* ou *indéterminé* ; car ces dénominations font aſſez entendre que celui-ci a toujours des limites, & qu'il n'eſt dit indéfini que parce qu'on ignore où elles ſont, quoiqu'on ſache qu'elles exiſtent.

VII.

Conſéquences qui ſuivent de cette définition.

DE ce que nous venons de dire ſur la nature des nombres, on en déduira pluſieurs conſéquences importantes : la premiere, qu'une quantité quelconque peut être conçue comme un nombre, puiſque pouvant être diviſée en une multitude déterminée de parties égales, rien n'empêche de prendre une de ces parties pour unité ; & alors cette quantité devient un nombre. La ſeconde, que les nombres ſont ou *abſtraits* ou *concrets* (1), ſuivant que leur unité eſt elle-même ou abſtraite ou concrete. La troiſieme, que l'unité concrete étant la ſeule qui eſt conçue avec certaines qualités ou attributs, il n'y a que les nombres concrets qui par les attributs ou

(1) Wolf & le Dictionnaire de l'Académie les appellent *nombres nombrans* & *nombres nombrés* ; mais les termes ſcholaſtiques d'*abſtrait* & de *concret* nous paroiſſent avoir une étymologie plus claire.

différens ou contraires de leur unité, puissent former des nombres hétérogènes.

VIII.

Notion de la quantité continue & de la quantité discrete.

En observant ces différentes espèces de quantités qui se présentent à notre esprit, on voit aisément qu'il entre dans la notion que nous avons de quelques unes d'entr'elles, d'avoir leurs diverses parties liées les unes aux autres sans aucune interruption; c'est-à-dire, sans aucun intervalle où la quantité manque dans le passage d'une partie à la partie suivante : c'est ainsi que nous concevons les diverses parties qui composent une étendue quelconque, ou bien un mouvement, une durée, &c. Or, toutes les quantités qu'on peut se représenter sous ce nouveau rapport, sont appellées avec raison quantités *continues* : & au contraire, on appelle *discretes* (2) toutes celles où l'on conçoit les parties séparées, ou plutôt celles où notre esprit conçoit seulement une multitude de parties, faisant abstraction de ce qui peut lier ces parties les unes aux autres. Ainsi les nombres sont des quantités discretes, parce que pour les concevoir il suffit d'imaginer une multitude de parties, sans penser à leur continuité. Mais une ligne, une surface sont des quantités continues, puisqu'on n'y peut imaginer des parties, sans concevoir que la limite de l'une se confond avec celle de sa voisine, & qu'ainsi l'on passe sans interruption d'une partie à la partie suivante. Ces deux es-

(1) Ce mot vient de *discernere* séparer; ainsi que *continu* vient de *continuari*, durer sans interruption.

pèces de quantités, ſavoir la diſcrete & la continue, ſont enſemble l'objet général des Sciences Mathématiques. Mais comme pour avoir la notion de la quantité diſcrete, il ſuffit de concevoir ſeulement une multitude de parties, ce qui ſe peut trouver dans toute ſorte de quantités, il s'enſuit que la notion de la quantité diſcrete eſt plus ſimple & plus étendue que celle de la quantité continue. L'Arithmétique qui traite de cette première, outre qu'elle eſt la plus utile de toutes les Sciences Mathématiques, devient donc la première dont on doive s'occuper ici en ſuivant l'ordre naturel de nos connoiſſances.

I X.

Différentes eſpeces de vérités en Arith.

L'ARITHMÉTIQUE eſt définie avec raiſon, la ſcience des nombres, parce que ſon but eſt d'en découvrir les diverſes propriétés. Rien ne ſeroit plus long & plus difficile que cette ſcience, ſi l'on n'eût ſimplifié les expreſſions des divers nombres, en n'employant pour les repréſenter que peu de caractères combinés d'une maniere ſimple & facile à retenir. Nous ne cherchons pas ici combien la maniere reçue parmi nous, & connue ſous le nom de ſyſtême de numération, peut avoir d'avantages ſur d'autres manieres également poſſibles. Mais ce qu'il nous importe d'obſerver, c'eſt qu'un ſyſtême de numération, quel qu'il ſoit, introduit dans l'Arithmétique des propriétés de nombres relatives à ce ſyſtême, tandis que d'autres, tenant à la nature même des nombres, ſont indépendantes de tout ſyſtême & ſeroient les mêmes dans toutes les numérations poſſibles. Un Géometre célebre obſerve que toutes ces vérités hypothétiques ou relatives au ſyſtême adopté parmi

nous, ſont renfermées dans les règles ordinaires de l'Arithmétique. Mais il ſemble qu'outre celles-là, il y en a pluſieurs qui ſont indépendantes de ces règles : telles ſont les propriétés du nombre 9, ou bien celle qui fait que dans une expreſſion numérique, l'unité d'un rang quelconque vaut plus que tout ce qu'expriment les caracteres qui ſont à ſa droite ; & pluſieurs autres. Mais, de quelque manière que ſe préſentent les propriétés des nombres, il n'y en peut avoir que de deux eſpèces, les unes *hypothétiques* ou relatives à un ſyſtême de numération, les autres *abſolues* ou indépendantes de tout ſyſtême. Celles-ci appartiennent proprement à l'Arithmétique univerſelle ou bien à cette eſpèce d'Arithmétique qui s'étend ſur tous les nombres & ſur tous les ſyſtêmes poſſibles Nous parlerons bientôt de celle-là ; mais il faut auparavant développer une des plus importantes notions de l'Arithmétique, c'eſt celle des nombres oppoſés.

X.

POUR parvenir à cette notion, il faut obſerver que les quantités concretes & par conſéquent les nombres concrets qui les repréſentent, offrant toujours à notre eſprit des êtres revêtus de certaines qualités ou déterminations particulieres, il peut arriver que dans les divers nombres de cette eſpèce, ces déterminations ſoient contraires les unes aux autres, & qu'il faille avoir égard à cette oppoſition, comme à une condition qui modifiant la queſtion propoſée, doit néceſſairement influer dans le réſultat. En effet, ſi quelqu'un demande quel ſera le mouvement du corps A, pouſſé d'un côté par une force comme 8, & du côté oppoſé par une force comme 12, la réponſe ne ſauroit

Notion des nombres oppoſés.

être juste, sans avoir égard à l'opposition des forces, comme à une condition tellement essentielle, que si elle est ou ôtée ou changée, la réponse devra être toute différente; & il en est de même dans un grand nombre de cas semblables à celui-ci. Il faut donc alors avoir égard à cette condition, en l'exprimant arithmétiquement; c'est-à-dire, en faisant sur les nombres 8 & 12 qui expriment ces forces, les mêmes opérations ou changemens que l'opposition y produit réellement. Or, l'expérience apprend qu'alors la plus petite se réduit à zéro, & que la plus grande ne conserve que son excès sur la première, ou bien que de ces deux forces réunies en une seule, il ne reste que leur différence. Il faudra donc, pour avoir le résultat de cette réunion ou bien de *l'addition* de ces forces opposées, soustraire le nombre 8 du nombre 12, en écrivant 12 — 8, afin que la formule arithmétique exprime juste ce qu'elle doit exprimer. On voit donc qu'ici on ne peut obtenir le vrai résultat de l'addition des forces opposées, que par la soustraction des nombres qui les représentent. C'est là ce qu'on a entendu quand on a dit (*Arith. N°.* 17) que la propriété essentielle des nombres opposés, est que leur addition se change en soustraction; & de-là il s'ensuit que la soustraction doit se faire par une addition; premiérement, parce qu'elle est une opération contraire à l'addition: secondement, parce que la soustraction étant toujours une décomposition, soustraire la force 8 de la force opposée 12, c'est décomposer celle-ci en deux forces opposées dont elle est la somme, & dont l'une est 8. Il faut donc que celle qu'on cherche, soit 20; puisque, d'après ce que nous venons de dire sur l'addition, il

n'y a qu'une force comme 20 qui ajoutée à une force opposée 8, puisse donner 12. On auroit donc eu le vrai résultat de cette soustraction, en ajoutant la force 8 à la force 12 de cette maniere, 12 + 8; d'où il faut conclure qu'entre ces quantités la soustraction se fait par l'addition des nombres qui les représentent. Ce que nous venons de dire ici de deux nombres qui expriment des forces opposées, peut se dire & se prouver de même de deux autres nombres qui exprimeroient des quantités opposées entre elles d'une manière quelconque; c'est-à-dire, ou bien par leurs effets contraires, comme sont les dettes & les biens réels : ou bien par leur signification, comme sont les exposans d'une même quantité quand ils désignent les opérations contraires de multiplication & de division : ou bien par leur situation, comme ceux qui expriment les valeurs de deux lignes situées en sens contraire par rapport à un point fixe. De façon que, d'après la nature des nombres opposés, on peut dire en général que leur addition doit se changer en soustraction, & leur soustraction en addition. C'est donc avec fondement que cette propriété a été prise pour l'attribut essentiel par lequel on doit définir ces sortes de nombres; & toutes les règles des opérations qu'on leur fait subir, sont nécessairement fondées là-dessus.

XI.

De la définition que nous avons donnée des nombres opposés, il s'ensuit plusieurs conséquences importantes. La première, que les qualités ou déterminations contraires dans les quantités nombrées étant la seule cause de leur opposition, il n'y a que les nombres concrets qui puissent

Conséquences qui s'ensuivent de cette notion.

être oppoſés. La ſeconde, que les nombres oppoſés, quoiqu'hétérogènes entr'eux (IV.), ne diffèrent cependant que par la ſeule qualité ou détermination qui les rend oppoſés, & qu'ainſi, abſtraction faite de cette qualité, ces nombres deviennent homogènes ou propres à s'augmenter les uns les autres. C'eſt pour cela qu'une ligne & une ſurface, un mouvement & une étendue quoique dirigés en ſens contraire par rapport à un point fixe, ne ſauroient former des nombres oppoſés, parce qu'abſtraction faite de leur ſituation contraire, ces quantités ſont encore hétérogènes entr'elles. La troiſième conſéquence eſt que les nombres oppoſés déſignent les uns & les autres de vraies quantités, puiſque ne différant entr'eux que par la ſeule qualité contraire qui fait leur oppoſition, ils peuvent, chacun dans leur eſpèce, être augmentés & diminués à volonté. Ainſi quand on a dit que les nombres négatifs ſont plus petits que zéro, ou bien l'on a avancé une erreur, puiſque zéro étant la limite de tous les décroiſſemens poſſibles d'une quantité, on n'en peut concevoir de plus petite que celle qui eſt parvenue à ce terme : ou bien on s'eſt ſervi d'une expreſſion impropre pour déſigner une vérité. Car ſi l'on entendoit par-là que relativement à un nombre poſitif on en eſt plus éloigné avec le négatif qu'avec zéro, on auroit raiſon de dire que le nombre négatif eſt plus petit que zéro ; mais comme la même choſe a lieu pour un nombre poſitif relativement à un négatif, on pourroit dire également que le poſitif eſt plus petit que zéro ; & par conſéquent cette manière de définir un nombre négatif, ne ſeroit pas exacte.

XII.

Il se présente ici une objection à faire contre la définition des nombres opposés. Car puisque ces nombres représentent toujours des quantités hétérogenes, comment pourront-ils être ajoutés ou soustraits les uns des autres, ainsi qu'on le suppose dans leur définition? Mais cette difficulté a déjà été résolue par Wolf. D'après cet Auteur, l'addition de deux nombres opposés n'étant qu'une soustraction faite sur le plus grand d'autant d'unités qu'il s'en trouve dans le plus petit, & la soustraction au contraire étant une augmentation faite dans un nombre d'autant d'unités qu'il s'en trouve dans l'autre, de pareils changemens sont toujours possibles; & l'espèce d'hétérogénéité qui se trouve dans les quantités opposées, exige qu'ils soient faits de cette manière.

Objection contre la définition des nombres opposés.

XIII.

Les nombres opposés étant admis dans le calcul, on a dû chercher les moyens de leur faire subir toutes les opérations qui se pratiquent sur les purs nombres abstraits. Les regles de l'addition & de la soustraction ont dû se présenter aisément, parce qu'elles sont fondées sur la nature même des quantités que ces nombres représentent; mais la multiplication ou la division de ces nombres les uns par les autres a dû paroître impossible. Car, pour ne parler que de la première de ces opérations, on sait que par sa nature elle exige pour multiplicateur un nombre abstrait. Comment donc sera-t-elle praticable entre deux nombres concrets, tels que sont toujours les nombres opposés? D'ailleurs il faut que dans tous les cas

A proprement parler, il n'est pas possible de multiplier ou de diviser les nombres opposés les uns par les autres.

le produit ſoit au multiplicande, comme le multiplicateur eſt à l'unité. Or, ſi le produit n'eſt point de la même eſpèce que le multiplicande, comme il arrive ſouvent en multipliant les nombres oppoſés les uns par les autres, comment comparer enſemble ces deux nombres pour établir entr'eux une analogie auſſi eſſentielle à l'opération? Une telle comparaiſon ſeroit abſolument impoſſible, & par conſéquent il n'eſt pas plus permis, à proprement parler, de multiplier deux nombres oppoſés l'un par l'autre, que de multiplier un eſpace par un temps, une ligne par une ligne, ou un mouvement par une maſſe.

XIV.

On explique dans quel ſens ces opérations ſont poſſibles. Raiſon métaphyſique de la regle des ſignes dans la multiplication.

DANS quel ſens faut-il donc conſidérer la multiplication de nombres oppoſés, afin de la concevoir poſſible? C'eſt en faiſant abſtraction du ſigne du multiplicateur, & conſidérant ce facteur comme un pur nombre abſtrait. Ainſi pour pouvoir multiplier $4 - \sqrt{3}$ par $+ 2$, il faudra d'abord négliger le ſigne du multiplicateur, & prendre deux fois la quantité $4 - \sqrt{3}$, ce qui s'indiquera ainſi: $2(4 - \sqrt{3})$, & s'énoncera en diſant: $4 - \sqrt{3}$ pris deux fois, qui donne $8 - \sqrt{12}$. Ce ſera là le vrai produit, d'après lequel on formera l'analogie qui naît de la nature de la multiplication. Mais ce produit ayant des ſignes & pouvant toujours être écrit à la ſuite d'un terme quelconque A, qui entre ou qui peut être ſuppoſé entrer dans la même formule numérique, quelque choſe doit indiquer s'il faut l'ajouter à ce terme ou s'il faut l'en ſouſtraire. Or, cette indication ne peut être donnée que par le ſigne qui ſera en tête de l'expreſſion même, ou bien qui précedera le multiplicateur

tiplicateur dans $2(A-\sqrt{3})$. L'on écrira donc alors $A-2(4-\sqrt{3})$, & cela désignera que du terme A il faut soustraire la quantité $4-\sqrt{3}$, prise deux fois, ou bien $8-\sqrt{12}$, ce qui donnera, d'après les règles de la soustraction, $A-8+\sqrt{12}$. Si le multiplicateur eût été positif, on auroit eu $A+8-\sqrt{12}$, parce qu'il auroit fallu ajouter le vrai produit, savoir $8-\sqrt{12}$, au terme A, ainsi que l'auroit indiqué le signe + du multiplicateur mis en tête de cette expression. On voit donc que la valeur du multiplicateur désigne combien de fois il faut prendre le multiplicande pour former le produit, & que le signe qui le précède, indique laquelle des deux opérations ou d'addition ou de soustraction on doit faire subir à ce produit. De façon que quand on dit que le produit de deux nombres négatifs est positif, par exemple, que celui de -6 par -3 est $+18$, ce n'est là qu'une manière abregée de désigner à la fois & le vrai produit de -6 par le nombre abstrait 3, lequel est -18, & la soustraction de ce produit d'un terme quelconque A, qui le précède ou qui peut être supposé le précéder, sans que rien soit changé dans cette expression. C'est ainsi qu'on trouve quelquefois en Mathématiques des énoncés qui, pris dans le sens littéral, seroient absurdes, mais qu'on conserve cependant, parce que bien entendus & pris dans le sens des inventeurs, ils expriment avec précision un précepte que la mémoire retient aisément.

La manière dont nous venons d'expliquer la multiplication des nombres opposés, fait disparoître dans la prétendue multiplication des signes (comme si réellement on multiplioit des signes) toutes ces obscurités qui ont

engagé tant de Géomètres à chercher la raiſon métaphyſique de cette opération. Ils auroient dû chercher plutôt ſi l'opération en elle-même étoit poſſible, & alors en expliquant en quel ſens elle l'eſt, la démonſtration de la règle ſe ſeroit préſentée d'elle-même. Mais au lieu de ſuivre cette marche ſimple, la plupart ont voulu prouver la vérité de la règle par l'exactitude des réſultats; comme ſi un réſultat, quelqu'exact qu'il ſoit, démontre la vérité d'une méthode, & qu'il fît diſparoître ici l'apparente abſurdité que ſon énoncé préſente.

X V.

Raiſons qu'on a eues de s'écarter de la définition ordinaire de la diviſion.

LES mêmes difficultés que nous venons de trouver dans la multiplication des nombres oppoſés, ſe préſentent dans la diviſion, & la manière de les réſoudre ſera auſſi la même; mais avant d'en venir là, fixons, s'il ſe peut, l'idée qu'on doit avoir de la diviſion. Il y a deux manières de la définir, fort différentes l'une de l'autre: dans la première on dit *que c'eſt une opération par laquelle on cherche combien de fois une quantité eſt contenue dans une autre*; & dans la ſeconde, *que c'eſt une opération par laquelle on partage une quantité en un certain nombre de parties égales, & que l'on fixe la valeur de chacune.* Les plus grandes queſtions tiennent à ce point important des Élémens; c'eſt pourquoi nous allons tâcher de l'éclaircir, en faiſant voir que la première de ces définitions, quoique généralement ſuivie, ne peut être admiſe ſans de grands inconvéniens.

En effet, en diſant que par la diviſion on cherche combien de fois une quantité eſt contenue dans une autre,

on doit néceſſairement confondre les raiſons avec les fractions, comme on le fait communément. Ainſi puiſque la fraction ſuivante $\frac{15}{4}$ vaut la ſomme de ces deux-ci $\frac{12}{4}$, $\frac{3}{4}$, il faut auſſi que la raiſon de 15 à 4 vaille la ſomme des raiſons de 12 à 4 & de 3 à 4. Or, d'après tous les Géomètres qui ont enſeigné à additionner les raiſons, & d'après la démonſtration que nous en avons donnée au N°. 215 de nos Élémens, la ſomme de ces deux raiſons eſt la raiſon de 9 : 4, & non point celle de 15 : 4. C'eſt là une première erreur qui s'enſuit de la définition ordinaire.

D'après cette même définition, il faut que dans toute diviſion le quotient ſoit un nombre abſtrait, puiſqu'il indique combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Or, comme toute fraction repréſente le quotient du numérateur diviſé par le dénominateur, il faudra auſſi qu'elle ſoit toujours un nombre abſtrait, ce qui n'eſt pas moins abſurde que ſi l'on diſoit que tout nombre entier eſt néceſſairement un nombre abſtrait.

Veut-on au contraire qu'une fraction puiſſe être un nombre concret? Alors un reſte de diviſion ne pourra pas toujours être ajouté à la ſuite du quotient entier; parce que ce reſte pourra être une fraction concrète, tandis que le quotient ſera toujours un nombre abſtrait, & qu'il ſeroit abſurde d'ajouter enſemble ces deux quantités hétérogènes (IV.).

D'ailleurs, quand on introduira les nombres oppoſés dans la diviſion, comment pourra-t-on concevoir qu'un

diviſeur négatif eſt contenu dans un dividende poſitif ; puiſqu'on ne peut établir aucune raiſon entr'eux, ainſi que nous le prouverons plus bas ? Si l'on dit qu'on fait alors abſtraction des ſignes, & qu'on conſidère le dividende & le diviſeur comme des nombres abſtraits, que deviendra le quotient ? Il ſera ſans doute un nombre abſtrait, & alors on ne pourra plus l'ajouter à des nombres oppoſés ou l'en ſouſtraire, puiſqu'il ſera hétérogène avec eux.

Il ſemble donc que non-ſeulement les propriétés des raiſons & la nature des fractions ne puiſſent s'accorder avec la définition ordinaire de la diviſion ; mais même que le calcul des nombres oppoſés y répugne auſſi ; tandis que tout ſe concilie aiſément avec l'autre définition. La manière d'opérer, la preuve qu'on ne peut écrire au quotient qu'un caractère à la fois, l'oppoſition qu'il y a entre la multiplication & la diviſion, l'étymologie même du mot diviſion, tout enfin ſe préſente ici de ſoi-même. Nous dirons donc d'après cette définition, que le quotient eſt toujours de même nature que le dividende, puiſqu'il en eſt partie : que le diviſeur eſt un pur nombre abſtrait, puiſqu'il ne ſert qu'à indiquer en combien de parties égales il faut partager le dividende : que les ſignes + ou — qui le précèdent quand on introduit les nombres oppoſés, marquent ſi ce quotient doit être ajouté ou ſouſtrait à ce qui le précède ou qui peut le précéder. Ainſi quand on dit que $\frac{+15}{+5} = +3$ & que $\frac{+15}{-5} = -3$, cela ſignifie que dans l'un & l'autre cas il faut prendre la cinquième partie de + 15, laquelle

eſt toujours + 3 ; mais que dans le premier, cette partie doit être ajoutée à zéro ou à ce qui précède, c'eſt pourquoi on l'écrit avec ſon ſigne + 3 ; & que dans le ſecond cette partie doit être ſouſtraite, voilà pourquoi on change ſon ſigne en écrivant —3.

XVI.

Notions des incommenſurables.

OUTRE les nombres entiers & fractionnaires qui ſe préſentent les premiers, il en faut admettre une infinité d'autres, connus ſous les noms d'*incommenſurables* & d'*imaginaires*. Pour préſenter une idée exacte de ceux-ci, cherchons d'abord ce que c'eſt que meſurer une quantité. *Meſurer une quantité n'eſt autre choſe que déterminer en nombres entiers combien de fois une autre quantité, qu'on prend pour unité de meſure, eſt contenue dans la première.* Je dis que cette détermination doit être exprimée par des nombres entiers ; car ſi on diſoit qu'une toiſe, par exemple, eſt contenue dans une ligne droite $\frac{2}{3}$ de fois ou deux fois & $\frac{1}{3}$, ce n'eſt pas la toiſe qu'on préſenteroit alors pour unité de meſure, mais ſeulement le tiers de la toiſe, qui ſeroit une aliquote de cette ligne. Ainſi non-ſeulement toute unité de meſure doit être homogène à la quantité meſurée, puiſqu'elle en eſt conçue comme partie ; mais encore deux quantités n'ont pas de commune meſure, ou bien elles ſont *incommenſurables entr'elles*, quand elles n'ont aucune aliquote commune. Or, l'Arithmétique nous apprend qu'il y a une infinité de nombres de cette eſpèce, & qu'ainſi entre ceux-là rien ne peut préſenter à l'eſprit une déter-

mination exacte de leur rapport, tels sont par exemple 3 & $\sqrt{12}$. Cependant on ne peut douter que 3 ne soit plus petit que $\sqrt{12}$, & qu'il n'en puisse être conçu comme une partie quelconque, tandis qu'il ne sauroit être partie de $\sqrt{-12}$. C'est pourquoi 3 & $\sqrt{-12}$, que nous avons appellé une *imaginaire*, sont plus qu'incommensurables; ils sont *incomparables* entr'eux.

XVII.

Les incommensurables & les imaginaires sont des nombres.

MAIS quoique deux quantités soient incommensurables ou même incomparables entr'elles, il ne s'ensuit pas qu'elles le soient avec toute autre. La nature de la quantité ne permet point d'imaginer une incommensurabilité absolue. Car de là que toute quantité est susceptible d'accroissement ou de diminution, on en peut concevoir une autre qui soit double, triple, &c. de celle-là. C'est ce qui prouve que les incommensurables & même les imaginaires, doivent être mises au rang des nombres. Car $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, pouvant prendre cette forme $1\sqrt{-1}$, $2\sqrt{-1}$, $3\sqrt{-1}$, on ne peut nier que la première de ces imaginaires ne soit la moitié de la seconde & le tiers de la troisième; & qu'ainsi avec cette première, prise comme unité, on ne puisse former les autres par une continuelle répétition, ce qui suffit pour donner l'idée du nombre (VI).

XVIII.

Il y a une infinité d'espèces différentes de nombres.

SI l'on demande donc combien il y a d'espèces de ces nombres ou incommensurables ou imaginaires, on répondra qu'il y en a une infinité d'infinités d'espèces différentes. Pour se convaincre de cette vérité, il suffit d'ob-

ſerver que toute incommenſurable peut être nombrée avec une infinité d'autres. Ainſi $\sqrt{2}$, par ex. peut être nombrée avec $\sqrt{8}$, avec $\sqrt{18}$, avec $\sqrt{32}$, avec $\sqrt{50}$, & toujours ſans fin ; de ſorte que prenant le premier de ces nombres pour unité, on peut dire que pour avoir le ſecond, il faut ajouter cette unité deux fois à zéro, trois fois pour avoir le troiſième, quatre fois pour avoir le quatrième, &c. Si au lieu de $\sqrt{2}$ on eût pris pour unité $\sqrt{3}$, on auroit formé une ſuite de nombres, ſavoir, $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$, &c. qui contiendroit cette unité, 2, 3, 4 fois, & tous ſeroient incommenſurables avec les premiers. Si au lieu de $\sqrt{2}$, j'euſſe pris pour unité la racine troiſième, ou quatrième, ou cinquième de ce même nombre, j'aurois trouvé une infinité d'eſpèces différentes de nombres incommenſurables, ſoit entr'eux, ſoit par rapport aux nombres entiers ou fractionnaires. De ſorte qu'un nombre, quel qu'il ſoit, peut donner naiſſance à une infinité d'incommenſurables, & la même choſe pouvant ſe dire des imaginaires, on en conclura que l'une & l'autre eſpèce de ces quantités rentre dans la claſſe des nombres.

XIX.

Notion de l'Algèbre: l'Algèbre ne renferme point la Géométrie dans ſon objet.

CETTE multitude innombrable de différentes eſpèces de nombres fait aſſez voir que l'Arithmétique ne peut étendre ſes combinaiſons ſur tous en employant les chiffres, ou bien des caractères qui expriment ſeulement ceux d'une eſpèce en particulier. Il a donc fallu ſubſtituer à ces chiffres des ſymboles qui peuvent indifféremment repréſenter toutes les eſpèces de nombres ; & cette

Arithmétique ſymbolique & univerſelle, connue ſous le nom d'*Algèbre*, a dû exclure de ſon objet, les vérités hypothétiques, dont nous avons parlé plus haut, pour ne préſenter à l'eſprit, que des vérités abſolues qui ſont fondées ſur la nature même des nombres. Mais en étendant ainſi ſes combinaiſons, l'Algèbre ne ceſſe point d'être une vraie Arithmétique, & par conſéquent bornée aux nombres ou à la quantité diſcrète. C'eſt pourquoi ceux qui ont voulu l'étendre juſqu'à la quantité continue, & qui prétendent qu'elle renferme dans ſon objet l'Arithmétique ordinaire & la Géométrie, ſe ſont fait une idée fauſſe de cette Science. Cette erreur vient ſans doute de ce qu'on a vu que par ſon ſecours on démontroit des vérités qui appartiennent à la Géométrie. Mais comme ces vérités n'expriment que des rapports de grandeur entre des lignes ou d'autres quantités Géométriques, repréſentées par des nombres, ou bien des rapports de ſituation, tels que les ſignes + ou — peuvent les indiquer, non-ſeulement l'Algèbre, mais même l'Arithmétique commune peut établir ces vérités. Il faut donc dire ou que ni l'une ni l'autre ne s'étendent à la Géométrie, ou que toutes deux s'y étendent également, ce qui ſeroit abſurde. Ainſi l'Algèbre ne pouvant être regardée que comme une extenſion de l'Arithmétique, qui lui fournit la plupart de ſes principes, ce ſeroit dépayſer, pour ainſi dire, chacune de ces ſciences, que de les ſéparer l'une de l'autre par la Géométrie. D'ailleurs on ſe priveroit gratuitement des ſecours que l'Algèbre préſente pour démontrer pluſieurs vérités d'Arithmétique & de Géométrie. La nature de ces Sciences

fixe

fixe donc l'ordre dans lequel on doit les présenter dans les Élémens, & prouve que ce n'est pas sans raison que nous avons établi en Arithmétique certains principes qui sont nécessaires à l'Algèbre, & que nous avons renvoyé à l'Algèbre des méthodes qui appartiennent à l'Arithmétique. L'affinité de ces deux Sciences permet cette transposition, & la généralité des opérations d'Algèbre la rend souvent nécessaire.

XX.

Définition générale des puissances.

La définition générale des puissances que nous avons donnée au n°. 124, est le premier endroit de nos Élémens d'Algèbre qui demande quelque éclaircissement. Il nous semble en effet, que cette définition ne sauroit être exacte si l'on n'en peut déduire la vraie notion des exposans, leurs principales propriétés, & la preuve directe que non-seulement un nombre quelconque, mais même zéro, peut servir d'exposant à une quantité. Or, si l'on se contente de dire, avec la plupart des Auteurs, qu'une puissance est le produit d'une quantité multipliée un certain nombre de fois par elle-même, cette notion ne menera jamais à admettre la possibilité de l'exposant zéro, moins encore aux exposans négatifs ou à leurs diverses propriétés. On voit au contraire que tout cela s'ensuit naturellement de la définition que nous avons donnée, & qu'ainsi ce n'est pas sans raison que nous l'avons préférée à toute autre. L'idée de faire entrer l'unité dans la définition des puissances nous paroît assez remarquable pour dire ici que M. Privat de Moliere est le premier qui l'ait employée, en définissant la première puissance d'un nombre *le produit de l'unité par ce nombre*. Mais outre que cet Auteur ne l'a point étendue aux

autres puiſſances, & qu'ainſi il n'a point donné une définition générale, il ne s'en eſt ſervi enſuite pour aucune propriété des expoſans, & cette importante notion n'eſt chez lui qu'imparfaite ou ſtérile.

XXI.

Manière nouvelle de réduire toutes les imaginaires à la forme de celles du ſecond degré.

APRE's les puiſſances il nous reſte à parler de la réduction des racines imaginaires à la forme du ſecond degré. Tout le monde ſait que M. d'Alembert eſt le premier qui ait prouvé la poſſibilité de cette réduction, & qu'il l'a même étendue aux imaginaires *exponentielles*, ou bien à celles qui ont d'autres imaginaires pour expoſans. Mais comme cette vérité appartient à l'Algèbre ordinaire, & que d'ailleurs d'autres vérités d'Analyſe en dépendent, les Géomètres ont dû chercher à l'établir par une méthode différente de celle de Mr. d'Alembert, qui eſt toute fondée ſur le calcul intégral. M. de Foncenex, de l'Académie de Turin, & Mr. l'Abbé Boſſut, de l'Académie des Sciences de Paris, ſe ſont occupés de cette réduction; mais ſoit parce qu'alors l'ouvrage du premier de ces Géomètres nous étoit inconnu, ſoit parce que la méthode du ſecond n'eſt prouvée que par induction, nous nous ſommes livrés à cette recherche. La méthode que nous donnons ici, outre l'avantage de montrer une route nouvelle, préſente quelques propriétés des imaginaires qu'on ne connoiſſoit pas encore; & quoique toujours aſſez aiſée pour n'être pas au-deſſus des Élémens, elle mène par un procédé ſimple à la réduction des imaginaires exponentielles, avantage

qu'on ne trouve point dans les méthodes de ces Géomètres. Nous n'avons ſupprimé la preuve de cette réduction que parce qu'elle eſt de peu d'utilité dans les Élémens, & qu'elle ſuppoſe quelque propriété des logarithmes, qui ne ſauroit être démontrée avant d'arriver au Chapitre où nous traitons des imaginaires; mais elle ſe trouvera conſignée dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouſe pour l'année 1777.

XXII.

Éclairciſſemens ſur la définition de la raiſon.

En ſuivant l'ordre des matières traitées dans ces Élémens, & qui demandent quelque diſcuſſion, nous devons parler ici des Raiſons. C'eſt un point important ſur lequel nous avons cru devoir pour une plus grande exactitude, nous écarter des idées reçues dans la plupart des Élémens modernes. Avant d'en venir à ces changemens, cherchons d'abord à nous former une notion exacte de ce qu'on doit entendre en Mathématiques par *Raiſon*.

Une des principales facultés de notre ame, c'eſt d'avoir pluſieurs idées à la fois, de pouvoir les rapprocher l'une de l'autre par une *juxta-poſition* purement intellectuelle qu'on appelle *comparaiſon*, & de cette comparaiſon de deux idées d'en déduire une troiſième, qui nous repréſente l'état ou la façon d'être de chacune des idées comparées relativement à l'autre. Cette troiſième idée, qui naît de la comparaiſon de deux autres, s'appelle un *rapport*, & celles que nous comparons enſemble pour obtenir ce rapport, ſont *les térmes de la comparaiſon*. L'innombrable multitude d'objets que nous pouvons comparer enſemble, les différentes façons de

les envisager, les rapports divers que nous en pouvons déduire, n'ont d'autres bornes que celles de l'esprit humain, & ont donné naissance à ce que nous appellons science, vérité, opinion, &c. Ainsi l'idée du rapport en général est très-étendue, & renferme les résultats de toutes les comparaisons que notre esprit peut établir entre des êtres quelconques, soit physiques, soit métaphysiques, soit moraux. Revenons aux rapports des quantités, qui seuls font l'objet de la Science que nous traitons.

Tandis que nous considérons les quantités en général, ou bien que nous les envisageons simplement comme des êtres qui contiennent une multitude déterminée de parties, nous n'en pouvons déduire que des rapports fondés sur la comparaison mutuelle de cette multitude de parties; & parce que ceux-là nous donnent la notion relative de *grand* & de *petit*, & par conséquent celle de *grandeur*, nous les avons appellés *rapports de grandeur*. Mais sitôt que nous comparons ensemble des quantités particulières ou revêtues de certaines qualités, nous établissons des rapports dépendans de ces qualités. Ainsi, en comparant ensemble deux portions d'étendue, par exemple, deux lignes droites, cette comparaison fournit à l'esprit, non-seulement des rapports fondés sur leur grandeur, mais encore sur leur situation respective; & ceux-ci, nous les exprimons par les termes de parallélisme, d'obliquité, de concurrence, d'angle, &c. Ce sont ces rapports que la Géométrie seule peut faire connoître, & auxquels on ne peut jamais parvenir par le calcul. D'après cela on voit pourquoi nous avons défini les raisons, *le rapport de*

grandeur qui se trouve entre deux quantités, dont l'une peut être partie de l'autre. Et quoique dans le langage ordinaire on confonde souvent l'idée de raison avec celle de rapport, il n'en est pas moins vrai que celle ci est infiniment plus étendue que la première, qu'elle est le genre, tandis que l'autre n'est que l'espèce, & qu'ainsi on a été fondé à la faire entrer dans la définition de la raison.

XXIII.

D'APRÈS cette définition, il se présente ici deux observations essentielles; la première, qu'on ne peut établir une raison entre des quantités hétérogènes, parce que notre esprit ne pouvant considérer l'une comme partie de l'autre, ne sauroit former aucune comparaison entr'elles : la seconde, qu'entre deux quantités égales *a* & *b*, il n'existe, à proprement parler, aucune raison, parce que n'y ayant point de motif suffisant pour affirmer que *a* est partie de *b* plutôt que *b* partie de *a*, il n'y a entre ces êtres ni grand ni petit, ni par conséquent grandeur ou rapport de grandeur, lequel seul peut donner la notion de la raison. D'ailleurs le rapport d'égalité est évidemment la limite qui sépare les raisons de majorité d'avec celles de minorité, c'est-à-dire, qu'il est le passage des raisons positives aux négatives. Or, cette limite, ou bien ce passage du positif au négatif dans une classe quelconque de quantités opposées, ne sauroit jamais être une quantité; par conséquent ici il ne peut point former une raison.

Conséquences à déduire de cette définition.

De cette même définition de la raison on conclura encore que ce qu'on appelle communément raison Arith-

métique, & qui consiste dans la différence qu'il y a entre deux quantités, ne sauroit être appellé une raison proprement dite. En effet, cette raison Arithmétique ne donne aucune idée du rapport de grandeur qu'il y a entre deux quantités; car autrement il faudroit dire que puisque la raison Arithmétique de 100 à 99 est égale à celle de 2 à 1, 100 est aussi grand par rapport à 99, que 2 l'est par rapport à un, ce qui est absurde. Aussi les anciens n'ont jamais donné le nom de raison à ces différences, & si les modernes en ont usé autrement, ce n'est que par un étrange abus des mots qu'il seroit bon de changer.

XXIV.

Les quotients ne mesurent pas les raisons.

LES raisons étant de vraies quantités, il a fallu, pour se faire une idée de leur valeur, chercher à les mesurer. Or, cette mesure, presque tous les Auteurs élémentaires l'ont prise du quotient que donne un des termes de la raison divisé par l'autre. Nous croyons au contraire, avec de grands Géomètres, que cette méthode doit être rejetée pour les raisons suivantes. 1°. Dans le fond elle ne fait que changer une raison en une autre qui lui est égale, & non point la mesurer. En effet, quand on dit, par exemple, que la raison de 18 : 3 vaut 6, on ne dit autre chose si ce n'est que la raison de 18 : 3 vaut celle de 6 : 1; puisque d'après leurs propres principes, la raison du dividende au diviseur vaut celle du quotient à l'unité. Or, réduire ainsi une raison à une expression plus simple, ce n'est pas encore l'avoir mesurée. 2°. Pour pouvoir ainsi mesurer les raisons, il faut ad-

mettre la définition ordinaire de la diviſion, par laquelle on regarde le diviſeur comme un nombre contenu dans le dividende ; il faut donc adopter toutes les inexactitudes qui s'enſuivent de cette manière d'enviſager l'opération, & deſquelles nous avons fait le détail ci-deſſus. 3°. En ſuivant cette méthode des quotients, il faut néceſſairement prendre les fractions pour des raiſons, ainſi qu'on le fait communément : & comme dans toute raiſon les deux quantités comparées ſont toujours de même eſpèce ; il faudra auſſi que dans toute fraction le numérateur & le dénominateur ſoient deux nombres d'eſpèce ſemblable. Dès lors le dénominateur ne ſera donc plus un nombre abſtrait, qui exprime en combien de parties égales on a diviſé l'unité, & le numérateur ne ſera plus indifféremment ou abſtrait ou concret, ſuivant que l'unité qu'on diviſe eſt elle-même abſtraite ou concrète, ce qui renverſe l'exacte notion qu'on doit ſe faire des fractions. 4°. En confondant les raiſons avec les fractions, il faut qu'on prenne la ſomme des unes ainſi qu'on prend celle des autres, c'eſt-à-dire, en les réduiſant au même dénominateur, & prenant la ſomme des numérateurs ; par conſéquent la ſomme de ces raiſons continues 2 : 4, 4 : 8, 8 : 16, vaudra celle de ces trois fractions $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ou bien $\frac{3}{2}$. Cependant nous avons inconteſtablement prouvé (& en cela nous nous accordons avec des Géomètres du premier rang, qui ont traité cette matière) que la ſomme de ces raiſons eſt la raiſon de 2 : 16, bien différente de celle de 3 : 2, qui devroit venir d'après la méthode des quotients.

XXV.

Supplément à la démonstration de la régle donnée pour additionner les raisons.

POUR détruire la régle que nous avons donnée sur l'addition des raisons, il faut dire, ou bien que plusieurs raisons ne peuvent point former des quantités continues, ou bien que dans ces sortes de quantités la somme n'est point représentée par une autre quantité de la même espèce, qui s'étend depuis l'origine de la première jusqu'au terme de la dernière. Or, l'une de ces vérités est fondée sur la notion même du continu, telle que nous l'avons donnée plus haut (VIII) : & pour prouver l'autre, il suffit de faire les observations suivantes.

1°. Plusieurs quantités continues quelconques peuvent être représentées par autant de lignes droites, pourvu que ces lignes gardent entr'elles les mêmes raisons ou rapports de grandeur qui sont entre ces quantités.

2°. La manière de prendre la somme de ces quantités continues, sera la même que celle de trouver la somme des lignes droites qui les représentent. Or, ces lignes ont chacune deux limites qui sont les deux points où elles se terminent ; & comme on peut concevoir que chacune a été formée par des accroissemens successifs en allant d'une limite à l'autre, on peut dire que *l'origine* de la ligne est la limite d'où partent ces accroissemens, & que l'autre limite où il se terminent en est le *terme*. Cela posé, pour prendre la somme de ces lignes droites, il faudra, 1°. Que tous leurs points soient disposés en ligne droite, puisqu'autrement leur somme ne formeroit pas une ligne de l'espèce de celles qu'on veut sommer, ce qui seroit absurde. Il faudra,

faudra, 2°. Que le terme de la première de ces lignes se confonde avec l'origine de la seconde, le terme de la seconde avec l'origine de la troisieme, & ainsi de suite : car si cela n'étoit pas ainsi, ou bien cette somme ne formeroit pas une quantité continue, & alors elle ne seroit pas homogène avec les quantités qu'on veut sommer, ce qui répugne : ou bien les parties prises ensemble pourroient surpasser le tout, ce qui répugne encore. Ainsi la somme de ces lignes droites ne peut être autre chose qu'une seule ligne droite tellement formée qu'une de ses extrêmités se confonde avec l'origine de la première des lignes qu'on veut sommer, & que l'autre extrêmité tombe sur le terme de la dernière de ces lignes. On doit donc dire également que la somme de plusieurs quantités continues, est elle-même une quantité continue de l'espèce de celles qu'on veut sommer, laquelle s'étend depuis l'origine de la première de ces quantités jusqu'au terme de la dernière. C'est là ce qui justifie la manière dont nous avons pris la somme des raisons. Aucun des Géomètres qui ont voulu les mesurer par des quotients, n'a entrepris de les sommer, bien qu'ils aient prétendu les multiplier les unes par les autres, comme si toute multiplication n'étoit pas une addition réelle, & que cette opération ne demandât pas pour multiplicateur un nombre abstrait ou absolu, & non point une raison.

XXVI.

Avantages de notre manière d'envisager les raisons.

AU lieu de tous ces inconvenients qu'entraînent les notions ordinaires, la méthode que nous avons suivie

apprend à faire ſubir aux raiſons tous les changemens qu'on fait ſubir aux autres quantités. D'ailleurs les dénominations de raiſon doublée, triplée, &c. ne portent plus à faux. N'étoit-ce pas en effet une idée étrange, de dire qu'une raiſon *doublée* d'une autre n'eſt pas préciſément celle qui vaut le double de celle-là; mais bien celle qui réſulte de la première multipliée une fois par elle-même? N'étoit-il pas également étrange d'admettre, ainſi que font certains Auteurs, une diſtinction entre raiſon *double* & raiſon *doublée*, comme ſi chacune de ces dénominations, ſuivant l'acception des mots, n'exprimoit pas également l'état d'une quantité en tant qu'elle eſt une fois plus grande qu'une autre. Mille inconvéniens s'enſuivent donc de l'idée de meſurer les raiſons par des quotients, au lieu que toutes ces choſes s'arrangent d'elles-mêmes en les meſurant par une raiſon fixe qu'on prend pour unité. Dès lors on ſe conforme à la vraie notion de meſure, que nous avons donnée plus haut: les définitions de la raiſon compoſée, ainſi que celles des raiſons doublées, triplées, ſous-doublées, ſous-triplées, ſe préſentent d'elles-mêmes: & ſur-tout on prouve par là l'immédiate relation qui doit ſe trouver entre les raiſons & les logarithmes, & de laquelle découlent des idées lumineuſes ſur la théorie de ces nombres.

XXVII.

Notion des logarithmes.

POUR ſe convaincre de l'affinité qui règne entre les logarithmes & les raiſons, il ſuffiroit preſque d'aſſigner l'étymologie du mot *logarithme*, qui ne peut ſe rendre littéralement que par *raiſon des nombres* ou *nombre des rai-*

ſons. Cela prouve que dans l'eſprit des inventeurs la notion des logarithmes avoit un rapport immédiat avec celle des raiſons ; & c'eſt pourquoi nous diſons que ces nombres ſont les expoſants des valeurs des raiſons. C'eſt là la manière dont les enviſageoit le célèbre Cottes, qui a dit dans ſon traité *de Harmonia menſurarum*, Chap. 3, *logarithmi ſunt rationum menſuræ numerales.* Saunderſon après lui, les a conſidérés de même, quoiqu'à la vérité dans pluſieurs endroits relatifs à cette importante matière, il ſe ſoit laiſſé entraîner par l'uſage. Mais ce qui prouve mieux que toutes ces autorités ; quelque reſpectables qu'elles ſoient, combien cette définition des logarithmes eſt exacte, c'eſt que toutes les autres s'en peuvent déduire par des conſéquences évidentes, & ſur-tout celle que donne M. Euler, lorſqu'il dit que les logarithmes des nombres ne ſont autre choſe que les *expoſans des puiſſances auxquelles il faut élever un nombre quelconque pour former tous les autres.* Or, toute propriété qu'on peut déduire d'une autre a beſoin de preuve, & ne doit pas par conſéquent être admiſe dans une définition. Quant à ceux qui diſent que les termes d'une progreſſion arithmétique correſpondants à ceux d'une progreſſion géométrique, ſont les logarithmes de ceux-ci, nous ne leurs diſputerons rien, ſi par-là ils entendent ſe borner à une pure définition nominale ; mais s'ils prétendent tirer de-là une définition réelle de ces nombres, nous pouvons leur faire la même objection que nous faiſons à M. Euler. Nous ajouterons encore qu'il y auroit dans cette définition une erreur plus importante, ſi, à l'exemple de certains Géomètres ils ſe croyoient en droit de prendre

une progreſſion arithmétique quelconque ; car alors il pourroit s'enſuivre que le logarithme de l'unité ne fut pas 0, ce qui renverſeroit tous les principes.

XXVIII.

Avantages que procure la théorie des permutations.

APRÉS avoir parlé des logarithmes, il nous reſte à dire un mot ſur les permutations & les combinaiſons. Le principal motif qui nous a engagés à traiter cette queſtion dans nos Élémens, c'eſt que ſans elle on ne ſauroit démontrer à la rigueur la loi des coéficients dans la formule générale des puiſſances d'un binome. Cette loi des coéficients une fois connue, nous nous en ſommes enſuite ſervis pour prouver l'importante vérité d'analyſe, que dans une équation la ſomme des racines forme le coéficient du ſecond terme, que la ſomme de leurs produits deux à deux forme le coéficient du troiſieme, & ainſi de ſuite. Nous avons en cela renverſé l'ordre que ſuivent certains Auteurs, qui commencent par prouver cette vérité d'analyſe par une ſimple induction tirée de la manière dont ſe forment pluſieurs équations compoſées, & qui s'en ſervent enſuite pour établir la loi des coéficiens dans la formule des puiſſances ; mais outre qu'une preuve par induction ne doit être donnée qu'au défaut de toute autre, on tombe alors dans une eſpèce de cercle vicieux, en voulant prouver la vérité d'une induction par une autre induction également incertaine. Nous avons auſſi déduit la loi des coéficients dans la formule des puiſſances de la théorie des permutations, plutôt que de celles des combinaiſons, parce que cette voie nous a paru plus naturelle. Rien ne le confirme mieux

que la méthode qu'elle nous fournit d'élever un polinome quelconque à une puiſſance quelconque, ſans paſſer par l'immenſe détail des multiplications qu'il faut faire autrement. Quoique aucun des Auteurs qui nous ſont connus, n'ait donné cette méthode, elle eſt ſi ſimple, que nous ne croyons pas qu'elle ait pu échapper à tous ceux qui ont traité cette matière.

XXIX.

L'analyſe : elle dû être placée a la fin de l'Algèbre.

Nous voici enfin parvenus à l'Analyſe que nous avons cru devoir mettre à la fin de l'Algèbre, malgré l'uſage contraire de certains Auteurs. Deux raiſons principales nous ont déterminés à placer ainſi cette partie eſſentielle du calcul algébrique. La première : que la plupart des queſtions qu'on cherche à réſoudre par l'Analyſe ne peuvent pas même être miſes en équation, ſans recourir aux propriétés des proportions & des progreſſions, & qu'il faut par conſéquent connoître ces propriétés avant d'en venir là : la ſeconde, c'eſt que pour expoſer quelques méthodes d'analyſe, il faut auparavant connoître cette importante propriéte des équations, que le coéficient du ſecond terme eſt la ſomme des racines, celui du troiſième la ſomme de leurs produits priſes deux à deux, celui du quatrième la ſomme de leurs produits priſes trois à trois, &c. Or, comme nous l'avons déjà remarqué, cette vérité ne peut être démontrée rigoureuſement qu'en employant la loi des coéficients dans les diverſes puiſſances d'un binome, laquelle loi, pour être établie, ſuppoſe la théorie des permutations. Voilà pourquoi l'Analyſe n'a été traitée ici qu'après avoir parlé de ces différentes queſtions.

XXX.

Raisons d'abréger l'analyse.

BIEN des gens trouveront que cette partie immense du calcul algébrique, plus étendue elle seule que toutes les autres parties ensemble, a été traitée par nous d'une manière trop abrégée. Mais le but de cet ouvrage ne nous permettoit pas de l'étendre d'avantage. D'ailleurs on aime mieux essuyer ce reproche que celui qu'on peut faire à la plupart des Auteurs élémentaires, de n'avoir parlé des plus grandes questions d'Analyse, que pour les présenter avec l'inexactitude la plus frappante. Je n'en citerai d'autre exemple que celui de la fameuse règle de Descartes, qui par les repétitions & les changemens de signes, sert à discerner le nombre des racines positives ou négatives d'une équation. Or, non-seulement cette règle n'est point démontrée dans les livres élémentaires, quoiqu'elle se trouve dans presque tous, mais même aucun ne fait observer qu'elle devient inutile, si l'on ne sait déjà connoître, sans solution d'équations, si la proposée contient ou ne contient pas des racines imaginaires. M. l'Abbé de Gua, de l'Académie des Sciences de Paris, est le premier qui ait dit tout ce qu'il y avoit à savoir sur cette importante matière. Il a d'abord trouvé une méthode générale pour découvrir dans une équation, sans la résoudre, si elle contient des racines imaginaires, ou non : puis il a démontré le prémier la belle règle de Descartes sur laquelle certains savans avoient élevé des doutes autrefois (1), & dont Wolf

(1) Voyez le premier Mémoire de M. l'Abbé de Gua, dans le Recueil de l'Académie pour l'année 1741.

disoit : *theorema quod Harriotus per inductionem invenit, nemo hactenus demonstrare potuit* (1). Cependant, quelque belle que soit la démonstration de M. l'Abbé de Gua, on conviendra qu'elle auroit été trop embarrassante pour les commençans dans un ouvrage comme celui-ci : c'est pour cela que nous n'avons parlé ni de la règle de Descartes, ni de la méthode de découvrir les racines imaginaires.

XXXI.

Observations sur quelques endroits de l'analyse.

DANS le Chapitre où nous exposons quelques propriétés des équations composées, nous nous sommes attachés de préférence à une méthode assez récente par laquelle on trouve quel est celui des diviseurs du dernier terme qui peut servir de racine à une équation. Cette méthode quoique peu connue est cependant plus simple que celle de Newton, qu'ont employé la plupart des Auteurs. La manière dont nous prouvons que les racines imaginaires doivent être en nombre pair, & que deux à deux elles ne peuvent différer que par le signe qui précède l'imaginaire, n'est qu'une conséquence de ce que nous avons dit ailleurs sur la réduction de toutes les imaginaires à la forme de celles du second degré. On ne peut même établir cette importante propriété des équations que par ce moyen ; ce qui prouve combien il étoit nécessaire de faire voir, à l'aide de l'Algèbre ordinaire, que les imaginaires de tous les degrés peuvent

(1) Voy. Wolf. Math. univ. tom. 1. p. 325. M. l'Abbé de Gua fait voir que cette découverte appartient à Descartes, & qu'ainsi Wolf & Saunderson, qui en ont parlé d'après Wallis, se sont trompés en l'attribuant à Harriot, Géomètre Anglois.

ſe repréſenter par celles du ſecond. Dans le peu que nous avons dit ſur les équations du troiſieme degré, nous avons tâché de parvenir à l'expreſſion générale des trois racines d'une manière ſimple & rigoureuſe. Nous croyons avoir évité ſur ce point le juſte reproche que M. d'Alembert fait à la méthode ordinaire, & qu'on peut voir à l'art. *Equation* du Dictionnaire Encyclopédique. Il nous a paru que notre manière de prouver que les trois racines d'une équation ſont réelles dans le cas irréductible, eſt plus ſimple qu'on ne la donne ailleurs, & qu'elle eſt fondée ſur la nature même des imaginaires qui entrent alors dans les premières expreſſions des racines. Quant aux équations du quatrième degré, nous nous en ſommes tenus ſtrictement à ce qu'en a dit M. Euler, omettant même certains détails, & nous permettant ſeulement d'éclaircir quelques endroits qui auroient pu embarraſſer les commençans. Cette méthode de ſolution eſt trop belle pour ne pas trouver place dans les livres élémentaires; & nous regardons comme une diſtinction honorable pour celui-ci, d'être le premier qui ait été enrichi de la découverte de ce grand Géomètre. Du reſte, il a fallu ſupprimer des exemples & reſſerrer dans deux Chapitres tout ce qu'on avoit à dire ſur les équations du troiſième & du quatrième degré, afin de ne pas trop groſſir ce volume, qui, n'ayant d'autre objet que de ſervir d'introduction aux élémens des ſciences phyſico-mathématiques, auroit abſolument pu omettre comme ſuperflue toute la partie d'Analyſe qui va au-delà des équations du ſecond degré.

XXXII.

XXXII.

Géométrie.

La notion que nous avons de l'étendue dont les diverses propriétés font l'objet de la Géométrie, est si simple & si distincte, qu'il nous paroît inutile de chercher à l'éclaircir par des définitions. Laissant donc à part tout ce que la Métaphysique pourroit nous apprendre à cet égard, ne nous occupant pas même de chercher si l'étendue existe ou si elle n'existe pas, il nous suffit de savoir que telle que nous la concevons, elle se présente à notre esprit comme une quantité continue & susceptible de prendre une figure ou de clorre un espace. D'après cette notion, nous pouvons comparer ensemble les diverses parties de l'étendue, & quant à leur situation, & quant à leur grandeur mutuelle. De ces comparaisons notre esprit déduit ensuite une multitude de rapports, que nous appellons des propriétés de l'étendue, & qui forment toutes les vérités que la Géométrie enseigne. Quelquefois le calcul suffit pour trouver ces vérités, & cela arrive lorsqu'ayant exprimé certaines portions d'étendue par des nombres, on conclut, pour ces quantités, les mêmes rapports que le calcul a fait découvrir entre les nombres qui les représentent. Mais quoique cette manière de démontrer les vérités géométriques soit aussi sûre & souvent plus abrégée que la méthode synthétique des anciens, nous en avons usé aussi rarement qu'il nous a été possible; persuadés que la marche de la Synthèse est plus propre à éclairer l'esprit & à former le raisonne-

Notion de l'étendue. L'analyse doit être exclue des Élémens de Géométrie.

ment, qu'une Analyse obscure, qui, faisant, pour ainsi dire, raisonner mécaniquement, arrive au but sans s'en appercevoir, & sans éclairer la route qui y mène.

XXXIII.

On a souvent employé la réduction à l'absurde & la superposition.

Il y a deux méthodes dont nous avons usé plus fréquemment qu'on ne le fait aujourd'hui dans les Elémens de Géométrie : l'une est la *Réduction à l'absurde*, & l'autre la *Superposition*. La méthode de raisonner par réduction à l'absurde, consiste à faire voir qu'une chose est d'une certaine manière, en prouvant l'impossibilité qu'il y a qu'elle soit autrement. Malgré le reproche que certains modernes ont fait à cette méthode de ne pas éclairer l'esprit en lui montrant la vérité, nous l'avons souvent employée, même dans des cas où il étoit aisé de trouver une démonstration directe, parce qu'elle formoit une preuve plus simple & plus abrégée. C'est ainsi qu'en ont usé les anciens, dont l'exactitude & la rigueur de raisonnement n'a été contestée par personne. D'ailleurs, comme on ne sauroit employer d'autre méthode pour prouver que des quantités incommensurables sont entr'elles dans un rapport déterminé, & que ce cas se présente souvent en Géométrie, les commençans ne sauroient s'accoutumer de trop bonne heure à cette manière de raisonner.

XXXIV.

Notion métaphysique des limites d'une étendue.

Quant à la Superposition, il nous a paru que de tous les moyens de prouver que deux portions d'étendue sont égales, il n'y en a pas de plus simple que celui

qu'offre cette méthode, qui consiste à faire voir que chacune de ces étendues placées sur l'autre, la couvre parfaitement, ou plutôt la pénètre dans toutes ses parties. Mais comme pour prouver cette mutuelle pénétration, il faut établir la *Congruence* de toutes les limites qui terminent ces portions d'étendue, il est nécessaire de prendre ici une idée exacte de ces *Limites*. Pour cela, il faut imaginer que deux portions d'étendue de la même espèce, par exemple, deux lignes, deux surfaces, &c. se rapprochent assez pour former par leur *juxta-position* un tout continu, sans qu'aucune partie de l'une se confonde avec l'autre : telles seroient, par exemple, deux lignes droites qui ne se toucheroient que par une de leurs extrêmités, ou deux surfaces triangulaires qui n'auroient rien de commun excepté leurs bases. Cela posé, que doit-on entendre en Géométrie par les limites d'une étendue déterminée quelconque ? C'est ce que cette étendue peut avoir de commun avec une autre de la même espèce qu'elle, sans cesser d'être tout-à-fait extérieure à celle-ci. Par là on voit qu'une ligne ne pouvant avoir que son extrêmité commune avec une autre, en lui restant extérieure, cette extrêmité ou ce point en est la limite : par la même raison, une surface est limitée par une ligne, & un solide l'est par une surface. On voit aussi que le point n'a pas de limites, ou si l'on veut encore, qu'il se limite lui-même en tout sens, puisqu'il ne peut toucher un autre point, sans se confondre avec lui. Il en est de même d'une ligne considérée quant à sa largeur, & d'une surface par rapport à son épaisseur.

XXXV.

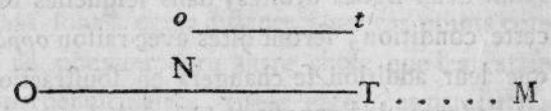
Mauvaises définitions de la ligne droite.

CE n'eſt pas ſans raiſon que les Géomètres cherchent encore une définition exacte de la ligne droite. Celle d'Archimède que nous avons adoptée N°. 6, ſuppoſe que la propriété d'être le plus court eſpace entre deux points, eſt une notion primitive de cette ligne, tandis que ſi l'on en avoit une autre définition, cette propriété ſe préſenteroit peut-être comme une conſéquence de la vraie définition. Mais ce ſoupçon d'inexactitude eſt peu de choſe en comparaiſon des défauts réels qui ſe trouvent dans les autres définitions qu'on a données de cette ligne. Les uns ont dit que c'étoit celle qui a tous ſes points dans la même direction, ce qui dans le fond ſignifie qu'elle a tous ſes points en ligne droite, ou bien qu'elle eſt une ligne droite : les autres ont dit que c'eſt la trace d'un point qui ſe meut toujours dans la même direction ; mais outre le défaut de la définition précédente, celle-ci introduit le mouvement dans les premières notions d'une ſcience qui ne doit s'occuper que de l'étendue. Certains ont encore défini la ligne droite en diſant que c'eſt c'elle dont une extrêmité peut jeter ſon ombre ſur la ligne entière ; mais qui ne voit que la propriété de former une ombre, appartient ſeulement à une étendue matérielle, & non point à des êtres géométriques, qui n'exiſtent que dans notre entendement ? D'ailleurs n'eſt-ce pas la rectitude de l'ombre qu'il faudroit déduire de la notion de la ligne droite, plutôt que celle-ci de la première ? Enfin Wolf définit la ligne droite, *celle dont une partie quelconque eſt ſemblable au*

tout. Mais quelqu'exacte que ſoit cette définition d'après les principes Ontologiques de l'Auteur, il ſuffit qu'elle ſuppoſe la notion plus métaphyſique encore de la ſimilitude, pour paroître plus obſcure que la choſe qu'on veut définir, & pour ne pouvoir être employée dès l'entrée de la Géométrie.

XXXVI.

Nous en tenant donc à la définition qu'Archimède a donnée de la ligne droite, cherchons ici ce qu'il faut entendre par lignes oppoſées. Pour y parvenir, nous devons obſerver, 1°. que la ſomme ou la différence de deux lignes droites, ne peut être qu'une ligne droite, d'après l'idée qu'on doit ſe former (§. IV.) de l'addition & de la ſouſtraction : 2°. qu'une ligne, ainſi que toute quantité continue peut être ſuppoſée parvenue de zéro à une valeur déterminée qu'elle a toujours, par des accroiſſemens ſucceſſifs, qui ont commencé à une de ſes extrémités, & qui ont fini à l'autre (l'extrêmité où commencent ces accroiſſemens ſera appellée l'*origine* de la ligne, & celle où ils finiſſent en ſera le *terme*), ainſi dans *o t*, l'extrêmité *o* ſera l'origine, & *t* ſera le terme : Définition des lignes oppoſées.



3°. pour avoir la ſomme de deux lignes O T, *o t*, il faut poſer l'origine *o* de la ſeconde ſur le terme T de la première, & ayant placé le point *t* dans la di-

rection de O T, afin que des deux lignes réunies il en résulte une ligne droite, la somme s'étendra depuis l'origine O de la première ligne jusqu'au terme *t* de la seconde. Or, ce point *t* peut se placer dans la direction de O T de deux manières différentes, ou bien en tombant au-delà de T, par exemple, en M, ou bien entre T & O, par ex. en N. Dans le premier cas, la somme sera $OM = OT + ot$, & dans le second elle sera $ON = OT - ot$; ou bien dans ce second cas, l'addition de ces deux lignes se changera en soustraction. La seule différence qu'il y ait donc entre ces deux cas, c'est que dans le premier les termes de chaque ligne, savoir, T & *t*, sont situés dans le même sens par rapport à leurs origines O & *o*, c'est-à-dire, à la droite de ces origines : & dans le second, les termes sont situés en sens contraire relativement à leur origine, savoir, l'un à la droite, l'autre à la gauche de son origine. Si ces deux lignes sont représentées par les deux nombres a & b, il faudra donc, pour exprimer leur somme, écrire dans le premier cas $a + b$, & dans le second, $a - b$; sans quoi la formule arithmétique n'exprimeroit pas juste dans ce second cas la condition supposée que ces deux lignes ont leurs termes situés en sens contraire par rapport à leurs origines. Ainsi deux lignes droites, dans lesquelles on supposera cette condition, seront dites avec raison *opposées*, parce que leur addition se changera en soustraction, ce qui est l'essence de l'opposition entre les quantités. Pareillement deux nombres opposés ne pourront être représentés par deux lignes droites, qu'autant qu'on supposera dans ces lignes que le terme de chacune est situé

en ſens contraire par rapport à ſon origine. Voilà pourquoi le calcul faiſant trouver dans une courbe, par exemple, dans le cercle, des ordonnées poſitives & négatives, on les exprime géométriquement par des perpendiculaires élevées en ſens contraires ſur le même diamètre, parce que ces perpendiculaires ſont cenſées avoir leur origine dans le diamètre, & par conſéquent leurs termes en ſens contraire de leurs origines.

XXXVII.

Obſervations ſur les lignes parallèles.

NOUS avons défini les lignes parallèles en diſant que ce ſont des lignes qui, poſées ſur le même plan, ne ſe rencontrent jamais à quelque diſtance qu'on les prolonge. Mais cette définition ne ſeroit pas exacte, ſi l'on n'avoit prouvé auparavant la poſſibilité d'une pareille ſituation. C'eſt pourquoi nous avons d'abord cherché toutes les manières dont une droite peut être ſituée par rapport à une autre ſur le même plan, & nous avons fait voir qu'il y en a une, d'après laquelle ces droites ne ſe rencontrent ni ne peuvent ſe rencontrer. Avec ce préliminaire, la définition nous a paru plus exacte que ſi nous euſſions dit, comme la plupart des Auteurs Élémentaires, que deux droites ſont parallèles, lorſque leurs points correſpondans ſont à égale diſtance ; car ces points correſpondans ne pouvant être autre choſe que les extrêmités des perpendiculaires, tirées entre ces parallèles, leur définition revient à dire, que deux lignes ſont parallèles, lorſque les perpendiculaires menées entr'elles ſont toutes égales. Or, cette propriété pouvant & devant ſe prouver, il n'eſt pas permis de l'avancer ſans

preuve dans une définition, comme si c'étoit une notion primitive de la chose. Il y auroit bien des remarques à faire sur la manière ordinaire de prouver l'égalité des angles alternes ou correspondans, formés par une sécante & par des parallèles. Mais nous nous bornons à dire qu'ici, comme dans presque tous les cas, la marche d'Euclide nous a paru la plus sûre. A la vérité on lui a reproché d'avoir donné, comme un axiôme, une proposition qui semble avoir besoin de preuve, & que Clavius a cru devoir démontrer; aussi nous l'avons simplifiée, comme on peut le voir en comparant le treizième axiôme du premier livre d'Euclide, avec le N°. 37 de nos Élémens de Géométrie.

XXXVIII.

Diverses manières de définir l'angle rectiligne.

L'ORDRE des matières nous mène à parler ici de la définition de l'angle rectiligne, que M. d'Alembert appelle, avec raison, le *scandale* de la Géométrie. On sait en effet que malgré les diverses tournures qu'on a prises pour le définir, les Géomètres en cherchent encore une définition exacte. Les uns ont cru qu'il falloit faire entrer dans cette définition l'idée d'un espace indéfini, renfermé entre les côtés de l'angle; d'autres ont voulu borner cet espace par l'arc décrit du sommet comme centre. Mais il paroît que la notion de l'angle, ne présentant à l'esprit que la position de deux lignes qui se rencontrent sans se confondre; toute idée de surface est absolument étrangère à l'angle. D'ailleurs si l'on borne cette surface par un arc, c'est alors un secteur de cercle, & non point un angle; & si on ne la borne pas, cet espace croissant à proportion que les côtés sont prolongés,

il

il faudra dire aussi que l'angle croît alors, ce qui est démontré absurde. D'autres ont dit que l'angle rectiligne étoit le *tour* que fait une droite en s'écartant d'une autre, avec laquelle elle a un point commun. Cette définition a été sans doute imaginée pour prouver que l'arc de cercle est la mesure de l'angle; mais outre qu'une pareille idée explique mal dans quel sens l'arc mesure l'angle; cette définition a le défaut d'employer l'idée du mouvement, toujours étrangère à la Géométrie, & de présenter par ce *tour* une notion vague, qui peut désigner & l'espace parcouru par la ligne qui tourne, & le mouvement qui la fait tourner. D'ailleurs ce tour n'est pas la notion primitive de l'angle; il n'est qu'une des manières dont on peut concevoir sa formation; & l'idée de deux lignes immobiles qui se touchent sans se confondre, la représente aussi exactement. D'autres enfin ont dit que l'angle rectiligne est *l'ouverture*, *l'écart* de deux lignes droites; mais outre que cette ouverture, cet écart ne présentent encore que des idées très-vagues, on en pourroit déduire que le prolongement des côtés faisant croître l'ouverture ou l'écart des lignes, il fait croître aussi l'angle qu'elles forment.

Il nous paroît que la difficulté de bien définir l'angle rectiligne (& j'en dis autant de la ligne droite) vient de ce qu'il manque un terme pour exprimer quelque notion essentielle à l'angle. C'est pourquoi nous avons d'abord cherché à fixer l'idée qu'on doit attacher au mot d'*inclinaison*, qu'on confond souvent, & mal à propos avec celui d'*obliquité*. Il nous a paru qu'une courte explication de ce mot rendoit la définition d'Euclide pré-

férable à toutes les autres, & c'eſt pour cela que nous l'avons adoptée N°. 23 de nos Élémens de Géométrie.

XXXIX.

Obſervations ſur la meſure de l'angle.

LA manière de meſurer un angle demandoit encore quelques nouveaux éclairciſſemens ; car dire, ſans autre explication, qu'il eſt meſuré par un arc de cercle décrit du ſommet comme centre, c'eſt renverſer la notion des meſures, d'après laquelle nous avons fait voir (§. XVI.) qu'une quantité qui en meſure une autre doit être de même eſpèce que la quantité meſurée. Il a donc fallu remonter plus haut, en faiſant voir qu'à proprement parler un angle n'eſt meſuré que par un autre angle plus petit que lui, que celui-ci le ſera par un autre plus petit encore : de même que dans les longueurs une ligne eſt meſurée par la toiſe, la toiſe par le pied, le pied par le pouce. Mais comme (ainſi que nous l'avons prouvé par la ſuperpoſition) le rapport de l'angle meſuré à celui qui ſert de meſure, eſt le même que le rapport qui ſe trouve entre l'arc intercepté par les côtés du premier, & décrit de ſon ſommet, comme centre, & l'arc d'un égal rayon décrit du ſommet du ſecond, on peut dire que cet arc, par ſon rapport avec l'autre, exprime la valeur de l'angle, ou, ce qui eſt le même, ſon rapport avec celui qui ſert d'unité. Cet arc n'eſt donc à la rigueur que *l'expoſant* de la grandeur de l'angle, & non point ſa meſure, ainſi que le Logarithme d'un nombre eſt l'expoſant de la valeur de la raiſon qu'il y a entre ce nombre & l'unité, & non point la meſure de cette raiſon. Il nous paroît qu'en comparant ce que nous venons de dire ici ſur les arcs de cercle employés comme meſure

des angles, avec ce que nous avons dit ailleurs des Logarithmes, l'analogie entre ces arcs & les Logarithmes se présente assez clairement pour n'en devoir pas donner de nouvelles preuves.

X L.

Paralogisme ordinaire dans la théorie des lignes proportionnelles : manière de l'éviter.

TOUTES les fois qu'il s'agit de faire voir que deux surfaces ou deux solides sont dans le rapport de deux autres quantités, la plupart des Auteurs modernes se bornent à établir cette analogie pour le cas simple & facile où l'on suppose ces quantités commensurables entr'elles. Mais il faudroit que la preuve, pour être complette, s'étendît également aux cas où ces quantités seroient supposées incommensurables ; & on ne peut y parvenir d'une manière directe, qu'en adoptant la définition qu'Euclide a donnée de la proportion au commencement de son cinquième livre, ce qui entraîneroit des difficultés. Il a donc fallu que tous les Auteurs, qui sans ce secours ont voulu prouver cette analogie dans le cas de l'incommensurabilité, eussent recours à la réduction à l'absurde, ainsi que nous l'avons fait aux N°. 101, 206, &c. C'est pour avoir négligé de prouver que deux triangles ou deux parallélogrammes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, soit commensurables, soit incommensurables, que la plupart des Auteurs modernes ont laissé introduire un paralogisme frappant dans la théorie des lignes proportionnelles. Pour établir cette théorie ils supposent d'abord que de deux lignes concurrentes A H, *a h* (*fig.* 44), l'une, par exemple, A H, ayant été partagée en un certain nombre de parties égales, aux points D, E, F, G, l'on mène par ces points des

lignes paralleles à H *h*, lesquelles partageront A *h* en un même nombre de parties égales entr'elles ; & de là ils concluent avec raison que l'on a A F : F H :: A *f* : *f h*. Mais étendant ensuite cette conséquence trop loin, ils concluent qu'en général si deux lignes qui font un angle sont coupées par des parallèles, elles le sont en parties proportionnelles. Or, cette conclusion s'étend plus loin que le principe ; car n'ayant parlé jusques là que du cas où les segmens A F, F H, sont commensurables entr'eux, ou bien divisibles en parties égales, A D, D E, E F, &c. on ne peut rien conclure de là pour un nombre infini de cas où l'on supposeroit ces segmens A F, F H, incommensurables entr'eux. Pour éviter cet inconvénient, sans recourir à la division de ces lignes en parties infiniment petites, ce qui en seroit un aussi grand encore, il nous a fallu établir plutôt que les triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, soit commensurables, soit incommensurables. Delà on a pu conclure évidemment que si deux lignes sont coupées par des parallèles, les segmens correspondans sont toujours proportionnels entr'eux.

XLI.

Observations sur les figures semblables.

ON définit ordinairement les figures semblables (& Euclide les a définies de même) en disant qu'elles ont un même nombre d'angles, les angles respectivement égaux, & les côtés autour de ces angles proportionnels. Cette définition nous a paru renfermer une propriété qu'on ne peut accorder sans preuve, & qui suppose une notion primitive de la similitude entre deux portions d'étendue

quelconqnes. Nous avons cru la trouver en disant que la similitude de deux étendues en général consiste en ce *qu'elles ne diffèrent l'une de l'autre que par leur grandeur seulement.* De cette manière d'envisager la similitude, on en déduit la propriété qu'on prend ordinairement pour la définition des figures semblables & plusieurs autres conséquences importantes. Leibnitz a donné le premier une exacte notion de la similitude en disant : *similia sunt quæ non possunt distingui nisi per compræsentiam* ; & nous n'avons pris une tournure différente en appliquant cette notion aux figures géométriques, que pour éviter les éclaircissemens métaphysiques que demande le mot *Compræsentia*, dans la définition de Leibnitz.

XLII.

Réfutation de la méthode des indivisibles.

DANS tout ce que nous avons dit sur la mesure & sur les rapports tant des surfaces que des solides, nous avons évité avec soin les principes tirés de la méthode des *indivisibles*, dont les Élémens modernes font un continuel usage. Cette méthode a pour principe que la ligne est composée de points placés les uns à côté des autres ; la surface de lignes parallèles qui se touchent, & le solide de surfaces toutes semblables & égales, posées les unes sur les autres ; & comme tous ces élémens sont supposés *indivisibles*, la méthode fondée sur cette supposition a été appellée la *méthode des indivisibles.* Ce n'est pas sans raison que de tels principes ont toujours été rejetés par des Géomètres du premier rang. Qui ne voit en effet qu'en admettant des points qui se touchent sans se confondre, des lignes droites, qui, en s'ap-

pliquant les unes à côté des autres, forment une ſurface, des ſurfaces qui par leur entaſſement font un ſolide; on ſuppoſe que ces points ont une étendue en tout ſens, que ces lignes ont une largeur, & ces ſurfaces une épaiſſeur. Il faut donc dire alors que ce ne ſont plus des points, des lignes, des ſurfaces, tels qu'on les a conſidérés dans les premières notions de la Géométrie; ou bien que la négation d'étendue, de largeur, de profondeur, peut former un être étendu, large ou profond. D'ailleurs comment admettre en Géométrie une étendue indiviſible, comme ſi cette étendue n'étoit pas une quantité, ou bien que toute quantité ne fût pas diviſible à l'infini? Ainſi, ou les principes de cette méthode ſont faux, ou les expreſſions en ſont ſi éloignées du langage ſévere de la Géométrie qu'on ne ſauroit l'admettre dans les Élémens, quelque avantage qu'elle procure d'ailleurs. Afin d'en mieux ſentir les inconveniens, ſuppoſons que d'après cette méthode on veuille prouver que deux parallélogrammes de même hauteur, l'un droit & l'autre oblique, ſont égaux en ſurface. Pour établir cette vérité, on dira que ces deux parallélogrammes ſont compoſés d'un même nombre d'élémens ou de lignes parallèles à la baſe: que d'ailleurs toutes ces lignes ſont égales à la baſe commune, & par conſéquent égales entr'elles; & qu'ainſi les parallélogrammes ſont égaux. Mais qui ne voit qu'il y a un vice eſſentiel dans ce raiſonnement? car ou bien ces élémens ſont ſans largeur, & alors ce ſont des lignes droites, qui, poſées les unes à côté des autres, doivent ſe confondre en une ſeule, quelque grand nombre qu'on en ſuppoſe (XXXIV): ou bien ils ont une largeur,

& alors ce ſont de petites ſurfaces. Dans ce cas, il reſtera à prouver que chaque petite ſurface du parallélograme droit eſt égale à la petite ſurface du parallélograme oblique. Or, comme ces ſurfaces, quelque petites qu'on les ſuppoſe, forment elles-mêmes des parallélogrames, l'un droit & l'autre oblique, il reſtera à faire voir ce qui étoit en queſtion ; c'eſt-à-dire, que le parallélograme droit vaut le parallélograme oblique de même baſe & de même hauteur. Sous quelque dénomination que ſe préſentent ces indiviſibles dans la doctrine des ſolides, où ils ſont appellés tantôt *ſurfaces*, tantôt *tranches infiniment minces*, ils entraînent la même pétition de principe. Ainſi, quoique facile & expéditive dans pluſieurs cas, cette méthode doit être rejetée des Élémens de Géométrie, où la rigueur doit l'emporter ſur toute autre conſidération : ſi malgré ſes expreſſions dures & anti-Géométriques, on en vouloit faire uſage, on ne le pourroit qu'en confondant les indiviſibles avec les infiniment petits de Leibnitz, & après avoir prouvé que la méthode des infinis eſt une ſuite de celle d'exhauſtion. Pour cela il faudroit adopter un autre langage, & donner aux démonſtrations une tournure différente de celle qu'on emploie dans la doctrine des indiviſibles. Il faudroit encore faire précéder quelques principes ſur les limites en général, que les commençans entendroient difficilement avant d'être parvenus à ces propoſitions de Géométrie, où il faut opter entre la méthode des indiviſibles & celle d'Euclide. C'eſt pourquoi il n'y a pas à balancer dans le choix de ces deux méthodes. A la vérité, d'après Euclide, les démonſtrations deviennent un peu

plus difficiles ; mais on ne peut rien conclure de là, si ce n'est qu'il faut tâcher d'applanir ces difficultés ? Le public jugera à quel point nous y avons réussi dans la doctrine des solides, qui est la plus difficile des Élémens ; & dans laquelle nous avons tâché de réunir la sévérité de la Géométrie ancienne avec la clarté & la facilité de la moderne.

XLIII.

Métaphysique du calcul infinitésimal.

IL nous reste à parler ici du calcul infinitésimal, dont nous n'avons donné que les premières notions, parce qu'elles remplissent suffisamment l'objet que nous nous sommes proposé dans cet ouvrage. Le chapitre qui sert d'introduction à ce nouveau calcul, traite d'un sujet intéressant & qui n'avoit pas encore paru dans les Élémens de Mathématiques. On s'y propose de donner une notion exacte de l'infini, & de faire voir que les règles de Leibnitz sur le calcul infinitésimal ont pour fondement le même principe sur lequel Newton a établi son calcul des fluxions ; c'est-à-dire, la méthode des *premières & dernières raisons*, qui n'est elle-même qu'une application de la méthode d'exhaustion ou des limites, consignée dans le 10e. Livre d'Euclide. M. d'Alembert est le premier qui ait voulu ramener à cette idée des anciens les notions de l'infini & les règles du calcul différentiel. Il a donné la définition exacte de ce calcul, & il a fait voir, non-seulement qu'on peut, mais qu'on doit négliger les prétendues quantités qu'on y néglige d'après les règles de Leibnitz. Mais quoique pénétrés de vénération pour ce grand Géomètre, il nous a paru qu'il restoit encore bien

bien des choſes à dire & ſur-tout à prouver dans cette importante queſtion. Voilà pourquoi ſans doute dans les ouvrages qui ont paru depuis que M. d'Alembert s'eſt expliqué ſur cette matière, on a toujours ſuivi la marche ordinaire, ſans chercher à s'étayer de la Géométrie des anciens. J'en excepte M. Couſin, qui, à la vérité, a adopté quant au fonds les idées de M. d'Alembert, mais qui cherchant à éviter la difficulté plutôt qu'à la réſoudre, écarte toute notion d'infini, & laiſſe ſubſiſter la même incertitude qu'on avoit déjà ſur les principes de Leibnitz. Mon but eſt au contraire de faire voir qu'on peut les employer avec confiance en adoptant la notion de l'infini & de divers genres d'infinis, tels que Leibnitz les donne; & qu'il ſuffit pour cela de remonter à quelques propriétés des limites qui expliquent dans quel ſens il faut entendre les expreſſions où l'on fait uſage de l'infini. Pour y réuſſir relativement au calcul différentiel, il reſtoit d'abord à déterminer deux choſes : la première, ſi les différences de deux abſciſſes & de leurs ordonnées s'évanouiſſant, le rapport entre ces mêmes différences s'évanouit ou non : la ſeconde, ſuppoſé que le rapport de ces différences ne s'évanouiſſe pas avec elles, quelle en ſera la limite, ou bien quelle ſera la dernière raiſon entre ces différences ? car dire que cette raiſon doit être exprimée alors par celle de o à o, & que o : o peut égaler une raiſon quelconque, ainſi qu'on l'a dit à l'article *différentiel* du Dictionnaire Encyclopédique, c'eſt avancer une choſe tout-à-fait inintelligible, ou même abſurde, puiſque o ne peut jamais être pris pour terme de quelque raiſon. Afin d'éviter une auſſi étrange conſéquence, nous avons prouvé que dans ce

cas la dernière raiſon entre les quantités qui s'évanouiſſent, doit être priſe dans une ſuite parallèle de raiſons dont les termes ne s'évanouiſſent pas. Par là on parvient à l'exacte notion des infiniment petits, qui ſont ici *les dernieres valeurs des différences finies des co-ordonnées*, leſquelles différences ſont zéro, mais qu'on ſuppoſe être de vraies quantités pour pouvoir ſe *repréſenter* par ce moyen une dernière raiſon dans la ſuite même de ces différences décroiſſantes juſqu'à zéro. Je dis, pour pouvoir ſe *repréſenter* la dernière raiſon dans la ſuite même des différences décroiſſantes, car ce n'eſt pas là qu'elle exiſte réellement, puiſque ces différences ſont ſuppoſées parvenues à zéro ; mais elle exiſte entre les termes correſpondants de la ſuite parallèle. Voilà pourquoi les dx & les dy telles que le calcul différentiel les enviſage, ne ſont que des quantités *feintes* & par conſéquent *incomparables* avec une quantité proprement dite. On voit bien que ſi nous les diſons incomparables avec une quantité, ce n'eſt pas, comme l'ont imaginé certains, qu'elles ſoient immenſement plus petites qu'elle, tel que ſeroit par exemple un grain de ſable par rapport à une montagne, mais parce qu'on renverſeroit les ſuppoſitions déjà faites, ſi l'on établiſſoit un rapport entre ces quantités feintes & une quantité réelle quelconque. Par là on explique dans quel ſens il faut prendre toutes les expreſſions où entre l'infini ; ce ne ſont jamais que des limites ou d'une ſuite de quantités abſolues ou d'une ſuite de raiſons. Dans nos Élémens de Géométrie nous n'avons jamais dit que le cercle fût un poligone régulier d'une infinité de côtés, parce que, d'après ſa définition, cette figure eſt terminée par

une ligne courbe & qu'un poligone l'eſt toujours par des lignes droites, qui ne ſauroient ſe confondre avec une courbe, quelque petites qu'on les ſuppoſe ; nous avons dit ſeulement que le cercle *pouvoit être conſidéré* comme un polygone d'une infinité de côtés. Cette expreſſion ſignifie que les cercles étant les limites des polygones inſcrits ou circonſcrits, ils ſont entr'eux dans le même rapport que ces polygones ; & c'eſt dans ce ſens ſeulement qu'on peut attribuer aux figures courbes en général les rapports ou les propriétés qui conviennent à ces polygones.

On a demandé comment on pouvoit avoir $\frac{1}{\infty} = 0$ tandis que ce quotient 0 multiplié par ∞ ne peut jamais donner 1 : comment on peut admettre que $\frac{a}{\infty} = 0$, que $\frac{b}{\infty} = 0$, ſans admettre que $a = b$. Certains ont dit qu'il falloit admettre dans ces expreſſions des zéro différens, ce qui eſt abſolument inconcevable ou plutôt abſurde. Mais, d'après nos principes, la réponſe à ces queſtions eſt aiſée : $\frac{1}{\infty}$ n'indique point une diviſion proprement dite, puiſque l'infini n'eſt ni ne peut être ſuppoſé un nombre. Cette expreſſion déſigne ſeulement la limite d'une ſuite de fractions dans leſquelles le numérateur eſt toujours 1, & le dénominateur croît ſans fin ; & par l'équation $\frac{1}{\infty} = 0$, on veut faire entendre que cette limite eſt 0, comme elle l'eſt en effet. De même $\frac{a}{\infty}$ exprime la limite

d'une ſuite de fractions qui ont pour numérateur conſtant le nombre a, & pour dénominateur un nombre toujours croiſſant : or, la limite d'une telle ſuite de fractions eſt encore 0 comme dans le cas précédent, ſans que de là on puiſſe conclure ou que le nombre a vaut 1, ou qu'il faut admettre des zéro différens dans ces différentes expreſſions $\frac{a}{\infty}=0$, $\frac{1}{\infty}=0$. En un mot, ces expreſſions indiquent la même limite, ſavoir zéro, pour deux ſuites différentes de quantités qui décroiſſent. Or, ainſi qu'on le voit dans les divers polygones inſcrits ou circonſcrits qui tous aboutiſſent au cercle, ni la même limite ne ſuppoſe les mêmes ſuites de quantités croiſſantes ou décroiſſantes, ni la diverſité de ces ſuites n'amène néceſſairement une diverſité de limites.

Avant de finir ces obſervations, il nous reſte à dire un mot ſur les ſommes des ſuites qui décroiſſent à l'infini, telles par exemple que les progreſſions géométriques dont nous avons parlé au n°. 258 de l'Algèbre. Dans ces ſuites & dans tous les autres cas où il s'agit de l'infini, ce n'eſt jamais la ſomme réelle d'une progreſſion que l'on prétend aſſigner, puiſqu'il faudroit pour cela parvenir à un dernier terme, ce qui renverſeroit la ſuppoſition du progrès à l'infini; mais ſeulement la limite de cette ſomme, ou bien le nombre dont elle peut approcher autant que l'on voudra, ſans jamais l'égaler. Ainſi quand nous avons dit que la ſomme de cette progreſſion toujours décroiſſante $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ .... &c. eſt $\frac{1}{9}$, il faut entendre ſeulement que $\frac{1}{9}$ eſt

la limite de cette ſomme. De même, dans nos Élémens de Géométrie n°. 242, nous avons prouvé que la pyramide triangulaire eſt le tiers du priſme de même baſe & de même hauteur, en décompoſant cette pyramide & toutes les autres qui viennent de celle-là en priſmes triangulaires, & faiſant voir que la ſomme de ces priſmes vaut le tiers de celui qui auroit même baſe & même hauteur que la pyramide donnée. Cependant il eſt clair que quelque grand que ſoit le nombre des priſmes, qu'on tirera de la première pyramide, ils n'égaleront jamais cette pyramide, & que même le nombre des petites pyramides qu'on négligera dans ce calcul, & qui ſeront l'excès de la pyramide primitive ſur la ſomme des priſmes, ſera d'autant plus grand qu'on fera plus de décompoſitions des pyramides en priſmes. Ainſi on ſe tromperoit, ſi en prenant la ſomme réelle de ces priſmes, on croyoit avoir la première pyramide qui les a tous produits. Ce n'eſt donc pas cette ſomme qu'on doit chercher, mais ſeulement ſa limite. Or, comme la limite de la ſomme des priſmes qu'on a formés eſt évidemment la première pyramide, puiſque cette ſomme ne peut jamais égaler cette pyramide, & qu'elle peut cependant en approcher de plus près que d'une quantité donnée quelconque, il ſuit de ce que nous avons démontré dans le chapitre qui ſert d'introduction au calcul infinitéſimal, que l'expreſſion de la limite de la ſomme des priſmes eſt auſſi l'expreſſion de la première pyramide ; & qu'ainſi puiſque $\frac{1}{3} bh$ exprime la limite de cette ſomme des priſmes,

le même nombre exprimera la valeur de la première pyramide, qui par conséquent sera le tiers du prisme de même base & de même hauteur exprimé par *b h*.

Il nous resteroit encore bien des choses à dire sur l'infini & sur la manière dont il faut entendre plusieurs autres expressions où l'on en fait usage, soit dans les Mathématiques pures, soit dans les Mathématiques mixtes; mais outre que ces observations pourroient devenir trop longues, il nous paroît que ce que nous avons dit est suffisant pour entendre ces diverses expressions, & pour faire voir, ainsi que nous nous l'étions proposé, que le calcul de l'infini n'est qu'une extension de l'ancienne méthode des limites, & que toutes les règles sur lesquelles il est fondé, outre qu'elles sont simples & faciles à employer, sont aussi certaines que celles de l'Algèbre ou de l'Arithmétique ordinaire.

ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.

PREMIERE PARTIE

De l'Arithmétique.

SECTION PREMIERE,

Des principes de la Numération & des différentes méthodes de composition & de résolution sur les nombres entiers.

CHAPITRE PREMIER,

Définitions & notions préliminaires.

1. L'ARITHMÉTIQUE *en général est la science des nombres.* Elle se divise en deux parties, l'une *spéculative*, l'autre *pratique*. La première traite seulement des propriétés des nombres; la seconde expose les méthodes qu'il faut suivre, pour faire sur eux toutes les opérations dont ils sont susceptibles.

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE

2. On entend par *opération* en général, *un changement quelconque, qu'on fait subir à des quantités.* Or, tous les changemens possibles sur les nombres se font en composant un nombre de plusieurs autres, ou bien en le décomposant en quelques autres.

3. On est convenu parmi nous d'adopter le système d'Arithmétique des Arabes, qui employoient les dix caractères ou chiffres suivants, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dont nous supposons que chacun connoît la valeur. Afin d'exprimer par ce moyen un nombre quelconque, on a arbitrairement établi deux choses : 1°. que la différente forme de ces caracteres désigneroit différens assemblages d'unités (excepté 0, qui signifie l'absence de tout nombre) : 2°. que leurs différentes places sur la même ligne désigneroient différentes valeurs de ces unités. Ainsi 3 désigne trois unités, 6 en désigne six, 7 en désigne sept, &c. mais si j'écris ces trois caractères de suite, comme ici 367, les unités du premier vers la droite sont censées des unités simples, celles du second des unités de dixaine, & celles du troisième des unités de centaine.

Il faut donc distinguer dans la numération une *valeur absolue* des caractères qui dépend de leur forme, & qui détermine d'une façon invariable le nombre d'unités qu'ils expriment ; & une *valeur locale*, qui dépend du rang qu'ils occupent sur la même ligne, & qui fixe la valeur de ces unités. On est convenu que cette valeur croîtroit en *progression décuple*, allant de droite à gauche.

Connoissant donc la valeur absolue des caractères, il ne faut pour énoncer ou pour écrire exactement une expression numérique quelconque, que faire attention à leur valeur locale, suivant laquelle le premier vers la droite exprime des unités simples, le second des unités de dixaine, le troisième des unités de centaine, le quatrième des unités de mille & ainsi des autres.

EXEMPLE.

6	... Trillions.
4	... Centaines de billions.
5	... Dixaines de billions.
7	... Billions.
2	... Centaines de millions.
8	... Dixaines de millions.
9	... Millions.
5	... Centaines de mille.
4	... Dixaines de mille.
3	... Mille.
0	... Centaines.
4	... Dixaines.
5	... Unités.

4. On peut conclure de ce ſyſtême de numération, *qu'une unité d'un rang quelconque vaut plus que tous les caractères qui peuvent ſe trouver à la droite de cette unité dans la même expreſſion numérique.* Ainſi une unité du rang des mille, vaut plus que toutes les centaines, les dixaines, & les unités ſimples qui peuvent être après ; car celles-ci ne peuvent valoir plus de 999 & l'autre vaut 1000.

5. On appelle nombres *abſtraits*, ou nombres *nombrants*, ceux dont l'unité ne déſigne aucune choſe déterminée, comme 10, 20, 30, ou plutôt *dix fois*, *vingt fois*, *trente fois*. On appelle nombres *concrets* ou nombres *nombrés*, ceux dont l'unité déſigne des quantités particulières, comme 10 toiſes, 20 livres, 6 heures.

Quelle que ſoit l'unité, abſtraite ou concrete, on peut la concevoir diviſée en pluſieurs parties égales, qu'on prendra pour des unités d'une eſpèce inférieure. On peut donc avoir des expreſſions numériques qui contiennent une, ou pluſieurs de ces parties égales de l'unité ; & ces expreſſions ſont appellées *nombres fractionnaires*, ou ſimplement *fractions*. Par oppoſition à ces nombres on appelle *entiers*, ceux qui contiennent exactement l'unité, priſe un certain nombre de fois. Ainſi deux

tiers, trois quarts de l'unité, (ce qui s'écrit ainsi $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$) sont des fractions, & 3, 4, 10, sont des entiers.

CHAPITRE II.

De l'Addition.

6. DÉFINITION. *L'addition est une opération par laquelle de plusieurs nombres donnés on en compose un seul*, qui devient alors leur *somme*.

DEMANDE. On demande ici que chacun sache prendre la somme des nombres exprimés par un seul caractère, voici la règle qu'il faut suivre pour ceux qui sont exprimés par plusieurs.

7. RÈGLE. *Écrivés les nombres à ajouter les uns sous les autres, de façon que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, &c., & si aucune colonne ne monte à 10, prenés seulement la somme de chacune, en allant de droite à gauche, & écrivés la en dessous.*

EXEMPLE I.

2323
3212
2362

7897

Il faut ajouter ensemble les trois nombres 2323, 3212, 2362. Je les dispose dabord comme on le voit dans l'exemple I., tirant ensuite une ligne par dessous, je prens les sommes particulières des quatre colonnes; & comme aucune ne monte à 10, je les écris simplement en dessous & vis-à-vis chaque colonne, ce qui fait le nombre 7897.

8. Mais il arrive le plus souvent que la somme d'une colonne monte à 10 & au dessus; de façon que la somme des unités

fait des dixaines, celle des dixaines fait des centaines, &c.; alors *n'écrivez sous chaque colonne que les unités de l'espèce qui convient à cette colonne, & gardés les dixaines de cette espèce pour la colonne suivante.*

EXEMPLE II.

5423
8297
3589
———
17309

La somme des unités (Ex. II.) étant ici 19, elle contient une dixaine & 9 unités; c'est pourquoi j'écris 9 sous la colonne des unités, & je retiens une dixaine pour la colonne suivante: la somme des dixaines étant 20, avec celle que j'y ai rransportée de la colonne précédente, elles font juste 2 centaines; c'est pourquoi j'écris 0 sous la colonne des dixaines, & je retiens deux centaines pour la colonne suivante. Il en est de même pour les autres colonnes.

Il est évident que cette méthode remplit l'objet qu'on se propose dans cette opération. Car, un nombre entier ne pouvant contenir que des unités, des dixaines, des centaines, &c.; on a évidemment pris la somme de plusieurs de ces nombres, quand on a pris celle de leurs unités, de leurs dixaines, de leurs centaines, &c.

9. REMARQUES. I. Il arrive très-souvent qu'on ne veut qu'indiquer l'addition de plusieurs nombres sans l'exécuter, & alors on les joint par ce caractère +, qui signifie *plus*. Ainsi 3+4+6+9, indique que les nombres 3, 4, 6, 9, doivent être ajoutés ensemble.

II. Il faut prendre quelquefois la somme des nombres de différentes espèces, & alors *on ajoute ensemble les espèces semblables & de leurs sommes particulières, on compose la somme totale.*

EXEMPLE III.

36 l.	12 s.	8 d.
160 l.	18 s.	9 d.
124 l.	14 s.	4 d.
322 l.	5 s.	9 d.

Ainsi dans cet exemple où l'on a à ajouter ensemble des livres, des sols & des deniers, l'on prend dabord la somme des deniers qui étant 21, forme 1 s. & 9 deniers; on écrit 9 den. & on transporte le sol au rang des sols; prenant ensuite la somme des sols qui est 45 sols, on laisse 5 sols dans le rang des sols, & on transporte les livres au rang des livres, dont la somme est 322.

CHAPITRE III.

De la Soustraction.

10. DÉFINITION. *La soustraction est une opération par laquel le on décompose un nombre donné en deux ou plusieurs autres, dont il est la somme.*

On voit par cette définition, 1°. Que pour remplir l'objet qu'on se propose ici, on doit retrancher du nombre donné, un ou plusieurs autres nombres. 2°. Que les nombres retranchés ajoutés à ce qui restera du nombre donné doivent rétablir celui-ci. 3°. Enfin, que cette opération est opposée à celle d'addition.

11. DEMANDE. On demande ici que chacun sache faire la soustraction sur les nombres exprimés par un seul caractère. La règle suivante contient la méthode qu'il faut suivre pour les autres.

12. RÈGLE I. *Écrivés le nombre qui doit être soustrait sous celui dont vous voulez le soustraire, de façon que les unités répondent aux*

unités, les dixaines aux dixaines, &c. Et si chaque caractère inférieur vaut moins que le supérieur qui lui répond, prenez simplement la différence des valeurs, en allant de droite à gauche & l'écrivez en-dessous.

EXEMPLE I.

Nombre proposé . . . 3546.
Nombre soustrait . . . 1234.

Différence . . . 2312.

On me propose (Ex. I.) de soustraire 1234 de 3546; je dispose dabord les deux nombres, comme on le voit dans l'Exemple; & ayant tiré une ligne par-dessous, je prends la différence des valeurs des Caractères correspondans, en disant: 4 de 6, (on sous-entend *soustrait*) reste 2; 3 de 4, reste 1; 2 de 5, reste 3; 1 de 3, reste 2; & la différence totale est 2312.

13. RÈGLE II. *Si le caractère inférieur vaut plus que le supérieur qui lui répond, augmentés la valeur de celui-ci de 10, & par compensation ajoûtés une unité au caractère inférieur qui vient après.*

EXEMPLE II.

Nombre proposé . . . 92331.
Nombre soustrait . . . 8476.

Différence . . . 83855.

Ayant disposé les deux nombres, comme on le voit (Ex. II.) je dis: 6 de 1, cela ne se peut; c'est pourquoi j'augmente de 10 la valeur du caractère supérieur, ce qui fait 11, & je dis: 6 de 11, reste 5, que j'écris en-dessous. Ajoûtant par compensation 1 au caractère inférieur suivant, je dis: 8 de 3, cela ne se peut; j'ajoûte donc 10 à 3, ce qui fait 13; or, 8 de 13, reste 5. Continuant de même à ajoûter 1 au caractère inférieur, toutes les fois que j'ai ajoûté 10 au supérieur qui précéde, je dis: 5 de 13, reste 8; 9 de 12, reste 3; 1 de 9, reste 8.

On voit aisément qu'en ajoûtant 10 à la valeur du carac-

tère supérieur, & 1 à celle de l'inférieur de la colonne suivante, on augmente également le nombre soustrait & le nombre proposé (3), ce qui fait que leur différence ne change pas.

La même régle doit s'observer quand le nombre proposé contient des zèro, comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE III.

Nombre proposé ... 40900.
Nombre soustrait ... 24953.

Différence..... 15947.

Tout étant arrangé comme dans l'Exemple III. je dis : 3 de 0, cela ne se peut ; ajoûtant 10 à 0, je dis : 3 de 10, reste 7 ; j'ajoûte ensuite une unité au premier caractère qui suit dans le nombre soustrait, ce qui fait 6. Or, 6 de 0, cela ne se peut encore ; j'ajoûte donc 10 à 0, & je dis alors : 6 de 10, reste 4. Opérant toujours de même, je continue en disant : 10 de 19, reste 9 ; 5 de 10, reste 5 ; 3 de 4, reste 1 ; & la différence cherchée est 15947.

14. Si l'on a à soustraire des nombres de différentes espèces, *on les écrira de façon que les espèces semblables se correspondent.*

EXEMPLE IV.

Nombre proposé ... 110 l. 13 s. 9 d.
Nombre soustrait ... 89 l. 15 s. 11 d.

Différence..... 20 l. 17 s. 10 d.

Après avoir écrit, comme on le voit dans cet Exemple, les deniers sous les deniers, les sols sous les sols, les livres sous les livres, on procédéra ainsi : 11 de 9, cela ne se peut ; c'est pourquoi j'emprunte 1 s. de la colonne des sols, & l'ajoûtant aux 9 d. du nombre proposé, je dis : 11 de 21, reste 10. Passant aux sols, je dis : 15 de 12, cela ne se peut ; prenant donc 1 l. dans la colonne des livres, & la changeant en sols pour l'ajoûter au reste, je dis ; 15 de 32, reste 17. Opérant enfin

sur

ſur les livres comme ci-deſſus, je trouve la différence indiquée dans l'exemple.

On vérifie le réſultat de cette opération en ajoûtant la différence au nombre ſouſtrait, puiſque cette ſomme doit donner le nombre propoſé (10).

15. Si l'on veut ſouſtraire pluſieurs nombres, comme 2, 3, 7, d'un nombre donné, p. Ex. 15, on dira : 2 de 15, reſte 13 ; 3 de 13, reſte 10 ; 7 de 10, reſte 3 ; ou bien on ajoutera enſemble les nombres à ſouſtraire, dont la ſomme eſt ici 12, on les retranchera du nombre propoſé 15, & la différence ſera également 3.

16. Remarques Importantes. I. Il arrive ſouvent dans l'Arithmétique qu'on doit indiquer une ſouſtraction ſans la faire, alors on met ce caractère (—) qui déſigne *moins*, devant le nombre qui doit être ſouſtrait. Ainſi 24 — 10, déſigne que 10 doit être ſouſtrait de 24, & *cela s'énonce ainſi*, 24 *moins* 10. Si d'un même nombre on en veut retrancher pluſieurs autres, rien n'empêche de les écrire à la ſuite de celui-là avec le ſigne —. Ainſi on écrira 24 — 10 — 6 — 3, ou bien 24 — 19, & la différence eſt 5.

II. un nombre peut repréſenter telle quantité qu'en l'ajoutant à un autre, il le diminue, & en le retranchant il l'augmente (voy. Diſc. Prel. n°. VIII.). Ainſi une dette ajoûtée à un bien réel, diminue ce bien ; & réciproquement le bien ajoûté à la dette la diminue : le contraire arrive ſi l'on retranche l'un de l'autre. Il faut donc pour exprimer Arithmétiquement la ſomme d'un bien de 1000 liv. p. Ex. & d'une dette de 100 l. écrire 1000 l. — 100 l., & la fortune de celui qui poſſéde l'un & l'autre eſt reduite à 900 l. Si au contraire je voulois exprimer que de l'état d'un homme qui a 1000 l. de bien & 100 l. de dettes, on a retranché les dettes, je devrois ajoûter 100 l. à ce qui exprimoit l'état de ſa fortune avec les dettes en écrivant 1000 l. — 100 l. + 100 l. & par cette ſouſtraction ſon bien réel ſeroit augmenté de 100 l.

Rien n'empêche d'indiquer à la fois l'addition ou la soustraction de plusieurs nombres de cette espèce. Ainsi je pourrois écrire 1000 l. — 100 l. — 36 l.

17. DÉFIN. Deux nombres sont dits *d'espèces opposées*, ou simplement *opposés*, quand l'addition de l'un diminue l'autre, & que la soustraction l'augmente. Pour les distinguer entre eux, ceux d'une même espèce sont appellés *positifs* & précédés du signe +; & ceux de l'espèce opposée sont appellés *négatifs*, & précédés du signe —. Il est indifférent à laquelle des deux espèces on donnera le signe +, ou le signe —, pourvu qu'on garde toujours la même dénomination pour les nombres d'une même espèce.

18. COROLL. *Pour ajouter ensemble des nombres négatifs & positifs, on les écrira donc à la suite les uns des autres avec leurs signes; mais pour les soustraire on changera toujours les signes des nombres soustraits.* Ainsi pour ajouter — 100 à + 1000, j'écrirai 1000 — 100, & pour l'en soustraire j'écrirai 1000 + 100. (16).

Souvent pour indiquer que des nombres doivent être ajoûtés ou soustraits de quelqu'autre, on les renferme entre deux crochets, mettant en tête le signe + ou le signe —. Ainsi 15 — (+ 4 — 6 — 9), m'indique que les nombres + 4 — 6 — 9 doivent être soustraits de 15.

CHAPITRE IV.

De la Multiplication.

19. DÉF. *La Multiplication est une opération par laquelle on compose un nombre d'un autre pris un certain nombre de fois.* Ainsi en multipliant 6 par 4, on cherche un nombre (c'est ici 24) qui sera composé de 6 pris 4 fois.

On appelle *Multiplicande* le nombre composant (c'est ici 6);

Multiplicateur, le nombre qui désigne combien de fois il faut prendre le multiplicande (c'est ici 4): & *produit*, le nombre composé qui résulte de l'opération (c'est ici 24). Le Multiplicande & le multiplicateur sont appellés d'un nom commun les *facteurs*, les *produisans*, ou les *racines*.

20. COROLL. On peut conclure de la définition de cette opération 1°. Que le multiplicateur est toujours un *pur nombre abstrait*, puisqu'il désigne seulement combien de fois il faut prendre le multiplicande.

2°. Que le produit est un nombre de la même espéce que le multiplicande, & qu'il le contient autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Ce qui s'exprime en disant *que le produit est au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité.*

3°. Qu'un nombre quelconque multiplié par l'unité (si toutefois c'est une multiplication proprement dite) ne change point de valeur.

Il est indifférent pour le produit de deux nombres, de multiplier le plus grand par le plus petit, ou le plus petit par le plus grand; car 6 fois 4 ou 4 fois 6 sont la même chose. Cependant dans la pratique, il est plus commode de prendre pour multiplicateur le nombre qui renferme ou le moins de caractères, ou ceux de moindre valeur.

21. Nous plaçons ici la table suivante, afin qu'on voie tout de suite les produits des nombres à un seul caractère. Pour s'en servir, il faut voir quelle est la caze qui répond à la fois aux facteurs pris, l'un dans la première ligne supérieure, & l'autre dans la première colonne à gauche. Ainsi 42 est le produit de 6 par 7, 64 est celui de 8 par 8, 63 celui de 9 par 7, &c.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Quelquefois on ne veut qu'indiquer la multiplication de deux nombres, & alors on écrit entr'eux ce caractère ×, qui signifie *multiplié par* ; ou bien on les sépare par un point, ou bien on les enferme chacun entre deux crochets. Ainsi 26 × 17, ou 26 . 17, ou (26) (17) sont trois manières de désigner, 26 *multiplié par* 17.

S'il faut opérer sur des nombres exprimés par plusieurs caractères, suivés cette règle.

22. RÈGLE. *Écrivés le multiplicateur sous le multiplicande, & allant de droite à gauche, multipliés le nombre supérieur par chaque caractère de l'inférieur ; placés le premier caractère de chaque produit partiel, vis-à-vis celui du multiplicateur avec lequel vous opérés, & de la somme de ces produits partiels formés le produit total.*

EXEMPLE I.

Multiplicande 324
Multiplicateur 25

Produits partiels.... { 1620
648

Produit total 8100

Ayant disposé le multiplicande & le multiplicateur comme on le voit dans l'Exemple I., je dis 4 × 5, ou bien 5 fois 4 font 20, j'écris 0 & je retiens 2; 5 fois 2 font 10 & 2 retenu font 12, je pose 2 & je retiens 1 : 5 fois 3 font 15 & 1 retenu font 16. Passant ensuite au second caractère du multiplicateur, je dis : 2 fois 4 font 8, que j'écris en dessous vis-à-vis le 2 du multiplicateur : 2 fois 2 font 4; 2 fois 3 font 6. Prenant ensuite la somme de ces produits partiels dans le même ordre qu'ils ont été écrits, j'ai pour produit total 8100.

23. Si l'un des deux nombres, ou tous les deux à la fois, sont terminés par des zèro, *on abrége l'opération en multipliant seulement les caractères significants; mais alors on écrira autant de zèro à la fin du produit, qu'il s'en trouvoit de suite à la fin des deux facteurs.*

EXEMPLE II.

Multiplicande	3500
Multiplicateur	450
Produits partiels	175
	140
Produit total.....	1575000

Ayant à multiplier 3500 par 450, je me contente de multiplier 35 par 45, & au produit 1575, j'ajoute les trois zèro qui terminent les deux facteurs.

EXEMPLE III.

99	999
99	999
891	8991
891	8991
	8991
9801	998001

24. Remarque. On observera d'après ces exemples, *que le produit de deux nombres quelconques ne renferme jamais qu'autant de caractères qu'il s'en trouve dans ses facteurs, ou un de moins seulement*; & cela vient de ce que les produits partiels forment autant de colonnes qu'il y a de ces caractères, ou une de moins seulement.

25. S'il faut avoir le produit de plusieurs nombres, comme de 7, 3, 4, 5, on prendra dabord celui de deux seulement; puis on le multipliera par un troisième nombre, ce nouveau produit par un quatrième, & ainsi de suite. Or, comme ces facteurs, 7, 3, 4, 5, donnent 420, dans quelque ordre qu'on les multiplie, on en conclura de nouveau, *qu'il est indifférent pour un produit de quelle façon on combine ses facteurs.*

26. Nous n'avons parlé jusqu'ici que de la multiplication des seuls nombres abstraits, il nous reste à exposer les méthodes qu'il faut suivre pour faire cette opération sur les nombres concrets. J'observe dabord que, sans absurdité, on ne peut point supposer le multiplicateur concret, ni le produit de différente nature que le multiplicande (20). Ainsi 4 l. × 2, fait 2 fois 4 l. ou 8 liv.; & demander le produit de 4 l. par 2 toises, ce seroit une question absurde.

Cependant l'Arithmétique offre souvent des cas où le multiplicande & le multiplicateur se présentent avec les signes + & — ce qui indique des nombres concrets (disc. prél. n°. XI.) comme $\overline{+6-4} \times +2$. Mais cette expression ne désigne autre chose, si ce n'est que les nombres +6 & — 4, doivent d'abord être multipliés par le nombre abstrait 2, c'est-à-dire, pris 2 fois tels qu'ils sont; & qu'ensuite ce produit qui sera +12—8 doit être ajouté ou bien à 0, ou bien aux autres nombres avec lesquels il est combiné dans le même calcul. Aussi (21) peut-on écrire pour produit indiqué 0+2 (6—4).

On justifiera par un raisonnement semblable les expressions qui présenteront un multiplicateur négatif. On dira, par Ex., que $\overline{6-4} \times -2$ indique qu'il faut dabord prendre le multipli-

cande 2 fois, & qu'il faut soustraire ce produit des autres nombres qui peuvent le précéder.

Or, pour ajouter des nombres de différents signes à ceux qui les précédent, il faut les écrire avec leurs signes; au lieu qu'il faut changer ces signes pour les soustraire (18). Il faut donc que $\overline{6-4} \times -2$ donne $-12+8$. D'où l'on déduira cette règle: *que le produit doit avoir le signe du multiplicande, lorsque le multiplicateur est positif, & qu'il doit avoir le signe contraire, lorsqu'il est négatif.*

Cette règle s'énonce par cet abrégé $+ \times + = +$, $- \times + = -$, $+ \times - = -$, $- \times - = +$. *

27. Il arrive souvent dans la pratique que le multiplicateur étant un nombre abstrait, le multiplicande renferme différentes espéces, comme on le voit dans l'exemple suivant.

EXEMPLE IV.

Multiplicande. . . . . 12 l. 15 s.
Multiplicateur. 130

36
12

Produit à 12 l. . . . . 1560 l.
Produit à 10 s. . . . . 65 l.
Produit à 5 s. . . . . 32 l. 10 s.

Produit total . . . . . 1657 l. 10 s.

Ayant dabord multiplié 12 l. par 130, j'ai pour premier produit 1560 l. & pour avoir en livres le produit de 15 s. par 130, je dis: Si j'avois à multiplier 20 s., par 130, j'aurois pour produit 130 l. Mais je n'ai que 15 s. qui valant la moitié & le quart de la livre, m'indiquent qu'il faut prendre la moitié & le quart de 130 l. ou bien le produit par 10 s. qui est 65 l. & puis par 5 s. qui fait 32 l. 10 s. faisant ensuite une somme de tous ces produits partiels, j'ai pour produit total 1657 l. 10 s.

* Ce caractère = signifie égale.

C'eſt par là qu'on réſout toutes les queſtions dans leſquelles on demande le prix d'un certain nombre de meſures à tant la meſure, p. Ex. de 128 toiſes 1 pied, à 23 l. 6 ſ. 4 d. la toiſe; où l'on voit qu'au produit de 23 l. 6 ſ. 4 d. par 128, il faut ajouter le prix ou la valeur d'un pied.

CHAPITRE V.

De la Diviſion.

28. DÉFINITION. *La diviſion eſt une opération par laquelle on décompoſe un nombre donné en pluſieurs parties égales, & on détermine la valeur de chacune;* ainſi diviſer 24 par 6, c'eſt décompoſer 24 en ſix parties égales, dont chacune eſt 4. Dans cet exemple 24 eſt le *dividende*, 6 eſt le *diviſeur*, & 4 eſt le *quotient*.

29. COROLL. On peut conclure de cette définition, 1°. Que la diviſion eſt une opération oppoſée à celle de la multiplication, & qu'ainſi le quotient multiplié par le diviſeur doit rétablir le dividende.

2°. Que le diviſeur doit toujours être un nombre abſtrait, & le quotient de même nature que le dividende.

3°. Enfin que le dividende doit contenir le quotient autant de fois que le diviſeur contient l'unité.

Pour indiquer la diviſion, on écrit ordinairement le diviſeur ſous le dividende, & on les ſépare par un trait; ainſi $\frac{24}{6}$ indique que 24 doit être diviſé par 6; cependant dans la pratique de l'opération il paroît plus commode de ſuivre un autre arrangement tel qu'on le verra dans les exemples ci-deſſous.

30. Nous ſuppoſons ici que chacun ſache faire la diviſion ſur les nombres exprimés par un ſeul caractère. Voici la règle qu'il faut ſuivre pour l'exécuter ſur les autres.

EXEMPLE.

Suppoſons qu'il faille diviſer 4170 par 15 ; ayant d'abord diſpoſé les deux nombres, comme on le voit dans l'exemple, j'obſerve que le quotient ne peut pas contenir des mille, puiſqu'il en faudroit au moins 15 au dividende, afin qu'il s'en trouvât 1 au quotient.

EXEMPLE I.

Dividende. 4170	15 Diviſeur.
30	278 Quotient.
117	
105	
120	
120	
0	

C'eſt pourquoi joignant les mille aux centaines, ce qui fait 41 centaines, j'en cherche dabord la quinzième partie, & je marque par un point que mon *premier dividende partiel* ſe termine aux centaines. Or, la quinzième partie de 41 centaines eſt 2 centaines & plus, ſans être 3. J'écris donc 2 au quotient, & ce ſera le nombre des centaines qu'il peut contenir.

Pour découvrir les centaines qui me reſtent, je multiplie le chiffre écrit au quotient par le diviſeur, & c'eſt ici 2 × 15, je ſouſtrais le produit 30 (qui déſigne 30 centaines) du dividende partiel 41, & je trouve pour reſte 11 centaines, dont je dois prendre la quinzième partie. Pour cela je dois les changer en dixaines, & y ajouter celles du dividende. Or, ces deux choſes ſe feront à la fois en abaiſſant le caractère 7, qui exprime les dixaines du dividende à côté du reſte 11, ce qui donne 117 dixaines, dont il faut prendre la quinzième partie.

Pour trouver cette partie, je m'arrête aux deux premiers caractères du dividende & au premier caractère du diviſeur, & je dis : 11 diviſé par 1 donne 11. Mais j'obſerve que ſi je mettois au quotient ou 10 ou un nombre au-deſſus, j'y mettrois des centaines, & alors le caractère précédent n'exprimeroit pas juſte toutes les centaines. *Je ne puis donc pas ſoupçonner que je puiſſe mettre plus de 9 au quotient.* Avant d'écrire ce caractère je l'eſſaie en multipliant 9 par 15, & comme le produit 135 ne peut pas être

ſouſtrait de 117, j'en conclus que 9 eſt trop grand. Eſſayant 8, je trouve que ſon produit par 15 eſt auſſi trop grand. Enfin je trouve le nombre 7 qui multiplié par 15 donne pour produit 105; & celui-ci ſouſtrait de 117 donne 12 pour reſte. J'écris donc 7 au quotient.

Enfin pour prendre la quinzième partie de ces 12 dixaines, je les change en unités, ce qui ſe fait en abaiſſant à côté 0, qui exprime les unités du dividende, & l'on a le nombre 120. Or, ſachant que je ne puis mettre au quotient plus de 9, (parce qu'autrement le caractère précédent n'exprimeroit pas aſſez de dixaines) j'eſſaye à côté ſi 9 eſt bon; & l'ayant trouvé trop grand; puiſque 9 × 15 donne 135, qui ne peut être ſouſtrait de 120, j'eſſaye 8, qui doit réuſſir; puiſque 8 × 15 donne 120, qui étant ſouſtrait du dividende partiel 120, ne laiſſe aucun reſte. Je mets donc 8 au quotient, & comme je n'ai plus de caractères à abaiſſer, l'opération eſt achevée & le quotient juſte eſt 278.

31. Coroll. Toute la pratique de la diviſion ſe reduit donc à ces quatre choſes : 1°. *A fixer le premier dividende partiel.* 2°. *A chercher par le premier, où les deux premiers caractères du dividende & du diviſeur, quel eſt celui qu'on doit écrire au quotient.* 3°. *A multiplier la valeur de ce caractère par le diviſeur, pour ſouſtraire le produit du dividende.* 4°. *A abaiſſer à côté du reſte les caractères ſuivants, s'il y en a, un à un, juſqu'à ce que le dividende total ſoit épuiſé.*

Exemple II.

On me propoſe de diviſer 11739 par 39. J'obſerve d'abord que le dividende ne contenant pas 39 unités du rang des mille, le quotient ne contiendra point de mille, mais ſeulement des centaines. Ainſi le premier dividende partiel s'étendant juſques aux centaines, je les marque par un point & je cherche la trente-neuvième partie de 117 centaines. Eſſayant donc de la trouver avec les deux premiers caractères du dividende & le premier du diviſeur, je dis : le tiers de 11 eſt 3, que j'éprouve à côté, en le multipliant par 39. Et comme le produit 117, peut être ſouſtrait du dividende partiel, j'écris 3 au quotient. N'y ayant point de reſte, j'abaiſſe le caractère ſuivant 3, &

11739	39
117	301
	39

je mets o au quotient, pour désigner qu'il ne doit pas contenir des dixaines. Enfin abaissant 9 à côté de 3, il me reste 39 unités à diviser par 39, ce qui donne pour quotient 1 sans reste.

REMARQUES. On voit par ces exemples 1°. Qu'on ne doit abaisser qu'un seul caractère à la fois. 2°. Que si le caractère abaissé joint au reste précédent est plus petit que le diviseur, on doit mettre o au quotient, pour désigner que celui-ci ne contient point d'unités du rang de celles qu'on à abaissées.

32. S'il se trouve un dernier reste après avoir abaissé tous les caractères du dividende, il faut l'écrire à la suite du quotient, & plaçant le diviseur en dessous, on les séparera par un trait, ce qui formera une fraction ajoutée au premier quotient. Ainsi dans l'Exemple III. après avoir trouvé le quotient 136, il vient un dernier reste 17, qu'on écrira à la suite sous la forme de cette fraction $\frac{17}{34}$

EXEMPLE III.

$$\begin{array}{l} 4641 \\ 34 \\ \hline 124 \\ 102 \\ \hline 221 \\ 204 \\ \hline 17 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 34 \\ \hline 136 \; \frac{17}{34} \end{array} \right.$$

33. SCHOL. Il y a plusieurs cas où la division se peut faire d'une maniere plus abregée. Nous allons rapporter ici les principaux.

1°. Si le dividende & le diviseur sont terminés par des zèro, retranchez-en le même nombre de chacun, & divisés le reste. Ainsi $\frac{3600}{300}$ se reduit à $\frac{36}{3}$, qui donne 12 au quotient.

2°. Si le diviſeur ſeulement eſt terminé par des zèro, retranchez-les, & ôtés en même-temps un égal nombre de caractères ſignifians vers la droite du dividende, p. ex. $\frac{4667}{500}$ ſe reduit dabord à $\frac{46}{5}$, qui donne 9 pour quotient & 1 pour reſte. J'écris ce reſte à la gauche de 67 que j'avois retranché, & de ce nombre diviſé par 500, je forme la fraction $\frac{167}{500}$ pour l'ajouter à 9. Ainſi le vrai quotient eſt ici $9\frac{167}{500}$.

3°. Pour prendre la dixième partie d'un nombre, ou bien pour le diviſer par 10, il ſuffit d'en retrancher le dernier caractère, qu'on diviſera par 10 pour le joindre au reſte. Ainſi $\frac{356}{10}$ donne $35\frac{6}{10}$; $\frac{340}{10}$ donne 34.

4°. S'il faut diviſer un nombre par 20, retranchés d'abord le dernier caractère vers la droite, & prenez la moitié de la valeur des autres. S'il vient 1 pour reſte, écrivés ce reſte devant le caractère retranché, diviſés cela par 20, & écrivés cette fraction à la ſuite. Ainſi dans $\frac{456}{20}$, je retranche le 6, je prends la moitié de 45, qui donne 22 & 1 pour reſte, que j'écris devant 6, pour en former la fraction $\frac{16}{20}$. Le vrai quotient eſt donc ici $22\frac{16}{20}$. De même $\frac{302}{20}$ donne $15\frac{2}{20}$. $\frac{180}{20}$ donne 9.

34. On voit par là comment on réduit un nombre de ſols en livres, puiſqu'il ne faut pour cela qu'en prendre la vingtième partie, ou le diviſer par 20. *En général on reduit une petite eſpèce à une plus grande, en diviſant le nombre qui exprime la petite, par celui qui déſigne combien de fois l'unité de cette eſpèce eſt contenue dans celle de la grande.* Ainſi pour reduire un nombre de pieds en toiſes, on les diviſera par 6; pour reduire un nombre de pouces en pieds, on les diviſera par 12.

35. SCHOLIE. On remarquera ici: 1°. que tout nombre terminé par 5 eſt exactement diviſible par 5, & qu'il l'eſt auſſi par 10 & par 5, s'il finit par un 0. 2°. Qu'un nombre eſt diviſible par 2 ſi la valeur du dernier caractère eſt diviſible par 2; qu'il l'eſt par 4, ſi la valeur des deux der-

niers caractères est divisible par 4 ; qu'il l'est par 8, si la valeur des trois derniers caractères est divisible par 8, & ainsi de suite. 3°. Qu'un nombre est divisible par 9 & par 3, si la somme des valeurs absolues de ses caractères est divisible par 9 ; & si cette somme est divisible par 3 seulement, ce nombre sera divisible par 3 ; & même par 6, lorsque le dernier caractère vers la droite exprimera un nombre pair. 4°. Qu'un nombre est divisible par 11, lorsque la somme des valeurs absolues de ses caractères de rang impair, sçavoir, du 1er., du 3me., du 5me., &c. vaudra celle des caractères de rang pair, sçavoir, du 2d., du 4me., du 6me., &c. en allant de gauche à droite.

36. Il se présente souvent des cas où l'on demande de diviser des nombres concrets les uns par les autres, comme p. ex. des nombres positifs par des négatifs ; ou bien des livres, des sols & des deniers, par des toises, des pieds & des pouces. Sur tous ces cas en général nous observerons que le diviseur doit être regardé comme un pur nombre abstrait, sans quoi la question seroit absurde & l'opération impratiquable (29).

Supposons dabord qu'il faille diviser $+15$ par -5. Faisant abstraction du signe du diviseur, je cherche dabord la cinquième partie de $+15$, qui devant être de même espèce que le dividende (29) sera $+3$. Mais comme le signe $-$ qui affecte le diviseur m'indique qu'il faut soustraire ce quotient des nombres qui le précédent, ou qui peuvent le précéder, je change son signe & j'écris -3.

On voit par le même raisonnement que si j'avois eu à diviser -15 par -5, j'aurois dû écrire au quotient $+3$.

Si le diviseur est accompagné du signe $+$, il faut laisser au quotient le signe du dividende, qu'il doit naturellement avoir. Ainsi $+15$ divisé par $+5$, donne $+3$; & -15 divisé par $+5$ donne -3.

Tout cela s'exprime par cet abrégé : $\frac{-}{+}$ ou $\frac{+}{-}=-$, $\frac{+}{+}$ ou $\frac{-}{-}=+$.

37. S'il falloit diviser un nombre de différentes espèces, comme 135 l. 18 s. 10 d. en 12 parties égales, *on diviseroit successivement les différentes espèces en commençant par la plus haute & changeant les restes, s'il y en avoit, en unités de l'espèce inférieure, pour les ajouter à celle-ci.* Dans cet exemple, ayant pris la douzième partie de 135 l., on trouve 11 pour quotient & 3 l. pour reste. Convertissant ces 3 liv. en sols & les ajoutant aux 18 sols du dividende, on prend la douzieme partie de cette somme, laquelle est 6 sols avec 6 pour reste. Changeant de nouveau ce reste de sols en derniers, & les ajoutant à ceux qu'on avoit déja, on trouve 82 den. à diviser par 12, ce qui donne au quotient 6 den., avec un reste qu'on néglige. Ainsi, dans cet exemple, le quotient véritable est 11 l. 6 s. 6 d.

38. Si le dividende & le diviseur contiennent chacun des différentes espèces, *on réduira l'un & l'autre à la dénomination de la plus petite espèce, & l'on divisera à l'ordinaire.*

Par exemple vingt-quatre toises quatre pieds d'un ouvrage, ayant couté 86 liv. 6 sols 8 den., on demande à combien revient la toise. Il est clair qu'il faut diviser ici 86 liv. 6 sols 8 deniers par vingt-quatre toises quatre pieds. Pour cela on réduit dabord le dividende en sols, ensuite en deniers, ce qui fait 20720 deniers; on reduit également le diviseur à sa plus petite espèce, ce qui fait 148 pieds; & faisant ensuite la division, on trouve au quotient 140 den., ou bien 11 sols 8 den.; ce qui indique le prix de chaque pied. Or, la toise contenant 6 pieds, il faut qu'elle vaille 6 fois 11 sols 8 den., ce qui fait 3 liv. 10 sols.

SECTION SECONDE.

Du calcul des Fractions.

CHAPITRE PREMIER

De la nature & des principales propriétés des fractions.

39. SI l'on conçoit l'unité divisée en plusieurs parties égales, l'expression qui désigne une ou plusieurs de ces parties, s'appelle une *fraction*. Elle s'écrit en forme de division, de cette maniere $\frac{1}{4}$, $\frac{12}{15}$; & on l'énonce ainsi : *un quart, douze quinziemes*. Le nombre supérieur est appellé *numérateur*, parce qu'il fixe le nombre qu'on prend des parties de l'unité; l'inférieur est appellé dénominateur, parce qu'il détermine le nom ou l'espèce de ces parties. Si le numérateur est égal au dénominateur ou plus grand que lui, la fraction vaut l'unité ou plus que l'unité; & c'est alors *une fraction improprement dite*.

40. COROLL. I. *Une fraction exprime toujours le quotient du numérateur divisé par le dénominateur, & elle est par conséquent un nombre de même nature que le numérateur.*

41. II. Lorsque deux, ou plusieurs fractions ont même dénominateur, celle qui a un plus grand numérateur est dans la même proportion plus grande; parce que renfermant l'une & l'autre les mêmes parties de l'unité, celle qui a un plus grand numérateur, contient en proportion plus de ces parties. Ainsi $\frac{8}{10}$ est double de $\frac{4}{10}$, $\frac{8}{12}$ est octuple de $\frac{1}{12}$.

Mais si des fractions ont même numérateur, celle qui a un

plus grand dénominateur est dans la même proportion plus petite ; parce que exprimant le même nombre de parties, elle les contient d'autant plus petites que son dénominateur est plus grand. Ainsi $\frac{2}{6}$ est la moitié de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ est double de $\frac{3}{8}$.

Cette propriété des fractions s'exprime en disant ; *que si deux fractions ont même dénominateur, leurs valeurs sont directement comme les numérateurs ; & que si elles ont même numérateur, leurs valeurs sont inversement comme les dénominateurs.*

42. On peut conclure de la : 1°. *Qu'on ne change pas la valeur d'une fraction, en multipliant ou divisant son numérateur & son dénominateur par le même nombre.* Car, par la multiplication on augmente le nombre des parties de l'unité & l'on diminue leur valeur en même proportion : par la division on diminue le nombre & l'on augmente la valeur de l'espèce des parties. Ainsi $\frac{6}{12}$ vaut $\frac{12}{24}$; où l'on multiplie haut & bas par 2 ; elle vaut aussi $\frac{3}{6}$ où l'on a divisé haut & bas par 2.

2°. *Que sans changer de valeur tout entier peut être mis sous la forme d'une fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur, ou même tout autre nombre, pourvu qu'on multiplie cet entier par ce nombre.* Ainsi 36 peut se présenter sous cette forme, $\frac{36 \times 4}{4}$, $\frac{36 \times 12}{12}$.

43. Problème I. *Réduire un nombre mixte* (a) *à une simple fraction, sans changer sa valeur.*

Sol. *Multipliés l'entier par le dénominateur de la fraction qui entre dans le nombre mixte, & ajoutés le produit à son numérateur.* Ainsi $12\frac{1}{4}$ devient $\frac{49}{4}$, $120\frac{2}{3}$ devient $\frac{362}{3}$.

44. Problème II. *Réduire plusieurs fractions au même dénominateur, sans changer leur valeur.*

Sol. *Multipliés le numérateur & le dénominateur de chacune, par le produit des dénominateurs de toutes les autres.* Ainsi, pour réduire $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ au même dénominateur, j'écris la première-

(a) Un entier joint à une fraction, est appellé *nombre mixte.*

Ainsi

Ainsi, $\frac{3\times15}{4\times15}$: la seconde ainsi, $\frac{2\times12}{5\times12}$: la troisième ainsi, $\frac{1\times20}{3\times20}$; ce qui se réduit à $\frac{45}{60}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{20}{60}$. Il est évident que par là chacune garde sa première valeur (42), & que cependant elles acquièrent le même dénominateur.

45. Remarque. Lorsque les dénominateurs de deux fractions ont des facteurs communs, la réduction au même dénominateur se fait plus simplement, *en multipliant haut & bas dans chacune par les facteurs du dénominateur de l'autre, qui ne sont pas communs.* Ainsi, je réduis $\frac{3}{12}$ & $\frac{1}{15}$ au même dénominateur, en les écrivant dabord de cette façon, $\frac{3}{4\times3}$, $\frac{1}{5\times3}$, pour voir les facteurs communs des deux dénominateurs; puis multipliant haut & bas dans la première par 5, & dans la seconde par 4, ce qui donne $\frac{3\times5}{4\times3\times5}$, $\frac{1\times4}{5\times3\times4}$, ou bien $\frac{15}{60}$, $\frac{4}{60}$

46. Lemme. Pour trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres donnés *a* & *b*, divisés le plus grand, que je suppose *a*, par le plus petit *b*; s'il vient un 1er. reste *c*, divisés *b* par *c*; s'il vient un 2^d^. reste *d*, divisés *c* par *d*; s'il vient un 3e. reste *e*, divisés *d* par *e*; & enfin, quand vous aurez une division sans reste, le diviseur qui aura servi alors, sera le nombre que vous cherchez.

Ex. On demande le plus grand diviseur commun de 384 & de 56. 1°. Je divise 384 par 56, & j'ai $\frac{384}{56}=6$, avec 48 pour reste. 2°. Sans faire attention au quotient, je divise 56 par 48, & j'ai $\frac{56}{48}=1$ & 8 pour reste. 3°. Je divise 48 par 8, & j'ai $\frac{48}{8}=6$ sans reste. D'où je conclus que 8 est le plus grand nombre qui puisse diviser à la fois 384 & 56. (La démonstration de cette méthode sera donnée plus bas).

47. Problème III. *Réduire une fraction à son expression la plus simple, sans changer sa valeur.*

Sol. *Divisés ses deux termes par leur plus grand diviseur commun, & écrivés les quotients à la place de ces termes.* Il est évident que par là vous rendrez l'expression plus simple, sans changer la valeur de la fraction proposée (42). Ainsi $\frac{252}{396}$ se réduit à $\frac{7}{11}$, en divisant haut & bas par 36, qui est le plus grand diviseur commun de 252 & de 396.

CHAPITRE II.

Des quatre opérations de l'Arithmétique sur les fractions.

48. I. L'ADDITION des fractions se fait, *en les réduisant au même dénominateur & prenant la somme des numérateurs.* Ainsi, pour ajouter $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, j'écris dabord $\frac{18}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$ & prenant la somme des numérateurs, j'ai $\frac{46}{24} = 1\frac{11}{12}$. (Ce caractère = signifie *égale*).

49. II. La soustraction se fait *en réduisant au même dénominateur, & prenant la différence des numérateurs.* Ainsi $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ devient $\frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$.

50. III. Pour multiplier les fractions, *prenez le produit des numérateurs, & mettez le en fraction sur celui des dénominateurs.* Ainsi, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{24}$, ou $\frac{1}{4}$.

51. IV. Pour diviser les fractions, *renversez les termes de la fraction qui doit servir de diviseur, multipliez de suite, & les produits mis en fraction donneront le quotient.* Ainsi, pour diviser $\frac{5}{6}$ par $\frac{1}{3}$, j'écris $\frac{5}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$.

52. REMARQUES. I. Si on doit multiplier ensemble plusieurs fractions qui ayent les mêmes nombres parmi leurs numérateurs & leurs dénominateurs, *il est plus simple* (42) *d'effacer ces nombres haut & bas & de multiplier le reste.* Ainsi $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{5}$ se réduit à $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$.

53. II. *Pour multiplier une fraction par un entier, il suffit de multiplier le numérateur, ou de diviser le dénominateur par cet entier* (41). Ainsi $\frac{9}{21} \times 3$ donne $\frac{9 \times 3}{21}$, ou bien $\frac{9}{\frac{21}{3}} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$.

54. III. *Pour diviser une fraction par un entier, il suffit de diviser le numérateur, ou de multiplier le dénominateur par cet entier* (41). Ainsi pour diviser $\frac{6}{7}$ par 3, il est indifférent d'écrire $\frac{2}{7}$,

en divisant le numérateur par 3 ; ou $\frac{6}{21}$, en multipliant le dénominateur par 3.

55. IV. *Pour diviser un entier par une fraction, il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction, & mettre le produit en fraction sur le numérateur.* Ainsi, pour diviser 6 par $\frac{3}{5}$, j'écris $\frac{6\times5}{3}$ ce qui fait 10.

56. V. *Pour prendre une fraction de fraction, p. ex., les* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{1}{6}$, *il faut multiplier ensemble les deux fractions, ce qui donne ici* $\frac{3}{24}$. Il en est de même pour prendre une ou plusieurs parties d'un entier, par ex. les $\frac{9}{10}$ de 25, je dois multiplier $\frac{9}{10}$ par 25, & je trouve 22 $\frac{5}{10}$, qui exprimeront les $\frac{9}{10}$ de 25.

CHAPITRE III.

De l'origine & des propriétés des fractions décimales.

57. NOUS avons vu (3) que dans la numération ordinaire, la valeur locale des caractères décroit en progression décuple, en allant de gauche à droite, de façon que le dernier exprime toujours des unités simples. Mais rien n'empêche de conçevoir cette progression prolongée au-dessous des unités, de telle sorte que le premier caractère après les unités exprime des dixièmes, le second des centièmes, le troisième des millièmes, & ainsi de suite. Il faudra seulement pour éviter la confusion, séparer ces fractions des entiers, ce qui pourra se faire par un point ou une virgule. Ainsi 365, 947 désignera 365 entiers $+ \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$

58. DÉF. On appelle fractions *décimales* ces sortes de fractions, dont la valeur locale des caractères continue au-dessous de l'unité la progression décuple ou décimale, de la numération ordinaire. Ainsi 0, 947 est une fraction décimale, si le premier caractère exprime $\frac{9}{10}$, le second $\frac{4}{100}$, le troisième $\frac{7}{1000}$

59. COROLL. I. On déduira de là 1°. *Que sans changer la valeur d'une fraction décimale, on peut réduire ses caractères à désigner des unités de la plus petite espèce.* Ainsi dans l'exemple ci-dessus, 9 qui exprime des dixaines, 4 des centaines, 7 des millièmes, peuvent se réduire (42) à $\frac{900}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{7}{1000}$, ou bien à $\frac{947}{1000}$; & comme toute autre suite de décimales se peut réduire de même, on en conclura que *ces sortes de fractions ont toujours pour dénominateur l'unité suivie d'autant de* 0, *qu'il y a de caractères au numérateur.* Voilà pourquoi le dénominateur décimal reste toujours sous-entendu.

60. Il s'ensuit de là qu'*on n'augmente point la valeur d'une fraction décimale en mettant des* 0 *à sa suite*; puisqu'il est censé qu'on en ajoute autant au dénominateur qu'au numérateur. Ainsi 0,4 vaut 0,40 ou 0,4000. *D'où l'on voit qu'en ajoutant un nombre convenable de* 0, *on peut réduire toute sorte de fractions décimales au même dénominateur, sans changer leurs valeurs.*

$$\left.\begin{array}{l} 0,4 \\ 6,78 \\ 7,934 \end{array}\right\} \text{se réduisent à} \left\{\begin{array}{l} 0,400 \\ 6,780 \\ 7,934 \end{array}\right.$$

Par ce moyen on peut présenter un entier sous la forme d'une fraction décimale; p. ex. au lieu de 154, on peut écrire 154,0000.

61. COROLL. II. *Une unité décimale d'un rang quelconque, vaut plus que la somme de tout ce que désignent les caractères décimaux qui viennent après.* Ainsi dans 4,399 l'unité décimale du premier rang, qui est $\frac{1}{10}$ ou $\frac{100}{1000}$, vaut plus que la somme du reste, qui est $\frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$, ou $\frac{99}{1000}$.

On conclura de là 1°. que la plus grande de deux fractions décimales, est celle qui la première présente un caractère de plus grande valeur en allant de gauche à droite. Ainsi 0,4 est plus grande que 0,39999, continuée à l'infini.

2°. Que si dans un calcul on néglige toutes les décimales qui viennent après le premier rang, l'erreur ne peut être de $\frac{1}{10}$; que si

on néglige celles qui viennent après le ſecond, elle ne peut être de $\frac{1}{100}$ &c. Cependant pour rendre cette erreur auſſi petite qu'il eſt poſſible, en n'employant que tel ou tel nombre de décimales, *il faut augmenter d'une unité le dernier des caractères qui reſtent, ſi le premier de ceux qu'on a retranchés, ſurpaſſe 5.* p. ex. dans 0, 8270, ſi je retranche ſimplement les deux derniers caractères, l'erreur eſt de $\frac{70}{10000}$ en défaut; mais en ajoutant une unité au dernier de ceux qui reſtent, de cette manière 0, 83, l'erreur n'eſt que de $\frac{30}{10000}$ en excès.

CHAPITRE IV.

Des opérations de l'Arithmétique ſur les fractions décimales.

62. ADDITION. Pour ajouter enſemble des fractions décimales, *il faut les écrire de façon que les entiers, s'il y en a, ainſi que les unités décimales de même eſpèce ſoient en colonne. Procéder enſuite comme dans l'addition ordinaire, & placer dans la ſomme la virgule dans la colonne des virgules.*

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 54,24 \\ 3,0589 \\ 136,9 \\ \hline \text{Somme} \ldots\ldots 194,1989 \end{array}$$

La raiſon de ce procédé eſt que ces décimales réduites au même dénominateur deviennent....

$$\begin{array}{r} 54,2400 \\ 3,0589 \\ 136,9000 \\ \hline \text{Somme} \ldots\ldots 194,1989 \end{array}$$

63. SOUSTRACTION. Pour soustraire une fraction décimale d'une autre, *il faut écrire celle qu'on veut soustraire au-dessous de l'autre, opérer comme dans la soustraction ordinaire, & conserver les virgules en colonne.* Ainsi pour soustraire 244, 630 de 860, 95, j'écris comme dans cet exemple.

860, 95
244, 630

Différence. . . 616, 320

Et j'ai pour différence 616, 320 (la raison est la même que pour l'addition.)

64. MULTIPLICATION. *Multipliez dabord tout le multiplicande par tout le multiplicateur, comme si c'étoit des nombres ordinaires: mettez ensuite autant de derniers caractères du produit en décimales, qu'il y en a dans le multiplicande & dans le multiplicateur.*

EXEMPLE.

30, 745
4, 65

142, 96425

Dans cet exemple multipliant les deux facteurs comme s'ils étoient des nombres entiers, on a le produit 14296425, dont on met les cinq derniers caractères en décimales, parce qu'il y à cinq décimales dans ses facteurs.

Pour démontrer cette règle il suffit de mettre les deux facteurs sous la forme des fractions ordinaires (ce qui donneroit ici $\frac{30745}{1000} \times \frac{465}{100} = \frac{14296425}{100000} = 142, 96425$). Et l'on voit alors que dans tous les cas un produit doit renfermer autant de décimales qu'il y en a dans ses facteurs.

65. COROLL. Puisque dans toute division le dividende est le produit du quotient par le diviseur, *il doit contenir autant de décimales qu'il y en a dans le diviseur & dans le quotient.*

66. REMARQUE. Quand les premiers caractères d'une fraction décimale sont des 0, il peut arriver qu'après avoir multi-

plié, comme il eſt dit ci-deſſus, le produit renferme moins de caractères, qu'il n'y a de décimales dans ſes facteurs. Cela ſe trouve, p. ex., dans 0, 04 × 0, 003, dont le produit 12, pris à la façon des nombres ordinaires, contient deux caractères, tandis que les facteurs contiennent cinq décimales. Alors *on doit écrire à la gauche du produit le nombre de zèro qu'il faut, pour qu'il renferme autant de caractères décimaux qu'il s'en trouve dans ſes facteurs.* Ainſi 0, 04 × 0, 003 = 0, 00012. De même 0, 0016 × 0, 014 = 0, 0000224.

67. DIVISION. Pour diviſer une fraction décimale par une autre. 1°. *on commence par ajouter, s'il le faut, ou ſuppoſer ajoutés à la ſuite du dividende aſſez de zèro pour qu'il ait au moins autant de décimales que le diviſeur.* 2°. *On diviſe enſuite l'un par l'autre, ſans faire attention aux décimales.* 3°. *Dans le quotient ainſi trouvé, on ſépare autant de décimales qu'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviſeur; de ſorte que, s'il y en a le même nombre dans les deux, le quotient eſt un entier.*

EXEMPLE.

$$4,1436 \left\{ \frac{1,2.}{3,453.} \right.$$

Dans cet exemple le quotient a trois décimales, parce qu'il y en a quatre dans le dividende & une dans le diviſeur.

La raiſon de ce procédé eſt que le dividende devant contenir autant de décimales qu'il s'en trouve en ſomme dans le diviſeur & le quotient (65), il faut que celui-ci renferme l'excès de celles du dividende ſur celles du diviſeur.

68. PROBLÈME. *Étant donnés deux nombres qui n'ont pas de quotient exact, trouver un quotient qui ne différe pas du véritable d'une unité décimale auſſi petite qu'on voudra, p. ex. de* $\frac{1}{100000}$.

SOL. Opérez à l'ordinaire juſqu'à ce que vous ayez le premier reſte : ajoutez un zèro à ce reſte, & diviſant à l'ordinaire, mettez le quotient qui viendra en décimale à la ſuite du quotient trouvé; & continués ainſi juſqu'à ce que vous ayez le nombre de décimales demandé.

EXEMPLE.

Il eſt clair que dans cet exemple le quotient trouvé ne différe pasdu véritable de $\frac{1}{100000}$, puiſque (61) toutes lesdécimales qu'on pourroit mettre à la ſuite ne pourroient valoir $\frac{1}{100000}$.

```
3232 { 13
26   { 248, 61538.
63
52
112
104
 80
 78
  20
  13
   70
   65
    50
    39
    110
    104
      6.
```

69. COROLL. *On peut donc réduire une fraction ordinaire en fraction décimale en la conſidérant comme un reſte de diviſion, & opérant comme ci-deſſus.* Quand cette réduction ne peut point ſe faire exactement, on le connoitra en voyant revenir les mêmes reſtes qui ſe ſeront déjà préſentés dans quelque diviſion précédente, & dès-lors les mêmes ſeries de caractères au quotient.

SECTION TROISIEME.

Des nombres abſtraits conſidérés par rapport à leurs facteurs.

CHAPITRE PREMIER.

Des nombres ſimples & des nombres compoſés.

PARMI les nombres abſtraits dont nous parlons ici, certains peuvent réſulter de la multiplication de quelques facteurs, & d'autres ne le peuvent pas. Ainſi 4 peut réſulter de

2. 2 ; 6 de 2. 3 ; 30 de 2. 3. 5 ; &c. Mais il n'y a point de facteurs dont la multiplication réciproque puisse donner les nombres 3, 7, 11, &c. (Si on en excepte ces nombres eux-mêmes multipliés par l'unité qu'on ne doit pas mettre au rang des facteurs).

70. DÉFINITIONS. I. On appelle *nombre simple* ou *nombre premier*, celui qui ne peut résulter de la multiplication de quelques autres. Voici tous ceux qui sont au-dessous de 100.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

71. II. On appelle nombre *composé* tout nombre qui peut résulter de la multiplication de quelques nombres simples, comme 10 qui résulte de 2. 5 ; 12 qui résulte de 2. 2. 3 ; 16 qui résulte de 2. 2. 2. 2.

On dit encore de deux nombres qu'ils sont *premiers entr'eux*, lorsqu'ils n'ont aucun facteur commun ; ce qu'on exprime aussi en disant qu'ils n'ont aucune *mesure commune*. Ainsi 8 & 15 sont premiers entr'eux, de même que 10 & 21, 6 & 35, &c.

72. III. Un nombre est dit *multiple* d'un autre, quand il le contient un nombre de fois juste. Ainsi 12 est multiple de 2, de 3, de 4 & de 6. Les nombres qui sont contenus un certain nombre de fois dans les autres, s'appellent leurs *sous-multiples* ou leurs *parties aliquotes* ou leurs *mesures*.

73. *Tout nombre composé résulte de la multiplication de quelques nombres simples.* Ainsi 24 résulte de 2. 2. 2. 3 ; 35 résulte de 5. 7. De sorte que si j'ai à désigner la multiplication de 24 par 35, je puis écrire (2. 2. 2. 3) (5. 7.) & dans quelque ordre que je multiplie ces facteurs, le produit sera toujours celui de 24 par 35.

74. *Un produit doit contenir tous les nombres premiers qui sont dans ses facteurs, & n'en peut contenir d'autres.* Ainsi puisque 10 résulte des seuls nombres premiers 2 & 5, & que 21 résulte seulement de 3 & de 7, le produit de 10 par 21, qui est 210, contiendra les nombres premiers 2, 3, 5, 7, & ne contiendra que ceux-là.

On peut se convaincre de cette vérité en écrivant à la place des produisants 10 & 21, leurs facteurs simples 2. 5. 3. 7. Or, quelque facteur simple qu'on ajoute, qu'on retranche ou qu'on change parmi ceux-là, on n'aura jamais le produit de 10 par 21. Donc ce produit a pour facteurs simples les nombres premiers 2, 3, 5, 7, & n'en a point d'autres.

75. *Si un nombre mesure un autre nombre, il mesurera également tous les multiples de celui-ci.* Ainsi 3 mesure de 12, doit mesurer 36, 48, 72, qui sont des multiples de 12.

76. *Quand un nombre est la mesure commune de deux ou de plusieurs nombres, il l'est aussi de leur somme & de leur différence.* Ainsi 3 étant la mesure commune de 18 & de 12 (puisqu'il est contenu 6 fois dans le premier, & 4 fois dans le second) le sera aussi de leur somme $18 + 12$, qui le contiendra dix fois; & de leur différence $18 - 12$, qui le contiendra deux fois.

77. Quand une fraction est réduite à l'expression la plus simple, le numérateur & le dénominateur sont premiers entr'eux; puisqu'il ne leur reste aucun diviseur commun. D'où l'on conclura, *que si une pareille fraction est ajoûtée à un entier, & qu'on réduise le tout en forme de fraction, le numérateur & le dénominateur seront encore premiers entr'eux.*

P. ex. si j'ai le nombre mixte $12\frac{3}{5}$ dans lequel 3 & 5 sont premiers entr'eux, en réduisant à une seule fraction (43) j'aurai $\frac{63}{5}$. Or, je dis que 63 & 5 seront premiers entr'eux; car s'ils ne l'étoient pas, le diviseur commun de 63 & de 5 diviseroit aussi 60 multiple de 5 (75); il diviseroit donc 3, différence de 60 & de 63 (76); & par conséquent 3 & 5 auroient un diviseur commun, & la fraction $\frac{3}{5}$ ne seroit pas réduite à l'expression la plus simple, ce qui est contre la supposition.

Tout nombre est divisible sans reste par chacun de ceux qui ont été ses facteurs. Le problême suivant donne la méthode de trouver tous ces diviseurs, tant simples que composés.

78. PROBLÈME. *Trouver tous les diviseurs exacts d'un nombre.*

SOL. *Cherchez d'abord tous les nombres premiers qui divisent exac-*

zemens le nombre proposé, en commençant par les plus petits ; multipliez ensuite tous ces diviseurs simples, tant par eux-mêmes que par les diviseurs composés déjà trouvés ; & ce sera là tous les diviseurs exacts du nombre proposé.

EXEMPLE I.

210	2,
105	3, 6,
35	5, 10, 15, 30,
7	7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210.
1	

On demande ici tous les diviseurs exacts du nombre 210. Pour opérer sans confusion, je tire une ligne de haut en bas ; j'écris ce nombre d'un côté de la ligne & son plus petit diviseur simple, savoir 2, de l'autre côté. Je divise ensuite 210 par 2, & j'écris le quotient 105 sous le dividende. Je vois ensuite que 105 ne peut plus être divisé par 2, mais par 3 ; j'écris donc ce nouveau diviseur à côté, & le quotient 35 au-dessous. Essayant de nouveau sur 35 les plus petits diviseurs simples, je vois que ce nombre est divisible par 5, que j'écris vis-à-vis, & le quotient 7 au-dessous de 35. Voyant enfin que 7 n'a d'autre diviseur simple que lui-même, je l'écris au rang des diviseurs, de façon que 2, 3, 5, 7 sont les seuls diviseurs simples du nombre proposé.

Pour trouver les diviseurs composés, je commence à multiplier 2 par 3, ce qui donne 6, que j'écris vis-à-vis 3. Je multiplie ensuite 2, 3, 6 par 5, & j'écris vis-à-vis les produits 10, 15, 30. Enfin je multiplie par 7 tous les nombres qui sont au-dessus, j'écris à côté de 7 les produits 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210, & ce sont là tous les diviseurs exacts du nombre 210.

EXEMPLE II.

360	2,
180	2, 4,
90	2, 8,
45	3, 6, 12, 24,
15	3, 9, 18, 36, 72,
5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.
1	

79. Dans ce ſecond exemple on trouve par la même méthode tous les diviſeurs exacts de 360, & en les comparant avec ceux du nombre 210 (ex. I.) on voit que le plus grand facteur ou diviſeur commun de ces deux nombres eſt 30. Or, 30 eſt le produit des facteurs ſimples 2, 3, 5 communs à ces deux nombres; d'où l'on conclura *que l'on a le plus grand diviſeur commun de deux nombres, ſi l'on prend le produit des facteurs ſimples communs à ces nombres.*

CHAPITRE II.

Des puiſſances & de leurs principales propriétés.

80. QUAND un même nombre entre pluſieurs fois comme facteur dans la compoſition d'un autre, le produit qui en réſulte s'appelle une *puiſſance* de ce facteur, qui par cette raiſon s'appelle *racine* relativement à ce produit. Ainſi, puiſque 4 = 2. 2, 4 ſera la *ſeconde puiſſance*, ou *le quarré* de 2, & 2 en ſera *la racine quarrée*: puiſque 8 = 2. 2. 2, 8 ſera la troiſième puiſſance, ou le *cube* de 2, & 2 ſera ſa *racine cubique*: de même 16 ſera la *quatrième puiſſance* de 2, 32 en ſera la *cinquième*, & ainſi de ſuite. Au lieu d'écrire la racine pluſieurs fois de ſuite, pour déſigner une puiſſance, on l'enferme entre deux crochets, & on met à côté, & un peu au-deſſus, un chiffre qui déſigne combien de fois elle entre comme facteur dans la puiſ-

ſance. Ainſi $(2)^2$ déſigne 2.2 ou la ſeconde puiſſance de 2; $(2)^3$ en déſigne la troiſième; $(2)^4$ en déſigne la quatrième. Ce chiffre écrit au-deſſus s'appelle *l'expoſant* de la puiſſance.

La table ſuivante préſente les quarrés & les cubes des dix premiers nombres.

Quarrés. 1 : 4 : 9 : 16 : 25 : 36 : 49 : 64 : 81 : 100.
Cubes... 1 : 8 : 27 : 64 : 125 : 216 : 343 : 512 : 729 : 1000.

81. On obſervera comme une propriété remarquable de ces nombres, 1°. *Que ſi dans la ſuite des quarrés on ſouſtrait de chacun celui qui le précède vers la gauche, on forme la ſuite des nombres impairs* 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, &c. *qui croiſſent toujours de* 2.

2°. Que ſi dans la ſuite des cubes on ſouſtrait de chacun celui qui le précède, il vient la ſuite 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, qui paroît d'abord irregulière. *Mais ſi chacun de ces termes eſt ſouſtrait encore de celui qui le précède, on a celle-ci* 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, *dans laquelle chaque terme augmente régulièrement de* 6.

82. Tout nombre pair ſe peut diviſer exactement une ou pluſieurs fois par 2, juſqu'à ce qu'on parvienne à un quotient impair. Ainſi 30 ne peut être diviſé qu'une fois par 2, parce que le premier quotient eſt 15: 28 peut l'être deux fois, parce que le premier quotient eſt 14, & le ſecond eſt 7: 24 peut l'être trois fois, parce que le premier quotient eſt 12, le ſecond 6, & le troiſième 3. Le nombre 2 entre donc dans la compoſition d'un nombre pair une ou pluſieurs fois comme facteur avec un nombre impair; d'où l'on conclura *qu'un nombre pair quelconque eſt le produit d'un nombre impair multiplié par le nombre* 2, *ou par quelqu'une de ſes puiſſances.* Ainſi $30 = 2.15$; $28 = (2)^2.7$; $24 = (2)^3.3$.

83. *Une puiſſance ne peut avoir d'autres facteurs en nombres premiers que ceux qui ſont dans ſa racine.* Car la puiſſance eſt un produit dans lequel la racine entre un certain nombre de

fois comme produisant. Or, un produit ne contient d'autres facteurs en nombres premiers que ceux qui sont dans ses produisans (74). Ainsi le quarré de 10, qui est 100, n'a d'autres facteurs ou diviseurs simples que 2 & 5, qui le sont de 10. Son cube qui est 1000, sa quatrième puissance qui est 10000 n'ont également que ceux-là.

84. De là on peut conclure, 1°. *Que si deux nombres n'ont pas de facteur commun, leurs puissances quelconques n'en auront point*; ou bien, *que deux nombres étant premiers entr'eux, ils le seront encore à quelque puissance qu'on les éleve.*

85. 2°. *Qu'un entier joint à une fraction réduite à l'expression la plus simple ne peut devenir nombre entier seul par son élévation à quelque puissance.* Car il faudroit pour cela qu'en réduisant le tout à une seule fraction, & l'élevant à différentes puissances, le dénominateur pût diviser exactement le numérateur. Or, cela est impossible; puisque ces nombres étant premiers entr'eux dans la racine (77) le seront encore dans les puissances (84).

86. 3°. *Qu'une fraction proprement dite, ne peut jamais devenir nombre entier, par son élévation à quelque puissance.* Ainsi $(\frac{1}{2})^2$ devient $\frac{1}{4}$, $(\frac{2}{3})^3$ devient $\frac{8}{27}$.

87. Remarques. Nous n'avons parlé jusqu'ici que des puissances des purs nombres abstraits; mais il est clair qu'on peut former des puissances avec des nombres positifs & négatifs, puisqu'on peut les multiplier les uns par les autres (26). Or, $+2 \times +2$, ou $(+2)^2 = +4$, de même -2×-2 ou $(-2)^2 = +4$; $+2 \times +2 \times +2$ ou $(+2)^3 = +8$; $-2 \times -2 \times -2$ ou $(-2)^3 = -8$, de même $(+2)^4$ ou $(-2)^4 = +16$; $(+2)^5 = +32$ & $(-2)^5 = -32$. D'où l'on conclura que *quel que soit le signe de la racine, celui de la seconde, de la quatrième, de la sixième & de toutes les puissances d'exposant pair sera +. Mais que le signe de la troisième, de la cinquième, de la septième & de toute autre puissance d'exposant impair sera + ou —, suivant que le signe de la racine sera + ou —.*

88. Il s'ensuit de là, *qu'il est impossible qu'un nombre réel ait une puissance d'exposant pair négative*. Car une pareille expression seroit contradictoire ; puisque la notion qu'on a (87) d'une puissance d'exposant pair suppose des facteurs en nombre pair, & que la notion des puissances négatives les suppose en nombre impair.

CHAPITRE III.

Des racines & des nombres irrationnels & imaginaires qui en résultent.

NOUS avons déjà vu qu'on appelle *racines*, ces nombres qui multipliés par eux-mêmes forment les puissances. On les distingue par les différents degrès de leurs puissances. Ainsi, on dit *racine seconde ou quarrée*, *racine troisième ou cubique*, *racine quatrième*, *racine cinquième*, &c.

89. Il est impossible qu'un nombre fractionnaire comme $\frac{2}{3}$, ou un nombre mixte, comme $4\frac{2}{3}$ puisse être la racine exacte d'un nombre entier quelconque (86, 85). *Il faut donc que la racine d'un entier soit un entier, ou bien qu'elle soit indéterminable en nombres, soit entiers, soit fractionnaires, soit mixtes.*

En observant la suite naturelle des nombres entiers, on voit qu'il y en a peu dont les racines puissent être des entiers. Parmi les cent premiers nombres, p. ex. il n'y en a que dix dont les racines quarrées soient des entiers, il n'y en a que quatre qui ayent des entiers pour leurs racines cubiques ; & il y en a encore moins pour les racines plus basses. Il faut donc que tous les autres nombres ayent des racines indéterminables. Tels sont 2, 3, 5, 7, 10, 11, &c. C'est pour désigner ces sortes de racines qu'on a imaginé, le signe $\sqrt{}$ dont on couvre le nombre qu'il doit affecter. Ainsi $\sqrt[2]{12}$ désigne *la racine quarrée* de 12. On écrit un chiffre dans le signe, pour déter-

miner les différents degrés de la racine. Ainsi $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, &c. désignent les racines troisième, quatrième, cinquième, &c.

90. Quoiqu'il n'y ait ni fraction ni nombre mixte, qui exprime exactement la racine d'un entier, quand elle n'est pas un entier elle-même (89), on peut cependant en approcher toujours, & même fixer les limites entre lesquelles elle se trouve. P. ex., je vois dabord que $\sqrt{6}$ est plus grande que 2, & plus petite que 3, puisque 2×2 donne $4 < 6$, & que 3×3 donne $9 > 6$, *. Pour en approcher davantage, je prends $2\frac{1}{4}$, ou $\frac{9}{4}$; l'élevant au quarré j'ai $\frac{81}{16}$ ou $5\frac{1}{16}$, qui étant plus petit que 6, m'indique que $2\frac{1}{4} < \sqrt{6}$. Je prends ensuite $2\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$, dont le quarré $\frac{25}{4}$ ou $6\frac{1}{4}$ surpassant 6, me montre que $2\frac{1}{2} > \sqrt{6}$. J'essaye $2\frac{1}{3}$ dont le quarré $5\frac{4}{9}$ me fait voir que $2\frac{1}{3} < \sqrt{6}$. D'où je conclus que cette racine est entre $2\frac{1}{2}$ & $2\frac{1}{3}$.

D'ailleurs, je suis assuré que $\sqrt{6}$ peut être nombrée avec d'autres racines; qu'étant multipliée une fois par elle-même elle donne 6; qu'étant multipliée trois fois par elle-même elle donne 36. Cela suffit *pour conclure qu'elle est un vrai nombre, quoiqu'elle ne soit ni un entier ni une fraction ni un entier joint à une fraction.*

91. Ces sortes de racines des nombres qui ne sont pas des puissances exactes du même degré que la racine, sont appellées *nombres irrationnels* ou *incommensurables*, ou bien encore *quantités sourdes*. Il y en a d'autant d'espèces qu'on peut imaginer de racines. Ainsi $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{12}$, sont des nombres irrationnels de différentes espèces. Par opposition à ceux-là les autres nombres entiers, fractionnaires ou mixtes, sont appellés des *nombres rationnels ou commensurables.*

(*) Ce caractère $<$ désigne *plus grand* ou *plus petit*, suivant que la pointe est tournée à droite ou à gauche.

92. De ce que nous avons dit plus haut (87), il s'ensuit qu'une puissance d'exposant pair est toujours positive, mais que sa racine est indifféremment positive ou négative : ainsi $\sqrt{+4}$, ou $\sqrt[4]{+16}$ est ± 2, c'est-à-dire, *l'alternative* de $+2$ ou de -2. Or, quand une racine est d'exposant pair, la puissance à laquelle on la rapporte est censée être également d'exposant pair. S'il arrive donc qu'une telle racine soit rapportée à un nombre négatif, comme dans $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$; on suppose réunies deux choses contradictoires, savoir, une puissance *paire* & un nombre négatif qui la forme. Voilà pourquoi on appelle ces sortes d'expressions, des *racines impossibles ou imaginaires*. Telles sont celles-ci : $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-10}$, $\sqrt[8]{-30}$.

Quoiqu'il répugne qu'on puisse approcher de la valeur des imaginaires, ainsi qu'on approche de celle des incommensurables, elles peuvent cependant être nombrées, & même former des nombres réels par la multiplication. Ainsi, nous concevons $\sqrt{-2}$ comme donnant -2, en la multipliant par elle-même. *Rien n'empêche donc de mettre les imaginaires au rang des nombres.*

OBSERVATION GÉNÉRALE.

93. D'après tout ce que nous avons dit jusqu'ici, on voit qu'il faut distinguer trois espèces de purs nombres, savoir, les *rationnels*, *les irrationnels* & les *imaginaires* : que la première espèce contient les entiers, les fractionnaires & les mixtes : la seconde toutes les racines des nombres qui ne sont pas des puissances exactes du degré de la racine ; mais desquelles on peut approcher : la troisième, les racines d'exposant pair des nombres négatifs. Si nous voulons donc dorénavant démontrer quelque propriété générale des nombres, ou bien établir quelque méthode qui s'étende sur tous, il faudra parcourir en détail leurs différentes espèces, & les subdivisions de chacune, qui vont à l'infini ; ou bien il faudra au lieu de chiffres

employer des ſymboles qui repréſentent tous les nombres quels qu'ils ſoient. Ces ſymboles doivent être des caractères auxquels l'uſage n'ait attaché aucune valeur numérique, comme par exemple les lettres de l'alphabet. L'arithmétique ſymbolique qui naitra de là, ſera évidemment la ſcience de toute ſorte de nombres, ou bien *l'arithmétique univerſelle*; c'eſt de celle-là que nous allons parler dans la ſeconde partie de cet ouvrage.

ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

De l'Algèbre.

SECTION PREMIERE,

Des Notions générales & des principales opérations de l'Algèbre.

CHAPITRE PREMIER,

Définitions, Notions préliminaires & principes de convention.

94. L'ALGEBRE *est une science qui traite des propriétés générales des nombres par le moyen des symboles qui les représentent tous.* On l'a appellée pour cette raison *Arithmétique spécieuse*. Comme les lettres de l'alphabet n'ont parmi nous aucune valeur numérique, & que l'usage en est familier, on les emploie de préférence à d'autres caractères, pour être les symboles de toute sorte de nombres.

95. On appelle terme algébrique une ou plusieurs lettres écrites de suite, comme a ou abc ou cde.

Puisqu'il y a des nombres positifs & négatifs, il a fallu que les termes algébriques qui les représentent, fussent distingués par les signes d'opposition $+$ & $-$. Ici donc, comme dans l'Arithmétique, on appellera *positifs* les termes qui seront précédés du signe $+$, & *négatifs* ceux qui seront précédés du signe $-$.

96. On appelle *quantité algébrique* un ou plusieurs termes écrits de suite avec leurs signes. Ainsi ab ou $ab + bc - cd$ sont des quantités algébriques. Quand la quantité ne contient qu'un seul terme, elle est *incomplexe*, & s'appelle *monome*. Si elle en contient plusieurs, elle est *complexe*, & on l'appelle en général *polynome*. Le polynome prend le nom particulier de *binome*, s'il n'a que deux termes; celui de *trinome*, s'il n'en a que trois; celui de *quadrinome*, s'il n'en a que quatre, &c.

97. Afin d'énoncer & d'écrire plus briévement les quantités algébriques, on est convenu de ce qui suit.

1°. Qu'un terme qui ne seroit précédé d'aucun signe, seroit censé avoir le signe $+$, & représenter un nombre positif.

2°. Que les lettres écrites de suite, sans être séparées par quelque signe, représenteroient des nombres qui sont censés se multiplier. Ainsi abc signifie la même chose que $a \times b \times c$. Et comme plusieurs nombres multipliés ensemble donnent le même produit dans quelqu'ordre qu'on les multiplie (73) il est indifférent d'écrire abc ou acb ou bac.

3°. Pour abréger encore on est convenu qu'un chiffre placé à la droite & un peu au-dessus d'une lettre, désigneroit combien de fois cette lettre doit être écrite de suite. Ainsi a^2 signifie aa, ou bien $a \times a$; a^3b désigne $aaab$, ou bien $a \times a \times a \times b$. Ce chiffre s'appelle *exposant*, & les lettres qui n'en sont point accompagnées, sont censées avoir l'unité pour exposant.

98. Remarque. Quelquefois on prend pour exposant un nombre indéterminé, comme ici a^n. Quelquefois aussi l'exposant se rapporte à tout un terme comme dans $\overline{ab}^2$ ou $(ab)^2$, qui

signifie $ab \times ab$; ou bien à toute une quantité complexe comme dans $\overline{a+b}^3$ ou $(a+b)^3$, qui est ici pour $\overline{a+b} \times \overline{a+b} \times \overline{a+b}$. Mais alors on couvre cette quantité d'un trait au bout duquel on place l'exposant comme dans $\overline{a+b}^3$, ou bien on la renferme entre deux paranthèses de cette manière $(a+b)^3$. En général *l'exposant désigne toujours combien de fois la même quantité entre pour facteur dans un produit.*

99. Deux ou plusieurs termes sont *semblables*, lorsqu'ils contiennent les mêmes lettres accompagnées des mêmes exposants. Ainsi dans $ab^2 + ab^2 + ab^2$ les trois termes sont semblables. *On peut donc ici prendre le terme ab^2 pour unité & le nombrer avec ses semblables.* Ce qui donnera 3 fois ab^2 ou $ab^2 \times 3$, ou bien $3ab^2$.

100. Le chiffre qu'on place à la tête d'un terme est appellé *coefficient* ; il en est un facteur & désigne combien de fois de suite le terme devroit être répété. Ainsi $3ac$ désigne $3 \times ac$, ou 3 fois ac, ou bien $ac + ac + ac$.

101. Quand un terme n'a pas de coefficient exprimé, on peut l'envisager comme ayant l'unité pour coefficient. Ainsi a^2b est la même chose que $1a^2b$. Quelquefois aussi on prend pour coefficient un nombre indéterminé ; mais alors on l'enferme entre deux paranthèses, comme étant un facteur qui multiplie le reste. Ainsi dans $(a+b)d$, $a+b$ est le coefficient de d.

102. COROLL. Il y a donc une grande différence entre un exposant & un coefficient ; car si l'on prend a^2 & $2a$, & qu'on suppose $a = 4$, on aura $a^2 = 4 \times 4 = 16$, & $2a = 4 + 4 = 8$.

103. Une quantité algébrique a autant de dimensions, qu'elle contient de facteurs simples. Ainsi a^2 est de deux dimensions, parce qu'elle a deux facteurs simples $a \times a$. De même le produit $\overline{a+b} \times \overline{a+b}$ seroit de deux dimensions (le trait qui couvre le binome $a+b$, désigne que la multiplication s'étend aux deux termes).

CHAPITRE II.

De la réduction, de l'addition & de la soustraction des quantités Algébriques.

104. *La réduction est un changement fait dans l'expression d'une quantité, par lequel on la ramène au plus petit nombre possible de termes, sans changer sa valeur.* Cette manière de simplifier suppose qu'on réduit plusieurs termes en un seul, ce qui ne peut avoir lieu que pour les termes semblables; *parce qu'ils sont les seuls qui puissent être nombrés les uns avec les autres.* Ainsi $a^2 + 2a^2 + 3a^2$ deviennent $6a^2$ par réduction; mais $a^2 + b^2 + 3c$ ne sauroient se réduire, parce qu'aucun terme ne peut être nombré avec les autres.

105. Règle. *Si plusieurs termes semblables ont même signe, réduisés-les à un seul, qui ait pour coefficient la somme de tous les coefficients: s'ils ont différents signes, prenez la somme des coefficients positifs & celle des négatifs, écrivez le terme une seule fois avec un coefficient égal à la différence des deux sommes & le signe de la plus grande.*

Exemples. $3a^2b + c^2 + abq - c^2 + abd + a^2b$ devient par la réduction $4a^2b + abq + abd$. . . . . $8a^4cd + 3a^2c - 7a^4cd - 3a^2c$, devient a^4cd.

Si l'on écrivoit des nombres à la place des lettres qui les représentent, on les réduiroit de même pouvu qu'ils eussent une unité commune. Ainsi $4 + 7 - 3$ devient $+8$. $3 - 6 - 8 + 11$ devient 0. Mais l'expression $12 + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$ ne sauroit se réduire, par ce que ses termes n'ont point d'unité commune.

106. Remarque. Pour reconnoître plus aisément les termes semblables, il est bon d'écrire les lettres suivant l'ordre alphabétique, sur tout s'ils en contiennent beaucoup. Il est commode aussi de marquer d'un même signe chacun des termes sem-

blables qui se trouvent dans une quantité, afin de prendre plus aisément leur somme ou leur différence. Ainsi dans $4a^3cde + 2cd + 6dcr + adf - \frac{1}{2}a^3cde - 7dcr + 5adf - \frac{3}{2}a^3cde + xy + 3cd$, qui se réduit à $2a^3cde + 5cd - dcr + 6adf + xy$, les termes semblables sont marqués par des points disposés de la même manière.

107. ADDITION. *Dans l'addition de plusieurs quantités Algébriques, on se propose d'en former une seule qui vaille leur somme; & pour cela on les écrit les unes à la suite des autres avec leurs signes.*

EXEMPLE.

Quantités à ajouter . . . . . $\left\{\begin{array}{l} 4a^2c - bd + 4a^4r \\ 6bd - 2a^2c \\ -4a^4r + 3ab. \end{array}\right.$

Somme . . . $4a^2c - bd + 4a^4r + 6bd - 2a^2c - 4a^4r + 3ab.$

Cette somme se réduit à $2a^2c + 5bd + 3ab$. Avec un peu d'habitude dans le calcul on réduit les quantités algébriques en les écrivant.

108. REMARQUE. On n'augmente pas toujours une quantité en lui en ajoutant une autre; car si à ab on ajoute $-a$, la somme $ab - a$ sera pluspetite que ab (16). En général, *ajouter à une quantité celle d'une espèce opposée, c'est la diminuer dans son espèce; & lui ajouter celle de sa propre espèce, c'est l'augmenter.*

109. SOUSTRACTION. *On se propose dans la soustraction algébrique, de connoître la différence de deux quantités. Pour cela on écrit la quantité qu'on veut soustraire à la suite de l'autre en changeant ses signes de + en —, & de — en +.*

EXEMPLES.

Quantité donnée. . . . . $ab + c$	Quantité donnée... $2xy - 2ax$
Quantité soustraite . . . $ac - d$	Quantité soustraite.. $xy - 2ax$
Différence.... $ab + c - ac + d$	Différence..... xy

Nous avons démontré ailleurs (18) la nécessité de changer les signes de la quantité soustraite. On peut s'en convaincre encore ici, en observant que sans cela la différence ajoutée à la quantité soustraite ne rétabliroit jamais la quantité proposée, ce qui seroit contre la nature de cette opération (10).

110. REMARQUES. I. *Si la quantité à soustraire est une fraction, changez seulement les signes de son numérateur, ou de son dénominateur* : car comme on le verra plus bas, si les uns & les autres étoient changés à la fois la fraction resteroit telle qu'elle a été proposée. Ainsi pour soustraire $\frac{a^2 - x^2}{a - x}$ de b, j'écris $b - \frac{a^2 + x^2}{a - x}$, ou bien $b + \frac{a^2 - x^2}{-a + x}$.

II. Ainsi que l'addition n'augmente pas toujours une quantité, de même la soustraction ne la diminue pas toujours; car $-b$ soustrait de a donne $a + b > a$.

CHAPITRE III.

De la multiplication.

DANS la multiplication algébrique, on se propose le même objet que dans la multiplication numérique. C'est pour cela qu'il faut opérer sur quatre choses, sur les signes, sur les coefficients, sur les lettres & sur les exposans.

111. RÈGLE. 1°. *Le produit des termes qui ont des signes semblables est positif, & celui des termes qui ont des signes différents est négatif.* Ainsi $+ \times + = +$, $- \times - = +$, $+ \times - = -$, $- \times + = -$.

2°.

2°. *On multiplie les coefficients à la façon des nombres.*

3°. *Les lettres s'écrivent les unes à côté des autres sans signe.* Ainsi $a \times b$ devient ab.

4°. *Une lettre commune aux deux facteurs s'écrit une fois au produit avec un exposant égal à la somme de ses exposants, & chacune des autres s'écrit avec son exposant.* Ainsi $a^2b \times abc = a^3b^2c$.

5°. *Si quelque facteur, ou tous les deux à la fois sont des polynomes, on multiplie l'un par chaque terme de l'autre, & de la somme de ces produits partiels on forme le produit total.*

EXEMPLE.

$$3ab^2c \times 6ab^3c = 18a^2b^5c^2 \qquad -6c^2d \times -\tfrac{1}{2}d^2r = 3c^2d^3r.$$

$$4a^3b \times -6ad = -24a^4bd \qquad \overline{7a^4+2b^3c-a^2} \times \overline{2a^3-b} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 14a^7+4a^3b^3c-2a^5 \\ -7a^4b-2b^4c+a^2b \end{array} \right\}$$

DEM. 1°. La règle des signes est fondée sur les mêmes raisons que celles que nous avons déja données pour la multiplication des nombres positifs & négatifs.

2°. La règle des coefficients est fondée sur la nature de ces nombres; car $3a \times 2b = 3 \times a \times 2 \times b = 3 \times 2 \times a \times b = 6 \times a \times b = 6ab$.

3°. La règle des lettres est de convention (97).

4°. La règle des exposants suit aussi de la nature des exposants; car $b^2 \times b^3$ est la même chose que $bb \times bbb = bbbbb = b^5$.

5°. La cinquième partie de la règle est fondée sur la même raison qui fait que dans la multiplication numérique on multiplie le multiplicande par chaque caractère du multiplicateur, & que de la somme des produits partiels on forme le produit total.

112. REMARQUES. *Pour multiplier un polynome quelconque par une quantité, il suffit d'écrire cette quantité dans chaque terme*

du polynome. Ainsi $\overline{pq+r+1} \times x$ devient $pqx+rx+x$. Donc réciproquement, *si une même quantité est écrite dans plusieurs termes consécutifs, elle fait un produit avec tous les autres facteurs qui entrent dans ces termes.* Ainsi $a^2x^2 - b^2x^2$ est le produit de $\overline{a^2 - b^2} \times x^2$; $x - bx + x^2c$ est le produit de $\overline{1 - b + xc} \times x$.

Pour exercer les commençans dans la pratique de cette opération, nous allons placer ici les exemples suivans.

EXEMPLES.

Multiplicande. . . . . $a+b$
Multiplicateur . . . . . $a-b$

Produits partiels . . $\begin{cases} a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \end{cases}$

Produit total . . . . . a^2-b^2.

Multiplicande . . . . . $a^2+2ab+2b^2$
Multiplicateur. . . . . $a^2-2ab+2b^2$

Produits partiels . . $\begin{cases} a^4+2a^3b+2a^2b^2 \\ \quad -2a^3b-4a^2b^2-4ab^3 \\ \qquad +2a^2b^2+4ab^3+4b^4 \end{cases}$

Produit total. . . . . a^4+4b^4.

Multiplicande . . . . . $4a+2bc$
Multiplicateur . . . . . $4a+2bc$

Produits partiels . . . $\begin{cases} 16a^2+8abc \\ \quad +8abc+4b^2c^2 \end{cases}$

Produit total. . . . . $16a^2+16abc+4b^2c^2$.

CHAPITRE IV.

De la division.

113. L'OBJET de la division algébrique étant le même que celui de la division numérique, il faut, si l'opération est bien faite, *que le quotient multiplié par le diviseur rétablisse le dividende.* C'est de ce principe qu'on déduira toutes les règles de la division.

On indique cette opération en séparant les deux quantités par un trait, comme $\frac{a^2}{b}$; quelques-uns les séparent par deux points, comme $a^2 : b$.*

Quand on propose à diviser une quantité algébrique par une autre, il ne peut se présenter que trois cas différens, savoir : 1°. Que le dividende & le diviseur soient tous les deux monomes. 2°. Que l'un soit monome & l'autre polynome. 3°. Qu'ils soient tous les deux polynomes.

PREMIER CAS.

Division des quantités monomes.

114. RÈGLE DES SIGNES. *Le quotient des signes semblables est positif, & le quotient des signes différents est négatif.* Ainsi $\frac{+}{+}$ ou $\frac{-}{-} = +$; $\frac{+}{-}$ ou $\frac{-}{+} = -$.

115. RÈGLE des coefficients. *Les coefficients se divisent à la façon des nombres, & si la division ne peut se faire exactement, on les met au quotient en forme de fraction réduite à l'expression la plus simple.*

* Nous n'userons jamais de ce signe de division, crainte qu'on ne confonde les raisons avec des fractions.

116. Règle des lettres & des exposants. 1°. *Toute lettre du diviseur qui n'a pas sa pareille dans le dividende, se met en fraction sous le dividende.* Ainsi pour diviser a par b, j'écris $\frac{a}{b}$.

2°. Si quelque lettre du diviseur a sa pareille dans le dividende, ou bien elle a même exposant par tout, & *alors on l'efface, mettant 1 à sa place dans le terme où elle est seule*; ou bien elle a différens exposants, *alors on l'efface seulement dans le terme où elle a le plus petit exposant (mettant 1 à sa place, si elle y est seule,) & on l'écrit dans l'autre, avec un exposant égal à la différence des exposants.* Ainsi $\frac{a^2}{a}=\frac{a}{1}=a$; $\frac{b^2}{b^5}=\frac{1}{b^3}$.

Toutes ces règles sont fondées sur ce que nous avons dit plus haut (113 & 36).

Exemples.

$$\frac{4a^2b}{-2a}=-2ab.\ \frac{3b^2c}{12bc}=\frac{1}{4}b.\ \frac{6b^3cd^2r}{8b^4c^2d^3}=\frac{3}{4}\frac{r}{bcd}.\ \frac{a^4cd}{-a^4c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}}.$$

SECOND CAS.

Division de deux quantités dont l'une est polynome & l'autre monome.

117. Règle. I. *Si le dividende est polynome & le diviseur monome, opérez sur chaque terme en particulier, comme dans le cas précédent.* Ainsi $\frac{a^2bx-a^2cx+qx}{-x}=-a^2b+a^2c-q$; $\frac{x^2-x^3+a^2x^2}{x^2}=1-x+a^2$.

118. Coroll. *Quand une même lettre se trouve dans plusieurs termes consécutifs, pour les diviser par cette lettre, il suffit de l'effacer par tout avec le même exposant (ayant égard aux changemens de signe, & mettant 1 dans les termes où elle est seule).* Ainsi $\frac{a^2b-a^2}{-a^2}=-b+1$. $\frac{x^3-x^2y}{x^2}=x-y$.

II. Si le dividende est monome & le diviseur polynome,

1°. *Le quotient sera fractionnaire.* 2°. *Cette fraction sera réduite à sa plus simple expression, en effaçant les mêmes quantités dans le dividende & dans chaque terme du diviseur (mettant toujours 1 dans le terme qui est tout effacé).* Ainsi $\frac{a^2}{2a^2-a^2c-a^3}=\frac{1}{2-c-a}$; $\frac{a^2c}{a^2c-abd}=\frac{ac}{ac-bd}$.

TROISIÈME CAS.

Division des quantités polynomes.

119. La première chose qu'il y a à faire dans ce cas, c'est d'ordonner le dividende & le diviseur par rapport à une lettre commune à tous les deux, c'est-à-dire, *d'en écrire les termes suivant l'ordre décroissant des exposants de cette lettre.* Si cette lettre entre dans plusieurs termes avec le même exposant, on les écrit avec leurs signes les uns sous les autres, & cet assemblage est considéré comme un seul *terme complexe.* On opére ensuite en détail comme dans la division numérique (31).

EXEMPLE I.

$$\text{Dividende.}\left\{\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx - abc \\ \quad\circ \qquad\circ \qquad\circ \\ \quad - bx^2 + acx \\ \qquad\circ \\ \quad - cx^2 + bcx \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x^2 - xa + ab \\ \quad - bx \end{array}\right\}\text{Diviseur.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - c \end{array}\right\}\text{Quotient.....}$$

$$\text{A..}\left\{\begin{array}{l} - x^3 + ax^2 - abx \\ \quad\circ \qquad\circ \qquad\circ \\ \qquad + bx^2 \\ \qquad\quad\circ \end{array}\right.$$

$$\text{R..}\left\{\begin{array}{l} - cx^2 + acx - abc \\ \quad\circ \qquad\circ \qquad\circ \\ \qquad + bcx \\ \qquad\quad\circ \end{array}\right.$$

$$\text{B..}\left\{\begin{array}{l} cx^2 - acx + abc \\ \quad\circ \qquad\circ \qquad\circ \\ \qquad - bcx \\ \qquad\quad\circ \end{array}\right.$$

Tout étant ordonné par rapport à x (Ex. I.), je dis $\frac{x^3}{x^2}=x$ que j'écris au quotient; je multiplie le diviseur par x, &

j'en écris le produit en A avec des signes contraires, pour le soustraire du dividende. Plaçant o sous chacun des termes qui se détruisent, j'écris le reste en R, & je dis ensuite : $-\frac{cx^2}{x^2} = -c$; j'écris $-c$ au quotient. Multipliant & soustrayant à l'ordinaire, j'écris le produit en B, & comme il ne vient pas de nouveau reste, j'en conclus que le quotient exact est $x - c$.

120. Il faut, s'il se peut, ordonner de telle sorte que le premier terme du diviseur soit incomplexe, comme dans l'exemple précédent ; & si cela ne peut se faire, il faut chercher le quotient en détail, en divisant à part chaque terme complexe du dividende par tout le diviseur. Pour cela, *ordonnez l'un & l'autre par rapport à une nouvelle lettre qui rende le premier terme du diviseur incomplexe, & le premier terme du dividende aussi complexe qu'il sera possible.*

EXEMPLE II.

Dividende	$a^5 - a^4bc - a^3b - a^2b^2 + ab^2c + b^3$ o o $a^5b - a^4c - a^3b^2$ o	$a^3 - b^2$ $+a^3b$ } Diviseur
A	$-a^5 + a^2b^2$ o o $-a^5b$ o	$a^2 - ac - b$ } Quotient
R′	$-a^4bc - a^3b + ab^2c + b^3$ o o $-a^4c - a^3b^2$ o	(Caze 1) $a^5b + a^5 \mid \frac{a^3b + a^3}{a^2}$
B	$+a^4c - ab^2c$ o o $+a^4bc$ o	(Caze 2) $-a^4bc - a^4c \mid \frac{a^3b + a^3}{-ac}$
R″	$-a^3b + b^3$ o o $-a^3b^2$ o	(Caze 3) $-a^3b^2 - a^3b \mid \frac{a^3b + a^3}{-b}$
C	$+a^3b - b^3$ o o $+a^3b^2$ o	

Le dividende & le diviſeur étant ici ordonnés par rapport à la lettre a (Ex. II.) ont chacun pour premier terme une quantité polynome ou complexe; c'eſt pourquoi je diviſe cette quantité à part, en ordonnant par rapport à la lettre b (Voy. Caze 1), & le quotient juſte eſt a^2; multipliant le diviſeur par a^2 & changeant les ſignes, j'ai la quantité A; puis réduiſant le tout, le premier reſte eſt R'.

Puiſque le premier terme de ce reſte eſt complexe ainſi que le premier terme du diviſeur, j'en fais encore une diviſion à part; & en les ordonnant par rapport à la lettre b (Voy. Caze 2) le quotient eſt $-ac$; multipliant $-ac$ par tout le diviſeur, j'ai en changeant les ſignes, le produit B, & après la réduction il vient pour ſecond reſte R''.

Puiſque le premier terme de ce ſecond reſte eſt encore complexe, j'en fais la diviſion à part (Voy. Caze 3), & le quotient eſt $-b$. Multipliant $-b$ par le diviſeur, & changeant les ſignes, j'ai la quantité c; réduiſant enſuite à l'ordinaire, il ne me reſte rien. D'où je conclus que le quotient exact eſt a^2-ac-b.

CHAPITRE V.

Où l'on enſeigne à trouver tous les diviſeurs exacts d'une quantité algébrique, & où l'on démontre la méthode déjà donnée pour déterminer la plus grande meſure commune de deux nombres.

121. POUR trouver tous les diviſeurs exacts d'une quantité algébrique, on opére comme dans les nombres; c'eſt-à-dire, qu'on diviſe d'abord la quantité propoſée par tous ſes diviſeurs ſimples, juſqu'à ce que l'on ait l'unité pour quotient. Enſuite on multiplie tous ces diviſeurs les uns par les autres,

& l'ensemble de ces produits & de ces diviseurs simples ; renferme tous les diviseurs exacts de la quantité proposée.

Exemple. Soit la quantité $a^3b+a^2b^2$ dont on demande tous les diviseurs ; je les dispose comme on le voit ici.

$a^3b+a^2b^2$	a.
a^2b+ab^2	a, a^2.
$ab+b^2$	b, ab, a^2b.
$a+b$	$a+b$, a^2+ab, a^3+a^2b, $ab+b^2$, a^2b+ab^2, $a^3b+a^2b^2$.
1	

Je tire une ligne de haut en bas, pour séparer les diviseurs ; puis divisant la quantité donnée par a, le quotient est a^2b+ab^2, que j'écris sous la quantité proposée. Je vois que ce quotient peut être encore divisé par a, j'écris donc a à la droite, & le quotient $ab+b^2$ à la gauche de la ligne. Multipliant ensemble les diviseurs trouvés, j'ai a^2 que j'écris à la droite & sur la même ligne que a. $ab+b^2$ ne pouvant être divisé que par b, j'écris b à la droite de la ligne verticale, & le quotient $a+b$ à la gauche. Je multiplie tous les diviseurs trouvés par b, & j'écris sur la même ligne les produits ab, a^2b. $a+b$ ne pouvant être divisé que par lui-même, je l'écris au rang des diviseurs, & je mets 1 au quotient. Multipliant enfin ce nouveau diviseur par tous les autres déjà trouvés, j'en écris les produits sur la même ligne, & j'ai là tous les diviseurs de la quantité proposée.

122. Avant de démontrer la règle que nous avons déja donnée pour trouver le plus grand diviseur commun, ou la plus grande mesure commune de deux nombres, il faut rappeller ce que nous avons dit, n°. 75, 76, & y ajouter *que dans toute division exacte le diviseur mesure le dividende ; & qu'ainsi dès qu'il y a un reste, en ôtant ce reste du dividende, le diviseur le mesurera exactement.* Par ex. $\frac{17}{3}$ donne 5 pour quotient & 2 pour reste, otez 2 de 17, & le diviseur 3 mesurera exactement 17—2, qui font 15.

123. La règle qu'il faut démontrer est celle-ci : *lorsque divisant un nombre* a *par un plus petit* b, *il vient un reste* c ; *que divisant* b *par* c, *il vient un reste* d ; *que divisant* c *par* d, *il vient*

un

un reste e ; *que divisant* d *par* e, *il ne vient point de reste*, *je dis que* e *sera la plus grande mesure commune des deux nombres* a *&* b.

D. I. *e* sera la mesure commune de *a* & de *b*. Car 1°. *e* mesure *d* (hyp.), *d* mesure *c*—*e* (122). Donc *e* mesure *c*—*e* : d'ailleurs *e* mesure *e*. Donc (76) il mesure cette somme *c*—*e*+*e*, qui devient *c*. Donc 1°. *e* mesure *c*.

Div^es.	Div^rs.	Rest^s.
a	*b*	*c*
b	*c*	*d*
c	*d*	*e*
d	*e*	0

2°. *e* mesure *c*, *c* mesure *b*—*d*, donc *e* mesure *b*—*d* (75) ; d'ailleurs *e* mesure *d* (hyp.), donc *e* mesure la somme *b*—*d*+*d*, qui se réduit à *b*. Donc 2°. *e* mesure *b*.

3°. *e* mesure *b* ; *b* mesure *a*—*c* ; donc *e* mesure *a*—*c* : d'ailleurs *e* mesure *c* ; donc *e* mesure la somme *a*—*c* + *c* ou *a* ; donc enfin, *e* sera mesure commune de *a* & de *b*.

II. Je dis que *e* sera la plus grande mesure commune que puissent avoir *a* & *b*. Car, si un nombre plus grand que *e*, par ex. *f*, mesuroit *a* & *b*, on pourroit raisonner ainsi.

1°. *f* mesure *b* (hyp.) ; *b* mesure *a*—*c* ; donc *f* mesure *a*—*c* ; d'ailleurs *f* mesure *a* ; donc (76) il mesure la différence que donne *a*—*c* soustrait de *a* ; ou bien *a*—*a*+*c*=*c* ; donc 1°. *f* mesure *c*.

2°. *f* mesure *c* ; *c* mesure *b*—*d*, donc *f* mesure *b*—*d* : d'ailleurs *f* mesure *b* (hyp.) ; donc *f* mesure la différence que donne *b*—*d* soustrait de *b*, laquelle est *d*. Donc 2°. *f* mesure *d*.

3°. *f* mesure *d* ; *d* mesure *c*—*e* ; donc *f* mesure *c*—*e* ; d'ailleurs *f* mesure *c* (1°.) ; donc (76) *f* mesure la différence que donne *c*—*e* soustrait de *c*, c'est-à-dire, *e* ; donc *f* mesure *e*, ce qui est absurde ; puisque *f* est plus grand que *e* par l'hypothèse. Il ne peut donc pas y avoir un nombre plus grand que *e*, qui soit la mesure commune de *a* & de *b*.

SECTION SECONDE.

Des puissances & des racines.

CHAPITRE PREMIER.

De la formation des puissances.

124. DÉFINITION. *Toute expression qui ne contient que l'unité multipliée un certain nombre de fois par la même quantité, est une puissance de cette quantité.* Le nombre qui désigne combien de fois l'unité a été ainsi multipliée, est *l'exposant de la puissance*; & la quantité qui a multiplié l'unité, en est *la racine.*

Ainsi, puisque a est la même chose que $1 \times a$; a sera la première puissance de a; & en général *la première puissance d'une quantité est cette quantité même.* Puisque $a^2 = 1 \times a \times a$, a^2 sera la seconde puissance de a; a^3 la troisième; a^4 la quatrième, &c. (par analogie aux dimensions de l'étendue, la seconde puissance d'une quantité est appellée son *quarré*, & la troisième son *cube*. Comme la puissance est toujours relative à la racine, on voit bien qu'il a fallu distinguer autant d'espèces de racines que de puissances. Ainsi a est la racine première de a, la racine seconde ou quarrée de a^2, la racine troisième ou cubique de a^3, &c.

125. COROLL. On conclura de la définition des exposants : 1°. *Que toute expression numérique qui indiquera combien de fois la même quantité a multiplié l'unité, doit servir d'exposant à cette quantité.* Or, ce nombre de fois peut exiger pour expression exacte, tantôt un nombre rationnel, tantôt un nombre

irrationnel. *L'une & l'autre espèce de ces nombres peut donc servir d'exposant à une quantité.*

126. 2°. Rien n'empêche de donner aux exposants les signes d'opposition + & —. Mais alors l'exposant négatif doit désigner le contraire de ce que désigne le positif, c'est-à-dire, que celui-ci désignant que l'unité a été multipliée, l'autre désignera qu'elle a été divisée par la même quantité; de sorte que si a^2 représente $1 \times a \times a$, a^{-2} exprimer a $\frac{\frac{1}{a}}{a}$ ou $\frac{1}{a^2}$; de même a^{-3} indiquera que 1 a été divisé trois fois par a ou $\frac{1}{a^3}$; & enfin a^{-n} vaudra $\frac{1}{a^n}$; d'où l'on conclura *qu'une quantité élevée à une puissance négative vaut l'unité divisée par cette quantité élevée à la même puissance positive.*

127. 3°. Pour désigner le cas où l'unité n'a été ni multipliée ni divisée par une même quantité, il faut nécessairement donner 0 pour exposant à la quantité. Ainsi a^0 désigne 1 multiplié 0 fois par a, ou bien $a^0 = 1$. D'où l'on conclut *qu'une quantité quelconque avec l'exposant 0, est une expression particuliere de l'unité.*

128. On peut tirer de là ces conclusions singulières : 1°. Que $(0)^0 = 1$, puisque $(0)^0 = 1$ multiplié 0 fois par 0. 2°. Que $(0)^{+n} = 0$ puisque $(0)^{+n} = 1$ multiplié n fois par 0. 3°. Que $(0)^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$, expression qui désigne l'infini, comme nous le verrons plus bas. 4°. Que $(1)^0$, ainsi que $(1)^{\pm n} = 1$; ce qui indique que *toutes les puissances de 1 sont 1, propriété qui ne convient qu'à l'unité.*

129. Par ce qui précède on voit que *pour élever une quantité à une puissance positive, il suffit de la multiplier par elle-même autant de fois moins une que l'exposant de la puissance contient d'unités.* Ainsi $(a^2 b)^1 = a^2 b$. $(a^2 b)^2 = a^4 b^2$. $(a^2 b)^3 = a^6 b^3$. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. D'où il suit 1°. Que pour la formation des puissances monomes, *on peut, pour abréger, multiplier l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la puissance.* Ainsi $(a^2 c)^3$

$= a^6 c^3 . (a^2 c)^{\frac{2}{2}} = a c^{\frac{1}{2}} . (a^2 c)^{-2} = a^{-4} c^{-2}$. 2°. *Qu'une puissance quelconque d'un degré pair ne peut être négative*, puisque les facteurs qui la forment étant toujours en nombre pair, ne sauroient donner un produit négatif. *Un quarré négatif exprime donc une contradiction.*

OBSERVATIONS

Sur les différentes puissances du Binome $a \pm b$.

En élevant le binome $a \pm b$ aux cinq premières puissances, il viendra..I . . . . . $a \pm b$

II. . . . . $a^2 \pm 2ab + b^2$

III . . . . $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

IV . . . . $a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

V. . . . . $a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

130. Sur quoi on fera d'abord cette observation générale: *qu'une puissance quelconque d'un binome renferme un terme de plus que l'exposant de la puissance ne contient d'unités*; & on en déduira ensuite les règles suivantes.

131. I. *Règle des exposants*. Les exposants de a diminuent suivant la progression naturelle depuis le premier terme jusqu'au dernier; de façon que dans le premier terme l'exposant de a est l'exposant de la puissance, & dans le dernier il est zèro. Les exposants de b suivent un ordre contraire.

132. II. *Règle des signes*. Si les deux termes du binome sont positifs, tous les signes de la puissance seront positifs; si l'un est négatif, les signes seront alternativement positifs & négatifs; & en général *ce terme sera négatif, dans lequel les dimensions de la quantité négative entreront en nombre impair.*

133. III. *Règle des coefficients*. Le coefficient du premier terme vaut toujours l'unité, & le coefficient de chacun des autres est égal au coefficient du terme précédent, multiplié par l'ex-

posant de a dans le même terme, & divisé par le nombre qui désigne le rang que ce terme précèdent occupe.

134. Puisque ces observations ne dépendent pas du degré de la puissance formée, l'analogie permet de conclure qu'elles s'étendent à une puissance quelconque; & qu'ainsi elles peuvent servir de règle pour élever le binome $a+b$ à la puissance n, ce qui donnera :

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$$

$$a^{n-3}b^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 + \&c.$$

Mais on peut écrire $\frac{a^n}{a}$ au lieu de a^{n-1} (126); $\frac{a^n}{a^2}$ au lieu de a^{n-2} & ainsi des autres. On peut donc faire disparoître les exposants négatifs dans la quantité précèdente, & elle devient :

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n\,a^n b}{a} + \frac{n.n-1.}{1.2}\frac{a^n b^2}{a^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{a^n b^3}{a^3} + \frac{n.n-1.}{1.}$$

$$\frac{n-2.n-3}{2.3.4}.\frac{a^n b^4}{a^4} + \&c.$$

Or, il faut remarquer ici que a^n entrant dans tous les termes, on peut donner à cette quantité la forme suivante :

$$(a+b)^n = a^n\left(1 + n.\frac{b}{a} + \frac{n.n-1}{1.2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{b^3}{a^3} + \frac{n.n-1.}{1.}\right.$$

$$\left.\frac{n-2.n-3}{2.3.4}.\frac{b^4}{a^4} + \&c.\right.$$

Afin de se servir commodément de cette formule, il ne s'agit à présent que de trouver une méthode aisée de former la suite des termes qui sont entre les deux crochets, puisqu'il suffit de les multiplier par a^n, pour avoir la puissance n du binome $a+b$.

135. RÈGLE. *Écrivez d'abord sur une même ligne la suite* A, *jusqu'à ce que vous trouviez zéro pour un de ses termes, & la suite* B *que nous cherchons, se formera en lui donnant l'unité pour premier terme, & faisant chacun des autres égal au dernier terme écrit de cette*

même suite B, *multiplié par son correspondant dans la suite* A *&* *par* $\frac{b}{a}$

$$(A)\ n, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-3}{4}, \&c.$$

$$(B)\ 1 + n.\frac{b}{a} + \frac{n.n-1}{1.2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{b^3}{a^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}.\frac{b^4}{a^4} +, \&c.$$

Ainsi le second terme de la suite B se trouve en multipliant 1 par n & par $\frac{b}{a}$. Le troisième se trouve en multipliant le second $n.\frac{b}{a}$ par $\frac{n-1}{2}$ & par $\frac{b}{a}$; & ainsi des autres.

136. Ex. I. Soit (a^2-x^2) à élever à sa troisième puissance par le moyen de la règle ci-dessus. Je commence par former la suite A, qui ne peut avoir que trois termes, puisque le quatrième seroit o. Ensuite je la réduis & je l'écris au-dessous en A'. Je vois qu'ici $\frac{b}{a}$ de la formule, ou bien le second terme divisé par le premier, est exprimé par $-\frac{x^2}{a^2}$, & a^n par a^6. C'est pourquoi je forme, suivant la règle, la partie de la suite B qui est entre les deux crochets; puis la multipliant par a^6, & réduisant en B', j'ai la puissance demandée.

$$(A)\ 3, \frac{3-1}{2}, \frac{3-2}{3}.$$

$$(A')\ 3, 1, \frac{1}{3}$$

$$(B)\ a^6\left(1 - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{3x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6}\right)$$

$$(B')\ a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$$

137. Exemple II. On demande d'élever $a^2 - x^2$ à la

puiſſance — 1 par la même règle. Je forme d'abord la ſuite A, qui étant réduite me donne A'. Puis je trouve, par le moyen de la règle (135) la ſuite B, que je réduis encore à B', & celle-ci me préſente la puiſſance cherchée.

$$(A)\quad -1\,,\ \frac{-1-1}{2}\,,\ \frac{-1-2}{3}\,,\ \frac{-1-3}{4}\,,\ \ldots$$

$$(A')\quad -1\,,\ -1\,,\ -1\,,\ -1\,,\ -\ \&c.$$

$$(B)\quad aa^{-1}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}+\&c.\right)$$

$$(B')\quad \frac{1}{a^2}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{x^4}{a^6}+\frac{x^6}{a^8}+\frac{x^8}{a^{10}}+\&c.$$

Pour m'aſſurer que cette ſuite de termes donne la valeur approchée de $(a^2-x^2)^{-1}$, j'obſerve que $(a^2-x^2)^{-1}=\frac{1}{a^2-x^2}$. Or, un quotient multiplié par le diviſeur doit rétablir le dividende. Il faut donc que la ſuite précédente multipliée par le diviſeur a^2-x^2 donne 1 pour produit; ce qui ſe vérifie par le calcul ſuivant, dans lequel on s'eſt arrêté aux ſixièmes puiſſances de x.

$$\begin{array}{l}
\frac{x^0}{a^2}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{x^4}{a^6}+\frac{x^6}{a^8} \\
a^2-x^2 \\
\hline
\left.\begin{array}{l}
x^0+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6} \\
\quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{a^4}-\frac{x^6}{a^6}
\end{array}\right\}=x^0=1
\end{array}$$

138. Ex. III. On demande la puiſſance $\frac{1}{2}$ de la même quantité a^2-x^2. Pour cela je forme d'abord la ſuite A, que je réduis à A'. Puis obſervant qu'ici le ſecond terme diviſé par le pre-

mier donne $-\frac{x^2}{a^2}$, je trouve d'après la règle (135) la ſuite B que je réduis à B', en faiſant les multiplications indiquées....

$$(A)\quad \frac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \ldots\ldots$$

$$(A')\quad \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{6},\ -\frac{5}{8},\ -\frac{7}{10},\ \ldots\ldots$$

$$(B)\quad a\left(1-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{8}.\frac{x^4}{a^4}-\frac{3}{48}.\frac{x^6}{a^6}-\ldots\ldots\right.$$

$$(B')\quad a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{3x^6}{48a^5}-\ldots\ldots\ldots$$

Pour m'aſſurer que la ſuite B' eſt l'approximation de la puiſſance $\frac{1}{2}$, j'obſerve (144) que cette puiſſance doit être la racine quarrée approchée de la quantité a^2-x^2; & qu'ainſi en élevant cette ſuite au quarré, je dois trouver a^2-x^2. Or, c'eſt ce qui arrive, comme on le voit dans le calcul ſuivant, dans lequel on a négligé les puiſſances plus hautes que celles qui ſont entrées dans B', & où l'on a multiplié toute la ſuite par le premier terme dans la première ligne, par le ſecond dans la ſeconde, &c.

$$\left.\begin{array}{l}
a^2-\frac{ax^2}{2a}-\frac{ax^4}{8a^3}-\frac{3ax^6}{48a^5}\ldots\\
-\frac{ax^2}{2a}+\frac{x^4}{4a^2}+\frac{1x^6}{16a^4}\ldots\\
-\frac{ax^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^4}\ldots\\
-\frac{3ax^6}{48a^5}\ldots
\end{array}\right\}=a^2-x^2.$$

139. Coroll. On conclura d'après ces exemples que la règle donnée ci-dessus (135) s'étend à toutes sortes de puissances, tant entieres que fractionnaires, tant positives que négatives.

Remarque. La même règle peut s'appliquer à un polynome quelconque $c + d + e + f$; mais alors on supposeroit que le terme a de la formule représente c, & que le terme b représente $d + e + f$.

CHAPITRE II.

De l'extraction des racines.

140. Nous avons déjà dit qu'on appelle *racine* cette quantité dont la multiplication a produit la puissance. Ainsi a est la racine première de a, parce que $1 \times a = a$; la racine seconde de a^2, parce que $1 \times a \times a = a^2$; la racine troisième ou cubique de a^3, parce que $1 \times a \times a \times a = a^3$, &c. Nous avons déjà dit qu'on désigne une racine par ce caractère $\sqrt{}$, dans lequel on écrit l'exposant de la racine, comme $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[n]{}$; & s'il n'y a point d'exposant, le signe radical est censé représenter la racine quarrée.

141. On appelle *puissance parfaite* d'un degré, celle qui peut donner la racine exacte de ce degré; & *puissance imparfaite* celle où l'on ne peut point trouver cette racine. Ainsi a^2 est un quarré parfait, a^3 est un cube parfait, a^5 un quarré imparfait.

142. Coroll. Il suit de ce que nous venons de dire, 1°. Que les racines d'un exposant pair peuvent être indifféremment positives ou négatives. Car $-a \times -a = a^2$, ainsi que $+a \times +a = a^2$; donc la racine quarrée de a^2 pourra aussi bien être $-a$ que $+a$. Il en est de même de toute racine d'un exposant pair. On écrira donc $\pm\sqrt{a}$, $\pm\sqrt[4]{b}$, $\pm\sqrt[6]{c}$.

2°. Que les racines *réelles* d'un exposant impair n'admettent qu'un signe, & que ce signe est le même que celui de la puissance. Ainsi $\sqrt[3]{-a^3}$ est $-a$, $\sqrt[5]{a^5}$ est a.

143. Remarque importante. Quoique $-a^3$ n'ait qu'une racine réelle, savoir $-a$, on n'en doit pas conclure qu'une troisième puissance peut n'avoir qu'une seule racine. Car il y a toujours autant de racines, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance. Dans $-a^3$, par exemple, outre la racine réelle $-a$, il y en a deux imaginaires, savoir $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)a$ & $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)a$. On pourra se convaincre que ces imaginaires sont les racines cubiques de $-a^3$, parce qu'en les élevant au cube on retrouvera $-a^3$.

144. Puisqu'on forme les puissances d'un monome en multipliant l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la puissance, il s'ensuit que pour représenter l'opération contraire, c'est-à-dire, l'extraction des racines, *il faudra diviser l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la racine demandée.* Ainsi $\sqrt{a^6}$ pourra être représentée par $a^{\frac{6}{2}}$ ou a^3, $\sqrt[3]{a^{12}}$ par $a^{\frac{12}{3}}$ ou par a^4, $\sqrt[n]{a^m}$ par $a^{\frac{m}{n}}$. D'où l'on conclura en général, qu'*une puissance fractionnaire équivaut à une racine qui auroit le dénominateur de la fraction pour exposant, tandis que le numérateur resteroit pour exposant de la quantité.* Ainsi $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^1}$, $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$, $(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a+b}$.

145. Pour extraire une racine quelconque d'un polynome, il faut d'abord observer comment se forme la puissance relative à la racine qu'on cherche, afin de pratiquer les opérations contraires. Or, si l'on examine d'abord le quarré du binome $a+b$ ou $+a-b$, qui est $a^2+2ab+b^2$; celui de $a-b$ ou de $-a+b$, qui est $a^2-2ab+b^2$; celui du trinome $a+b+c$ qui est $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$; on trouvera qu'en général *le quarré*

d'un polynome est composé du quarré de chaque terme, & du double produit de chacun multiplié par tous les autres (*a*). D'où l'on déduira d'abord la règle suivante pour extraire la racine quarrée binome.

146. RÈGLE. 1°. *Ordonnez la quantité par rapport à une lettre qui soit un quarré parfait.* 2°. *Extrayez à la façon des monomes la racine quarrée du premier terme, & l'écrivez à côté.* 3°. *Elevez ce premier terme au quarré, & soustrayez-le de la quantité proposée.* 4°. *Divisez le premier terme de ce reste par le double de la racine trouvée, & prenez le quotient pour le second terme cherché.*

147. On demande la racine quarrée du trinome $a^2 - 2ab + b^2$. Je l'écris d'abord comme on le voit ici (ex. I.) ordonné par rapport à la lettre a. Ensuite je dis : la racine quarrée de a^2 est a, que j'écris à côté de la puissance, en les séparant par un trait. J'élève a au quarré que j'écris sous la quantité proposée avec le signe —. Je double ce premier terme a en le multipliant par 2, & j'écris $2a$ sous la racine, pour diviser par $2a$ le premier terme $-2ab$ de ce qui reste, & je mets le quotient $-b$ à la racine, comme devant être le second terme, si la quantité proposée est le quarré d'un binome. Pour m'assurer que cela est ainsi, j'écris encore $-b$ à côté de $2a$, & je multiplie le second terme trouvé $-b$ par $2a-b$; j'en porte le produit $-2ab+b^2$ avec des signes contraires sous le premier reste ; & comme réduction faite, il me vient o, j'en conclus que la racine exacte est $a-b$.

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{l|l} a^2 - 2ab + b^2 & a - b \text{ racine} \\ \hline -a^2 & 2a - b \\ \hline \text{I}^{\text{er}}.\text{reste.} -2ab + b^2 & \\ \qquad\qquad +2ab - b^2 & \\ \hline \text{II}^{\text{me}}.\ \text{reste.....o} & \end{array}$$

148. Soit encore (ex. II.) la quantité $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ dont on demande la racine quarrée. L'ayant d'abord écrite

(*a*) Il n'est donc pas possible que le double produit de plusieurs nombres multipliés deux à deux, surpasse la somme de leurs quarrés. Car si $2ab > aa + bb$, le quarré $aa - 2ab + bb$ sera négatif ; ce qui répugne (129).

en l'ordonnant par rapport à la lettre a, je dis : la racine quarrée de a^2 est a, que j'écris à côté, & le double $2a$ au-dessous. Élevant a au quarré, & le soustrayant, j'ai pour premier reste $2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$.

Je divise donc le premier terme de ce reste par $2a$, & j'en écris le quotient b à la racine & au-dessous, à côté de $2a$. Je multiplie b par $2a+b$, & ayant soustrait le produit du premier reste, j'ai pour second reste $2ac+2bc+c^2$.

Considérant tout ce que j'ai écrit à la racine comme un premier terme, & celui que je cherche comme le second, je double la racine & j'écris encore par-dessous $2a+2b$. Je divise toute la partie de ce second reste qui n'est pas un quarré, c'est-à-dire, $2ac+2bc$ par $2a+2b$, ou bien le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre. J'écris le quotient c à la racine & à côté du diviseur qui devient $2a+2b+c$, lequel étant multiplié par c, je porte ce produit sous le second reste, avec des signes contraires : comme tout se réduit à 0, j'en conclus que la racine juste est $a+b+c$

EXEMPLE II.

	$a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$	$a+b+c$ racine.
	$-a^2$	$2a+b$
Ier. reste . . .	$2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$	$2a+2b+c$
	$-2ab-b^2$	
IIme. reste	$2ac+2bc+c^2$	
	$-2ac-2bc-c^2$	
	0	

149. Pour extraire la racine des polynomes qui sont des puissances plus élevées, il faut ainsi que pour le quarré, connoître la maniere dont ces puissances sont composées. Or, si l'on examine le cube de $a+b$, qui est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, on verra que *le cube d'un binome est composé du cube du premier terme de la racine* (a^3) ; *du triple quarré du premier terme multiplié par*

le second ($3a^2b$) ; *du triple quarré du second, multiplié par le premier* ($3b^2a$) ; *& du cube du second* (b^3). *D'où l'on tire la règle suivante pour l'extraction de la racine cubique binome.*

150 RÈGLE. 1°. *Ordonnez la quantité par rapport à une lettre qui soit un cube parfait.* 2°. *Extrayez à la façon des monomes la racine cubique du premier terme, & l'écrivez à côté comme étant le premier terme de la racine.* 3°. *Elevez ce premier terme au cube, & l'ayant soustrait de la quantité proposée, écrivez le reste au dessous.* 4°. *Divisez le premier terme de ce reste par le triple quarré du premier terme de la racine, & prenez le quotient pour le second terme cherché.*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cube.... } a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \quad -a^3 \\ \hline \end{array}\right\} \begin{array}{l} a+b \text{ Racine cubique.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I}^{\text{er}}\text{. reste ..} & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ & -3a^2b-3ab^2-b^3 \\ \hline \text{II}^{\text{me}}\text{. reste. . . . . .} & 0 \end{array}$$

Soit la quantité $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, dont on cherche la racine cubique. L'ayant ordonnée comme il paroît ici, je dis : la racine cubique de a^3 est a, que j'écris à côté. Prenant son cube a^3, je le porte avec un signe contraire sous la quantité proposée ; & réduisant ensuite, j'ai pour premier reste $3a^2b+3ab^2+b^3$. Puisque le premier terme de ce reste doit contenir le triple quarré du premier terme de la racine multiplié par le second, pour avoir ce second, je divise le premier terme de ce reste par le triple quarré de a qui est $3a^2$, & le quotient est b. Pour m'assurer que c'est là le second terme, je prends le triple quarré du premier multiplié par le second ($3a^2b$), le triple quarré du second multiplié par le premier ($3ab^2$), le cube du second (b^3), & je les porte avec des signes contraires sous le premier reste. Comme tous les termes se détruisent, je conclus que $a+b$ est la racine exacte de la quantité proposée.

151 SCHOLIE. 1°. Si le premier terme de la quantité proposée a un coefficient numérique, on en extraira la racine à la façon des nombres, comme nous l'enseignerons bientôt.

2°. Si la racine cubique doit être plus que binome, après en avoir trouvé les deux premiers termes par la méthode ci-dessus (150), on cherchera le troisième en considérant les deux termes trouvés comme un premier terme, & celui qu'on cherche comme le second.

3°. On doit voir aussi qu'en considérant la formation des autres puissances du binome (134), on trouvera aisément la méthode d'extraire d'autres espèces de racines.

152. Remarques. Avant de quitter cette matière, les commençants doivent s'accoutumer. 1°. A reconnoître par la seule inspection d'une quantité, si elle est une puissance exacte d'un binome, & quel est son degré. (On connoît le degré par les exposans des différents termes, & l'on voit par leur nombre & leur forme (134) si la puissance du binome est exacte). 2°. A compléter des quarrés commencés, ce qui se fait (la quantité étant ordonnée) *en ajoutant le quarré de la moitié du coefficient du second terme*; ainsi x^2+2x devient x^2+2x+1; $x^4+ax^2+x^2$ devient $x^4+ax^2+x^2+\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$. 3°. A reconnoître sans passer par la méthode de l'extraction, qu'elle est la racine de ces quarrés complétés. Ainsi on est assuré que dans le premier exemple elle est $x+1$, & dans le second $x^2+\frac{a+1}{2}$ (ceci est très-nécessaire pour la suite).

CHAPITRE III.

De l'extraction des racines des nombres.

153. Lemme I. *Par quelques caractères qu'un nombre soit exprimé, il n'en peut avoir à son quarré plus que le double; à son cube plus que le triple, &c. de façon que si* n *désigne combien ce nombre a de caractères, sa puissance du degré* p *n'en peut contenir plus que* pn *n'en exprime.*

DEM. Un produit ne peut contenir plus de caractères, qu'il n'y en a en somme dans ses facteurs (24). Or, la racine entre deux fois comme facteur dans le quarré, trois fois dans le cube, & p fois dans la puissance du degré p; donc le quarré ne peut contenir plus que le double des caractères de la racine, le cube plus que le triple, & en général la puissance p plus que pn n'en exprime.

154. COROLL. *Il suit de là qu'un nombre étant proposé, on voit tout de suite combien il doit avoir de caractères à sa racine quelconque.* Par ex. Un nombre exprimé par un ou par deux caractères, n'en peut avoir qu'un à sa racine quarrée; celui qui est exprimé par trois ou par quatre, en aura deux; celui de cinq ou de six, en aura trois à sa racine; & ainsi des autres. De façon *qu'en divisant le nombre proposé en tranches de deux caractères chacune, de sorte que la derniere n'en ait qu'un; si le nombre des caractères est impair, il y aura autant de caractères à la racine quarrée, qu'il se trouvera de ces tranches.*

155. On peut raisonner de même pour la racine cubique. Ainsi un nombre de un, deux ou trois caractères, n'en peut avoir qu'un à la racine cubique: celui de quatre, cinq ou six, n'en peut avoir que deux: celui de sept, huit ou neuf, n'en peut avoir que trois, &c. Pour trouver le nombre de caractères qui doivent entrer dans la racine cubique, *il ne s'agira donc que de partager le nombre proposé en tranches de trois caractères chacune, de façon que la derniere pourra n'en avoir qu'un ou deux, & il y aura autant de caractères à la racine, qu'il se formera de ces sortes de tranches.*

156. LEMME II. *Si l'on partage un nombre composé de deux caractères (comme 29) en deux parties (20+9), dont l'une contienne les dixaines & l'autre les unités, & qu'à la façon d'un binome on l'élève au quarré, on observera 1°. Que le quarré des dixaines formant des centaines, ne peut se trouver dans les deux derniers caractères. 2°. Que le double produit des dixaines par les unités laisse une place vers la droite. 3°. Que le quarré des unités n'en laisse aucune.*

Ainsi, 29 ou 20+9, élevé au quarré à la façon du binome $a+b$ (145) donne 400+360+81 qu'on peut arranger ainsi.

$$\left\{\begin{array}{r} 4\,.. \\ 36\,. \\ 81 \\ \hline 841 \end{array}\right\}$$

Or, quand une racine quarrée doit avoir deux caractères, le premier exprime des dixaines par rapport au second. Il ne faut donc pas chercher le premier caractère de la racine dans les deux derniers du quarré; ni le double produit du premier caractère par le second, dans le dernier caractère de ce même quarré.

157. Ces choses étant bien conçues, il sera aisé d'extraire la racine quarrée d'un nombre quelconque. Mais pour cela nous supposons que chacun sait par la table suivante, quels sont les nombres qui n'ont qu'un caractère à leur racine, ensuite nous chercherons les racines à deux caractères, & nous ferons voir que la même méthode peut s'appliquer à la recherche de celles qui en contiennent un nombre quelconque.

Racines . . . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9
Quarrés . . . 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 . 64 . 81.

EXEMPLE I.

Nombre donné . . . . . 8'41 $\left\{\begin{array}{l} 29 \\ \hline 49 \end{array}\right.$ Racine.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 4'41 \\ 441 \\ \hline 0 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 \\ \hline \\ \\ \end{array}$$

Ayant écrit le nombre 841, dont on demande la racine quarrée, je le partage en tranches de deux caractères chacune, commençant

commençant par la droite, (*a*) de façon que le nombre des caractères étant impair, la derniere tranche n'en contient qu'un. On voit dabord (154) que ce nombre de tranches détermine le nombre de caractères qu'il y aura à la racine. Ensuite on raisonnera ainsi.

1°. Le quarré du premier caractère de la racine ne pouvant se trouver dans la derniere tranche (156) il faut le chercher dans la première qui est 8. Or le plus grand quarré contenu dans 8 est 4, dont la racine est 2. J'écris 2 à la racine, *& je suis assuré que c'est le nombre des dixaines qu'elle peut avoir.*

2°. J'éleve ce premier caractère 2 à son quarré qui est 4, & je l'écris sous 8 pour l'en soustraire. La différence est 4, que j'écris encore au-dessous.

3°. A côté de cette différence 4 j'abaisse la tranche suivante 41, ce qui forme le nombre 441, sur lequel je raisonne ainsi : Dans ce nombre doit être contenu le double produit du nombre des dixaines de la racine, multiplié par les unités, plus le quarré de ces unités : d'ailleurs je sais (156) que le produit du double des dixaines par les unités, ne sauroit se trouver dans le dernier caractère. Il faut donc pour trouver les unités (29) diviser à part les deux premiers caractères 44, par le double du nombre des dixaines écrit à la racine, c'est-à-dire, par 4, & il vient pour quotient 11.

4°. Il est clair qu'on ne peut écrire à la racine 11, ni même dans aucun cas plus de 9 ; (car autrement le caractère précédent n'exprimeroit point juste le nombre des dixaines de la racine). J'essaie donc 9, comme étant le nombre à un caractère le plus approché de 11.

5°. Enfin pour savoir si je dois écrire 9, je le multiplie par le double du nombre des dixaines, & je l'éleve à son quarré (ce qui se fait à la fois en l'écrivant & à côté & au-dessous de

(*a*) Si l'on formoit ces tranches de gauche à droite de cette manière 84'1, on chercheroit le premier caractère de la racine dans un des deux derniers caractères du quarré, ce qui seroit absurde (156).

4 (caz. 1.), pour multiplier 49 par 9). Portant ensuite ce produit sous 441 pour l'en soustraire, je vois qu'il n'y a point de reste, d'où je conclus que la racine quarrée exacte de 841 est 29.

EXEMPLE II.

	28'41'94	533 Racine	
	25		
Premier reste	3'41	103 Caze 1	1063 Caze 2.
	309	3	3
Second reste	32'94		
	31 89		
Dernier reste	105		

158. On propose d'extraire la racine quarrée du nombre 284194 (Ex. II.) sur lequel j'observe 1°. Que cette racine devant renfermer trois caractères (154), les deux premiers exprimeront un nombre de dixaines, dont le quarré ne peut se trouver dans la dernière tranche (156). C'est pourquoi j'opére dabord sur les quatre premiers caractères vers la gauche, & comme leur racine doit contenir deux caractères, je l'extrais ainsi que dans l'exemple précédent, auquel il suffit de renvoyer pour cette partie de l'opération.

2°. Ayant trouvé pour le nombre des dixaines 53, avec un reste 32, j'abaisse à côté de ce second reste la tranche suivante 94, ce qui compose le nombre 3294. Ensuite pour les raisons dites ci-dessus (3°. de 157), je double le nombre 53 écrit à la racine, ce qui donne 106, & je m'en sers pour diviser à part les trois premiers caractères du nombre 3294. Or $\frac{329}{106} = 3$; j'essaie donc si 3 doit être écrit à la racine.

3°. Pour m'assurer si 3 est le caractère que je dois écrire à la racine, je l'écris à côté & au-dessous de 106 (caze 2). prenant le produit de $1063 \times 3 = 3189$, je le porte sous le nombre 3294 pour l'en soustraire. Comme il me vient 105 pour reste, j'en conclus que le nombre proposé contient le quarré de 533,

plus 105. Pour m'en convaincre de nouveau, j'éleve 533 à son quarré, & le soustrayant du nombre proposé, je trouve pour reste 105. Le Scholie suivant va nous apprendre que ce reste n'est pas trop grand, ou bien que la racine ne sauroit être 534.

159. SCHOLIE. *Si l'on éleve au quarré deux nombres dont le premier surpasse le second d'une unité seulement, le quarré du premier surpassera le quarré du second du double de ce second* + 1.

DEM. Soit le plus petit nombre $= a$, le plus grand sera $a + 1$. Donc le quarré du premier sera a^2, & celui du second $a^2 + 2a + 1$; leur différence est donc $2a + 1$, ce qui exprime que le quarré du plus grand nombre surpasse celui du plus petit, du double de celui-ci + 1.

160. COROLL. *Si donc après l'extraction de la racine quarrée il vient un reste plus grand que le double de ce qu'on a écrit à la racine, on peut augmenter celle-ci de* 1; mais on ne le peut point si ce reste n'est pas plus grand que le double de ce qu'on a écrit à la racine, comme dans le dernier exemple.

161. On voit bien que l'on a la racine d'une fraction en extrayant celle du numérateur & du dénominateur. Ainsi $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9}$; $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

162. On ne donnera point de règles pour extraire les racines cubiques qui ne doivent renfermer qu'un caractère. Il suffit pour cela de recourir à la table suivante, qui contient les cubes de tous les nombres exprimés par un seul caractère.

Cubes...	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.
Racines...	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.

163. On peut faire sur les cubes numériques les refléxions suivantes, analogues à celles qu'on a fait sur les quarrés, & les démontrer de même.

1°. Un nombre étant donné, on sait combien de caractères il aura à sa racine cubique (155).

2°. Si à la façon d'un binome (149), on éleve au cube un

nombre composé de deux parties (20+5) dont l'une contient des dixaines & l'autre des unités ; 1°. Le cube des dixaines sera au rang des mille, c'est-à-dire, qu'il laissera trois places après lui vers la droite. 2°. Le triple produit du quarré des dixaines par les unités en laissera deux, &c. (On n'a pas besoin de connoître les places qu'occupent les autres parties du cube pour extraire la racine cubique).

EXEMPLE.

Nombre donné..... 15'683 } 25 Racine.
8
7'683 { 12 Caze 1.
58

164. On propose d'extraire la racine cubique du nombre 15683. Je le partage dabord en tranches de trois caractères, allant de droite à gauche, de façon que la dernière n'en à ici que deux, & par là je vois que la racine ne peut avoir que deux caractères (155) ; ensuite je raisonne ainsi.

1°. Le plus grand cube contenu dans 15 est 8, dont la racine est 2. J'écris 2 à la racine, & ce sera le nombre des dixaines (163).

2°. J'éleve ce nombre 2 au cube, qui est 8 ; & le portant sous la première tranche 15, je l'en soustrais ; & j'ai pour reste 7, à côté duquel j'abaisse la tranche suivante 683, ce qui compose le nombre 7683.

3°. Dans ce nombre 7683 doit se trouver (149) le triple quarré du nombre des dixaines multiplié par les unités, plus le triple quarré des unités multiplié par les dixaines, plus le cube des unités. Mais pour découvrir ces unités je n'ai besoin que de la première de ces trois parties (163).

4°. Je sais que le triple quarré du nombre des dixaines, multiplié par les unités, laisse deux places après lui (163) ; je le

cherche donc dans les deux premiers caractères 76 du nombre 7683. Pour trouver ces unités, j'éleve 2 à son quarré qui est 4, & son triple sera 12 (Caze 1) dont je me sers pour diviser 76, ce qui donne 6 pour quotient.

5°. Il ne s'agit plus que de prendre une partie convenable de ce quotient. Mais pour la trouver, le moyen le plus simple est de supposer dabord 6 à la racine & de voir si 26 élevé au cube peut être soustrait du nombre proposé. Or, il ne le peut pas, puisque $(26)^3 = 17576$. J'y suppose donc 5, & je vois si $(25)^3$ peut être soustrait du nombre proposé ; je trouve qu'il le peut, puisque $(25)^3 = 15625$, & qu'il vient pour reste 58, d'où je conclus que 15683 n'est pas un cube parfait, mais que le plus grand cube qu'il contient est celui de 25.

165. On voit assés que si la racine devoit contenir d'autres caractères, on les trouveroit en abaissant à côté du dernier reste la tranche suivante, & considérant ce qu'on a écrit à la racine comme un nombre de dixaines avec lequel on répéteroit les mêmes opérations que nous venons de faire.

CHAPITRE IV.

Où l'on expose différentes méthodes d'approximation.

166. LEMME. *Si un nombre contient des décimales, son quarré en contiendra le double, son cube le triple, &c.*

D. Ce nombre entre deux fois comme facteur, pour former le quarré, trois fois pour former le cube. Donc (64) &c.

167 COROLL. Il suit de là *que pour avoir un certain nombre de décimales à une racine, il faut en ajouter le double à son quarré, le triple à son cube, &c.*

168. PROBLÈME I. *On demande un nombre si approché de la racine quarrée de 284194, qu'il n'en soit pas éloigné de* $\frac{1}{100}$.

SOL. J'observe dabord que tout se réduit à faire entrer

deux décimales dans la racine, puisque l'erreur ne sauroit être alors de $\frac{1}{100}$ (61). Pour y parvenir, j'écris dabord deux o à la suite du reste 105 déja trouvé (158), & j'ai le nombre 10500, sur lequel opérant à l'ordinaire, je trouve o pour première décimale de la racine. Mettant ensuite deux autres o à la suite de 10500, j'ai 1050000 qui donne 9 à la racine, avec 90519 pour reste. Ainsi 533, 09 est la racine quarrée si approchée de 284194, qu'elle ne s'éloigne pas de $\frac{1}{100}$ de la véritable.

EXEMPLE.

Nombre proposé 284194	533, 09	Racine.
10500'00	106609	
959481	9	
Reste 90519		

169. On voit aisément que pour approcher d'une racine cubique, il faudroit écrire trois o après chaque reste ; & qu'en général quelle que soit la racine indéterminable dont il s'agira, on en peut approcher de telle sorte *que la distance à sa vraie valeur sera plus petite qu'une quantité assignable quelconque.*

170. PROBLÈME II. *Trouver la racine quarrée approchée de* $a^2 - x^2$.

SOL. Prenez pour premier terme le plus grand des deux, p. ex. a^2, & élevez $a^2 - x^2$ à la puissance $\frac{1}{2}$ par la méthode ci-dessus (135). La racine sera d'autant plus approchée que a sera plus grand par rapport à x, & que la puissance $\frac{1}{2}$ renfermera plus de termes.

Je forme donc la suite A que je réduis à A'. Ensuite observant qu'ici le second terme divisé par le premier donne $-\frac{x^2}{a^2}$, je trouve la suite B, qui se réduit à B'.

(A). $\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}-1}{2}, \frac{\frac{1}{2}-2}{3}, \frac{\frac{1}{2}-3}{4}, \frac{\frac{1}{2}-4}{5} \ldots\ldots\ldots$

(A'). $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{6}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{10} \ldots\ldots\ldots$

(B). $a\left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{8a^4} - \frac{x^6}{16a^6} - \frac{5x^8}{128a^8} - \frac{35x^{10}}{1280a^{10}} - \ldots\right)$

(B'). $a - \frac{x^2}{2a^1} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \ldots\ldots$

Cette dernière expression peut encore servir à trouver la racine approchée d'un nombre. Car si l'on demande la racine quarrée de 15, on peut faire $15 = 16 - 1 = a^2 - x^2$. Donc

$$\sqrt{15} = 4 - \frac{1}{8} - \frac{1}{512} - \frac{1}{66384} - \ldots\ldots$$

171. PROBLÈME III. *On demande la valeur aussi approchée qu'on voudra de cette fraction* $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$.

SOL. Faites disparoître le numérateur en donnant cette forme $a^2 (a^2 - x^2)^{-1}$; & ayant trouvé la puissance -1 de $a^2 - x^2$, multipliez tous les termes par a^2. Or (137) cette puissance a été trouvée $= \frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} + \frac{x^8}{a^{10}} + \ldots\ldots$

Donc $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \ldots\ldots$

172. PROBLÈME IV. *On demande une suite infinie qui représente la valeur de la fraction* $\frac{a^2 - x^2}{a^2 - x^2}$

SOL. J'opére ici comme dans l'exemple précédent, c'est-à-dire, que je fais disparoître la fraction en écrivant à sa place $(a^2 - x^2)(a^2 - x^2)^{-1}$. Je n'ai donc qu'à multiplier par $a^2 - x^2$ la suite que j'ai eu pour exprimer la puissance -1 de $a^2 - x^2$. Or faisant cette multiplication, & s'arrêtant à la sixième puissance de x, on trouve 1, ainsi qu'on le trouveroit par la division ordinaire. Voici le détail de ce calcul.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} \ldots\ldots$$

$$a^2 - x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^4}{a^4} + \dfrac{x^6}{a^6} + \ldots\ldots \\ \\ - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{x^4}{a^4} - \dfrac{x^6}{a^6} - \ldots\ldots \end{array}\right\} = 1.$$

173. OBSERVATIONS. 1°. Si l'on suppose dans ces exemples que $a = x$, on peut, dans le troisième problème, écrire a pour x, & l'on a $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ c'est-à-dire que $\frac{1}{0}$ *doit donner un quotient plus grand que toute quantité assignable.*

2°. Si l'on suppose également dans le quatrième problème $a = x$, le numérateur & le dénominateur de la fraction se réduisent à 0, & l'on a $\frac{0}{0} = 1$.

Nous pouvons donc remarquer déjà *des quantités les unes plus grandes, les autres plus petites* (169) *que toute quantité assignable.*

CHAPITRE V.

Du calcul des radicaux.

174. ON appelle *quantités radicales* ou *radicaux* toutes celles qui sont affectées du signe $\sqrt{}$. Si elles sont telles que la quantité sous le signe soit une puissance exacte du degré du radical, elle sont appellées *commensurables* : si l'on ne peut qu'approcher de la racine indiquée sans jamais la trouver exactement, on les nomme *incommensurables* : & si l'extraction de la racine est impraticable, comme il arrive dans les racines pai-

res

tes des quantités négatives, elles sont appellées *imaginaires* ou *impossibles*.

Ainsi $\sqrt{64}$ est une quantité commensurable : $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{6}$ sont des incommensurables ; $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-6}$ sont des imaginaires, sur lesquelles on remarquera que l'extraction de la racine ne peut s'exécuter, & que d'ailleurs si elle le pouvoit, le résultat en seroit *inconcevable*, puisqu'il ne pourroit être ni positif, ni négatif, ni zèro.

175. LEMME. *On ne change point la valeur d'un radical en multipliant ou divisant son exposant par le même nombre qui multiplie ou qui divise l'exposant des quantités qui sont sous le signe.* Ainsi

$$\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[2.6]{a^{4.2}} = \sqrt[\frac{6}{2}]{a^{\frac{4}{2}}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

176. PROBLÈME. I. *Réduire plusieurs radicaux au même exposant, sans changer leur valeur.*

SOL. 1°. Prenez le produit de tous les exposans, & ce sera l'exposant commun. 2°. Élevez chaque quantité à la puissance désignée par les exposants des autres radicaux.

Ainsi $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[c]{b^d}$, deviennent $\sqrt[nc]{a^{mc}}$, $\sqrt[nc]{b^{dn}}$ (il est évident (175) que la valeur des radicaux n'a pas changé, quoiqu'ils ayent été réduits au même exposant).

Quelquefois sans toucher à l'exposant d'un des radicaux, on ramène l'autre à sa valeur. Ainsi pour réduire au même exposant $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[6]{a^4}$, je me contente de ramener le dernier à $\sqrt[3]{a^2}$.

177. PROBLÈME II. *Donner un coefficient à un radical, sans changer sa valeur.*

SOL. Divisez la quantité qui est sous le signe par ce coefficient élevé à la puissance que désigne l'exposant du radical.

Ainsi $\sqrt[3]{b^4}$ ayant $2a$ pour coefficient, devient $2a\sqrt[3]{\frac{b^4}{8a^3}}$. (il est clair que par là $\sqrt[3]{b^4}$ ne change pas de valeur, puisqu'on l'a multiplié & divisé par $2a$).

178. PROBLÈME III. *Oter le coefficient à un radical, sans changer sa valeur.*

SOL. Faites passer ce coefficient, comme facteur, sous le radical, en l'élevant à la puissance désignée par l'exposant du radical.

Ainsi $a\sqrt[n]{b}$ devient $\sqrt[n]{a^n b}$. $4\sqrt{2}$ devient $\sqrt{32}$.

179. PROBLÈME IV. *Multiplier des radicaux.*

SOL. 1°. Si un des facteurs n'est pas radical, faites-en le coefficient de l'autre. Ainsi $\sqrt{a^5} \times 2b = 2b\sqrt{a^5}$. $\sqrt{8} \times 4 = 4\sqrt{8}$.

2°. Si les deux facteurs sont radicaux, réduisez-les d'abord au même exposant (176) : multipliez ensuite les quantités qui sont sous le signe, & donnez au produit le radical commun.

Ainsi $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[2]{b^3} = \sqrt[6]{a^4} \times \sqrt[6]{b^9} = \sqrt[6]{a^4 b^9}$. $\sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{8}$.

DEM. Il faut démontrer que $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[c]{b^d} = \sqrt[nc]{a^{mc} b^{dn}}$, ce qui doit être ainsi; car $\sqrt[nc]{a^{mc} b^{dn}} = a^{\frac{mc}{nc}}. b^{\frac{dn}{nc}} = a^{\frac{m}{n}} \times b^{\frac{d}{c}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[c]{b^d}$.

EXEMPLES.

Facteurs	$x-1-\sqrt{-3}$	Facteurs	$1+\sqrt{-3}$
	$x-1+\sqrt{-3}$		$1-\sqrt{-3}$
Produit.	x^2-2x+4	Produit	4
Facteurs	$x+\sqrt{-a}$	Facteurs	$x+\sqrt{-a}$
	$x-\sqrt{-a}$		$x-\sqrt{-a}$
			$x-a$
Produit	x^2+a	Produit	$x^3-ax^2+ax-a^2$

180. L'on conclura d'après ces exemples, que la multiplication des quantités radicales fait souvent disparoître le radical; & qu'ainsi *une quantité rationnelle peut avoir des incommensurables & même des imaginaires parmi ses facteurs.*

181. COROLL. On conclura de-là, que *toute quantité radicale peut être regardée comme le produit de deux, ou de plusieurs radicaux qui ont même exposant.* Ainsi pour $\sqrt{a^3 b}$ on peut écrire

$\sqrt{a^3}.\sqrt{b}$, ou $\sqrt{a^2} \times \sqrt{ab}$; de même pour $\sqrt{-ab}$ on peut écrire $\sqrt{-a}.\sqrt{b}$, ou bien $\sqrt{ab}.\sqrt{-1}$.

182. D'où il s'ensuit *que l'on a la racine d'un produit en prenant celles de ses facteurs & les multipliant ensemble.* Ainsi $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} = ab$; $\sqrt{4.9.16} = 2.3.4 = 24$.

S'il arrive donc que les racines de quelques facteurs soient exactes, on écrira leur produit en forme de coefficient devant le produit des autres racines. Ainsi $\sqrt[3]{a^3b}$, devient $\sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{b}$; ou $a\sqrt[3]{b}$; $\sqrt{a^2+a^2b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{1+b} = a\sqrt{1+b}$; $\sqrt{27} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

183. REMARQUE. Cette opération apprend à simplifier un radical, ou bien à faire passer hors du signe, une quantité qui est sous le signe ; ce qui ne peut avoir lieu que dans les cas *où la quantité qui est sous le signe a pour facteur une puissance du même degré que le radical.*

184 PROBLÈME V. *Diviser des radicaux.*

SOL. 1°. Si le dividende ou le diviseur ne sont point radicaux, opérez à l'ordinaire. Pour diviser a par $\sqrt[n]{b}$, écrivez $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}$; pour diviser $\sqrt[n]{b}$ par a, écrivez $\frac{1}{a}\sqrt[n]{b}$.

2°. Si l'un & l'autre sont des radicaux, reduisez-les d'abord au même exposant, divisez ensuite les quantités à l'ordinaire, & donnez au quotient le radical commun.

Ainsi, en divisant $\sqrt[3]{a^2}$ par $\sqrt{a}$ on a $\frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[6]{a}$; en divisant $\sqrt[3]{3}$ par $\sqrt[2]{2}$, on a $\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[6]{8}} = \sqrt[6]{\frac{9}{8}}$.

DEM. Il faut démontrer qu'en général $\sqrt[n]{a^m}$ divisé par $\sqrt[c]{b^d}$, donne $\sqrt[nc]{\frac{a^{mc}}{b^{nd}}}$. Or, cela est ainsi. Car $\sqrt[nc]{\frac{a^{mc}}{b^{nd}}} = \frac{a^{\frac{mc}{nc}}}{b^{\frac{nd}{nc}}}$

$$= \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{d}{c}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[c]{b^d}}.$$

185. L'ADDITION & la soustraction des radicaux se font suivant les règles ordinaires. Il faut seulement, dans la soustraction, observer de ne point changer les signes de la quantité qui est sous le radical soustrait, mais seulement le signe qui le précéde. Pour soustraire $\sqrt{a^2-2ab}$ de $\sqrt{2a-2b}$, j'écrirai $\sqrt{2a-2b}-\sqrt{a^2-2ab}$.

186. PROBLÈME VI. *élever un radical à ses puissances.*

SOL. Sans changer l'exposant du radical, élevez les quantités qui sont avant & après le signe à la puissance demandée.

EXEMPLES. $(2\sqrt[3]{a^4})^2 = 4\sqrt[3]{a^8}$; $(6\sqrt{2})^2 = 36\sqrt{4} = 72$.

DEM. Il est évident que $(d\sqrt[n]{a^m})^p = d^p \cdot a^{\frac{mp}{n}} = d^p\sqrt[n]{a^{mp}}$.

187. COROLL. *Quand la puissance demandée est du même degré que la racine, il suffit d'ôter le signe radical.* Ainsi $(\sqrt{a^3})^2 = a^3$; $(\sqrt{-a})^2$ ou $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$.

188. Il suit de-là, que si l'on multiplie deux imaginaires du second degré qui ayent la même quantité sous le signe radical comme $\pm\sqrt{-a} \times \pm\sqrt{-a}$, *leur produit sera négatif si elles sont précédées du même signe ; & positif, si elles sont précédées de signes différents.* Ainsi $+\sqrt{-a} \times +\sqrt{-a} = +(\sqrt{-a})^2 = +(-a) = -a$. De même $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +(\sqrt{-a})^2 = +(-a) = -a$.

Mais $+\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ ou $-\sqrt{-a} \times +\sqrt{-a} = -(\sqrt{-a})^2 = -(-a) = +a$.

On pourroit encore le prouver, en disant que $+\sqrt{-a} \times +\sqrt{-a} = (+1 \times \sqrt{-a})(+1 \times \sqrt{-a}) = (+1 \times +1)(\sqrt{-a})^2 = 1 \times -a = -a$. On diroit de même que $+\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = (+1 \times -1)(\sqrt{-a})^2 = -1 \times -a = +a$.

189 PROBLÈME VII. *Extraire les racines des radicaux.*

SOL. 1°. Si le radical a un coefficient, prenez, s'il se peut, sa racine ; ou bien faites-le passer sous le radical (178).

2°. Si la quantité qui est sous le radical proposé à une ra-

cine exacte, extrayez-la à l'ordinaire. Ainsi $\sqrt{(\sqrt[3]{8})} = \sqrt{2}$.

3°. Si la quantité qui est sous le radical proposé ne donne pas de racine exacte, multipliez l'exposant de ce radical, par celui de la racine demandée, & sans toucher au reste, le produit sera l'exposant de la racine cherchée. Ainsi $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2})} = \sqrt[6]{a^2}$; $\sqrt[4]{(\sqrt[3]{12})} = \sqrt[12]{12}$.

DEM. Il suffit de démontrer qu'en général $\sqrt[r]{(\sqrt[n]{a^m})} = \sqrt[nr]{a^m}$. Or, cela est ainsi; puisque $\sqrt[nr]{a^m} = a^{\frac{m}{nr}} = \sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[r]{(\sqrt[n]{a^m})}$.

190 On conclura de-là, que $\sqrt[nrs]{a} = \sqrt[n]{(\sqrt[rs]{a})} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[r]{(\sqrt[s]{a})}\right)}$; & qu'en général *au lieu d'un signe radical, on en peut mettre plusieurs les uns sur les autres, pourvu que leurs exposants soient les facteurs de l'exposant du premier radical.* Ainsi $\sqrt[4]{16} = \sqrt[2]{\sqrt{16}}$; $\sqrt[12]{8} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{8})}$.

CHAPITRE VI.

De quelques propriétés des imaginaires, & de leur réduction à la forme $m \pm n\sqrt{-1}$.

191. UNE quantité radicale ne peut être imaginaire, qu'autant que l'Exposant du radical est un nombre pair, & que la somme des quantités qui sont sous le signe est négative. Cette somme peut donc être représentée par $-b$; & comme tout nombre pair résulte du produit d'un nombre impair, par quelque puissance du nombre 2 (82); appellant ce nombre impair quelconque r, je pourrai prendre pour exposant d'un radical imaginaire quelconque, le nombre $r.2^p$. De sorte que $\pm\sqrt[r.2^p]{-b}$ exprimera une racine paire quelconque d'une quantité négative. S'il y a quelque quantité réelle qui précéde l'imaginaire, je pourrai la désigner par $\pm a$, & j'aurai $\pm a$

$\pm\sqrt[r.2^p]{-b}$ qui sera en partie réelle & en partie imaginaire.

Or, $\pm\sqrt[r.2^p]{-b}=\pm\sqrt[r.2^p]{+b}\times\sqrt[r.2^p]{-1}$ (181). Désignant donc la quantité réelle $\pm\sqrt[r.2^p]{+b}$ par $\pm n$, je pourrai changer tout radical imaginaire en celui-ci $\pm n\sqrt[r.2^p]{-1}$.

192 THÉOR. I. *Toute racine paire d'une quantité négative peut être ramenée à une autre racine dont l'exposant est un des nombres, 2, 4, 8, 16, &c. qui sont les puissances successives de 2; ou bien* $\sqrt[r.2^p]{-b}$ *peut toujours prendre cette forme* $\sqrt[2^p]{-n}$.

DEM. r étant un nombre impair, $\sqrt[r]{-b}$ pourra toujours représenter une quantité réelle & négative (143), que je peux désigner par $-n$. Je puis donc, sans changer la forme imaginaire, à la place de $\sqrt[r.2^p]{-b}$ écrire $\sqrt[2^p]{\sqrt[r]{-b}}$, ou bien $\sqrt[2^p]{-n}$. donc &c.

Ainsi $\sqrt[6]{-a^3}=\sqrt{(\sqrt[3]{-a^3})}=\sqrt{-a}$. De même $\sqrt[10]{-a^5}=\sqrt{-a}$. $\sqrt[12]{-a}=\sqrt[4]{(\sqrt[3]{-a})}$. $\sqrt[14]{-a}=\sqrt[2]{(\sqrt[7]{-a})}$. $\sqrt[24]{-a}=\sqrt[8]{(\sqrt[3]{-a})}$.

193 THÉOR. II. *Toutes les puissances paires d'une imaginaire monome du second degré sont des quantités réelles; & toutes ses puissances impaires sont des imaginaires de la même forme.*

DEM. 1°. Tout nombre pair peut être représenté par $2t$, pourvu que t représente une entier quelconque. Or, $(\sqrt{-b})^{2t}=(-b)^t$, qui est évidemment une quantité réelle.

2°. Tout nombre impair peut être représenté par $2t+1$. Or $(\sqrt{-b})^{2t\pm1}=(\sqrt{-b})^{2t}\times(\sqrt{-b})^1=-bt\times\pm\sqrt{b}\times\pm\sqrt{-1}$. Si donc je désigne par $\pm n$ la quantité réelle $-bt\times\pm\sqrt{b}$, j'aurai $(\sqrt{-b})^{2t+1}=\pm n\sqrt{-1}$. Donc, &c.

194. SCHOLIE. On doit remarquer ici que $\pm n\sqrt{-1}$ élevé à ses puissances paires successives 2, 4, 6, 8, &c. devient $-n^2$,

$+n^4$, $-n^6$, $+n^8$, &c. . . Quel que soit le signe qui précède le radical. Mais $+n\sqrt{-1}$ élevé à ses puissances impaires 1, 3, 5, 7, &c. devient $+n\sqrt{-1}$, $-n^3\sqrt{-1}$, $+n^5\sqrt{-1}$, $-n^7\sqrt{-1}$, &c. Tandis que $-n\sqrt{-1}$ élevé à ces mêmes puissances impaires devient $-n\sqrt{-1}$, $+n^3\sqrt{-1}$, $-n^5\sqrt{-1}$, $+n^7\sqrt{-1}$, &c. De sorte que si dans un même calcul on avoit à prendre la somme de toutes les puissances impaires de $+n\sqrt{-1}$, & de $-n\sqrt{-1}$, ou seules, ou multipliées par les mêmes quantités, on seroit assuré que cette somme se réduiroit à 0.

195. Théor. III. *La somme d'un nombre quelconque d'imaginaires monomes du second degré peut être représentée par cette seule imaginaire* $\pm n\sqrt{-1}$.

Dem. $\pm\sqrt{-a}\pm\sqrt{-b}\pm\sqrt{-c}\pm$&c. $=\pm\overline{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c},\pm\text{\&c.}}\times\sqrt{-1}$. Or le coefficient de $\sqrt{-1}$ étant une quantité réelle, je peux le faire $=\pm n$, & j'aurai pour expression de cette somme, $\pm n\sqrt{-1}$.

196. Remarques. I. Il peut arriver que les imaginaires formant des termes semblables, leur somme se réduise à 0, & alors n sera 0.

II. S'il arrive qu'on ait des quantités, en partie réelles, & en partie imaginaires, on pourra exprimer la somme des réelles par $\pm m$, & celles des imaginaires par $\pm n\sqrt{-1}$, de sorte que $\pm m\pm n\sqrt{-1}$ *peut représenter la somme d'un nombre quelconque d'imaginaires du second degré, en observant de faire* $m=0$, *s'il n'y a point de terme réel, &* $n=0$ *si les imaginaires se détruisent.*

197. Théor. IV. *Quelle que soit la puissance réelle* p, *à laquelle on éleve une imaginaire de la forme* $a\pm\sqrt{-b}$, *elle gardera toujours la même forme.*

Dem. En observant de prendre a pour le premier terme, on aura

$$(a\pm\sqrt{-b})^p = a^p + pa^{p-1}(\pm\sqrt{-b})^1 + \frac{p.p-1}{2}a^{p-2}(\pm\sqrt{-b})^2$$

$$+\frac{p.p-1.p-2}{2.3}a^{p-3}(\pm\sqrt{-b})^3 + \frac{p.p-1.p-2.p-3}{2.3.4}a^{p-4}(\pm\sqrt{-b})^4 + \text{\&c.}$$

De sorte que $\sqrt{-b}$ sera élevée à toutes ses puissances successives 1, 2, 3, 4, &c. Ainsi les termes où cet exposant sera pair

feront des quantités réelles, & ceux où il ſera impair ſeront des imaginaires de la forme $\sqrt{-b}$ (193). On pourra donc exprimer la ſomme des termes réels par $\pm m$, & celle des imaginaires par $\pm n\sqrt{-1}$. Il faut donc que la puiſſance prenne la forme $m \pm n\sqrt{-1}$, qui eſt la même que celle de la racine.

197. Corolle. Il ſuit de là qu'une racine quelconque d'une imaginaire de la forme $a \pm \sqrt{-b}$ doit garder la même forme, puiſque $\sqrt[q]{a \pm \sqrt{-b}} = \overline{a \pm \sqrt{-b}}^{\frac{1}{q}}$, qui doit ſe repréſenter ſous la même forme (196).

198. Remarques. On obſervera 1°. Que dans la puiſſance p il n'y a que les termes de rang pair qui reſtent imaginaires, parce que dans ceux-là ſeulement le facteur $\pm\sqrt{-b}$ eſt élevé à des puiſſances impaires.

2°. Que la ſomme de deux quantités de cette forme $(a + b\sqrt{-1})^p$ & $(a - b\sqrt{-1})^p$ ne contiendra aucun terme imaginaire, parce que les termes de rang pair ſeront ſemblables dans les deux ſuites & auront des ſignes contraires, puiſque tout le reſte étant égal, une racine contient $+b\sqrt{-1}$ & l'autre $-b\sqrt{-1}$. Ainſi les termes imaginaires ſe détruiront & la ſomme ſera réelle.

199. Problème *On demande à quelles conditions on peut réduire $\sqrt[4]{-a}$ à la forme $m \pm n\sqrt{-1}$.*

Sol. Suppoſons que cela ſoit fait & que nous ayons $\sqrt[4]{-a} = m \pm n\sqrt{-1}$; en élevant à la quatrième puiſſance on aura $-a = m^4 + 4m^3n\sqrt{-1} - 6m^2n^2 - 4mn^3\sqrt{-1} + n^4$. Or le premier membre étant une quantité réelle, il faut que le ſecond le ſoit, & qu'ainſi les termes imaginaires ſe détruiſent. La première condition ſera donc que $4m^3n\sqrt{-1} = 4mn^3\sqrt{-1}$, ou bien que $m = n$. 2°. Il faut qu'on ait enſuite $-a = m^4 - 6m^2n^2 + n^4$, ce qui donne $4m^4 = a$, ou $m = \sqrt[4]{\frac{a}{4}}$. On pourra donc toujours réduire $\sqrt[4]{-a}$ à la forme $m \pm n\sqrt{-1}$, en obſervant ces deux conditions 1°. Que $m = n$. 2°. Que $m = \sqrt[4]{\frac{a}{4}}$.

200

200. THÉOR. V. *Toute racine paire d'une quantité négative peut être ramenée à cette forme* $m \pm n\sqrt{-1}$; *m & n étant des quantités réelles.*

DEM. Toute racine paire d'une quantité négative peut devenir $\sqrt[2^p]{-a}$. Or $2^p = 4.2^{p-2}$. Donc $\sqrt[2^p]{-a} = \sqrt[4.2^{p-2}]{-a} = (\sqrt[4]{-a})^{\frac{1}{2^{p-2}}}$.

Mais en faisant $m = n = \sqrt[4]{\frac{a}{4}}$, à la place de $\sqrt[4]{-a}$, je puis prendre $m \pm n\sqrt{-1}$. Donc $(\sqrt[4]{-a})^{\frac{1}{2^{p-2}}} = (m \pm n\sqrt{-1})^{\frac{1}{2^{p-2}}}$. Or, la puissance $\frac{1}{2^{p-2}}$ de la quantité $m \pm n\sqrt{-1}$ garde toujours cette même forme (197) ; je peux donc toujous faire $\sqrt[2^p]{-a} = m \pm n\sqrt{-1}$; ou bien toute racine paire d'une quantité négative &c.

201. COROLL. Il suit de-là *qu'une racine quelconque d'une quantité en partie réelle & en partie imaginaire, telle que* $\sqrt[q]{(a \pm \sqrt[2^p]{-b})}$ *peut être* ramenée à la forme $m \pm n\sqrt{-1}$.

Car $\pm\sqrt[2^p]{-b}$ peut prendre cette forme $c \pm d\sqrt{-1}$ (199) ; & après ce changement nous aurons $\sqrt[q]{a+c \pm d\sqrt{-1}}$; ou bien en faisant $a+c=m$, $d=n$, il viendra $\sqrt[q]{m \pm n\sqrt{-1}}$, qui doit garder la forme $m \pm n\sqrt{-1}$ (197), dans laquelle m & n sont réelles.

SECTION TROISIEME.

Des raisons, proportions, progressions & logarihtmes.

CHAPITRE PREMIER.

Propriétés générales des raisons.

202. DÉFINITION. On entend par raison, *le rapport de grandeur de deux quantités, dont l'une est, ou peut être supposée partie de l'autre;* & par partie nous entendons *une petite quantité comparée à une plus grande du même genre.* Les deux quantités comparées se nomment les *termes* de la raison; & pour distinguer ces termes, le premier est appellé *antécédent*, & le second *conséquent.* On les écrit l'un à côté de l'autre, en les séparant par deux points, de cette manière $a : b$, ce qui signifie *la raison* de a à b.

203. Il y a des quantités que nous ne saurions concevoir sous le rapport de tout & de partie. Comme p. ex. une toise & une heure, un nombre réel & un imaginaire, une ligne & une surface, un nombre abstrait & un nombre concret, une quantité positive & une négative, le fini & l'infini, &c. On ne peut donc pas établir une raison entre ces quantités. Ce qui prouve, qu'outre des incommensurables, il faut reconnoître des *incomparables* parmi les quantités.

204. Une même quantité, comparée avec des quantités inégales, ne sauroit avoir avec elles, les mêmes raisons ou rapports de grandeur; ainsi 9 par ex. étant plus grand par rapport à 1, que par rapport à 3; les deux raisons de $9 : 1$ & $9 : 3$ ne sauroient

être égales. Cela suffit pour faire conclure 1°. Que les raisons sont susceptibles d'augmentation & de diminution, *& qu'ainsi elles sont de vraies quantités.* 2°. Que sous ce rapport elles peuvent être comparées entr'elles, & assujetties à des méthodes de composition & de résolution. 3°. Enfin qu'elles admettent entr'elles les rapports d'opposition ; & qu'ainsi il faut les distinguer en *positives & négatives.* Or, si l'on fait dépendre cette opposition de la façon d'être des deux termes comparés, on conclura que le *rapport de majorité*, qu'une grande quantité a par rapport à une petite, est l'opposé du *rapport de minorité*, que la petite a par rapport à la grande. Et qu'ainsi le rapport *d'égalité* (qui, d'après notre définition (202), ne forme pas une raison proprement dite) devient 0 ; puisqu'il ne peut être ni positif ni négatif, & que d'ailleurs il est le passage de l'un à l'autre.

Les anciens ont appellé raison *d'inégalité majeure* celle qu'une grande quantité a avec une petite, par ex. $9 : 3$, que nous appellons raison de *minorité* : *raison d'inégalité mineure*, celle qu'une petite quantité a par rapport à une plus grande, par ex. $3 : 9$, que nous appellons raison de *minorité* : & raison *d'égalité*, (qui n'en est pourtant point une proprement dite) celle qu'une quantité a avec son égale.

205. AXIOME. *Des quantités qui ont même raison ou rapport de grandeur avec une troisième, sont égales entr'elles.* Par ex. si $Q : 1 = q : 1$, on a $Q = q$.

206. THÉOREME. *Si l'on considère les termes de deux ou de plusieurs raisons comme des nombres abstraits, & qu'on les divise les uns par les autres, dans le même ordre, les quotients égaux indiqueront des raisons égales; & réciproquement.*

DEM. 1°. Si l'on a ces deux raisons $a : b$, $c : d$ & que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on en conclura que $a : b = c : d$. Car appellant Q le quotient de $\frac{a}{b}$, on a aussi Q pour celui de $\frac{c}{d}$. Or, par la nature de la division, $a : b = Q : 1$ & $c : d = Q : 1$. Donc $a : b = c : d$.

2°. Si $a : b = c : d$, on en conclura que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Car appellant Q

le quotient de $\frac{a}{b}$ & q celui de $\frac{c}{d}$, on aura $a : b = Q : 1$, & $c : d = q : 1$; donc $Q : 1 = q : 1$; & par conséquent $Q = q$ (205) où bien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

207. COROLL. I. *Les quotients que donnent les termes des raisons divisés dans le même ordre, sont donc des indices de l'égalité ou de l'inégalité de ces raisons.* Il est indifférent quel des deux termes on divise par l'autre, pourvu qu'on observe le même ordre dans chaque division.

208. II. $a : b = an : bn$, puisqu'en divisant les antécédents par les conséquents, le quotient dans la première est $\frac{a}{b}$ & dans la seconde $\frac{an}{bn}$ ou $\frac{a}{b}$. Pareillement $a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$; puisque l'un & l'autre quotient est $\frac{a}{b}$. *On ne change donc pas la valeur d'une raison, en multipliant ou divisant ses deux termes par la même quantité.*

209. D'où l'on conclura 1°. *que la raison qui regne entre deux quantités qui ont un facteur commun, est la même que celle qui regne entre les deux facteurs variables*, ou bien que $an : bn = a : b$. Or, n pouvant désigner un entier ou une fraction, an & bn peuvent exprimer des équi-multiples ou des équi-sous-multiples de a & de b. Ainsi *deux quantités sont en même raison, que leurs équi-multiples ou leurs équi-sous-multiples quelconques.*

210. 2°. *Que sans changer de valeur, toute raison peut être réduite à avoir l'unité pour un de ses termes.* Ainsi $a : b$, en divisant ses deux termes par b, devient $\frac{a}{b} : 1$. De même $c : d$, en divisant par c, devient $1 : \frac{d}{c} = e : d$; ce qui fait voir que *le rapport qu'a l'unité avec une fraction quelconque* (lequel peut s'exprimer par $1 : \frac{d}{e}$) *égale celui du dénominateur de la fraction à son numérateur.*

211. 3°. Que si l'on a une suite quelconque de raisons $a : b$, $c : d$, $e : f$, on pourra, sans les changer (210), les présenter sous cette forme $1 : \frac{b}{a}$, $1 : \frac{d}{c}$, $1 : \frac{f}{e}$. Or, ici en multipliant les deux termes de chaque raison par les conséquents de celles qui la précédent vers la gauche, on a cette suite $1 : \frac{b}{a}$, $\frac{b}{a} : \frac{bd}{ac}$, $\frac{bd}{ac} : \frac{bdf}{ace}$,

dans laquelle le conséquent de chaque raison sert d'antécédent à la suivante.

212. SCHOLIE. Toute quantité déterminée, & par conséquent une raison, peut être considérée comme étant parvenue de o à une valeur fixe, par des accroissemens successifs. Ainsi 9 : 6 peut être supposée avoir été d'abord 9 : 9 ou o (& alors elle est dans son *origine*) : ensuite avoir reçu un nouvel accroissement, en devenant 9 : 8 ; un second, en devenant 9 : 7 ; un troisième, en devenant 9 : 6 ; (& alors elle est parvenue à son *terme*). On peut donc dire que la raison de 9 : 6 est une quantité qui commence lors que le conséquent est 9, & qui est complète lorsqu'il est 6 : ou bien qui a son origine au nombre 9 égal à l'antécédent, & son terme au nombre 6 égal au conséquent (il en est de même de toute autre raison).

213. Lorsque plusieurs quantités sont liées de telle sorte que le terme de l'une est l'origne de celle qui la suit immédiatement, elles sont *continues* ; & elles sont *discrètes*, s'il y a entr'elles des intervalles vuides. Ainsi les raisons 9 : 6, 6 : 5, 5 : 2, 2 : 1 sont continues ; puisque le conséquent de l'une sert d'antécédent à la suivante. Et celles-ci 9 : 6, 5 : 3, 2 : 1 seront discrètes. *On peut donc toujours* (211) *présenter une suite de raisons discrètes, sous la forme de raisons continues, sans changer leur valeur.*

CHAPITRE II.

Qui contient les méthodes de composition & de résolution des raisons, avec la manière de les mesurer.

214. DÉFINITION. *Une raison est dite composée de toutes celles dont elle est la somme.* Par ex. si 9 : 1 = 9 : 6 + 6 : 3 + 3 : 1, on dira que la première est composée de toutes les autres.

Si les raisons composantes sont égales, la composée devient

multiple de chacune d'elles en particulier ; savoir, double, triple, quadruple, s'il n'y entre que deux, trois, quatre raisons égales. Dans ce cas les Géomètres appellent la raison composée *doublée*, *triplée*, *quadruplée* de chacune des composantes ; & celles-ci sont appellées des raisons *sous-doublées*, *sous-triplées*, *sous-quadruplées*, par rapport à la composée.

Addition des raisons.

215. Règle. *Prenez le produit des antécédents & celui des conséquents, & la raison du premier produit au second vaudra la somme des raisons données.*

Dem. Il faut démontrer que $a : b + c : d + e : f = ace : bdf$. Pour cela changez les raisons données en raisons continues (211), & elles deviendront $1 : \frac{b}{a} + \frac{b}{a} : \frac{bd}{ae} + \frac{bd}{ac} : \frac{bdf}{ace}$. Or *dans une suite de quantités continues, pourvu que le terme de l'une devienne l'origine de la suivante, la somme doit nécessairement s'étendre depuis l'origine de la première, jusqu'au terme de la dernière.* Ainsi la somme de ces raisons sera $1 : \frac{bdf}{ace}$ ou bien $ace : bdf$ (208).

216. Corol. Il suit de là 1°. *que la raison qu'il y a entre deux produits est composée de celles qui sont entre leurs produisants*, puisque $ace : bdf = a : b + c : d + e : f$.

2°. *Que la raison qui est entre deux quarrés est doublée de celle qui est entre leurs racines* ; puisque $a^2 : b^2 = a : b + a : b$; & qu'ainsi la raison entre les cubes est *triplée* : qu'entre les quatrièmes puissances, elle est *quadruplée*, de celles qui se trouvent entre les racines.

3°. *Que dans une suite de raisons continues, la raison du premier terme au dernier est composée de toutes les raisons de la suite.* Ainsi dans $9 : 6$, $6 : 4$, $4 : 2$, on a $9 : 2$ égale à la somme de toutes les autres raisons.

217. Scholie. On observera ici que l'addition des raisons fournit une nouvelle preuve de ce que nous avons dit plus haut ; savoir, que les raisons de majorité sont opposées à celles de minorité. Car dans la composition, l'effet des unes

est d'augmenter, & celui des autres est de diminuer la raison à laquelle on les ajoute ; & puisque la raison d'égalité ajoutée à une autre, ne l'augmente ni ne la diminue, on en conclura encore que sa valeur est o.

Soustraction des raisons.

218. RÈGLE *Renversez les termes de la raison soustraite, & l'ajoutant à la précédente, vous aurez la différence cherchée.*

DEM. Pour soustraire $c : d$ de $a : b$, je dis qu'il faut écrire $a : b + d : c$, & que la vraie différence est $ad : bc$. En effet on est sûr d'avoir la vraie différence de deux quantités, lorsqu'en l'ajoutant à la quantité soustraite, on retrouve l'autre. Or, $ad : bc + c : d = adc : bcd = a : b$. Donc &c.

219. COROLL. Il suit de là que $a : b = a : 1 - b : 1$; c'est-à-dire, que *la raison qu'il y a entre deux nombres, vaut l'excès de la raison de l'antécédent à l'unité, sur la raison du conséquent à l'unité* : & réciproquement, *connoissant les raisons que deux nombres a & b ont avec l'unité, on connoît la raison qu'il y a entr'eux* ; puisque $a : 1 - b : 1 = a : b$.

Multiplication & division des raisons.

220. On ne peut multiplier ou diviser une raison, que par un pur nombre absolu ou abstrait (20). Or, pour multiplier $a : b$ par 3, il faut la tripler ; & pour la diviser par 3, il faut en prendre le tiers. Dans le premier cas il faut donc prendre la somme de ces trois raisons $a : b + a : b + a : b$ qui est $a^3 : b^3$. Si on eut multiplié $a : b$ par 4, on auroit eu pour produit $a^4 : b^4$. Si on l'eût multipliée par le nombre n, on auroit eu $a^n : b^n$. D'où il suit qu'en général, *pour multiplier une raison par un nombre absolu quelconque, il faut élever ses deux termes à la puissance désignée par ce nombre* ; & qu'ainsi pour la diviser, *il faut extraire de chaque terme la racine désignée par le nombre qui sert de diviseur* ; puisque la division doit décomposer ce que la multiplication compose.

221. Une raiſon eſt *multiple* d'une autre, quand elle contient cette autre un certain nombre de fois juſte. Ainſi $a^3 : b^3$ eſt triple de $a : b$, parce que $a^3 : b^3$ contient trois fois $a : b$. De même $a^2 : b^2$ eſt double de $\sqrt{a^2} : \sqrt{b^2}$; triple de $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[3]{b^2}$. Il faut donc, pour qu'une raiſon ſoit multiple d'une autre, que les termes de la première ſoient les mêmes puiſſances des termes correſpondants de la ſeconde. Par ex. $a^3 : b^3$ eſt triple ou triplée de $a : b$; parce que les termes de la première ſont les cubes des termes correſpondants de la ſeconde. De même $a^2 : b^2$ eſt doublée de $a : b$, quadruplée de $\sqrt{a} : \sqrt{b}$.

222. On ne peut meſurer les raiſons qu'en prenant une raiſon pour unité de meſure, & s'en ſervant enſuite pour déterminer la valeur des autres. Or, dans ce cas chaque raiſon meſurée ſera néceſſairement multiple de celle qui ſert d'unité (que j'appelle le *module*); & par conſéquent les termes de l'une ſeront formés des termes correſpondants de l'autre, élevés à la même puiſſance. Par ex. dans les nombres, ſi l'on prend 10 : 1 pour unité de meſure, il faut que dans toutes les raiſons commenſurables à cette unité, l'antécédent ſoit une puiſſance exacte de 10 & le conſéquent une même puiſſance de 1. Ainſi 100 : 1 peut être meſurée par ce module, & elle vaudra 2 fois l'unité de meſure; il en eſt de même de 1000 : 1, qui vaudra 3 fois l'unité de meſure. Mais toute autre raiſon par ex. 9 : 1 ou 8 : 1 ou 99 : 1 ne ſauroit être meſurée ainſi; parce que dans celles-là les antécédents ne ſont pas des puiſſances exactes de 10.

223. De là on conclura, *qu'en adoptant un certain ſyſtème*, c'eſt-à-dire, *prenant une raiſon déterminée pour module, la plupart des autres raiſons ſont incommenſurables.* Par ex. ſi l'on vouloit meſurer les raiſons que les divers nombres ont avec l'unité, & qu'on prît pour module 10 : 1; il n'y auroit que celles dont l'antécédent ſeroit une puiſſance exacte du nombre 10, qui ſeroient commenſurables, c'eſt-à-dire, exactement déterminables. *On pourroit donc exprimer par un nombre combien de fois celles de la première eſpèce contiennent l'unité de raiſon; mais aucun nombre ne ſauroit*

voit exprimer exactement combien de fois celles de la seconde espèce contiennent cette unité.

CHAPITRE III.

Des Proportions.

224. L'ASSEMBLAGE de deux raisons égales form e une *proportion* entre les quantités qui les composent. On les écrit de cette manière 4 : 8 = 3 : 6, ou bien de celles-ci 4 : 8 ∷ 3 : 6; 4 : 8 ∷ 3. 6; ce qui signifie, 4 est à 8, comme 3 est à 6. Le premier & le dernier terme d'une proportion sont appellés les *extrêmes*, & les deux autres les *moyens*. Si les deux raisons sont continues, la proportion est dite *continue*; & si les raisons sont discrètes, elle est *discrète*. Dans la proportion continue, le terme qui sert de conséquent à la première raison & d'antécédent à la seconde est appellé *moyen proportionnel*. Cette espèce de proportion s'écrit ainsi ∺ 2 : 4 : 8.

225. THÉOREME FONDAMENTAL. *S'il y a proportion entre quatre quantités, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, & réciproquement.*

DEM. 1°. Si l'on a la proportion $a : b ∷ c : d$, je dis que $ad = bc$. Car s'il y a proportion entre ces quatre quantités, la première raison égale la seconde (224), ou bien $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (206). Donc en multipliant des deux côtés par ac, on aura $bc = ad$.

2°. La réciproque est, *que si quatre quantités a, b, c, d sont arrangées de façon que le produit des extrêmes égale le produit des moyens*, c'est-à-dire, *de façon que $ad = bc$, elles forment la proportion $a : b ∷ c : d$.* Car si $ad = bc$, en divisant tout par ac, on a $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$; Donc la raison de a à b égale celle de c à d (206), ou bien (224) $a : b ∷ c : d$.

226. COROLL I. On peut donc faire une équation de toute proportion, en prenant le produit des extrêmes pour un mem-

bre, & celui des moyens pour l'autre. Et réciproquement, toute équation peut être convertie en proportion, en faisant les extrêmes *des deux racines d'un membre*, & les moyens *des deux racines de l'autre.*

227. II. Puisque $ad = bc$ donne $a = \frac{bc}{d}$ & $d = \frac{bc}{a}$, il s'ensuit que *dans toute proportion, un extrême quelconque est égal au produit des moyens divisé par l'autre extrême.* De même puisque $ad = bc$ donne $b = \frac{ad}{c}$ & $c = \frac{ad}{b}$, il s'ensuit encore qu'*un moyen quelconque est égal au produit des extrêmes divisé par l'autre moyen.*

228. III. *Dans toute proportion continue le moyen proportionnel vaut la racine quarrée du produit des extrêmes.* Car dans $\div\!\!\div\, a : b : c$, on a $b^2 = ac$ & $b = \sqrt{ac}$. D'où il suit que pour avoir une quantité moyenne proportionnelle entre deux autres, *il faut multiplier ensemble les racines quarrées des deux premières.*

229. IV. Puisque $ad = bc$ donne $a : b :: c : d$, on voit que dans deux produits égaux les racines (qu'on peut toujours réduire à deux dans chacun) sont *en raison réciproque.*

230. V. S'il y a proportion entre quatre quantités, elle subsistera de quelque façon qu'on les arrange, pourvu que les moyens de la première combinaison soient tous les deux moyens ou extrêmes dans les autres. Ainsi $a : b :: c : d$ peut être combinée de huit façons, sans détruire la proportion.

	I	$a : b :: c : d$	$b : a :: d : c$	V	*Invertendo.*
Alternando.	II	$a : c :: b : d$	$b : d :: a : c$	VI	
	III	$d : c :: b : a$	$c : a :: d : b$	VII	
	IV	$d : b :: c : a$	$c : d :: a : b$	VIII	

Il est évident que de la première proportion on peut conclure chacune des sept autres combinaisons, puisqu'on a toujours $ad = bc$.

De toutes ces différentes manières d'argumenter par proportion, les anciens n'ont donné un nom qu'à la seconde & à la cinquième. Ils en ont ajouté cinq autres, dont voici la combinaison.

Si $a : b :: c : d$, on peut conclure ;

Componendo . . . . $a+b : b :: c+d : d$

Dividendo . . . . $a-b : b :: c-d : d$

Convertendo . . . $a+b : a :: c+d : c$

Ex æqualitate . . . *ordinata* . . . $\begin{cases} a : b :: c : d \\ b : e :: d : f \end{cases}$

On conclut . . . . $\begin{cases} \text{———} \\ a : e :: c : f \end{cases}$

Ex æqualitate . . . *deordinata* . . . $\begin{cases} a : b :: d : f \\ b : e :: c : d \end{cases}$

On conclut . . . . $\begin{cases} \text{———} \\ a : e :: c : f \end{cases}$

231 THÉOREME II. *Si l'on a une suite de raisons égales comme $a : b = c : d = e : f$, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent, ou bien $a+c+e : b+d+f :: a : b$.*

DEM. Il suffit (225) pour le prouver, de faire voir que $ab+bc+be=ab+ad+af$, ou bien otant ab des deux parts, que $bc+be=ad+af$. Or, cette égalité a lieu ici. Puisque $a : b = c : d$ donne $ad=bc$, & que $a : b = e : f$ donne $be=af$.

232 COROLL. *On ne change pas la valeur d'une raison, en ajoutant à ses deux termes les termes correspondants d'autres raisons égales à celle-là.* Puisque dans $a : b = c : d = e : f$, on a $a+c+e : b+d+f=a : b$. Il en seroit de même, si on eût soustrait les termes des deux dernières raisons des termes correspondants de la première.

233 THÉOREME III. *Si l'on multiplie ou si l'on divise par ordre les termes de deux proportions, les produits ou les quotients formeront une proportion.*

DEM. 1°. Si l'on a $\left\{ \begin{matrix} a : b :: c : d \\ e : f :: g : h \end{matrix} \right\}$, je dis que l'on aura $ae : bf :: cg : dh$. Pour cela il suffit qu'on ait (225) $adeh=bcfg$. Or, cette dernière égalité a lieu ; puisque par la première propor-

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE UNIVERSITÉ

tion, $ad=bc$, & par la seconde $eh=fg$. (L'autre partie du Théoreme se démontre de même).

234. Théoreme IV. *Les mêmes puissances ou les mêmes racines des quantités proportionnelles, sont encore en proportion.*

Dem. Il faut démontrer que si l'on a, $a : b :: c : d$, on aura $a^n : b^n :: c^n : d^n$, ou bien $a^n d^n = b^n c^n$; ce qui est évident; puisque $a : b :: c : d$ donne $ad=bc$, & partant $a^n d^n = b^n c^n$. Mais n pouvant exprimer non seulement une puissance, mais aussi une racine, la proposition est démontrée pour les deux cas.

235. S'il faut renverser les termes d'une raison pour qu'elle soit égale à celle qu'on lui compare, la premiere est dite *l'inverse* ou la *réciproque* de la seconde. Ainsi, puisque 8 : 4 devient égale à 3 : 6 en renversant les termes de l'une ou de l'autre, on dira 8 : 4=l'inverse de 3 : 6, qui est 6 : 3; ou bien que 8 est à 4 inversement comme 3 est à 6.

236 Coroll. *Pour avoir l'inverse d'une raison donnée, il suffit de mettre ses deux termes en fraction sous la même quantité.* Ainsi, l'inverse de $a : b$ sera $\frac{m}{a} : \frac{m}{b}$, ou bien on aura $a : b = \frac{m}{b} : \frac{m}{a}$. Car $\frac{m}{b} : \frac{m}{a} = \frac{ma}{ab} : \frac{mb}{ab} = ma : mb = a : b$. D'où l'on conclut, *que deux quantités a & b qui sont en raison inverse de deux autres c & d, deviennent en raison directe avec celles-ci, en mettant les uns ou les autres en fraction sous la même quantité*; c'est-à-dire qu'ici $a : b = \frac{m}{c} : \frac{m}{d}$, ou bien $a : b :: d : c$.

237 Théoreme V. *Si la quantité Q dépend des quantités R, S, T, de telle sorte que si une seule varie, Q varie dans le même rapport, je dis que si toutes varient à la fois & deviennent r, s, t, tandis que Q devient q, on aura* $Q : q :: RST : rst$.

Dem. Supposons que dans le premier changement R seul étant changé en r, Q devienne E, on aura par l'hypothèse, $Q : E :: R : r$. Si dans le second changement S devenant s, E devient F, on aura $E : F :: S : s$. Et si dans un troisième la valeur de T se change en t, & celle de F en q, on aura $F : q :: T : t$. Donc en multipliant par ordre ces trois proportions, on aura (233) $QEF : qEF :: RST : rst$, ou bien $Q : q :: RST : rst$.

238 SCHOLIE. 1°. Il faut observer ici, que cette proportion n'est vraie, qu'autant que les quantités R, S, T sont tellement indépendantes entr'elles, que l'une peut varier, sans que les autres varient. Car, si R par ex. ne pouvoit changer sans que S & T ne changeassent dans le même rapport, on auroit, $Q : q :: R \pm S \pm T : r \pm s \pm t$, ou bien (231) $Q : q :: R : r :: S : s :: T : t$.

2°. Dans le cas du Théoreme précédent Q est dit être directement comme R, S, T, & si l'on avoit eu $Q : q :: \frac{RST}{VX} : \frac{rst}{ux}$; on diroit que Q est directement comme R, S, T & inversement comme V & X.

CHAPITRE IV.

De la Règle de Trois, & de ses différentes applications.

LA propriété générale des proportions énoncée ci-dessus (227), a donné lieu à une règle fameuse en Arithmétique, connue sous le nom de *Règle de Trois* ou de *Règle d'Or*. Cette règle est *directe* ou *inverse*, *simple* ou *composée*. Les exemples suivants la feront comprendre dans tous les cas.

239 *Exemple de la Règle de Trois simple & directe.* Un homme a dépensé 18 l. en quatre jours, combien dépensera-t-il à proportion dans un an, ou dans 365 jours ?

Pour le savoir, faites la proportion suivante, $4^{\text{jours}} : 365^{\text{jours}} :: 18\text{ l.} : x = \frac{365 \times 18\text{ l.}}{4} = 1642\text{ l. } 10\text{ s.}$

240 *Exemple de la Règle de Trois simple & inverse.* 6 ouvriers font un ouvrage en 20 jours, en combien de jours 15 ouvriers auroient-ils fait le même ouvrage ?

Il est évident, par la nature de la question, que le nombre des jours doit être en raison inverse de celui des ouvriers, ainsi l'on dira en comparant les choses semblables; $20^{\text{jours}} : x^{\text{jours}} :: 15^{\text{ouvr.}} : 6^{\text{ouvr.}}$. Donc $x = \frac{6 \times 20}{15} = 8^{\text{jours}}$.

241 *Exemple de la Règle de Trois composée.* 20 ouvriers ont fait 99 toises d'ouvrage en 15 jours ; combien en feront 60 ouvriers en 25 jours ?

Il y a ici cinq choses connues, qui peuvent cependant se réduire aux trois termes d'une proportion, en observant que la quantité de l'ouvrage doit être directement comme le nombre des ouvriers & comme le temps qu'ils ont travaillé ; & qu'ainsi il faut multiplier (237) le nombre des jours par le nombre des ouvriers, & l'on aura :

$$20^{\text{ouvr.}} \times 15^{\text{j.}} : 60^{\text{ouvr.}} \times 25^{\text{j.}} :: 99^{\text{t.}} : x^{\text{t.}} = 495^{\text{t.}}$$

242. Problème. *Couper la quantité a en parties proportionnelles aux quantités c, d, e dont la somme = b.*

Sol. Puisque deux quantités sont entr'elles comme leurs parties semblables quelconques (209), on aura :

$$b : a :: \left\{ \begin{array}{l} c : \frac{ac}{b} \\ d : \frac{ad}{b} \\ e : \frac{ae}{b} \end{array} \right\}$$; ce qui désigne que pour partager une quantité a en parties proportionnelles aux parties c, d, e d'une autre quantité b, *il faut multiplier successivement a par chaque partie de b & la diviser par b.*

243 Remarque. S'il eût fallu diviser la quantité a en parties proportionnelles, non seulement aux quantités c, d, e, mais encore aux quantités f, g, h ; il auroit fallu faire des rapports composés en multipliant (237) les termes correspondants des deux suites c, d, e & f, g, h ; & il seroit venu cf, dg, eh, dont la somme étant s, on auroit opéré comme ci-

dessus en faisant $s : a ::$ $\left\{ \begin{array}{l} cf : \frac{cf \times a}{s} \\ dg : \frac{dg \times a}{s} \\ eh : \frac{eh \times a}{s} \end{array} \right\}$;

c'est sur cela qu'est fondée la Règle de Compagnie, tant simple que composée.

244 *Exemple de la Règle de Compagnie simple.* Trois marchands

ont fait un fonds de 3500 liv. La mise du premier a été de 1700 liv. ; celle du second de 1000 liv., & celle du troisième de 800 liv. ; ils ont gagné ensemble 1750 liv. On demande ce qu'il doit en revenir à chacun, en proportion de sa mise.

On voit qu'il s'agit ici de diviser le profit en parties proportionnelles aux trois mises, & qu'ainsi ce n'est que l'application de la règle précédente. La part du premier sera donc $\frac{1750 \text{ l.} \times 1700}{3500} = 850$ l. ; celle du second sera $\frac{1750 \text{ l.} \times 1000}{3500} = 500$ l. & celle du troisième $\frac{1750 \text{ l.} \times 800}{3500} = 400$.

245 *Exemple de la Règle de Compagnie composée.* Supposons qu'aux conditions de l'exemple précédent, on ajoute : que la première mise a resté dans le fonds pendant 12 mois, la seconde pendant 8 mois, & la troisième pendant 5 mois. Il est clair que *le profit qui doit revenir à chaque associé, est en raison composée de la valeur de sa mise & du temps qu'elle a resté dans le fonds* (237). Il faut donc commencer par multiplier chaque mise par le nombre de mois qu'elle a travaillé, & l'on aura pour la 1ere. 20400 l., pour la 2e. 8000, pour la 3me. 4000, dont la somme = 32400. Il ne reste donc qu'à couper le profit 1750 l. en parties proportionnelles à ces quantités, ce qui donnera :

Pour la 1ere. mise	1101 $\frac{69 \text{ l.}}{81}$
Pour la 2e.	432 $\frac{81 \text{ l.}}{81}$
Pour la 3me.	216 $\frac{41 \text{ l.}}{81}$
Total	1750 l.

246. *Exemple de la Règle de fausse position.* On demande un nombre dont la moitié, le tiers & le quart, ajoutés ensemble, donnent 39.

Je suppose d'abord que le nombre cherché est 12. Or, la moitié, le tiers & le quart de 12, savoir 6+4+3, ne font que 13. Ainsi, cette supposition est fausse ; & cependant elle va me faire trouver, par une règle de trois, le nombre que je cherche ; en observant que 13 doit être à 12, dont il contient la moitié, le tiers & le quart ; comme 39 est au nombre

inconnu, dont il contient de ſemblables parties; ou bien que $13 : 12 :: 39 : x = 36$. Le nombre cherché eſt donc 36, dont en effet la moitié, le tiers & le quart, ſavoir, $18+12+9=39$. On n'entrera pas dans un plus grand détail ſur toutes ces règles d'Arithmétique, parce que la plupart des queſtions qui s'y rapportent, peuvent ſe reſoudre d'une maniere plus ſimple par l'Analyſe; ainſi que nous le prouverons plus bas, en traitant de cette partie de l'Agèbre.

CHAPITRE V.

Des Progreſſions Géométriques.

247 DÉFINITION. *On entend par progreſſion géométrique, une ſuite de raiſons égales, dans leſquelles le conſéquent de chacune ſert d'antécédent à la ſuivante.* On déſigne la progreſſion géométrique par ce caractère ∺ qu'on met en tête, & on ſépare les termes par un point de cette maniere ∺ *a. b. c. d. e. f.*

248. COROLL. I. De cette définition, on peut conclure: 1°. *Que dans la même progreſſion, le même nombre doit ſervir d'indice à toutes les raiſons qui la compoſent, & qu'ainſi on peut le faire par tout* $= m$.

2°. Que ſi le premier terme eſt a, le ſecond ſera am; le 3me am^2; le 4me am^3; & par analogie celui du rang n ſera am^{n-1}. Mais a peut repréſenter un premier terme quelconque, & m un indice quelconque. Donc ∺ $a \cdot am^1 \cdot am^2 \cdot am^3 \cdot am^4 \cdot$ &c. *peut être regardée comme une formule générale, qui repréſente toute ſorte de progreſſions géométriques.*

249. COROLL. II. Si l'on ſuppoſe que $m=1$, tous les termes ſeront égaux. Si $m > 1$, la progreſſion ſera *croiſſante* ou *divergente*. Si $m < 1$, la progreſſion ſera *décroiſſante* ou *convergente*. Ici nous la ſuppoſons croiſſante, & pour appliquer à l'autre ce que nous dirons de celle-là, il ſuffira de renverſer les formules que nous trouverons, ou bien de renverſer les progreſſions

progressions décroissantes auxquelles on les appliquera.

250. COROLL. III. En considérant la progression qui nous sert de formule, on voit : 1°. Que connoissant la valeur d'un terme, avec celle de l'indice m, & le nombre des termes n, on peut continuer la progression à droite & à gauche, aussi loin qu'on voudra.

2°. Que connoissant le premier terme a, l'indice m, & le nombre des termes n, on a la valeur du dernier terme, que j'appelle t, en faisant $t = am^{n-1}$.

3°. Et qu'en général on a la valeur d'un terme quelconque Q, pourvu qu'on sache quel est son quantième N, en faisant $Q = am^{N-1}$. Donc réciproquement, connoissant un terme quelconque avec m & N, on aura le premier terme a, en faisant $a = \frac{Q}{m^{N-1}}$.

Si à la place de a, j'avois un autre terme quelconque q dont le quantième seroit n, j'aurois eu $Q = qm^{N-n}$, donc alors $m^{N-n} = \frac{Q}{q}$, & $m = \sqrt[N-n]{\frac{Q}{q}}$; c'est-à-dire que connoissant deux termes quelconques Q & q avec leurs quantièmes N & n, *on aura l'indice de la progression, en divisant le plus grand par le plus petit, & extrayant du quotient la racine désignée par la différence de leurs quantièmes.*

4°. On peut par là insérer un nombre quelconque de moyens proportionnels entre deux nombres donnés. Si l'on en demande deux entre 3 & 81; je cherche dabord la valeur de m, & pour cela j'observe que la différence des quantièmes de 3 à 81 est ici 3, puisque l'un est le premier & l'autre le quatrième. Ainsi l'indice m sera $\sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$. Donc le premier moyen proportionnel sera $3 \times 3 = 9$; le second sera $9 \times 3 = 27$, & la progression se présentera ainsi ÷ 3 . 9 . 27 . 81.

251 THÉOREME I. *Dans toute progression géométrique, la raison du 1er. terme au 3me. est doublée de celle qui regne dans la progression : celle du 1er. du 4me. est triplée : celle du 1er. au 5me. est quadruplée de cette raison commune, & ainsi des autres.*

DEM. Car la raiſon du premier terme au troiſième contient deux raiſons égales à la raiſon commune (216) : celle du premier au quatrième en contient trois : celle du premier au cinquième en contient quatre. Il faut donc (214) que la raiſon du premier au troiſième ſoit doublée, que celle du premier au quatrième ſoit triplée, &c. de la raiſon commune.

On prouvera de même que la raiſon qu'il y a entre deux termes, dont la différence des quantièmes eſt n, ſera $n^{plée}$ de celle qui regne dans la progreſſion.

252. COROLL. *Dans toute progreſſion le premier terme eſt au troiſième, comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond, &c.*

253 THÉOREME II. *Une ſuite de quantités a, b, c, d, dont les différences ſucceſſives ſont proportionnelles à ces mêmes quantités, forme une progreſſion géométrique.*

DEM. Il faut démontrer que ſi $a-b : b :: b-c : c :: c-d : d$, on a $\div\div a.\ b.\ c.\ d.$ Or, 1°. puiſque $a-b : b :: b-c : c$, on aura, en multipliant les extrêmes & les moyens, $ac-bc=b^2-bc$, & effaçant $-bc$ de chaque membre $ac=b^2$; ce qui donne $\div\div a.\ b.\ c.$ 2°. Puiſque $b-c : c :: c-d : d$, on a auſſi $bd-cd=c^2-cd$: & réduiſant, $bd=c^2$; d'où l'on déduit $\div\div b.\ c\ d.$; donc $\div\div a.\ b.\ c.\ d.$

254. SCHOLIE. On peut appliquer aux progreſſions ce que nous avons déjà dit des proportions, c'eſt-à-dire, qu'en ajoutant ou ſouſtrayant les termes voiſins d'une progreſſion : en les élevant à la même puiſſance, ou en en extrayant la même racine : en multipliant ou diviſant les termes d'une progreſſion, par les termes correſpondants d'une autre, la progreſſion n'eſt point détruite, quoique la raiſon ſoit changée.

255. THÉOREME III. Pour avoir la ſomme d'une progreſſion géométrique croiſſante, il faut 1°. *multiplier le dernier terme par le nombre qui ſert d'indice, & ſouſtraire le premier terme de ce produit.* 2°. *Diviſer cette différence par l'indice commun diminué de l'unité.*

C'eſt-à-dire, ſuppoſant la ſomme $= s$, l'indice $= m$, le dernier terme $= t$, & le premier $= a$, on aura $s = \frac{mt-a}{m-1}$.

DEM. Dans une progreſſion tous les termes ſont antécédents excepté le dernier, & tous ſont conſéquents excepté le pre-

mier. Donc la ſomme des antécédents eſt $s - t$, & celle des conſéquents eſt $s - a$. Mais dans une ſuite de raiſons égales, la ſomme des antécédents eſt à la ſomme des conſéquents, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent : ou bien ici $s-t : s-a :: a : am :: 1 : m$. Donc $sm-mt=s-a$, & tranſpoſant dans le premier membre tous les termes affectés de s, on a $sm-s=mt-a$, ou bien $s \times \overline{m-1}=mt-a$; donc en diviſant chacune de ces quantités égales par $m-1$, on a $s=\frac{mt-a}{m-1}$, c'eſt-à dire, &c.

156. Remarque. Si l'on veut appliquer cette formule à une progreſſion décroiſſante, il ſera plus ſimple de la renverſer en la préſentant de cette manière $s=\frac{a-mt}{1-m}$.

257. Coroll I. Si n déſigne le nombre des termes de la progreſſion croiſſante, il déſignera auſſi le quantième du dernier terme, qui ſera par conſéquent am^{n-1}. Subſtituant cette valeur pour t dans la formule, elle devient $s=\frac{am^n-a}{m-1}$. Et ſi alors la progreſſion commence par l'unité, ou ſi $a=1$, la formule devient $s=\frac{m^n-1}{m-1}$.

Donc 1°. Si $m=2$, $s=2^n-1$; 2°. Si $m=3$, $s=\frac{3^n-1}{2}$, &c.

258. Coroll II. La formule $s=\frac{a-mt}{1-m}$ devient $s=\frac{a}{1-m}$ lorſque le dernier terme eſt o ; parce qu'alors $mt=0$, & c'eſt ce qui arrive lorſqu'on dit d'une progreſſion qu'elle décroit à *l'infini*.

Nous concluons de-là que ſi $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b^2} \cdot \frac{a}{b^3}$..... repréſente une progreſſion de cette eſpèce qui décroit toujours, parce que le numérateur eſt conſtant, & que le dénominateur croit, *la ſomme ſera égale au premier terme, dont le dénominateur aura été diminué de l'unité, ou bien* $s=\frac{a}{b-1}$.

$$\text{Car } S=\frac{\frac{a}{b}}{1-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b-1}{b}}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{b-1}=\frac{ab}{b^2-b}=\frac{a}{b-1}.$$

Ainsi $S \div\div \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdots \frac{1}{\infty} = 1.$

$$S \div\div \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} \cdots \frac{1}{\infty} = \frac{1}{2}.$$

$$S \div\div \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} \cdots \frac{1}{\infty} = \frac{1}{9}.$$

259. Remarque. On doit observer ici que la somme d'une progression géométrique, dont les termes vont seulement en doublant, croit avec beaucoup plus de rapidité qu'on ne l'imagine. Nous en apporterons pour exemple le problème suivant, qui a été tiré de l'Encyclopédie, v°. Progression, & dans lequel outre qu'on a vérifié tous les calculs, on a ajouté quelque détermination à celles qu'a données l'Auteur de cet article.

Problème. Un Philosophe de l'Inde inventa le jeu des échecs pour amuser son Roi en l'instruisant. Le Prince trouva cette découverte si belle, qu'il pressa l'Auteur de demander une récompense à son choix. Le Philosophe, après s'en être défendu long-tems, se fit apporter un échiquier & dit au Prince: ordonnés, Seigneur, qu'il me soit délivré un grain de bled pour la première caze : deux pour la seconde : quatre pour la troisième, & toujours en doublant jusqu'à la soixante-quatrième. On cherche ici combien de bled il faut pour satisfaire à cette demande, qui paroit d'abord très-modeste.

Sol. 1°. Il est clair (257) qu'ici la somme des grains de bled est exprimée par $2^{64}-1$, ce qui donne le nombre A.

A. 18,446,744,073 709,551,615.

2°. Un pouce cube de bled contient 450 grains, & par conséquent un pied cube en contient le nombre B.

B. 777,600.

3°. En divisant le nombre A par le nombre B, on sait combien il y a de pieds cubes de bled dans A, & l'on a trouvé le nombre C.

C. 23,722,664,703,844.

4°. Dans une enceinte quarrée dont le circuit seroit d'une lieue commune de France ou de 2400 toises, & dans laquelle

le bled s'éleveroit par tout à la hauteur de 20 pieds, il y tiendroit un nombre de pieds cubes de bled exprimé par D.

D. 259,200,000.

5°. divisant donc C par D, on trouvera combien il faut de greniers de cette espèce, pour contenir tout le bled demandé. Or, ce nombre de greniers est 91522, avec 162,303.844 pieds cubes de reste; ce qui suffiroit, ajoute l'Auteur de cet article, pour faire la fortune de 6000 honnêtes familles; & l'on peut dire que ce Philosophe avoit fait une demande si énorme, que tous les Potentats de l'Europe ne pourroient y satisfaire, en y employant, pendant 100 ans, tout leur revenu.

CHAPITRE VI.

Des raisons, proportions & progressions Arithmétiques.

260. DÉFINITION. *Si l'on compare ensemble deux quantités pour connoître leur différence, on établit entr'elles une nouvelle espèce de rapport qui est appellé raison arithmétique.* Il faut bien la distinguer de la raison proprement dite, qui par opposition à celle-ci est appellée *raison géométrique*; & qui seule détermine le vrai rapport de grandeur qu'il y a entre les quantités.

On voit par la définition de la raison arithmétique, que sa valeur doit s'estimer en soustrayant une des quantités comparées de l'autre; & qu'ainsi la raison arithmétique de 3 à 5 égale celle de 7 à 9. C'est cette égalité de deux raisons qui établit une proportion arithmétique, qu'on écrit de ces trois manières indifféremment $3.5:7.9$, $3.5 \therefore 7.9$, $3-5=7-9$, & qu'on énonce ainsi: 3 est *arithmétiquement* à 5, comme 7 est à 9.

261. THÉOREME FONDAMENTAL. *Dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à celle des moyens, & réciproquement.*

DEM. 1°. Si l'on a $a.b \therefore c.d$, on a par la définition de la proportion $b-a=d-c$. Donc ajoutant $a+c$ de chaque côté de

l'égalité & réduisant, on aura $b + c = a + d$. Ou bien &c.

2°. La réciproque est que si quatre termes a, b, c, d sont arrangés de façon que la somme des extrêmes $a + d$ égale celle des moyens $b + c$, on aura la proportion $a. b \therefore c. d$. Car puisque $a + d = b + c$, en soustrayant de part & d'autre $a + c$, on aura $d - c = b - a$. Donc la raison arithmétique de a à b égale celle de c à d (260), ou bien $a. b \therefore c. d$.

262. Coroll. De là on déduira ces conséquences analogues à ce que nous avons dit plus haut pour la proportion géométrique.

1°. *Toute proportion arithmétique peut fournir une équation, & réciproquement.* Cette réciproque est fondée sur ce que chaque membre d'une équation peut être réduit à deux parties liées par les signes $+$ ou $-$.

2°. *Dans toute proportion arithmétique un extrême est égal à la somme des moyens, moins l'autre extrême* ($a = b + c - d$); *& un moyen est égal à la somme des extrêmes moins l'autre moyen* ($b = a + d - c$).

3°. De-là il suit que si la proportion arithmétique est continue, comme $\div a. b. c$, un extrême est égal au double du terme moyen, moins l'autre extrême, ou $a = 2b - c$; & le terme moyen est égal à la moitié de la somme des extrêmes, ou $b = \frac{a + c}{2}$.

263. Théoreme I. *On peut prendre pour formule générale de toute progression arithmétique celle-ci* $\div a. a \pm d. a \pm 2d. a \pm 3d. a \pm 4d. a \pm 5d.$ &c.

Dem. Une progression arithmétique quelconque est une suite de quantités, qui prises consécutivement ont une même différence. Or la suite dont il s'agit renferme des quantités, qui prises consécutivement donnent la même différence $\pm d$. D'ailleurs la valeur indéterminée des lettres leur permet de représenter des quantités quelconques. Donc c'est là une formule générale de toute progression arithmétique.

264. Coroll I. A l'inspection de la formule on voit 1°. que si la différence est positive ou $+ d$, le second terme $a + d$

est plus grand que le premier a; & qu'ainsi la progression est croissante (le contraire arrivera si la différence est négative).

2°. Que connoissant un terme quelconque avec la différence commune, on peut continuer la progression à droite & à gauche de ce terme, à l'infini.

265. COROLL II. Comparant ensemble deux termes quelconques de la formule (que nous supposons croissante pour une plus grande clarté), on voit que *le plus grand terme égale le plus petit, plus la différence commune multipliée par la différence de leurs quantièmes.* Ainsi le cinquième ($a + 4d$) vaut le troisième ($a + 2d$), plus la différence (d) multipliée par 2; ou bien $a + 4d = a + 2d + d$ ($5-3$); & que le plus petit des deux termes comparés égale *le plus grand, moins la différence commune, multipliée par la différence de leurs quantièmes.* Car le troisième $a + 2d =$ le cinquième $a + 4d - d$ ($5-3$). (Si la progression étoit décroissante, il faudroit soustraire la différence commune, pour avoir le plus grand terme, & l'ajouter pour avoir le plus petit).

266. COROLL III. Il suit de-là que faisant le plus grand des deux termes comparés $= Q$, son quantième $= m$; le plus petit $= q$, son quantième $= n$: on aura $Q = q + d \times \overline{m - n}$. Donc $d = \frac{Q-q}{m-n}$: c'est-à-dire, que *connoissant deux termes de la progression avec leurs quantièmes, on aura la différence commune en divisant l'excès du plus grand sur le plus petit, par la différence de leurs quantièmes.*

Par-là on voit 1°. que connoissant deux termes quelconques avec la valeur de leurs quantièmes, on pourra continuer la progression. 2°. On inserera aisément des moyens proportionnels arithmétiques entre deux termes donnés. Par ex. qu'il en faille inserer 4 entre 1 & 21, on dira; par la formule, $d = \frac{21-1}{6-1} = \frac{20}{5} = 4$. Donc le premier moyen proportionnel $= 1 + 4 = 5$; le second $= 5 + 4 = 9$; le troisième $= 9 + 4 = 13$; le quatrième $= 13 + 4 = 17$; & la progression entière sera $\div 1 . 5 . 9 . 13 . 17 . 21$.

267. Scholie. Il faut remarquer que si les différentes puissances d'une même quantité forment une proportion ou une progression géométrique, leurs exposants formeront une proportion ou progression arithmétique. Ainsi dans $a^2 : a^4 :: a^6 : a^8$, on a 2. 4 ∴ 6. 8. dans ÷ $a^0 . a^2 . a^4 . a^6 . a^8$ on a ÷ 0. 2. 4. 6. 8.

268. Théoreme II. *Dans toute progression arithmétique la somme des extrêmes égale celle de deux termes quelconques également éloignés des extrêmes, ou le double du terme moyen, si le nombre des termes est impair.*

Dem. Cette égalité se trouve dans la formule générale (263); elle doit donc avoir lieu dans tous les cas particuliers.

269. Coroll I. Il suit de-là qu'écrivant ainsi ces deux progressions, . . . $\left\{\begin{matrix} \div a. & a\pm d. & a\pm 2d. & a\pm 3d. & a\pm 4d \\ \div a\pm 4d. & a\pm 3d. & a\pm 2d. & a\pm d. & a \end{matrix}\right\}$ dont l'une n'est autre chose que l'autre renversée; on forme, en prenant les termes correspondants, une suite de quantités égales, dont le nombre est le même que celui des termes de la progression, que j'appelle n. Donc leur somme sera $n\ (2a\pm 4d)$. Et appellant s la somme d'une des deux propressions, on a $s = \frac{n}{2}(2a\pm 4d)$, c'est-à-dire, *que la somme de tous les termes d'une progression arithmétique est égale à la somme des extrêmes, ou de deux termes quelconques également éloignés des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes*; ou bien *au terme du milieu, multiplié par le nombre entier des termes, lorsque ce nombre est impair.* (Lorsque le nombre des termes est impair, la somme des extrêmes fait un nombre pair, & réciproquement. Alors pour éviter les fractions, il est plus simple de prendre la somme de la progression en multipliant le terme moyen par le nombre entier des termes).

270. Coroll III. On a donc la somme de la suite naturelle des nombres partant de l'unité, comme ÷ 1. 2. 3. 4. &c. *en prenant la moitié du dernier nombre, plus la moitié de son quarré.* Car alors le dernier terme désigne le nombre de ceux qui sont dans la progression. Donc la formule devient $s = \frac{1+n}{2}$

$\frac{n}{2} = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$. Ainsi la somme des cent premiers nombres est $\frac{100}{2} + \frac{10000}{2} = 5050$.

271. Dans la progression des premiers nombres impairs ÷ 1. 3. 5. 7. &c. le dernier vaut le double du nombre des termes, moins l'unité, ou $2n-1$. Donc $s = \overline{1+2n-1} \times \frac{n}{2} = n^2$, c'est-à-dire, qu'*alors la somme égale le quarré du nombre des termes.* Ainsi la somme des cent premiers nombres impairs est 10000.

Réciproquement, connoissant une somme de premiers nombres impairs qui commencent à l'unité, il suffit d'en extraire la racine quarrée, pour savoir combien il y entre de ces nombres; puisque $s = n^2$ donne $n = \sqrt{s}$. Or, comme ces sommes forment les quarrés 1, 4, 9, 16, 25, il s'ensuit que le premier quarré contient un des premiers nombres impairs, le second 2, le troisième 3, &c.

CHAPITRE VII.

De la sommation des différentes puissances des termes d'une progression arithmétique.

POUR avoir le moyen de sommer les termes d'une progression arithmétique, dont chacun seroit élevé à une puissance donnée, il faut faire les observations suivantes.

272. 1°. Si on a la progression arithmétique croissante ÷ a. b. c. d. e, dont la raison arithmétique soit r, il est clair que l'on aura $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$. Donc en élevant toutes ces équations au quarré, on aura :

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$
$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$
$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$
$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2$$

prenant la somme de toutes ces équations, & effaçant les ter-

mes égaux des deux côtés, ce qui ne sauroit détruire l'égalité, on a $e^2 = a^2 + (a + b + c + d)\,2r + 4r^2$.

2°. Élevant les mêmes équations au cube, & prenant leur somme, on trouvera celle-ci $e^3 = a^3 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,3r + (a + b + c + d)\,3r^2 + 4r^3$; & enfin si on les éleve à la quatrième puissance, on trouvera $e^4 = a^4 + (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\,4r + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,6r^2 + (a + b + c + d)\,4r^3 + 4r^4$.

273. Si l'on fait la somme des premières puissances des termes donnés $= s'$, leur nombre $= n$, & le dernier terme $= t$, il est évident qu'on aura, en vertu de la première équation, $t^2 = a^2 + (s' - t)\,2r + (n - 1)\,r^2$. Donc en *transposant* (*a*) & divisant tout par $2r$, on aura pour formule de sommation des premières puissances $s' = \frac{t^2 - a^2 - (n+1)\,r^2}{2r} + t$.

274. Faisant ensuite dans cette supposition la somme des quarrés $= s''$, on aura pour la seconde équation, $t^3 = a^3 + (s'' - t^2)\,3r + (s' - t)\,3r^2 + (n - 1)\,r^3$. Donc la formule pour la somme des quarrés sera $s'' = \frac{t^3 - a^3 - s' + t \times 3r^2 - \overline{n+1} \times r^3}{3r} + t^2$: par un semblable calcul on trouveroit une formule pour la sommation des cubes, & de toute autre puissance.

275. Corol. Il suit de là, 1°. que si la progression $\div a.\ b.\ c.\ d.\ e.$ &c. est formée par la suite naturelle des nombres, commençant à l'unité, on aura (270) $\left\{\begin{matrix} t = n \\ a = 1 \\ r = 1 \end{matrix}, s' - t = \frac{n^2 - n}{2}\right\}$. Donc en substituant ces nouvelles valeurs, la formule des quarrés sera $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$.

2°. que si le nombre des termes de la suite naturelle commençant à l'unité, est *infini*, alors t & n sont infinis. Donc tous les termes doivent s'effacer dans la valeur de s', excepté t^2,

(*a*) Transposer, c'est faire passer un terme d'un membre d'équation à l'autre, en changeant son signe; ce qui ne peut détruire l'égalité des deux membres.

qui devient ∞^2 (l'infini se désigne par ce caractère ∞) (*b*). Donc la formule se changera ainsi $s' = \frac{\infty^2}{2} = \frac{1}{2}\infty \times \infty$.

276. Pareillement dans la valeur de s'' il ne restera que $\frac{\infty^3}{3}$. Donc $s'' = \frac{\infty^3}{3} = \frac{1}{3}\infty^2 \times \infty$. Or, ici ∞ désigne le nombre des termes, & $\frac{1}{3}\infty^2$ désigne un tiers du dernier quarré. Par conséquent la somme d'un nombre infini de quarrés de la suite naturelle des nombres vaut le tiers du dernier quarré, multiplié par leur nombre. La somme des cubes vaudroit un quart du dernier cube, multiplié par leur nombre ; & en général, *la somme des puissances m* (que je désigne par s^m) *seroit exprimée par* $s^m = \frac{1}{m+1}\infty^m \times \infty$, ou bien $s = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$

277. Si l'on avoit une suite infinie de termes dont chacun égalat ∞^m, qui est le plus grand de la suite des puissances m, leur somme seroit $\infty^m \times \infty = \infty^{m+1}$; donc cette somme seroit à celle des puissances m de la suite naturelle $:: \infty^{m+1} : \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$ ou bien $:: m+1 : 1$; ce qui fournit ce principe ; *que la somme des quarrés de la suite naturelle infinie* 1, 2, 3, *&c.* . . ∞ *est à la somme d'un égal nombre de quarrés, dont chacun égaleroit le dernier* (∞^2) *de la suite supérieure, comme* 1 *est à* 3.

CHAPITRE VIII.

De l'origine & des principales propriétés des Logarithmes.

278. NOUS avons déjà vu (219) que pour mesurer les raisons

(*b*) Nous prouverons plus bas que le fini ne peut ni augmenter ni diminuer l'infini par addition ou par soustraction : il en est de même d'une puissance inférieure de l'infini par rapport à une supérieure.

que les différens nombres admettent entr'eux, il suffisoit d'avoir mesuré les raisons de ces mêmes nombres à l'unité; puisqu'on a toujours $a : b = a : 1 - b : 1$. Mais pour déterminer celles-ci, on doit prendre pour module une raison fixe qui ait pour conséquent 1 (222), & pour antécédent un nombre quelconque plus grand que 1, que je désigne par a; de sorte que ce module sera $a : 1$. Dès lors si l'on veut savoir la valeur de la raison qu'il y a entre un nombre quelconque & l'unité, par ex. de $Q : 1$, on cherchera combien de fois $Q : 1$ contient $a : 1$; & le nombre qui désignera combien de fois $Q : 1$ contient $a : 1$ sera l'expression numérique de la valeur de $Q : 1$.

279. DEF. *Les Logarithmes ne sont autre chose que des expressions numériques, qui désignent les valeurs des raisons qu'il y a entre les différens nombres & l'unité.*

Telle est en effet la signification du mot *Logarithme*, qui désigne, suivant son éthymologie, *raison des nombres*. Ainsi non-seulement un logarithme suppose toujours une raison, mais il est encore le vrai exposant de sa valeur; & quand nous dirons dans la suite *l.* 100, *l.* 1000, &c. nous entendrons *l.* (100 : 1), *l.* (1000 : 1). Ce n'est que dans ce sens que ces premières expressions sont exactes, quoiqu'elles soient généralement adoptées par l'usage.

De cette définition & de ce que nous avons déja dit sur les raisons, on déduira toutes les propriétés des logarithmes.

280. I. Le terme a du module pouvant varier à l'infini, il peut y avoir une infinité de mesures différentes des raisons numériques, ce qui donne autant de systèmes différens de logarithmes (nous rapporterons plus bas les deux principaux).

281. II. La valeur de la plus-part des raisons étant indéterminable (223), il faut que dans chaque système la plus-part des logarithmes le soient aussi; & alors on les prend par approximation.

282. III. *Les Logarithmes des nombres plus grands que l'unité doivent être positifs*, parce qu'ils expriment des raisons de majorité (217). Ainsi *l.* 100, *l.* 10, *l.* 2 &c. sont positifs, parce qu'ils désignent *l.* 100 : 1, *l.* 10 : 1, *l.* 2 : 1 (279). Mais *l.* $\frac{1}{100}$,

$l.\frac{1}{10}$, $l.\frac{1}{2}$, de même que les logarithmes de toute autre fraction, exprimant les valeurs des raisons de minorité, savoir, de $\frac{1}{100}:1$, de $\frac{1}{10}:1$, de $\frac{1}{2}:1$, doivent être négatifs. Enfin le logarithme de l'unité doit être 0, puisqu'il expose la valeur d'une raison d'égalité, savoir, $1:1$, laquelle est 0 (217).

283. IV. Suivant les principes déjà posés (215), $a:1+b:1+c:1=abc:1$. Or, (279) l'expression numérique de la valeur de $a:1$ est $l.\,a$; celle de $b:1$ est $l.\,b$, celle de $c:1$ est $l.\,c$, celle de $abc:1$ est $l.\,abc$. Donc $l.a+l.b+l.c=l.\,abc$, ou bien *le logarithme d'un produit vaut la somme des logarithmes de ses facteurs.*

284. COROLL I. Il suit de là qu'en transposant on a $l.\,a=l.abc-l.b-l.c$; c'est-à-dire, que *le logarithme d'un facteur vaut le logarithme du produit, moins les logarithmes des autres facteurs.* Or, dans toute division le quotient & le diviseur sont les deux facteurs du dividende. Donc *le logarithme du quotient vaut toujours celui du dividende, moins celui du diviseur.* Ainsi $l.\frac{a}{b}=l.a-l.\,b$, $l.\frac{ab}{cd}=l.ab-l.\,cd$, ou bien $=l.a+l.b-l.c-l.d$.

285. Il est aisé de déduire de là les expressions des logarithmes des puissances & des racines. Car puisque $a^2=a\times a$, $L.\,a^2=l.a+l.a=2\,l.a.$ puisque $a^3=a\times a\times a$, $l.\,a^3=l.a+l.\,a+l.a=3\,l.a.$, & en général $l.\,a^n=n\,l.a$; ce qui exprime que *le logarithme d'une puissance quelconque vaut celui de la racine, multiplié par l'exposant de cette puissance.*

286. II. Puisque $a=\sqrt{a}\times\sqrt{a}$, $l.a=l.\sqrt{a}+l.\sqrt{a}=2l.\sqrt{a}$, ou bien $l.\sqrt{a}=\frac{l.a}{2}$. De même puisque $a=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}$, $l.a=3\,l.\sqrt[3]{a}$, ou bien $l.\,\sqrt[3]{a}=\frac{l.a}{3}$: & enfin $l.\sqrt[n]{a}=\frac{l.\,a}{n}$. C'est-à-dire, que *le logarithme d'une racine d'un nombre vaut celui de ce nombre, divisé par l'exposant de cette racine.*

287. REMARQUES. I. De ce que $l.Q.$ exprime combien de fois $Q:1$ contient le module, savoir $a:1$, il s'ensuit que si $l.\,Q$

$= 2$, $Q : 1 = a : 1 + a : 1 = a^2 : 1$, & qu'ainsi (205) $Q = a^2$: que si $l.\,Q = 3$, $Q : 1 = a : 1 + a : 1 + a : 1 = a^3 : 1$, ou bien $Q = a^3$: & le même raisonnement pouvant s'appliquer à tous les autres cas, il s'ensuit que *le logarithme d'un nombre quelconque* Q, *est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever l'antécédent* (*a*) *du module, pour avoir ce nombre* (on appelle cet antécédent la *Base logarithmique*); parce qu'on conclut que de ce nombre élevé à ses différentes puissances se forment tous les autres; les uns exactement, savoir, ceux qui sont des puissances exactes de a, les autres par approximation.

288. II. *Si quatre termes sont en proportion géométrique, leurs logarithmes sont en proportion arithmétique.* Car de ce que $a : b = c : d$, il s'ensuit (219) que $a : 1 - b : 1 = c : 1 - d : 1$, ou bien que (279) $l.\,a - l.\,b = l.\,c - l.\,d$, c'est-à-dire (260) qu'il y a proportion arithmétique entre ces logarithmes. (Il est aisé de démontrer la réciproque, savoir, que si $l.a - l.b = l.c - l.d$, on a $a : b = c : d$.).

289. Les formules suivantes présentent en abrégé toutes les opérations qu'on peut faire sur les logarithmes.

$\mathrm{L.}\,pq = \mathrm{L.}\,p + l.q$	$\mathrm{L.}\,(p^2 - q^2) = \mathrm{L.}\,(p+q) + l.(p-q)$
$\mathrm{L.}\,\frac{p}{q} = \mathrm{L.}\,p - l.\,q$	$\mathrm{L.}\,\frac{p+q}{p-q} = \mathrm{L.}\,(p+q) - l.\,(p-q)$
$\mathrm{L.}\,p^n = nl.p.$	$\mathrm{L.}\,(p-q)^{-n} = -n\,l.\,(p-q)$
$\mathrm{L.}\,p^{-n} = -nl.p$	$\mathrm{L.}\,\sqrt{\frac{p^2+q^2}{p-q}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L.}\left(\frac{p^2+q^2}{p-q}\right) =$
$\mathrm{L.}\,\sqrt[n]{p} = \frac{1}{n}\,l.\,p$	$= \frac{1}{2}\,l.(p^2+q^2) - \frac{1}{2}\,l\,(p-q)$

CHAPITRE IX.

Des différens systèmes de Logarithmes, de l'origine des Tables & de la manière de s'en servir.

290. SI l'on connoissoit les logarithmes des nombres entiers au-dessus de l'unité, on connoîtroit aisément ceux des nombres fractionnaires ; car une fraction indiquant un quotient (40), il suffiroit de soustraire le logarithme du dénominateur de celui du numérateur (284), & la différence seroit le logarithme de la fraction ; d'où il suit que ce logarithme seroit négatif, si la fraction valoit moins que 1 ; parce que alors le dénominateur étant plus grand que le numérateur, il faudroit soustraire un logarithme d'un autre plus petit que lui. Ce logarithme seroit positif, si la fraction valoit plus que 1 ; & il seroit 0, si la fraction égaloit l'unité.

291. *Parmi les nombres entiers, on ne doit chercher les logarithmes que des seuls nombres simples.* Car les nombres composés étant toujours le produit de quelques nombres simples (74), il ne faudra qu'ajouter les logarithmes de ceux-ci, pour avoir les logarithmes des autres. Ainsi prenant 10 pour base, ou supposant (287) son logarithme $= 1$, si l'on connoissoit d'ailleurs le logarithme de 2, que j'apelle x, on auroit :

L. 4 $= 2x$	L. 20 $= x + 1$
L. 8 $= 3x$	L. 40 $= 2x + 1$
L. 16 $= 4x$	L. 80 $= 3x + 1$
L. 32 $= 5x$	L. 800 $= 3x + 2$
L. 64 $= 6x$	L. 8000 $= 3x + 3$

Si l'on avoit encore le logarithme de 3 que j'appelle y, on trouveroit L. $6 = x + y$; L. $9 = 2y$; L. $12 = 2x + y$; L. $18 = x + 2y$, L. $24 = 3x + y$, &c. (Nous exposerons plus bas

dans les notions du calcul intégral la méthode la plus abregée qu'on ait aujourd'hui pour trouver les logarithmes des nombres simples).

292. Quelques avantages particuliers ont déterminé les Géométres à chercher ces logarithmes des différens nombres dans un systême où l'on a pris 10 : 1 pour raison modulaire, ou bien 10 pour base logarithmique. D'après cette première convention, on a formé des tables qui contiennent une longue suite de nombres avec leurs logarithmes à côté ; & de là résulte ce double avantage, que connoissant un nombre, on trouve de suite son logarithme ; & réciproquement, connoissant un logarithme, on trouve le nombre auquel il répond. Ainsi si je voulois multiplier 99 par 92, en me servant des logarithmes tabulaires, j'arrangerois ces nombres & leurs logarithmes comme on le voit ici. . . . . L. 92 = 1, 9637878

L. 99 = 1, 9956352

L. du produit = 3, 9594230

c'est-à-dire, que je prendrois la somme des logarithmes des nombres 92 & 99, qui est 3, 9594230 ; & voyant par les tables que cette somme est le logarithme de 9108, j'en conclurois que ce dernier nombre est le produit des deux premiers.

293. Coroll. *Dans le systême des tables le logarithme d'un nombre n'est donc autre chose que l'exposant de la puissance, à laquelle il faut élever 10 pour égaler ce nombre.* Ainsi le logarithme de 20 étant 1, 3010300, il s'ensuit que $20 = (10)^{1,3010300}$.

294. D'où l'on conclura 1°. que dans le systême des tables, les seuls nombres entiers qui aient des logarithmes exacts, sont 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. parce qu'ils sont les seules puissances exactes de 10, savoir, $(10)^0$, $(10)^1$, $(10)^2$, $(10)^3$, &c.

295. 2°. Que les logarithmes de tous les nombres contenus entre 1 & 10, doivent être exprimés par une fraction seule : qu'entre 10 & 100 ils doivent l'être par 1, plus une fraction : entre 100 & 1000 par 2, plus une fraction, &c. Donc l'*entier qui précéde la fraction décimale d'un logarithme, a toujours une*

unité

unité de moins, qu'il n'y a de caractères dans le nombre auquel appartient ce Logarithme. (Cet entier s'appelle pour cette raison la *caractéristique* du Logarithme).

296. THÉORÈME. *Tous les Logarithmes d'un système sont proportionnels aux Logarithmes correspondants d'un autre système.*

Soient deux nombres quelconques m & n dont les Logarithmes soient Q & P dans un système, q & p dans un autre système, je dis qu'on aura $Q : q :: P : p$.

DEM. Supposons que la base du premier système soit a, & celle du second b; on aura donc pour le nombre m ces deux équations $m = a^Q$, $m = b^q$; & par conséquent $a^Q = b^q$ ou $a = b^{\frac{q}{Q}}$ (*) : de même en prenant le Logarithme de n dans les deux systèmes, on trouve $a = b^{\frac{p}{P}}$. Donc $\frac{q}{Q} = \frac{p}{P}$, ou bien (206) $Q : q :: P : p$.

297. COROLL. Il s'ensuit de là *qu'avec les Logarithmes des tables, on peut trouver ceux d'un autre système quelconque.* Supposons en effet qu'on cherche le Logarithme du nombre n, dans un système où l'on prendroit 5 pour base : appellons P son Logarithme tabulaire, & p son Logarithme nouveau. Le Logarithme de 5, d'après les tables est 0, 6989700, & dans le nouveau système il est 1 (287). J'aurai donc $0,6989700 : 1 :: P : p = 1.4306765 \times P$. donc quel que soit le nombre n, si on multiplie son logarithme tabulaire par 1.4306765, on aura son Logarithme dans le système de la base 5.

298. I. QUESTION. *Connoissant dans une progression géométrique le premier terme a, le dernier t, & la valeur m du quotient qui regne dans la progression, trouver le nombre n des termes.*

SOL. Par ce que nous avons dit ailleurs (250), $t = am^{n-1}$; donc $l.t - l.a = (n-1)\, l.m$; divisant par $l.m$ & transposant -1, on a $n = \frac{l.t - l.a}{l.m} + 1$.

(*) On ne détruit jamais l'égalité qu'il y a entre deux quantités, quand on fait sur l'une les mêmes changemens qu'on fait sur l'autre. Or, ici on a divisé chaque exposant de deux quantités égales par Q.

Et en général toute question dans laquelle l'inconnue sert d'exposant à une puissance, ne peut être résolue directement que par les Logarithmes, & elle l'est aisément par ce moyen. Ainsi dans $p^x = a$, $x = \frac{l.a}{l.p}$: dans $\frac{p^x q^{x-n}.r}{b^x} = a$, $x = \frac{l.a + n\,l.q - l.r}{l.p + l.q - l.b}$.

299. II. Question. *Une somme d'argent, désignée par (a), a été placée à intérêt à 5 pour cent, à condition que les intérêts de chaque année seroient réunis au capital. On demande à quoi ce fonds montera après un nombre donné d'années, exprimé par n.*

Sol. Il est clair qu'à la fin de la première année, ce fonds sera $a + \frac{5}{100}a$, ou bien $\left(\frac{105}{100}\right)a$, ou bien encore $\left(\frac{21}{20}\right)a$: à la fin de la seconde année, ce fonds sera $\left(\frac{21}{20}\right)a + \frac{\left(\frac{21}{20}\right)a}{20}$. Réduisant ces deux fractions au même dénominateur, on a $\left(\frac{21\times 20}{20\times 20}\right)a + \left(\frac{21}{20\times 20}\right)a$, ou bien en prenant la somme $\left(\frac{21\times 21}{20\times 20}\right)a = \left(\frac{21}{20}\right)^2 a$. Par un semblable calcul on trouvera qu'à la fin de la troisième année, ce fonds sera $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a$; de façon qu'après un nombre d'années n, il sera $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$.

Si les intérêts avoient été à 2 pour cent, le fonds seroit devenu, après la première année $\left(\frac{102}{100}\right)a$, après la seconde $\left(\frac{102}{100}\right)^2 a$, & après n années $\left(\frac{102}{100}\right)^n a$.

Appellant donc x la valeur inconnue de ce fonds après un nombre n d'années, nous aurons $x = \left(\frac{21}{20}\right)^n a$, si le taux pour cent est 5. Donc $l.\,x = l.\left(\frac{21}{20}\right)^n a = nl.\left(\frac{21}{20}\right) + l.a = n(l.21 - l.20) + l.a$: formule dont on peut tirer la solution de toutes les questions de cette espèce, en donnant à n & à a les valeurs que la question exige.

Exemple. Supposons le capital $a = 1000$ écus, & qu'on

demande ce qu'il doit revenir après 100 ans, en comptant ainsi les intérêts des intérêts.

Je fais dans la formule $n = 100$ & $a = 1000$.

Je sais par les tables que $\left\{\begin{array}{l} L.\ 21 = 1,3222193 \\ L.\ 20 = 1,3010300 \end{array}\right\}$

Donc $l.21 - l.20 \ldots\ldots\ldots = 0,0211893$.

Donc $100\ (l.21 - l.20) \ldots = 2,1189300$.

Ajoutant $l.\ 1000 \ldots\ldots\ldots = 3,0000000$.

On a $n\ (l.21 - l.20) + l.a$, ou $l.x = 5,1189300$.

Or, le nombre qui répond à ce logarithme est 131501, ainsi dans cette supposition $x = 131501$ écus.

300. III. QUESTION. *On suppose une suite de nombres, qui commence à 2, & dont chacun des autres soit le quarré de celui qui le précède immédiatement : on demande combien il faudra de caractères, pour exprimer le vingt-cinquième nombre de cette suite.*

SOL. Je vois d'abord que ces nombres peuvent être représentés ainsi 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, &c. & je remarque que les exposants du nombre 2, sont les puissances successives de ce même nombre, commençant à 0. L'exposant du 25$^{me.}$ terme sera donc $2^{24} = 16777216$, & ce terme se présentera ainsi $2^{16777216}$. Son logarithme sera donc $16777216 \times l.2$. Or, $l.2 = 0,3010300$, qui étant multiplié par 16777216, donne 5050445,3324600. Il faudra donc 5050446 caractères pour exprimer le nombre en question (295); ce qui suffiroit pour remplir 9 volumes de 350 pages chacun, dont chaque page contiendroit 40 lignes & chaque ligne 40 caractères.

CHAPITRE X.

Des Permutations, des Combinaisons & de leurs différents usages.

301. DÉFINITION. On entend par *Permutation*, les différents arrangemens qu'on peut donner à plusieurs choses. Ainsi

les deux lettres *a* & *b* admettent deux permutations ; puisqu'on peut les arranger de ces deux manières *ab*, *ba*.

Nous supposerons ici que les choses dont on cherche les permutations, sont représentées par des lettres. Alors il peut arriver que toutes les lettres qui entrent dans ces permutations soient différentes, ou bien que la même y soit répétée un certain nombre de fois.

302. I. QUESTION. *On demande combien de permutations peut fournir un nombre n de lettres, qui sont toutes différentes.*

Pour le découvrir, j'observe d'abord que deux lettres *a* & *b* admettent ces deux arrangemens ou permutations *ab*, *ba*. Or, une troisième lettre *c* peut occuper trois places différentes dans *cb*, ainsi que dans *ba* ; en l'écrivant ou bien au milieu, ou bien à chaque extrémité. Donc les trois lettres *a*, *b*, *c* admettent ces six changemens différents *acb*, *cab*, *abc*, *bca*, *cba*, *bac*. Connoissant les permutations de trois lettres, je connoîtrai aisément celles de quatre, en observant que la quatrième lettre *d* peut se placer de quatre manières différentes, dans chacune des six permutations des trois premières : ce qui fait 24 permutations. Comme le même raisonnement peut s'appliquer à un nombre quelconque de lettres différentes, on en conclura : *que les permutations de deux lettres différentes sont exprimées par* $1.2 = 2$: *celles de trois, par* $1.2.3 = 6$: *celles de quatre, par* $1.2.3.4 = 24$: *celles de cinq par* $1.2.3.4.5 = 120$, *& ainsi des autres.*

303. II. QUESTION. *On demande combien de permutations peut donner un nombre de lettres, parmi lesquelles il y en a qui sont répétées, comme dans a, a, b.*

Nous venons de voir que si ces trois lettres étoient différentes, il en naîtroit six permutations ; attendu que les deux premières *a*, *b* en donneroient deux, & que la troisième *c* pourroit se placer de trois façons différentes dans chacune. Or, dans *a*, *a*, *b* les deux premières lettres ne donnent qu'une permutation, savoir, *aa* ; donc la troisième lettre *b* ne s'y peut placer que de trois façons différentes, & par là les six permutations se réduisent à trois, ou bien à $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$.

Si l'on avoit proposé les quatre lettres a, a, a, b, on auroit pû raisonner de même, en disant que si toutes ces lettres étoient différentes, les trois premières auroient fourni six permutations, dans chacune desquelles la quatrième lettre b auroit pû se placer de quatre différentes manières; ce qui auroit donné 24 permutations. Mais ces six permutations des trois premières lettres se réduisant à une, où bien leur nombre devenant six fois plus petit, il faut aussi que le nombre total des permutations à quatre lettres, devienne six fois plus petit; il sera donc $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$.

304. En général, *on trouvera que s'il y a des lettres répétées, le nombre des permutations est égal à celui qu'elles fourniroient étant toutes différentes, divisé par celui que fourniroient les lettres semblables, combinées comme si elles ne l'étoient pas.*

Ainsi le nombre des permutations de *aaaab*, $= \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4} = 5$; celui de *aaabb*, $= \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.2} = 10$: celui de *aabbb*, $= \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.3} = 10$.

305. Ou plus généralement un nombre m de lettres a & un égal nombre de lettres b, prises m à m, donnent 1 permutation, si l'on prend m fois a ou m fois b; car (304) le nombre de ces permutations est exprimé par $\frac{m.m-1.m-2...}{m.m-1.m-2...} = 1$: elles donnent m permutations, si l'on prend $m-1$ fois a & 1 fois b; car ce nombre est alors $\frac{m.m-1.m-2...}{1.m-1.m-2...} = m$: elles donnent $\frac{m.m-1}{1.2}$ permutations, si l'on prend $m-2$ fois a & 2 fois b; puisqu'un tel nombre est désigné par $\frac{m.m-1.m-2....}{1.2.m-2....} = \frac{m.m-1}{1.2}$; &c..

306. REMARQUES. I. Lorsqu'on multiplie un Polynome simple, un certain nombre de fois par lui-même, chaque terme du produit doit contenir autant de lettres, qu'on multiplie ensemble de Polynomes; ensorte que si ce nombre de Polynomes est m, la somme des exposants de chaque terme sera m.

307. II. *Chaque terme doit se trouver autant de fois au produit; que ses lettres peuvent donner de permutations.* En effet, si dans l'exemple ci-dessous, on écrit toujours la lettre du multiplicande avant celle du multiplicateur, on verra que si dans le premier produit partiel on place b devant a, dans le second on le place après; ainsi le terme ab doit se présenter deux fois. De même si dans le premier produit partiel c est devant a, dans le troisième il est après; ainsi le terme ac s'y trouve deux fois; c'est-à-dire, autant de fois que ses lettres peuvent donner de permutations. Il en est ainsi des autres termes : & la même chose arriveroit quel que fût le nombre des facteurs; parce que cela s'ensuit *de ce qu'ils sont supposés les mêmes, & de ce qu'en les multipliant, on écrit leurs lettres les unes à côté des autres.*

EXEMPLE.

$$\begin{array}{ll} & a + b + c \\ & a + b + c \\ \hline \text{Produits partiels.} & \left\{\begin{array}{l} a^2 + ba + ca \\ \quad + ab + bb + cb \\ \qquad\qquad ac + bc + cc \end{array}\right. \\ \hline \text{Prod. tot.} & a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \end{array}$$

308. COROLL. *Quand on éleve le binome $a + b$ à la puissance m, chaque terme doit donc contenir m lettres* (306) *& se présenter autant de fois que ses lettres donnent de permutations* (307). Pour former cette puissance, il n'y a donc qu'à savoir : 1°. combien on peut faire d'espèces différentes de termes à m lettres, avec un nombre m de a & un pareil nombre de b : 2°. combien de permutations admettent les lettres, qui forment chaque espèce de termes.

Or, les espèces différentes de termes à m lettres, qu'on peut ainsi former, se déterminent en prenant m fois a & 0 fois b, ou a^m : $m-1$ fois a & 1 fois b, ou $a^{m-1}b$: $m-2$ fois a & 2 fois b, ou $a^{m-2}b^2$ . . . . 0 fois a & m fois b, ou b^m.

Le nombre des permutations pour les lettres de chaque ter-

me est (305) pour a^m, $\frac{m.\ m-1.\ m-2.....}{m.\ m-1.\ m-2.....} = 1$: pour $a^{m-1}b$, $\frac{m.\ m-1.\ m-2\ \&c.}{1.\ m-1.\ m-2....} = \frac{m}{1} = m$: pour $a^{m-2}b^2$, $\frac{m.m-1.m-2.\&c}{1.\ 2.\ m-2....} = \frac{m.m-1}{1.\ 2}$: pour b^m, $\frac{m.\ m-1.\ m-2...}{m.\ m-1.\ m-2...} = 1$. Il faut donc que la puissance m du Binome $a + b$ se présente ainsi:

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3 ... + b^m.$$

Ainsi la forme de cette puissance, qu'on a déterminée ailleurs (134) par induction, se trouve ici démontrée par la nature même de la chose.

309. Quoiqu'on puisse par la même formule trouver une puissance quelconque d'un Trinome, d'un Quadrinome, &c.; il est cependant plus commode, pour éviter de longues multiplications, de la former directement, ainsi qu'on forme le quarré ou le cube (145). Or, d'après les principes précédents, on y peut parvenir par la méthode suivante. Supposons qu'on cherche la quatrième puissance du Quadrinome $a + b + c + d$; pour la trouver, *formez d'abord quatre colonnes, dont chacune contienne les quatre premières puissances des lettres* a, b, c, d : *commençant ensuite par le terme superieur de la première colonne à gauche, formez, avec les termes qui sont à la droite, tous les produits possibles à quatre dimensions : donnez pour coefficient à chaque produit, le nombre qui détermine combien de permutations il peut avoir; & vous formerez la puissance cherchée.*

Ainsi, dans l'exemple suivant, j'écris d'abord le terme a^4, sans le multiplier par d'autres; parce qu'il a quatre dimensions : je lui donne 1 pour coefficient; parce que les lettres de ce terme n'admettent qu'une permutation (304). Descendant à a^3, je vois qu'il peut former quatre dimensions avec b, c, d, & non point avec d'autres termes à sa droite. J'écris donc a^3b, a^3c, a^3d; & je fais le coefficient 4, parce que chaque terme admet ici quatre permutations (304). a^2 peut donner quatre dimensions avec b^2, c^2, d^2, & chaque terme admettant alors 6

permutations (304), je place 6 pour coefficient de a^2b^2, a^2c^2, a^2d^2: le même a^2 peut donner encore quatre dimensions avec bc, bd, cd, & chacun donnant alors 12 permutations (304), j'écris $12a^2bc$, $12a^2bd$, $12a^2cd$. (Il est inutile de parler des autres termes).

EXEMPLE.

$$(a+b+c+d)^4$$

a^4	b^4	c^4	d^4
a^3	b^3	c^3	d^3
a^2	b^2	c^2	d^2
a^1	b^1	c^1	d^1

$$\begin{aligned}
a^4 &+ 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + c^4 + d^4 \\
&+ 4a^3c + 6a^2c^2 + 4ac^3 + 4b^3c + 4c^3d \\
&+ 4a^3d + 6a^2d^2 + 4ad^3 + 4b^3d + 6c^2d^2 \\
&+ 12a^2bc + 12ab^2c + 6b^2c^2 + 4cd^3 \\
&+ 12a^2bd + 12ab^2d + 6b^2d^2 \\
&+ 12a^2cd + 12ac^2b + 12b^2cd \\
&+ 12ac^2d + 4bc^3 \\
&+ 12ad^2b + 4bd^3 \\
&+ 12ad^2c + 12bc^2d \\
&+ 24abcd + 12bd^2c
\end{aligned}$$

310. DÉF. Nous entendons par *combinaisons* de plusieurs quantités, le nombre de fois que ces quantités peuvent être prises, ou une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, &c. Ainsi les trois quantités a, b, c admettent trois combinaisons une à une, savoir, a, b, c; trois combinaisons deux-à-deux, savoir, ab, ac, bc; & une combinaison trois-à-trois, savoir, abc.

311. III. QUESTION. *On demande combien de combinaisons peut donner un certain nombre de quantités, comme a, b, c, d, en les prenant d'abord une-à-une, ensuite deux-à-deux, puis trois-à-trois, &c.*

J'observe

J'observe 1°. que prises une-à-une, elles donnent autant de combinaisons, qu'il y a de lettres; ainsi m lettres donneroient m combinaisons.

2°. Que les prenant deux-à-deux, j'écris une fois plus de lettres, que je ne forme de combinaisons; puisque je mets deux lettres dans chacune. Connoissant donc le nombre des lettres écrites, & le divisant par 2, j'aurai le nombre de leurs combinaisons deux-à-deux.

Pour avoir le nombre des lettres écrites, je remarque que chaque lettre doit être écrite avec chacune des autres; & qu'ainsi s'il y en a 4, chacune sera écrite 3 fois; donc le nombre des lettres écrites sera 4. 3 : s'il y en a 5, chacune sera écrite 4 fois; donc le nombre des lettres écrites sera 5. 4 : s'il y a m lettres, chacune sera écrite un nombre de fois exprimé par $m - 1$; donc alors le nombre des lettres écrites sera $m.m-1$; & par conséquent celui des combinaisons deux-à-deux sera $\frac{m.m-1}{2}$.

Pour avoir les combinaisons de ces lettres trois-à-trois, j'observe également que mettant trois lettres dans chaque combinaison, j'écrirai deux fois plus de lettres, que je ne formerai de combinaisons. Il ne s'agit donc que de trouver ce nombre de lettres écrites, puisqu'en le divisant par 3, j'aurai le nombre de leurs combinaisons trois-à-trois.

Pour le trouver, je remarque que si j'ai 4 lettres à combiner trois-à-trois, comme a, b, c, d, *chacune sera répétée autant de fois, que les trois autres peuvent donner de combinaisons deux-à-deux.* En effet, pour faire les combinaisons trois-à-trois, on voit qu'il faut mettre a dans chacune des combinaisons deux-à-deux, qu'on peut faire avec b, c, d : qu'il faut mettre b dans chacune des combinaisons deux-à-deux, qu'on peut faire avec a, c, d : il en est de même de c par rapport à a, b, d, & de d par rapport à a, b, c. Donc si j'ai m lettres, je vois que chacune sera répétée un nombre de fois exprimé par le nombre des combinaisons deux-à-deux, que peuvent donner $m - 1$ lettres; c'est-

à-dire, par $\frac{m-1.m-2}{2}$. Donc alors le nombre des lettres écrites trois-à-trois sera $\frac{m.m-1.m-2}{2}$; & par conséquent le nombre des combinaisons $= \frac{m.m-1.m-2}{2.3}$.

Par un semblable raisonnement, on trouveroit que m lettres combinées quatre-à-quatre, donneroient un nombre de combinaisons exprimé par $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}$. Il en seroit de même de toutes les autres.

312. IV. QUESTION. *On propose une loterie, dans laquelle il y a un nombre m de numero, qu'on peut prendre en les combinant ou un-à-un, ou deux-à-deux, ou trois-à-trois ..... ou r à r. De tous ces numero, il n'en doit sortir de la roue de fortune qu'un nombre n: & l'on demande dans quel rapport est la probabilité de gagner à celle de perdre, en prenant un nombre p de combinaisons, ou simples, ou doubles, ou triples, ou &c.*

SOL. La probabilité qu'on a de gagner est en raison du nombre des combinaisons qu'on a prises, & du nombre de celles qui doivent sortir de la roue de fortune : tandis que la probabilité de perdre est en raison du nombre des combinaisons qui ne sortent pas (237). Or, il y a un nombre n de combinaisons simples, qui sortent de la roue, & un nombre $m-n$ qui ne sortent pas. Ainsi par ces sortes de combinaisons, l'espérance doit être à la crainte, comme $np : m-n$. Pour les combinaisons doubles, il y en a un nombre $\frac{n.n-1}{2}$ qui doit sortir de la roue de fortune, & un nombre $\frac{m^2-m-n^2+n}{2}$ qui n'en doit pas sortir. Ainsi par celles-là, l'espérance est à la crainte :: $\frac{p(n^2-n)}{2} : \frac{m^2-m-n^2+n}{2}$. On trouvera de même que par les combinaisons triples, l'espérance est à la crainte :: $\frac{p(n^3-3n^2+2n)}{2.3} : \frac{m^3-3m^2+2m-n^3+3n^2-2n}{2.3}$.

De ſorte que ſi l'on fait $p = 1$, $m = 90$ & $n = 5$, on aura par les combinaiſons ſimples, que la probabilité de gagner eſt à celle de perdre :: 1 : 17; par les doubles :: 1 : 399, 5; par les triples :: 1 : 11747.

313. V. QUESTION. *On demande ici, combien on peut faire de queſtions différentes, ſur les progreſſions Arithmétiques & Géométriques, en ſuppoſant connues trois de ces cinq choſes, le premier terme a, le dernier z, le nombre des termes n, le quotient ou la différence q, la ſomme s.*

SOL. Puiſqu'on ſuppoſe qu'à chaque fois il y a trois données, & par conſéquent deux inconnues, il y a une fois plus de queſtions à faire, qu'on ne peut trouver de différentes combinaiſons pour ces trois données. Or, pour celles-ci il y a 10 combinaiſons, puiſque (311) à prendre 5 choſes trois-à-trois, le nombre des combinaiſons eſt $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. Il y a donc 20 queſtions différentes à faire ſur les progreſſions, connoiſſant trois des cinq choſes qui y entrent; & elles ſe réſoudront toutes par les deux propriétés, dont l'une donne l'expreſſion de la ſomme de tous les termes & l'autre celle du dernier; & dans le cas où il s'agira de trouver la valeur des inconnues exponentielles, comme il arrive dans la progreſſion géométrique, on aura recours aux propriétés des Logarithmes, prouvées ci-deſſus (290).

SECTION QUATRIEME.

De l'Analyse.

CHAPITRE PREMIER.

Des propriétés générales des Équations.

314. L'ANALYSE en général est l'art de décomposer une quantité en toutes celles qui y sont contenues ; mais ici nous n'entendons par-là, *que les moyens de trouver dans une expression algébrique, la valeur de certaines quantités, qui y sont combinées avec d'autres.* Celles dont on cherche la valeur, & qui pour cette raison sont appellées des *inconnues*, s'expriment ordinairement par les dernières lettres de l'alphabet, x, y, z, & les quantités données ou *connues*, par les premières. Pour trouver ces valeurs, on forme une *équation* ou *expression d'égalité* entre plusieurs quantités; tout ce qui est à la gauche du signe $=$, en est le premier membre, & ce qui est à la droite, en est le second. Quand on est parvenu à laisser l'inconnue seule dans un membre, tandis que l'autre est composé de quantités toutes connues, alors on a *dégagé* l'inconnue ; ou bien on a trouvé sa valeur. Cette valeur est appellée *une racine de l'équation*, & l'on ne doit point confondre ces sortes de racines avec celles que fournissent les puissances.

315. AXIOME. *On ne détruit point l'égalité entre les deux membres d'une équation, si l'on fait subir les mêmes changemens à l'un & à l'autre.*

On peut donc leur ajouter ou bien en soustraire la même quantité ; les multiplier ou les diviser par la même quantité ; les élever à la même puissance ou bien en extraire la même

racine, ſans détruire l'égalité qu'il y avoit entr'eux avant ces changemens.

316. COROLL. Il ſuit de là 1°. *que ſi le même terme avec le même ſigne ſe trouve dans les deux membres d'une équation, on peut l'effacer de part & d'autre.* Par là l'expreſſion devient plus ſimple, ſans que l'égalité ſoit détruite. Ainſi $a^2 + b = x + a^2$ devient $b = x$, en effaçant a^2 de part & d'autre.

317. 2°. *Que s'il y a pluſieurs termes ſemblables dans une équation, on peut les réduire à un ſeul.* Ainſi $a^2 + x + 3a^2 = c + x$, devient $4a^2 = c$.

318. 3°. *Qu'en changeant le ſigne d'un terme, on peut le faire paſſer d'un membre d'équation à l'autre, ſans détruire l'égalité.* Ainſi $x^2 + px = q - t$, peut ſe changer en $x^2 + px + t = q$; car par là, on ne fait qu'ajouter la même quantité $+ t$ aux deux membres, & réduire le ſecond; puiſque $x^2 + px = q - t$ devient, en ajoutant $+ t$ des deux parts, $x^2 + px + t = q - t + t$; & réduiſant le ſecond membre, $x^2 + px + t = q$. Si l'on avoit fait $x^2 + px - q = - t$, on auroit ſouſtrait q de chaque membre (cette opération s'appelle *Tranſpoſition*). On peut donc par la Tranſpoſition, faire paſſer tout le ſecond membre d'une équation dans le premier, en laiſſant o à ſa place. Ainſi $x^2 + px = q - t$ peut devenir $x^2 + px - q + t = 0$

319. Si après avoir tranſpoſé tous les termes d'une équation dans un ſeul membre, on les ordonne *par rapport à une inconnue*, on les appellera premier, ſecond, troiſième terme, ſelon l'ordre décroiſſant des expoſants de cette inconnue; & on appellera dernier terme, celui où l'inconnue ne ſe trouvera pas. Si enfin la lettre par laquelle on ordonne l'équation, a le même expoſant dans pluſieurs termes, on les écrira les uns ſous les autres, & ils ſeront cenſés faire un même terme complexe. Ainſi l'équation ſuivante, ordonnée par rapport à x, s'écrira ſous la forme qu'on voit ici, & on dira qu'elle ne contient que quatre termes.

$$x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$$
$$- bx^2 + acx$$
$$- cx^2 + bcx.$$

Après qu'une équation a été réduite autant qu'il eſt poſſible, on dit qu'elle eſt du degré exprimé par le plus haut expoſant de l'inconnue, ſi elle n'en renferme qu'une ; ou bien par la plus grande ſomme de leurs expoſants dans le même terme, ſi elle en renferme pluſieurs. Ainſi l'équation précédente eſt du troiſième degré ; celle-ci $xy + x + p = 0$ eſt du ſecond ; & celles-ci $x + b = c$, $x + y + z = q$, ſont du premier. (*)

Comme chaque opération d'Algèbre a ſa contraire, il eſt évident qu'il faut chercher à dégager l'inconnue, par des opérations oppoſées à celles qui l'ont engagée avec les connues. Or, ſi l'équation eſt réſoluble, il n'eſt point poſſible que l'inconnue n'ait été engagée par quelqu'une des ſix opérations ſuivantes, ou par pluſieurs à la fois ; ſavoir, par addition ou ſouſtraction ; par multiplication ou diviſion ; par l'élevation à quelque puiſſance, ou par l'extraction de quelque racine.

320. I. Si l'inconnue eſt engagée par addition ou par ſouſtraction, il faut la dégager par la tranſpoſition : *en la rendant poſitive dans un membre*, & tranſpoſant tous les termes dans l'autre. Ainſi dans $x + p + q = r$, j'écris $x = r - p - q$; dans $ab - c = cd - x$, j'écris $x = cd - ab + c$. Je ſuis ſûr que ſans détruire l'égalité (318), j'ai employé l'opération oppoſée à celle par laquelle l'inconnue étoit engagée.

321. II. Si l'inconnue eſt multipliée, *il faut compoſer un membre des ſeuls termes où elle ſe trouve, & diviſer toute l'équation par ce qui multiplie cette inconnue.* Ainſi dans $ax + b = c$ on a,

(*) On appelle auſſi *équations linéaires*, celles du premier degré ; *équations planes*, celles du ſecond : *équations cubiques*, celles du troiſième. Ces dénominations ſont fondées ſur quelques rapports avec les dimenſions de l'etendue, deſquels nous parlerons en Géométrie.

en transposant b, & divisant par a, $x = \frac{c-b}{a}$. Mais nous avons vu (112) *que si la même quantité entre pour facteur dans plusieurs termes, elle fait un produit avec tout ce qui n'est pas elle, dans ces mêmes termes.* Il faut donc alors, pour dégager l'inconnue, diviser l'équation par ce qu'il y a dans ces termes de différent de l'inconnue. Ainsi dans $ax + bx + x = c + d$, je vois que dans le premier membre x fait un produit avec $a + b + 1$; divisant donc toute l'équation par ce facteur, j'ai $x = \frac{c+d}{a+b+1}$.

322. III. Si l'inconnue est divisée, *il faut tout multiplier par ce diviseur.* Ainsi dans $\frac{x}{a} + b = c - d$, multipliant d'abord par a, j'ai $x + ab = ac - ad$, & transposant j'ai $x = ac - ad - ab$. Dans $\frac{x}{a-b} = c$, j'ai $x = ac - bc$. En général, pour faire disparoître les fractions dans une équation, *il faut multiplier tous ses termes, par le produit de tous les dénominateurs.* Or, pour cela il suffit dans chaque terme fractionnaire d'effacer le dénominateur, & de multiplier par tous les autres dénominateurs (53). Ainsi $\frac{a}{x} + \frac{c}{d} - e = f$, devient $ad + cx - dex = dfx$; $\frac{x^2}{ab} + \frac{x}{p} + \frac{q}{r} = t - u$, devient $prx^2 + abrx + abpq = abprt - abpru$. Par là on ne fait que multiplier les deux membres par les mêmes facteurs, ce qui ne détruit point l'équation.

323. IV. Si l'inconnue est élevée à quelque puissance, *il faut (s'il se peut) la laisser seule dans un membre, & extraire de part & d'autre la racine analogue à cette puissance.* Ainsi dans $ab + x^2 = c$, j'écris $x^2 = c - ab$; & extrayant la racine quarrée $x = \pm \sqrt{c - ab}$ (nous parlerons plus bas des différents cas qui se présentent ici). Enfin, si l'inconnue est affectée de quelque radical, il faut le faire disparoître en élevant tous les termes à la puissance qui répond à ce radical. Ainsi $\sqrt{x} = b$ devient $x = b^2$. $\sqrt{x^3} = a + b$ devient $x^3 = (a + b)^2$ & $x = \sqrt[3]{(a + b)^2}$.

La manière dont l'inconnue est engagée fera donc voir, dans

tous les cas, qu'elle est celle des opérations précédentes qu'il faut employer, pour la dégager.

CHAPITRE II.

Des Équations du premier degré à une seule inconnue.

324. AVANT d'en venir à l'application des règles précédentes, il se présente quelques réfléxions à faire sur la manière de mettre un problème en équation. D'abord on voit qu'il seroit absurde d'en demander la solution, sans assigner quelque condition, ou rapport des quantités connues avec les inconnues, d'où l'on pût la tirer. Quelquefois, à la vérité, on n'est pas obligé de détailler ces conditions; parce qu'elles dépendent de certaines propriétés qui entrent dans le problème; & que sans être explicitement énoncées, elles n'en sont pas moins renfermées dans la question proposée. Dans ce cas l'Analyste ne peut les découvrir, que par la réfléxion aidée des connoissances relatives au sujet dont il s'agit. Ces conditions une fois connues, il exprimera par des lettres les différentes quantités qui entrent dans la question, & il formera autant d'équations, qu'il y a de rapports différents entre ces quantités. Il évitera sur tout d'introduire dans le calcul plus de lettres qu'il n'en faut, & de présenter comme *indépendantes* des équations qui, par quelque opération algébrique, peuvent se réduire à la même. Enfin il s'assurera, avant de commencer ses calculs, que chaque équation est la traduction exacte de la condition qu'elle doit exprimer, & que toutes ensemble rendent fidélement la question proposée. Mais ici, comme dans plusieurs autres cas, les exemples instruisent mieux que les préceptes.

325. PROBLÈME I. Pierre & Jean ont fait ensemble un fonds de 565 écus; Pierre en a mis 137 de plus que Jean, on demande qu'elle est la mise de chacun.

SOL. 1°. Je vois que les noms de mise, d'écus, de Pierre & de

de Jean sont des pures dénominations inutiles pour la solution de la question. C'est pourquoi les laissant à part, je fais :

$$\left\{ \begin{array}{l} 565 = a \\ 137 = b \end{array} \right\}$$

2°. Quoiqu'il paroisse d'abord qu'il y a ici deux inconnues, savoir, la mise de Pierre & celle de Jean ; je vois bientôt qu'il n'y en a réellement qu'une ; puisque connoissant celle de Pierre, il suffira d'en soustraire 137 écus ou b, qui fait la différence des mises, pour avoir celle de Jean. Ainsi appellant la première x, la seconde sera $x - b$.

3°. D'après les conditions du problème, il faut que la somme de ces deux mises vaille 565 écus ou a ; donc tout sera exactement exprimé en faisant $x + x - b = a$. Transposant & réduisant, $2x = a + b$; & divisant par 2 (322) $x = \frac{a+b}{2}$, expression de la mise de Pierre. Pour avoir celle de Jean, je soustrais b de $\frac{a+b}{2}$, ce qui donne $\frac{a+b}{2} - b$; & donnant un même dénominateur, puis réduisant, je trouve $\frac{a-b}{2}$. Si je substitue les nombres à la place des lettres, la mise de Pierre sera $\frac{565+137}{2} = \frac{702}{2} = 351$ écus, & celle de Jean sera $\frac{565-137}{2} = \frac{428}{2} = 214$ écus. En effet on trouvera que la somme de ces deux mises est 565, & que l'excès de la première sur la seconde est 137, comme le problème le porte.

326. Remarque. L'Analise mène souvent à des vérités qu'il est aisé, en suivant une marche contraire, de prouver par la voie de la Synthèse. Ainsi la solution du problème précédent peut donner lieu à ce théorême.

327. Théorème. *La plus grande de deux quantités vaut la moitié de leur somme, plus la moitié de leur différence : & la plus petite vaut la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.*

Dem. Soit $a > b$: 1°. je dis que l'on trouve a en prenant la moitié de la somme de a & de b, savoir, $\frac{a+b}{2}$, & lui ajoutant la moitié de la différence, qui est $\frac{a-b}{2}$. En effet $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ (en

effaçant $+\frac{b}{2}$ & $-\frac{b}{2}$) devient $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a$ ou a. 2°. Je dis qu'on trouve b en soustrayant la moitié de la différence de la moitié de la somme ; car il vient alors $\frac{a+b-a+b}{2}=\frac{2b}{2}=b$.

328. Problème II. Trouver un nombre, qui, multiplié par 12, vaille autant qu'ajouté à 12.

Sol. Soit x pour ce nombre, & nous aurons $x+12=12x$; donc $12=12x-x=11x$, & $x=\frac{12}{11}$.

Si au lieu de 12 nous écrivions a, il nous viendroit $x=\frac{a}{a-1}$; & l'on pourroit déduire de là cette propriété générale : *que si un nombre est divisé par un autre plus petit que lui d'une unité, le quotient sera tel, que soit en l'ajoutant au dividende, soit en le multipliant par ce dividende, la somme & le produit seront toujours égaux.* Ainsi $12+\frac{12}{11}$; ou $13\frac{1}{11}$ vaut autant que $12\times\frac{12}{11}=\frac{144}{11}=13\frac{1}{11}$: de même $4+\frac{4}{3}=4\times\frac{4}{3}$, car l'un & l'autre de ces nombres est $5\frac{1}{3}$.

329. Problème III. Un Marchand a trois Débiteurs, A, B, C ; il a oublié ce que chacun lui doit, & se souvient seulement que les dettes de A & de B, ajoutées ensemble, valent 60 louis ; celles de A de C, 80 ; celles de B & de C, 92. On demande combien chacun lui doit.

Sol. J'appelle la dette de A, x ; & puisque par la première condition, étant ajoutée à celle de B, elle vaut 60 louis, l'autre sera $60-x$. De plus, comme A & C par la seconde condition doivent 80 louis, la dette de C est $80-x$: & enfin puisque par la troisième supposition, les deux dettes de B & de C ajoutées ensemble valent 92 louis, $60-x+80-x=92$. En transposant, j'ai donc $140-92=2x$: réduisant, $48=2x$: divisant par 2, $24=x$. Donc A doit 24 louis ; B qui doit $60-x$, en doit 36 ; & C qui doit $80-x$, en doit 56 ; & l'on voit que ces nombres remplissent les conditions du problème.

330. Problème IV. Quelqu'un regarde à sa montre, & on lui demande l'heure qu'il est. Il répond ; entre 5 & 6 ; mais

comme on veut une réponſe plus préciſe, il ajoute : dans cet inſtant l'éguille des minutes & celle des heures ſont ſur le même point. On demande qu'elle heure il étoit alors.

SOL. Il ne s'agit ici que de chercher la partie ou les parties d'une heure, qu'il faut ajouter à 5 pour avoir l'heure demandée. Appellant donc cette partie d'heure x ; le point où ſe rencontrent les deux éguilles, A ; j'obſerve que dans le tems que l'éguille des heures a parcouru ſur le cadran l'eſpace x, celle des minutes eſt venue de 12 en A, c'eſt à-dire, qu'elle a parcouru $5 + x$. Or, la viteſſe de la première étant la douzième partie de celle de la ſeconde, l'eſpace x doit être la douzième partie de $5 + x$, ou bien on a $x = \frac{5+x}{12}$; ôtant la fraction & tranſpoſant, il vient $11x = 5$; & enfin $x = \frac{5}{11}$, c'eſt-à-dire, qu'il étoit alors $5^h + \frac{5}{11}$, ou bien $5^h, 27' \frac{3}{11}$.

Si le point auquel répondent les éguilles, étoit ſuppoſé entre 6 & 7, on auroit $x = \frac{6}{11}$; entre 7 & 8, $x = \frac{7}{11}$; entre 8 & 9, $x = \frac{8}{11}$; de ſorte que le dénominateur de cette fraction eſt toujours 11, & le numérateur eſt le nombre qui déſigne l'heure au-delà de laquelle les éguilles ſe trouvent.

331. PROB. V. Un Marchand a deux ſortes de vin, l'un à 20 ſ. le pot, l'autre à 12 ſ. Il veut les mêler enſemble pour en faire 100 pots à 14 ſ. le pot ; on demande combien il doit prendre de pots de chaque ſorte.

SOL. Si l'on appelle x le nombre des pots de la meilleure ſorte, $100 - x$ exprimera le nombre des autres. Il faut donc pour avoir en ſous le prix de la meilleure ſorte, multiplier 20 par x, ce qui fait $20x$; pour avoir le prix de l'autre, multiplier $100 - x$ par 12, ce qui fait $1200 - 12x$: & pour avoir le prix du mélange, multiplier 100 par 14, dont le produit eſt 1400. Or, le prix des deux ſortes devant valoir enſemble le prix du mélange, on a $1200 - 12x + 20x = 1400$. Réduiſant & tranſpoſant, $8x = 200$; ou bien $x = \frac{200}{8} = 25$;

c'eſt-à-dire, que le nombre des pots de la meilleure ſorte doit être 25, & celui de l'autre ſorte 100—25 ou 75.

CHAPITRE III.

Des Équations du premier degré à pluſieurs inconnues.

332. SI un problème ne fournit pas autant d'équations que d'inconnues, il n'eſt point poſſible de trouver la valeur de chacune. Par ex. ſi on n'avoit que cette équation $ax = c - by$; avec les deux inconnues qu'elle renferme, on auroit en diviſant par a, $x = \frac{c-by}{a}$, ou bien en diviſant par b, $y = \frac{c-ax}{b}$; où l'on voit que la valeur de x renferme y, & que celle de y renferme x. Ainſi ces ſortes d'équations n'apprenent rien ni ſur x ni ſur y; à moins qu'on ne ſuppoſe une valeur à l'une ou à l'autre. Faiſant par ex. $y = 6$, j'aurai $x = \frac{c-6b}{a}$; & faiſant $x = 2$, j'aurai $y = \frac{c-2a}{b}$. Ces ſortes d'équations s'appellent *indéterminées*, & les problèmes qui les donnent, ſont auſſi appellés *problèmes indéterminés*; parce qu'ils ſont ſuſceptibles d'une infinité de ſolutions, à moins que l'état de la queſtion ne leur fixe des limites. Nous ne dirons rien ici de ces ſortes d'équations.

On appelle *déterminé* tout problème, qui fournit autant d'équations, qu'il contient d'inconnues; c'eſt de ceux là que nous allons parler, en commençant d'abord par ceux qui ne renferment que deux inconnues. Or, dans ces problèmes il peut arriver trois cas: 1°. que chaque inconnue n'entre que dans une équation, comme dans $ay + b = c$, $dx + e = f$; & alors on trouve la valeur de chacune, par les méthodes ci-deſſus. 2°. Qu'une des inconnues entre dans une ſeule équation, & l'autre dans deux, comme dans $ax + by = c$, $dx + ey = f$. 3°. Que chaque inconnue entre dans deux équations, comme dans $ax + by = c$, $dx + ey = f$.

Dans les deux derniers cas, on a deux méthodes pour trouver la valeur de chaque inconnue.

PREMIÈRE MÉTHODE.

[*] *Prendre les valeurs égales d'une même inconnue.*

333. 1°. *Dans chacune des deux équations données (que j'appelle premières équations), prenez à part la valeur d'une même inconnue.* 2°. *Égalés ensemble ces deux valeurs ; & vous aurez une équation avec une seule inconnue, dont vous trouverez la valeur par les méthodes ci-dessus.* 3°. *Dans la plus simple des équations précédentes, substitués cette valeur à la place de l'inconnue, & vous aurez la valeur de l'autre.*

EXEMPLE.

Premières équations.. $\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\}$

Valeurs égales de x... $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{c - by}{a} \\ x = \dfrac{f - ey}{d} \end{array}\right.$

Équation des valeurs égales de x. . . . . $\left\{\dfrac{c - by}{a} = \dfrac{f - ey}{d}\right\}$

Valeur de y . . . . . $\left\{y = \dfrac{af - cd}{ae - bd}\right\}$

Substituant cette valeur de y, il vient pour x. . . . $\left\{x = \dfrac{ce - bf}{ae - bd}\right.$

(*) *Prendre la valeur d'une inconnue*, n'est pas la même chose que *trouver la valeur de cette inconnue*. On en prend la valeur, en faisant d'elle seule un membre d'équation, de quelques quantités, soit connues, soit inconnues, que l'autre membre soit composé ; mais on n'en trouve la valeur qu'autant qu'étant seule dans un membre d'équation, l'autre membre est composé de quantités toutes connues.

SECONDE MÉTHODE.

Substituer la valeur d'une inconnue.

334. 1°. *Dans une des premières équations prenez la valeur d'une inconnue, & l'écrivés à part.* 2°. *Dans l'autre équation substitués cette valeur à la place de cette même inconnue ; & vous aurez une équation avec une seule inconnue, dont vous trouverez la valeur. Dans l'équation mise à part, substitués cette valeur à la place de l'inconnue qu'elle représente, & vous aurez la valeur de l'autre.*

EXEMPLE.

Premières équations. . . . . $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = c \\ 4y - x = d \end{array}\right\}$ Valeur de y prise de la première..... $\left\{ y = c - 2x \right\}$

Valeur de y substituée dans la seconde..... $\left\{ 4c - 9x = d \right\}$ Valeur de x substituée dans celle de y.... $\left\{ y = c - \frac{8c + 2d}{9} \right\}$

Valeur de x . . . . $\left\{ x = \frac{4c - d}{9} \right\}$ Valeur de y . . . . $\left\{ y = \frac{c + 2d}{9} \right\}$

335. SCHOLIE. Quand il n'y a que deux inconnues, & quelquefois même quand il y en a trois, si l'on veut en éliminer quelqu'une, il est ordinairement plus simple de la rendre positive & de lui donner le même coefficient par tout, puis de soustraire une équation de l'autre. Or, pour donner dans deux équations le même coefficient à une inconnue, *il faut multiplier chaque équation, par le coefficient que cette inconnue a dans l'autre.* Ainsi dans $ax + by = c$, $dx + ey = f$, je multiplie la première équation par d, la seconde par a, & j'ai $adx + bdy = dc$, $adx + aey = af$. Soustrayant la seconde de la première, j'ai $bdy - aey = dc - af$. Donc $y = \frac{dc - af}{bd - ae}$. Qu'on ne croie pas que cette valeur de y n'est pas la même que celle de l'exemple ci-dessus (333), quoique les signes soient tous différens ; car on ne chan-

ge ni l'espèce ni la valeur d'un quotient, en changeant à la fois tous les signes du dividende & du diviseur. Quelquefois on élimine une inconnue, en multipliant l'une par l'autre les deux équations où elle se trouve. Ainsi dans $a^2x = \frac{y}{b}$ & $x = \frac{b^3}{y}$, en multipliant membre par membre, il vient $a^2 x^2 = b^2$; donc $x^2 = \frac{b^2}{a^2}$ & $x = \pm \frac{b}{a}$.

336. Quand un problème déterminé fournit trois équations & par conséquent trois inconnues, on peut commencer à en chasser une par l'une ou l'autre des méthodes que nous venons de donner; & ensuite on traite les deux autres, comme nous venons de le faire dans les équations à deux inconnues. Il y a des cas où l'une de ces méthodes abrège le calcul plus que l'autre : l'habitude seule peut les faire distinguer.

Si l'on employe la première; *il faut* 1°. *Dans chacune des équations données, prendre la valeur de la même inconnue.* 2°. *Egaler ces valeurs deux-à-deux, & l'on aura deux équations avec deux inconnues, que l'on traitera par les méthodes précédentes.* Ayant ainsi trouvé la valeur d'une de ces inconnues, on la substituera dans celle des équations où elle se trouve avec une autre seulement, pour avoir la valeur de cette autre.

Si l'on employe la seconde Méthode; 1°. *On prendra dans une des premières équations la valeur d'une inconnue, pour la substituer dans chacune des autres; & l'on aura par là une inconnne & une équation de moins.* 2°. *Par ce que nous avons dit sur les équations à deux inconnues, on trouvera la valeur d'une inconnue, qu'on substituera dans les autres équations, pour avoir la valeur des autres inconnues.*

EXEMPLE.

Premières équations . . . $\left\{\begin{array}{l} ax - y = c \\ bz + x = d \\ ay + z = e \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{c + y}{a} \\ x = d - bz \end{array}\right\}$ Caze A

Secondes équations . . . . . $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{c + y}{a} = d - bz \\ ay + z = e \end{array}\right\}$

$\left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{d}{b} - \dfrac{c - y}{ab} = \dfrac{ad - c - y}{ab} \\ z = e - ay \end{array}\right\}$ Caze B

Troisième équation . . . . $\left\{\dfrac{ad - c - y}{ab} = e - ay\right\}$

$\left\{a^2by - y = abe + c - ad\right\}$ Caze C

Donc . . . . . $\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{abe + c - ad}{a^2b - 1} \\ z = \dfrac{a^2d - ac - e}{a^2b - 1} \\ x = \dfrac{abc + be - d}{a^2b - 1} \end{array}\right\}$

Dans cet exemple l'inconnue x ne se trouvant pas dans toutes les équations, je prends ses deux valeurs (Caze A) dans la première & dans la seconde des équations données, & je fais ensuite $\dfrac{c + y}{a} = d - bz$. Comparant celle-ci avec la troisième des équations données, qui ne renferme également que y & z, j'ai les secondes équations. Prenant dans celles-ci les valeurs de z (Caze B), j'en fais la troisième équation, qui se réduit en

en ôtant la fraction & transposant, à celle de la Caze C. Enfin, dans celle-ci je trouve la valeur de y, en divisant tout par $a^2b - 1$ (322). Substituant pour y dans $z = e - ay$ (Case B), j'ai la valeur de z. Substituant cette dernière pour z dans $a = d - bz$ (Caze A), j'ai la valeur de x.

337. SCHOLIE. Les équations du premier degré présentent deux remarques essentielles à faire.

1°. Il arrive quelquefois que, sans s'en appercevoir, on met quelque contradiction dans les premières équations d'un problème, ce qui suffit pour en rendre la solution impossible. Alors le calcul mène à une équation absurde, comme seroit celle-ci, $20 = 30$. Soient par ex. ces deux équations $x - y = 30$, $x + 10 = y + 100$: prenant les deux valeurs de x, on a $x = 30 + y$, $x = 90 + y$; & les égalant on a $30 + y = 90 + y$, ou bien ôtant y, $30 = 90$: équation absurde, qui indique que le problème qui a fourni les deux premières équations, est impossible; ou bien que ses conditions sont contradictoires, & qu'ainsi la question n'est pas proposable.

2°. Quelquefois encore on construit mal les premières équations d'un problème; de telle sorte qu'elles ne sont pas absolument indépendantes entr'elles. Cela arrive lorsque l'une s'ensuit de quelques autres combinées ensemble, soit en les multipliant ou les divisant par elles-mêmes ou par quelque quantité connue, soit en leur ajoutant ou retranchant quelque valeur connue. Alors la suite du calcul fait trouver autant d'équations *identiques* (c'est-à-dire, *ridicules*, puisqu'elles n'apprenent rien) qu'il y a de ces défauts dans la construction. Ainsi dans $5x + y = 100$ & $10y + 50x = 1000$, en prenant les deux valeurs de y, on trouve cette équation identique $1000 = 1000$; parce que la seconde équation n'est autre chose que la première, multipliée par 10.

338. PROBLÈME I. A dit à B, il y a sept ans que j'étois trois fois plus âgé que vous, & dans 7 ans j'aurai précisément le double de votre âge : on demande l'âge actuel de A & de B.

SOL. Soit x l'âge de A, y celui de B. sept ans auparavant, l'âge

de A étoit donc $x - 7$, & celui de B, $y - 7$; au lieu que 7 ans après, le premier sera $x + 7$, & le second $y + 7$. Or, par la première condition, $x - 7 = \overline{y - 7} \times 3$; & par la seconde $x + 7 = \overline{y + 7} \times 2$. Soustrayant la première équation de la seconde, j'ai $14 = 2y + 14 - 3y + 21$. Transposant les termes affectés de y, & réduisant, j'ai $y = 21$. Substituant ensuite cette valeur pour y, dans la première équation, j'ai $x - 7 = 63 - 21$; donc $x = 49$, & ces deux âges satisfont aux conditions du problème.

339. Problème II. Trouver une fraction, telle que si on ajoute 1 au numérateur, elle vaille $\frac{1}{3}$: & que si on ajoute 1 au dénominateur, elle ne vaille que $\frac{1}{4}$.

Sol. Soit cette fraction $\frac{x}{y}$: suivant la première condition $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$, & suivant la seconde $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$. Otant les fractions on a, $3x + 3 = y$ & $4x = y + 1$, ou bien $y = 4x - 1$: égalant ces deux valeurs de y, il vient $3x + 3 = 4x - 1$; donc $x = 4$. Substituant à la place de x dans $y = 4x - 1$, on trouve, $y = 15$. Donc $\frac{x}{y} = \frac{4}{15}$, qui devient dans un cas $\frac{5}{15}$ ou $\frac{1}{3}$, & dans l'autre, $\frac{4}{16}$ ou $\frac{1}{4}$.

340. Problème III. Un Marchand achete trois sortes de marchandises A, B & C: le prix de la première, avec la moitié du prix des deux autres, vaut 51 livres: il en est de même du prix de la seconde, avec le tiers du prix des deux autres: & du prix de la troisième, avec le quart du prix des deux autres. On demande le prix de chaque marchandise, en particulier.

Sol. Supposons que le prix de A soit exprimé par x: celui de B, par y: celui de C, par z: & 51 l. par a. Puisque d'aprés la première condition, le prix de A joint à la moitié du prix des deux autres, vaut 51 l.; on a cette équation, $x + \frac{y+z}{2} = a$. Puisque le prix de B, avec le tiers du prix de A & de C, vaut également 51 l., on a encore, $y + \frac{x+z}{2} = a$; & enfin, puisque le prix de C, avec le quart des prix de A & de B, vaut aussi 51 l. on a enfin cette troisième équation, $z + \frac{x+y}{4} = a$. Ainsi, toutes les conditions

ſont exprimées par les trois équations de la première Caze. Otant les fractions & mettant les x ſeuls d'un côté, en les rendant poſitifs, on a les trois valeurs de x (Caze 2). Égalant la première valeur à la ſeconde, & celle-ci à la troiſième, on a, en plaçant les y du même côté, les équations de la Caze 3. Prenant ici les deux valeurs de y, on a une équation (Caze 4) qui ne contient que z; & ôtant les fractions on a, en tranſpoſant, $z = \frac{13}{17} a$. Subſtituant cette valeur dans une des équations de la Caze 3, on trouve que $y = \frac{11}{17} a$; & enfin, ſubſtituant les valeurs de y & de z dans une des équations de la Caze 2, on a $x = \frac{5}{17} a$. De ſorte que a étant 51 livres, $x = 15$ l. $y = 33$ l. $z = 39$ l.

Caze 1.	Caze 2.
$x + \frac{y+z}{2} = a$	$x = \frac{2a - y - z}{2}$
$y + \frac{x+z}{3} = a$	$x = 3a - 3y - z$
$z + \frac{x+y}{4} = a$	$x = 4a - 4z - y$

Caze 3.	Caze 4.
$5y = 4a - z$	$\frac{4a - z}{5} = \frac{3z - a}{2}$
$2y = 3z - a$	

$$\text{Valeurs de.....} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{13}{17} a \\ y = \frac{11}{17} a \\ x = \frac{5}{17} a \end{array} \right\}$$

341. Nous allons placer ici quelques problèmes, sur lesquels les Commençans pourront s'exercer.

PROBLÈME IV. Trouver deux nombres tels, que la douzième partie du premier étant ajoutée au quart du second, la somme soit 6; & que le tiers du premier soustrait du second, la différence soit également 6.

PROBLÈME V. On demande trois nombres, qui, ajoutés deux-à-deux, donnent pour sommes trois nombres connus a, b, c.

PROBLÈME VI. Une quantité a étant donnée, on demande de la partager en un nombre n de parties, de telle grandeur, que la plus petite soit surpassée d'une quantité donnée par chacune des autres.

PROBLÈME VII. Quelqu'un est convenu d'acheter tous les poissons d'une certaine espèce, à raison de 5 sols par pouce de longueur : on lui en présente un, dont la tête a 12 pouces; dont le corps est les deux tiers de la tête & de la queue, & dont la queue est les $\frac{2}{11}$ du corps & de la tête. On demande le prix de ce poisson.

PROBLÈME VIII. En 1780 on demandoit à quelqu'un l'âge qu'il avoit; il répondit : si j'étois né 2 ans plus tard, je pourrois dire : ajoutez la moitié des années qui se sont écoulées depuis le commencement de ce siècle, jusqu'à celle de ma naissance, au quart de celles qui s'écouleront depuis ma naissance jusqu'à la fin du siècle, & vous aurez mon âge. On demande quel étoit cet âge.

PROBLÈME IX. Trois joueurs A, B & C, avoient devant eux un tas d'écus qu'ils avoient gagnés ensemble, & qu'ils devoient partager à ces conditions : que A en auroit la moitié, B le tiers, & C la sixième partie. Mais ayant eu dispute entr'eux, ils se jeterent sur le tas & chacun en enleva ce qu'il put. Quelque temps après ils se calmerent & firent un nouveau tas d'écus, dans lequel A ayant remis le tiers de ce qu'il avoit enlevé, B le quart, & C la cinquième partie, la somme fut 174 écus. Alors ils partagerent ce tas par portions égales, & sans employer d'autre

monnoie, chacun se trouva avoir la part qui devoit lui revenir, d'après leur accord. On demande combien il y avoit d'écus dans le premier tas, & combien chacun en avoit enlevé.

CHAPITRE IV.

De quelques propriétés générales des équations composées.

ON appelle en général *équations composées*, toutes celles qui sont au-dessus du premier degré; parce qu'on peut les représenter, ou du moins qu'on les représente, comme le produit de plusieurs facteurs, dont chacun contient l'inconnue. Voici des exemples de ces sortes d'équations, dans lesquels on a d'abord indiqué les facteurs qu'il faut multiplier, & l'on a ensuite placé leurs produits au-dessous.

EXEMPLES.

I. $\begin{cases} \text{Facteurs} \ldots\ldots (x+a)(x+b)=0 \\ \text{Produit} \ldots\ldots x^2+(a+b)x+ab=0 \end{cases}$

II. $\begin{cases} \text{Facteurs} \ldots (x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})=0 \\ \text{Produit} \ldots\ldots x^2-2ax+a^2=0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad +b^2 \end{cases}$

III $\begin{cases} \text{Facteurs} \ldots (x+a)(x-b)(x+c)=0 \\ \text{Produit} \ldots x^3+(a-b+c)x^2+(-ab+ac-bc)x-abc=0 \end{cases}$

IV $\begin{cases} \text{Facteurs} \ldots (x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x-b)=0 \\ \text{Produit} \ldots\ldots x^3-bx^2+a^2x-a^2b=0 \end{cases}$

Dans ces exemples, les quantités qui multiplient les puissances de x, sont appellées les coefficients des différens termes

de l'équation. Ainsi dans l'exemple III., $a - b + c$ est le coefficient de x^2 ou du second terme : $- ab + ac - bc$ est le coefficient du troisième. Quelquefois on écrit les parties de ces coefficients les unes sous les autres (voy. n°. 319) ; & quand il y a un terme qui manque, on met l'astérique * à sa place de cette manière $x^3 * + px + q = 0$. Mais de quelque façon qu'on arrange une équation on conclura :

342. 1°. *qu'elle a autant de racines ou de valeurs de l'inconnue, qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré, auquel elle appartient.* Ou bien que celles du second degré ont deux racines ; celles du troisième, trois ; celles du quatrième, quatre ; &c. Car on doit admettre autant de valeurs de l'inconnue, qu'il y a de nombres, qui, substitués à sa place peuvent remplir la condition énoncée par l'équation, laquelle consiste en ce que son premier membre deviene zéro, lorsque tous les termes sont d'un seul côté. Or, dans le premier exemple si l'on met à la place de x ou $- a$, ou $- b$, le premier membre de l'équation devient zéro. Car en mettant $- a$, on suppose que $x = - a$, ou que $x + a = 0$; & en mettant $- b$, on suppose que $x = - b$, ou que $x + b = 0$. Donc dans l'un & dans l'autre cas, un des facteurs est 0 ; & par conséquent le produit qui en résultera sera, 0. On voit assés qu'il en est de même pour les cas, où quelque facteur de l'équation est imaginaire. Car si dans le troisième exemple je fais, $x = - a \sqrt{-1}$, le facteur $x + a \sqrt{-1}$ est 0 ; & par conséquent tout le premier membre devient 0. Ainsi, quoiqu'on ne puisse pas dire que dans ce cas (& il en est de même des autres) x vaille à la fois $- a \sqrt{-1}$, $+ a \sqrt{-1}$, & $+ b$; l'on a cependant à choisir parmi ces valeurs, & x vaudra une d'elles indifféremment.

343. 2°. *Quand on met tous les termes d'une équation d'un seul côté, les racines s'y présentent avec un signe contraire à celui qu'elles ont en effet.* Ainsi dans le premier exemple, a & b se présentent avec le signe $+$, tandis que les valeurs de x sont ou $- a$ ou $- b$.

344. PROBLÈME I. *Oter toutes les fractions d'une équation, sans donner un coefficient au premier terme.*

SOL. *Substitués à l'inconnue de l'équation donnée, une autre in-*

connue divisée par le produit de tous les dénominateurs, & multipliés ensuite l'équation par le dénominateur du premier terme.

Ainsi dans $x^3 + \frac{x^2}{a} + \frac{x}{b} + \frac{p}{c} = 0$, je fais d'abord $x = \frac{y}{abc}$ & substituant pour x j'ai, $\frac{y^3}{a^3b^3c^3} + \frac{y^2}{a^3b^2c^2} + \frac{y}{ab^2c} + \frac{p}{c} = 0$: multipliant ensuite par le dénominateur du premier terme, j'ai cette équation délivrée de fractions, $y^3 + bcy^2 + a^2bc^2y + a^3 - b^3c^2p = 0$.

345. Problème II. *On demande à quelles conditions on peut changer, une équation en une autre qui la représente exactement, & où il manque un terme quelconque, excepté le premier.*

Sol. Soit l'équation du troisième degré, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$: supposons que l'inconnue x soit représentée par une autre inconnue y, à laquelle on a ajouté une quantité indéterminée n; de façon que $x = y + n$, ce qui donnera:

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3ny^2 + 3n^2y + n^3 \\ px^2 &= \ldots\ldots py^2 + 2pny + pn^2 \\ qx &= \ldots\ldots\ldots\ldots qy + qn \\ r &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r \end{aligned}$$

La nouvelle équation qui vient de là, & qu'on appelle la *Transformée*, sera donc:

$$y^3 + (3n + p)y^2 + (3n^2 + 2np + q)y + (n^3 + n^2p + nq + r) = 0.$$

Or, pour faire disparoître le second terme dans celle-ci, il n'y a qu'à supposer son coefficient $3n + p = 0$; ce qui donnera pour la valeur de l'indéterminée, $n = -\frac{p}{3}$. Pour faire disparoître le troisième terme, on supposera $3n^2 + 2pn + q = 0$; & en résolvant cette équation du second degré, on trouvera la valeur de l'indéterminée n, qui produiroit ce changement. Pour faire disparoître le dernier terme, on supposeroit $n^3 + pn^2 + qn + r = 0$; & la solution de cette équation du troisième

degré donneroit la valeur de n : ce qui prouve que pour faire disparoître le dernier terme d'une équation, la difficulté est du même degré, que pour résoudre l'équation proposée. Aussi ne cherche-t-on qu'à faire disparoître le second, ce qui se fait toujours, *en substituant à l'inconnue de la proposée, une autre inconnue, de laquelle on a soustrait le coefficient de ce second terme, divisé par l'exposant de l'équation.*

346. THÉORÈME I. *Si le premier terme d'une équation n'a d'autre coefficient que l'unité, celui du second est égal à la somme des racines, prises avec un signe contraire : celui du troisième, à la somme des produits des racines, prises deux-à-deux : celui du quatrième, à la somme des produits des racines, prises trois-à-trois, &c. Enfin, le dernier terme est égal au produit de toutes les racines, toujours prises avec un signe contraire.*

DEM. Supposons d'abord que toutes les racines soient égales, que chacune soit a, & qu'il y en ait un nombre n. On formera donc alors l'équation composée, du produit d'un nombre n de facteurs, dont chacun sera $x - a$; ce qui donnera $(x - a)^n$, ou bien (135), $x^n - nax^{n-1} + \frac{n.n-1}{2} a^2 x^{n-2} - \frac{n.n-1.n-2}{2.3} a^2 . x^{n-3} \ldots \pm a^n = 0$. Or, ici le coefficient du second terme, ou bien le facteur na qui multiplie x^{n-1}, est la somme de toutes les racines ; puisque chacune est a, & que leur nombre est n. Le coefficient du troisième terme, savoir, $\frac{n.n-1}{2} a^2$, est la somme de tous les produits qu'on peut faire, en prenant les racines deux-à-deux ; car chacun de ces produits seroit a^2, & leur nombre seroit $\frac{n.n-1}{2}$ (311). Il en seroit de même pour les autres termes, jusqu'au dernier, qui étant $\pm a^n$ seroit évidemment le produit de toutes les racines. Ainsi le théorème est démontré dans le cas où toutes les racines seroient égales. Mais en les supposant inégales, on ne peut changer ni le nombre des termes qui forment les divers coefficients de x, ni le nombre des lettres qui entrent dans ces termes

mes ; puisque l'on multiplie toujours un égal nombre de facteurs, les uns par les autres, pour former l'équation. Donc le Théorème est vrai dans tous les cas.

347. COROLL. *Si une équation a pour racine un nombre entier, il faut donc que ce nombre se trouve parmi les diviseurs du dernier terme.* Mais comme ces diviseurs sont quelquefois en fort grand nombre, il peut y avoir des cas où il seroit trop long de les essayer tous, c'est-à-dire, de les substituer les uns après les autres à x ; pour savoir quels sont ceux, qui réduisent le premier membre à o, en supposant tous les termes de ce côté. C'est pourquoi, nous donnerons plus bas une méthode qui abrége ce tâtonnement. Mais avant d'en venir là, on doit observer que si l'inconnue entre dans tous les termes de l'équation, une des racines est o ; puisqu'en substituant une telle valeur pour x, on réduit tout à zéro. Ainsi dans $x^3 - ax^2 + bx = 0$, en divisant par $x \pm 0$ on a, $x^2 - ax + b = 0$.

347. THÉORÈME II. *Si une équation ne contient ni fractions ni radicaux, & que son premier terme ait l'unité pour coefficient, aucune de ses racines commensurables ne peut être une fraction.*

DEM. Soit l'équation d'un degré quelconque $x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} -$ &c. . . . $+ t = 0$: qu'une de ses racines soit, s'il se peut, la fraction $\frac{c}{d}$, qu'on suppose réduite à sa plus simple expression. En substituant cette racine pour x, l'équation se changera en celle-ci, $\frac{c^m}{d^m} - \frac{ac^{m-1}}{d^{m-1}} + \frac{bc^{m-2}}{d^{m-2}} -$ &c . . . $+ t = 0$. Multipliant tous ses termes par d^{m-1}, & laissant le premier seul dans un membre, on a $\frac{c^m}{d} = ac^{m-1} - bc^{m-2}d +$ &c.. $- td^{m-1}$; dans laquelle le second membre étant un entier, le premier doit l'être aussi. Or, cela ne peut arriver qu'en faisant $d = 1$, ce qui détruit la supposition que $\frac{c}{d}$ soit une fraction ; ou bien, en faisant que c^m soit divisible par d ; d'où il s'ensuivroit que c & d auroient un diviseur commun (84), & que la fraction $\frac{c}{d}$ ne seroit pas réduite à ses plus petits termes (ce qui est éga-

lement contre la ſuppoſition). Il répugne donc que dans ce cas, aucune racine commenſurable ſoit fractionnaire.

349. Remarque. C'eſt avec raiſon, qu'on a borné cette propriété aux équations, qui ont toutes leurs racines commenſurables; car on en trouve une infinité, qui, avec toutes les conditions qu'exige le théorème précédent, ont des racines fractionnaires, mais incommenſurables. Telles ſont celles-ci: $x^2 - x - 3 = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$; dont la première a pour racines $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; & la ſeconde, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

350. Corol. *On peut donc réduire une équation à n'avoir que des nombres entiers, pour racines commenſurables.* Il ſuffit pour cela d'en ôter les fractions, ſans donner un coefficient au premier terme; & alors ces racines ſe trouveront parmi les diviſeurs du dernier. *Si donc aucun de ces diviſeurs ne peut être pris pour une racine, on conclura que l'équation propoſée n'en a aucune, qui ſoit commenſurable*; & qu'ainſi elles ſont toutes ou incommenſurables ou imaginaires. Alors il faudra pour les exprimer (au moins dans les quatre premiers degrés) avoir recours à des règles, que nous donnerons plus bas.

Mais avant d'aller plus loin, il faut ſavoir diſtinguer parmi les diviſeurs du dernier terme, quels ſont ceux qui peuvent être pris pour racines de l'équation. On a ſur cela deux méthodes, l'une eſt celle que Newton a donnée le premier dans ſon Arithmétique univerſelle, & qu'on peut voir dans la troiſiéme partie de l'Algèbre de M. Clairaut: l'autre a été découverte depuis, & c'eſt celle-là que nous allons expoſer ici.

251. Problème III. *Trouver les conditions auxquelles on reconnoîtra, qu'un des diviſeurs du dernier terme eſt une racine de l'équation; après qu'on en a ôté les fractions, ſans donner un coefficient au premier terme.*

Sol. Soit l'équation du quatrième degré, $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$: ſuppoſons-la repréſentée par $x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd$

$+ bcd) x + abcd = 0$, dans laquelle les quatre racines sont évidemment (346) a, b, c, d. Soit n une des racines de la première équation; de sorte que l'on aura $n = a$, ou b, ou c, ou d : supposons $n = a$.

1°. Puisque l'une des équations ci-dessus représente l'autre, il faut que les coefficients des mêmes puissances de x soient égaux dans chacune; ou bien il faut que $s = abcd$. Or, ici le second membre est divisible par a; donc l'autre doit l'être aussi par a, ou par son égale n; ce qui donnera $\frac{s}{n} = \frac{abcd}{a} = bcd$ (c'est ce que j'appelle *le premier quotient*). Ainsi on a pour première condition, *que le dernier terme de la proposée soit divisible par n.*

2°. Puisque d'après la supposition, $r = abc + abd + acd + bcd$; en soustrayant la dernière équation de celle-ci, on a $r - \frac{s}{n} = abc + abd + acd$. Or, ici le second membre est divisible par a; donc l'autre, qui est évidemment la différence du premier quotient $\left(\frac{s}{n}\right)$ soustrait du coefficient de x, savoir de r, sera aussi divisible par a, ou par son égale n; & l'on aura $\frac{r}{n} - \frac{s}{n^2} = bc + bd + cd$ (c'est là le *second quotient*); on a donc pour seconde condition, *que le premier quotient étant soustrait du coefficient de x, la différence soit divisible par n.*

3°. Puisque $q = ab + ac + ad + bc + bd + cd$, en soustrayant la dernière équation de celle-ci, on a $q - \frac{r}{n} + \frac{s}{n^2} = ab + ac + ad$. Or, ici le second membre est divisible par a; donc l'autre (qui vaut la différence du second quotient soustrait de q, coefficient de x^2) sera divisible par a, ou par son égale n; & faisant cette division on a $\frac{q}{n} - \frac{r}{n^2} + \frac{s}{n^3} = b + c + d$ (c'est là le *troisième quotient*); ainsi il vient pour troisième condition *que le second quotient étant soustrait du coefficient de x^2, la différence soit divisible par n.*

4°. Puisque $p = a + b + c + d$, soustrayant la dernière équation de celle-ci, on a $p - \frac{q}{n} + \frac{r}{n^2} - \frac{s}{n^3} = a$. Or, ce dernier

membre divisé par a, donne 1 pour quotient ; il faut donc que l'autre membre, qui n'est autre chose, que la différence du troisième quotient soustrait du coefficient de x^3 ou du second terme, étant divisé par n, donne 1 pour quotient. Quatrième & dernière condition : *que le troisième quotient étant soustrait du coefficient du second terme & divisé par n, le quotient soit 1.*

EXEMPLES.

On demande quelles sont les racines commensurables de l'équation $x^4 + 3x^3 + 7x + 21 = 0$. Pour cela je prends tous les diviseurs du dernier terme, savoir, 1, 3, 7, tant en + qu'en —, & je les essaye en commençant par 1. Or, $\frac{21}{1} = 21$. Ce premier quotient soustrait du coefficient suivant, qui est 7, & divisé par 1, donne $\frac{7-21}{1} = -14$. Ce second quotient soustrait de 3, & divisé par 1, donne $\frac{3+14}{1} = 17$. Ainsi 1 n'est pas bon, puisque la dernière condition manque (Voy. le 4°. du n°. précédent).

Il est assez clair sans examen, que — 1 ne sauroit réussir. Examinons 3. $\frac{21}{3} = 7$, $\frac{7-7}{3} = 0$, $\frac{3-0}{3} = 1$. Ainsi 3 est un diviseur qui doit réussir, puisqu'il remplit toutes les conditions ; il faut donc que l'équation soit divisible par $x + 3$; & en effet on trouve pour quotient $x^3 + 7$.

Soit encore l'équation $x^3 + 12x^2 + 41x + 30 = 0$, dont on cherche les racines, parmi les diviseurs du dernier terme. Or, ces diviseurs sont 15, 10, 6, 5, 3, 2, 1, qu'il faut essayer en détail ; & commençant par 15, je dis : $\frac{30}{15} = 2 : \frac{41-2}{15}$ ne donne point un quotient exact ; ainsi 15 manque à la seconde condition. Passant ensuite à 10, je vois que $\frac{30}{10} = 3$, que $\frac{41-3}{10}$ n'a point de quotient exact ; & qu'ainsi 10 doit être rejetté. Essayant 6, je trouve $\frac{30}{6} = 5$; $\frac{41-5}{6} = 6$, $\frac{12-6}{6} = 1$; & par con-

ſéquent 6 doit être une racine, puiſqu'il remplit toutes les conditions. Il en eſt de même de 5, puiſque $\frac{30}{5} = 6, \frac{41-6}{5} = 7$, $\frac{12-7}{5} = 1$; au lieu que 3 manque à la ſeconde condition; car $\frac{30}{3} = 10$ & $\frac{41-10}{3}$ n'eſt plus diviſible : pareillement 2 manque à la dernière; puiſque $\frac{30}{2} = 15, \frac{41-15}{2} = 13, \frac{12-13}{2} = -\frac{1}{2}$. Venant enfin à 1, on trouve que $\frac{30}{1} = 30, \frac{41-30}{1} = 11, \frac{12-11}{1} = 1$; & qu'ainſi 1 eſt une troiſième racine, ou bien que l'équation eſt compoſée de trois facteurs $(x+6)(x+5)(x+1)$; comme il eſt aiſé de s'en convaincre, en multipliant ces facteurs, les uns par les autres.

352. REMARQUE. Si l'on fait attention à la ſolution du Problème précédent, on verra que quand les diviſeurs qu'on eſſaye doivent réuſſir, les quotients ſucceſſifs ſont les coefficients que doit avoir l'équation, étant diviſée par un de ſes facteurs, ou abaiſſée d'un degré; & qu'ils font connoître par conſéquent, combien il doit y avoir de termes, dans l'équation ainſi abaiſſée. Dans le premier exemple, les quotients 1, 0, 7, nous font comprendre qu'il ne doit reſter que deux termes dans l'équation, ſi on la diviſe par $x+3$; & que ces deux termes ſe préſenteront ainſi, $1x+7=0$. Dans le ſecond exemple, ſi on s'étoit arrêté au diviſeur 6, qui a réuſſi; ou bien ſi l'on eût diviſé l'équation propoſée par $x+6$, je vois par les trois quotients 1, 6, 5, que l'équation ainſi abaiſſée d'un degré, auroit été, $x^2+6x+5=0$. *Cette méthode fait donc trouver, ſans calcul, l'équation, qui doit être d'un degré au-deſſous de la propoſée.*

353. THÉORÈME III. *Si une équation ne préſente point de radical, je dis : 1°. que ſes racines imaginaires ſeront en nombre pair : 2°. qu'en les prenant deux-à-deux, ſi l'une a la forme $m+n\sqrt{-1}$, l'autre doit avoir la forme $m-n\sqrt{-1}$.*

DEM. 1°. Quelles que ſoient ces racines, elles peuvent

(200 & 201) être ramenées à la forme $\pm m \pm n \sqrt{-1}$. Or, si de pareilles racines n'étoient pas en nombre pair, il faudroit multiplier, dans le dernier terme, un nombre impair de facteurs de la forme $\pm n \sqrt{-1}$, les uns par les autres; donc $\sqrt{-1}$ s'y trouveroit élevée à quelque puissance impaire; & par conséquent (193) la forme imaginaire ne disparoîtroit pas, ce qui est contre la supposition. Donc 1°. &c.

2°. Si en les prenant deux-à-deux, l'une a la forme $m + n \sqrt{-1}$, l'autre aura celle-ci $m - n\sqrt{-1}$. Car si les termes imaginaires n'étoient pas semblables & affectés de signes contraires, ils ne se détruiroient pas, en les ajoutant ensemble dans le coefficient du second terme, & là l'équation présenteroit des radicaux : pareillement, si la partie réelle m n'étoit pas la même dans chacune, ou qu'elle eût différents signes, le dernier terme de l'équation présenteroit quelque radical; puisque $+ n \sqrt{-1}$ & $- n \sqrt{-1}$ n'y étant pas multipliés par la même quantité réelle, les produits ne pourroient point se détruire. Ainsi l'équation ne paroîtroit point délivrée de radicaux, ce qui est encore contre la supposition. Donc, &c.

354. Coroll. *Si une équation de degré impair ne présente point de radicaux, elle doit donc contenir quelque racine réelle;* puisqu'autrement, les imaginaires y seroient en nombre impair.

CHAPITRE V.

Des Équations pures de tous les degrés & de celles du second en particulier.

355. Nous appellons *Équations pures*, celles qui ne contiennent qu'une même puissance de l'inconnue, comme par exemple, $x^3 - a^3 = 0$. On les appelle aussi *Équations à deux termes*, parce que en effet elles peuvent toujours être réduites à n'en avoir que deux, dont l'un contiendra l'inconnue, & l'autre sera composé de quantités toutes connues. Ainsi, $ax^2 + bx^2 - c = 0$ devient, en divisant par $a \pm b$, $x^2 - \frac{c}{a+b} = 0$; $ax^m + bx^m$

$+ cx^m - d = 0$, en divisant par tout ce qui multiplie x^m, devient $x^m - \frac{d}{a+b+c} = 0$.

La règle générale pour résoudre ces sortes d'équations, de quelque degré qu'elles soient, c'est *de laisser l'inconnue seule dans un membre (en observant cependant de la rendre positive, si son exposant est pair) & d'extraire de part & d'autre, la racine analogue à cette puissance de l'inconnue.* Ainsi $ax^2 - b = 0$, en divisant par a, & transposant, devient $x^2 = \frac{b}{a}$; & extrayant la racine quarrée des deux côtés, $x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$: de même $x^3 + c^3 = 0$, donne $x^3 = -c^3$, & $x = -c$: $x^m + ax^m - b = 0$, en divisant par le facteur $1 + a$ (112) & transposant, devient $x^m = \frac{b}{1+a}$: extrayant la racine m des deux membres, $x = \sqrt[m]{\frac{b}{1+a}}$

356. REMARQUES IMPORTANTES. Il faut observer ici que *dans toutes les équations pures d'un degré pair, si x a une valeur réelle, elle en a une autre, qui ne différe de la première que par le signe, & qu'elle n'en peut avoir d'avantage.* Ainsi dans $x^4 - 16 = 0$ ou $x^4 = 16$, on a $x = \pm \sqrt[4]{16}$; ce qui donne pour valeurs réelles de x, ou $+2$, ou -2; puisqu'on a également 16, soit avec $(+2)^4$; soit avec $(-2)^4$. Mais comme aucun nombre réel autre que $+2$ ou -2, élevé à sa quatrième puissance, ne peut donner 16; on en conclura que ce sont là les seules racines réelles de $x^4 = 16$; & qu'ainsi les deux autres qu'elle doit contenir (342), sont imaginaires.

Pour découvrir ces imaginaires, on divisera l'équation proposée $x^4 - 16 = 0$, par chacun de ses deux facteurs $x + 2$, $x - 2$; ou bien par leur produit $x^2 - 4$; & le quotient sera une équation du second degré, qui contiendra les deux racines imaginaires, que nous cherchons. Voici le détail de ce calcul:

$$\left.\begin{array}{r} x^4 - 16 \\ -x^4 + 4x^2 \\ \hline 4x^2 - 16 \\ -4x^2 + 16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 - 4 \\ \hline x^2 + 4 \end{array}$$

Si l'on cherche ensuite les racines de l'équation $x^2 + 4 = 0$, on trouvera $x = \pm \sqrt{-4}$, ou bien (191) $x = +2\sqrt{-1}$ ou $-2\sqrt{-1}$. Ainsi les quatre racines de la proposée sont $+2$, -2, $+2\sqrt{-1}$, $-2\sqrt{-1}$; & l'on peut encore s'en convaincre, en les substituant successivement à la place de x dans $x^4 - 16 = 0$; car on trouvera qu'elles donnent chacune $16 - 16 = 0$; c'est-à-dire, qu'elles remplissent la condition énoncée par l'équation, laquelle consiste en ce que son premier membre devienne zèro. Cela confirme aussi ce que nous avons dit ailleurs (143) sur le nombre des racines d'une puissance; car on voit qu'il y a quatre quantités différentes, savoir, $+2$, -2, $+2\sqrt{-1}$, $-2\sqrt{-1}$, qui sont les racines quatrièmes de -16. En général, toute équation de cette forme $x^4 - a = 0$, doit avoir deux racines réelles, qui sont $+\sqrt{+\sqrt{a}}$ ou $+\sqrt[4]{a}$, & $-\sqrt{+\sqrt{a}}$ ou $-\sqrt[4]{a}$; & deux imaginaires, qui sont $+\sqrt{-\sqrt{a}}$ & $-\sqrt{-\sqrt{a}}$; au lieu que celle qui prend cette forme $x^4 + a = 0$, a toutes ses racines imaginaires; lesquelles sont renfermées dans cette expression $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-a}}$; puisque $x^4 = -a$, donne $x^2 = \pm\sqrt{-a}$. Donc $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-a}}$ (nous parlerons plus bas du nombre, & de la forme des racines imaginaires, dans les équations pures d'autres degrés).

357. Si une équation du second degré est *complette*, c'est-à-dire, si elle contient la première & la seconde puissance de l'inconnue, avec un terme tout connu, on a alors deux manières de la résoudre. La première consiste *à faire disparoître son second terme* (345), *& à traiter la transformée qui en viendra, suivant la méthode que nous venons de donner, pour les équations pures de tous les degrés.*

Soit, par ex. l'équation $x^2 + px + q = 0$. Je commence par faire disparoître son second terme, en substituant $y - \frac{p}{2}$ à la place de x, ou bien en supposant que $x = y - \frac{p}{2}$; & j'aurai,

$$x^2 = y^2 - py + \frac{p^2}{4}$$
$$px = \quad py - \frac{p^2}{2}$$
$$q = \quad q$$

Ainsi la transformée devient $y^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0$; laissant donc l'inconnue seule dans un membre & toutes les connues dans l'autre, j'ai $y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$: extrayant la racine quarrée d'une & d'autre part, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$; substituant cette valeur à la place de y dans $x = y - \frac{p}{2}$, j'ai enfin $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, c'est-à-dire, que pour une valeur de x je prendrai $-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ & pour l'autre, $-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

Mais au lieu de cette méthode, dont nous n'avons parlé que pour faire une application des principes précédents, on suit ordinairement la régle suivante, pour résoudre ces sortes d'équations.

358. RÈGLE. 1°. *Rendez le premier terme (*) positif, s'il étoit négatif, & ne lui laissez d'autre coefficient que l'unité* (344). 2°. *Ne laissez dans le premier membre que les termes affectés de x, & faites de ce membre un quarré complet, en lui ajoutant le quarré de la moitié de la quantité connue, qui multiplie la première puissance de l'inconnue* (152). 3°. *Pour conserver l'égalité, ajoutez autant à l'autre membre, & après avoir extrait la racine quarrée des deux, vous aurez, en transposant, les valeurs de x.*

EXEMPLES.

359. On demande les racines de cette équation $x^2 + px + q = 0$.

(*) On ne doit pas oublier que le premier terme d'une équation est celui qui contient la plus haute puissance de l'inconnue (319).

Pour les trouver, je place d'abord d'un même côté les termes affectés de x, ce qui donne $x^2 + px = -q$; & comme le premier membre n'est pas un quarré complet, je le complette (152) en lui ajoutant le quarré de $\frac{1}{2}p$ qui est $\frac{1}{4}p^2$, que j'ajoute aussi à l'autre membre, pour conserver l'équation; ce qui donne, $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$: extrayant la racine quarrée, que je sais (152) être d'un côté $x + \frac{1}{2}p$, & l'indiquant de l'autre, j'ai $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$: enfin en transposant, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, ce qui indique qu'une valeur de x est $-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, & que l'autre est $-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

Soit l'équation $x^2 + 5x - 14 = 0$. Pour la résoudre, je me sers de l'exemple précédent, comme d'une formule dans laquelle je substitue 5 pour p & -14 pour q, ce qui donne $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = -7$ ou $+2$.

Soit encore l'équation $x^2 + 4x + 5 = 0$, laquelle étant comparée à la formule ci-dessus, donne $p = 4$ & $q = 5$; donc en substituant dans la solution on a $x = -2 \pm \sqrt{-1}$, ce qui présente deux valeurs imaginaires de x.

360. Par la méthode que nous venons de donner pour le second degré, & par ce que nous avons dit plus haut (355) sur les équations pures, on peut résoudre une classe fort étendue d'équations d'un degré quelconque; savoir, *toutes celles qui ont seulement deux termes affectés de l'inconnue, & dans lesquels l'exposant de x est le double dans l'un de ce qu'il est dans l'autre.* En effet toutes les équations de cette classe peuvent être représentées par celle-ci, $x^{2m} \pm px^m \pm q = 0$ (en supposant que p & q représentent des quantités connues). Or, si on considère d'abord dans celle-ci x^m comme l'inconnue, on n'a qu'une équation du second degré, dans laquelle on trouve, par la méthode de ce degré, $x^m = \mp\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 \mp q}$; & extra-

yant ensuite la racine m des deux côtés, on a .....

$$x = \sqrt[m]{\mp \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \mp q}}.$$

Soit l'équation $x^6 + 4x^3 - 96 = 0$, qui est évidemment de la classe de celles dont nous parlons. Pour en avoir les racines, je substitue dans la formule ci-dessus 3 pour m, 4 pour $+p$ & -96 pour $-q$, ce qui donne (en prenant dans la valeur de x le signe superieur pour p & l'inférieur pour q, ainsi que la supposition l'exige) $x = \sqrt[3]{-2 \pm \sqrt{4 + 96}} = \sqrt[3]{-2 \pm \sqrt{100}} = \sqrt[3]{-2 \pm 10} = \sqrt[3]{+8}$, ou $\sqrt[3]{-12}$; or, en cherchant les trois racines différentes que doivent avoir chacune de celles-ci; ou trouveroit les six racines de l'équation proposée, parmi lesquelles il y en a deux réelles & quatre imaginaires, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre par le scholie suivant.

361. Scholie I. En parlant plus haut des équations pures, nous n'avons pu assigner la forme de leurs racines que dans le second & le quatrième degré, & dans d'autres degrés pairs qui peuvent s'y rapporter. Il nous reste à faire cette recherche dans les degrés impairs. Pour cela soit l'équation $x^3 + c^3 = 0$, qui donne, en transposant, $x^3 = -c^3$; & extrayant la racine cubique de chaque membre, $x = -c$; de façon qu'une racine de la proposée est $-c$. Pour découvrir les autres racines (car je ne puis pas douter (342) qu'elle n'en ait trois); je divise la proposée par $x + c$, qui doit être un de ses facteurs. Voici le détail de ce calcul, par lequel on trouve pour quotient $x^2 - cx + c^2 = 0$. Considérant donc ce quotient comme une équation du second degré, je cherche la valeur de x, ou bien en la laissant d'un côté & complettant le quarré, ou

$$\begin{array}{l|l} x^3 + c^3 & x + c \\ \cline{2-2} x^3 - cx^2 & x^2 - cx + c^2 \\ \hline -cx^2 + c^3 & \\ +cx^2 + c^2x & \\ \hline c^2x + c^3 & \\ -c^2x - c^3 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

bien en employant la formule ci-dessus (359), & j'ai $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - c^2}$; & en réduisant $\frac{1}{4}c^2$ & $-c^2$ à $-\frac{3}{4}c^2$, $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}c^2}$: simplifiant le radical (182), $x = \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}c\sqrt{-3} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)c$. De sorte que les trois racines de l'équation proposée sont $-c$, $\left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right)c$, $\left(\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right)c$. Pour m'en assurer de nouveau, je les substitue successivement à x, & je trouve que chacune élevée au cube donne $-c^3$, & qu'ainsi elle remplit la condition qu'indique la proposée, savoir, que $x^3 + c^3 = 0$. Et de là j'en déduis encore la confirmation de ce que nous avons dit ailleurs (143) qu'un cube a trois différentes racines cubiques, puisqu'on voit ici que $-c^3$ a pour racines $-c$, $\left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right)c$, $\left(\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right)c$.

362. SCHOLIE II. Avant de quitter les équations du second degré, il est bon d'observer quelles sont les marques auxquelles on reconnoîtra sans résoudre l'équation, si ses racines sont réelles ou imaginaires, commensurables ou incommensurables. Pour cela soit l'équation $x^2 \pm px \pm q = 0$, qui peut représenter une équation quelconque de ce degré, en supposant les quantités connues représentées par $\pm p$, $\pm q$, & l'on trouve aisément (358) pour ces deux racines $x = \mp \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 \mp q}$. Or, cette valeur de x ne peut être imaginaire, qu'autant que q y est négatif & plus grand que $\frac{1}{4}p^2$. Donc en supposant tous les termes de la proposée d'un côté, & o de l'autre, les racines imaginaires ne peuvent avoir lieu qu'à ces conditions : 1°. *Que son dernier terme soit positif* : 2°. *Qu'il soit plus grand que le quarré de la moitié du coefficient du second.* Ainsi dans $x^2 - 6x + 12 = 0$, je vois que les deux racines sont imaginaires ; 1°. parce que le dernier terme 12 est positif ; 2°. parce

qu'il est plus grand que 9, qui est le quarré de la moitié du second coefficient; en effet les racines sont $3 + \sqrt{-3}$, $3 - \sqrt{-3}$.

Lorsque l'une ou l'autre de ces deux conditions manque, les racines sont toujours réelles; & si de plus *le dernier terme de la proposée soustrait du quarré de la moitié du second coefficient*, (*ou bien* $\frac{1}{4}p^2 \mp q$) *forme un quarré parfait, ces deux racines sont commensurables; & dans le cas contraire, elles ne le sont pas.* Ainsi dans $x^2 - 6x - 16 = 0$, je vois d'abord que les deux racines sont réelles, parce que la première condition leur manque pour être imaginaires; ensuite je vois qu'elles sont commensurables, puisque -16 soustrait de $+9$, donne le quarré 25. Aussi trouve-t-on pour racines $+8$, -2. Dans $x^2 - 6x - 12 = 0$, on trouve deux racines réelles, mais incommensurables; parce que -12 soustrait de $+9$, ou bien 21, n'est point un quarré parfait; aussi l'une est $3 + \sqrt{21}$, & l'autre $3 - \sqrt{21}$.

363. Problème I. On demande un nombre qui soit tel, qu'étant ajouté dix fois à son quarré, il donne 75.

Sol. Appellons ce nombre x, & la condition sera exprimée par $x^2 + 10x = 75$; & si sans récourir à la méthode générale (358) on veut seulement employer la formule ci-dessus (359), on transposera 75 de cette manière, $x^2 + 10x - 75 = 0$, & l'on substituera $+10$ à $+p$ & -75 à $-q$, ce qui donnera $x = -5 \pm \sqrt{25 + 75} = -5 \pm 10$; de sorte que $x = +5$, ou -15; & en effet chacun de ces deux nombres remplit les conditions du problème.

364. Problème II. Deux Capitaines avoient chacun 48 louis à partager à ceux de leurs soldats qui s'étoient distingués dans une action; on sait seulement que l'un en trouva deux de plus que l'autre dans sa Compagnie; & qu'après le partage, chacun des siens eût quatre louis de moins, que ceux de l'autre Capitaine. On demande à combien de Soldats cet argent fut distribué, & qu'elle fut la portion de chacun.

Sol. Il est clair que si l'on connoît le nombre des Soldats, on aura par la division la part de chacun. Or, appellant ce

nombre x d'un côté, il sera $x - 2$ de l'autre ; & puisque la part de ces derniers a été de quatre louis plus forte que celle des autres, on a $\frac{48}{x} + 4 = \frac{48}{x-2}$. Otant les fractions & plaçant tous les termes d'un côté, on a $4x^2 - 8x - 96 = 0$; & divisant par 4, $x^2 - 2x - 24 = 0$: substituant dans la formule -2 pour $-p$, -24 pour $-q$, on a $x = 1 \pm \sqrt{1 + 24} = 6$. Donc un Capitaine distribua cet argent à six Soldats & l'autre à quatre : chacun des premiers eût 8 louis & chacun des autres 12

365. Problème III. On demande de partager le nombre 20 en deux parties, dont le produit de l'une par l'autre, soit plus grand que 100.

Sol. Soit x une de ces parties & l'autre sera $20 - x$: par la supposition, le produit de $x \times \overline{20 - x}$ doit être plus grand que 100 ; supposons le 101 & l'on aura $x \times \overline{20 - x} = 101$. Ou bien en mettant tous les termes d'un côté, $x^2 - 20x + 101 = 0$, équation qui annonce (362) que ses racines sont imaginaires ; & en effet en substituant pour p & pour q, on a $x = 10 \pm \sqrt{100 - 101} = 10 \pm \sqrt{-1}$; d'où l'on conclut que le problème en question est impossible avec les conditions qui l'accompagnent ; & de là on peut déduire encore cette vérité : *que le plus grand de tous les produits que peuvent donner les deux parties d'un nombre réel, multipliées l'une par l'autre, est celui des deux moitiés.*

366. Remarque. Lorsque les conditions d'un problème ne peuvent être remplies que par des nombres d'une certaine espèce, & que sa solution fait trouver seulement des nombres d'une espèce différente ; alors on peut dire que la question est contradictoire dans son énoncé, ou bien qu'elle est impossible, avec les seules données qui l'accompagnent. Par ex. si l'on demande un nombre x entier ou fractionnaire, dont le double ajouté à son quarré donne 4 ; la question sera exprimée par $x^2 + 2x = 4$, & l'on trouvera $x = -1 \pm \sqrt{5}$; ce qui fera conclure que la question est impossible avec cette donnée ou condition, que le nombre cherché soit entier ou fractionnaire ; mais

que cette impossibilité disparoîtroit, si je changeois ou si j'étendois les conditions, en demandant en général, un nombre quelconque rationnel ou irrationnel, dont le double ajouté à son quarré donnat 4 ; car alors les mêmes racines $-1 \pm \sqrt{5}$, qui prouvoient l'absurdité de la première question, donneroient la solution de la seconde : de pareilles réfléxions peuvent se faire sur la solution du Problème III. En général, de ce qu'on trouvera dans une équation des racines qui sont impossibles dans certains cas, on se gardera d'en conclure qu'elles le seroient dans tous les autres ; car il peut y avoir telle question, qui ne sauroit être résolue que par celles-là ; & cette singularité vient de ce qu'on est quelquefois forcé à exprimer par la même équation des problèmes très-différens par leurs limitations particulières ; & alors il peut arriver que ces limitations rendent impossibles dans un cas, les mêmes racines qui sont les seules possibles dans un autre ; dans lequel, ou bien ces limitations seroient différentes, ou bien encore elles n'existeroient pas.

CHAPITRE VI.

Des Équations du troisième degré.

367. LA méthode qui paroît la plus simple, pour résoudre ces sortes d'équations, c'est d'en former d'abord une de ce degré qui ait une racine connue ; de se servir de cette racine, pour découvrir les deux autres ; & ensuite de ramener toutes les équations de ce degré à la forme de celle que nous aurons résolue ainsi ; afin de pouvoir y appliquer la même méthode.

Soit donc $x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, dans laquelle a & b sont des quantités connues : supposons qu'on éleve les deux membres de cette équation au cube, (on doit savoir (149) former le cube d'un binome, sans passer par la multiplication, & cette

formation revient *à prendre le cube de chaque terme, & leur triple produit multiplié par leur somme*). On a donc ici $x^3 = a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$; ou bien mettant x au lieu de son égale $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, $x^3 = 3\sqrt[3]{ab} \times x + a + b$; dans laquelle une racine ou valeur de x est nécessairement $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.

Pour découvrir les deux autres racines, le moyen le plus simple est de transposer tous les termes de l'équation du côté de x^3, & de la diviser par $x - \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$, qui est un de ses facteurs. Par là l'équation sera réduite au second degré, & ses deux autres racines se trouveront par la méthode de ce degré. Mais afin de rendre la division plus facile, nous supposerons que $\sqrt[3]{a} = c$, & que $\sqrt[3]{b} = d$, ce qui change l'équation donnée en $x^3 - 3cdx - c^3 - d^3 = 0$, & son facteur en $x - c - d$; & alors le quotient se trouvera par le calcul suivant.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 3cdx - c^3 - d^3 & x - c - d \\
\cline{2-2}
-x^3 + cx^2 + dx^2 & x^2 + (c+d)\,x + c^2 \\
\cline{1-1} & \quad - cd \\
 & \quad + d^2
\end{array}$$

Premier reste... $(c + d)\,x^2 - 3cdx - c^3 - d^3$

$$(-c - d)\,x^2 + (c^2 + 2cd + d^2)x$$

Second reste ..... $(c^2 - cd + d^2)x - c^3 - d^3$

$$(-c^2 + cd - d^2)x + c^3 - c^2d + cd^2$$
$$+ c^2d - cd^2 + d^3$$

Troisième reste 0

Il ne s'agit donc à présent que de considérer ce quotient, comme une équation du second degré, laquelle sera $x^2 + (c + d)\,x + c^2 - cd + d^2 = 0$, & d'en prendre les racines d'après la formule donnée ci-dessus (359), ce qui fera trouver $x = \frac{-c-d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-c-d}{2}\right)^2 - c^2 + cd - d^2}$. Pour simplifier cette expression, on élevera au quarré la fraction

$\frac{-c-d}{2}$, qui est sous le radical, & alors toutes les quantités qui sont sous le signe, se réduiront à $-\frac{3}{4}c^2+\frac{3}{2}cd-\frac{3}{4}d^2$, ou bien à $-3\left(\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}cd+\frac{1}{4}d^2\right)$. Ainsi ce radical deviendra $\pm\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}cd+\frac{1}{4}d^2\right)}$; & comme sous cette forme il contient le quarré de $\frac{c-d}{2}$ multiplié par -3, en faisant passer hors du signe (183) il devient $\pm\frac{(c-d)}{2}\sqrt{-3}$; & par conséquent les deux racines que nous cherchons sont . . .

$$x=\frac{-c-d}{2}\pm\left(\frac{c-d}{2}\right)\sqrt{-3}.$$

368. De-là nous pouvons conclure, que dans toute équation du troisième degré, qui sera disposée de telle manière; 1°. *Qu'elle n'ait pas de second terme* : 2°. *Que le terme connu soit la somme de deux cubes* (c^3, d^3) : 3°. *Que le coefficient de x soit le triple produit de leurs racines cubiques* ($3cd$), *on aura ses trois racines exprimées par*

$$x=c+d$$

$$x=\frac{-c-d+(c-d)\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\frac{-c-d-(c-d)\sqrt{-3}}{2}$$

EXEMPLES.

369. Soit cette équation $x^3=6x+9$, qui renferme toutes les conditions que nous demandons; puisqu'elle n'a pas de second terme, que de plus le terme connu 9 est la somme de deux cubes $8+1$; & que le coefficient de x, savoir 6, est le triple produit de leurs racines cubiques, 2 & 1. Faisant ici $c=\sqrt[3]{8}$, $d=\sqrt[3]{1}$; j'aurai d'après les formules ci-dessus,

$$x = 3$$
$$x = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2}$$

Soit celle-ci $x^3 = -6x - 7$, dans laquelle $-7 = 1 - 8$, qui ſont les cubes de $+1$ & de -2; & -6 eſt auſſi le triple produit de leurs racines cubiques. Ainſi nous devons trouver ces trois racines d'après les formules, en faiſant $c = -2$, $d = 1$, & elles ſeront,

$$x = -1$$
$$x = \frac{1 - 3\sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{1 + 3\sqrt{-3}}{2}$$

Si l'on examine encore cette autre équation $x^3 = 36x + 91$, on la trouvera dans les mêmes conditions que les précédentes, & les mêmes formules feront trouver pour ſes racines .....

$$x = 7$$
$$x = \frac{-7 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-7 - \sqrt{-3}}{2}$$

Dans tous ces différents cas, on peut ſe convaincre que l'équation réſolue a les propriétés qui doivent néceſſairement lui convenir, d'après l'Article 346.

Les exemples que nous venons de rapporter, n'ont préſenté aucune difficulté; mais on doit s'attendre qu'il n'en ſeroit pas ainſi d'un grand nombre d'autres équations; parce qu'il ne peut point être toujours auſſi aiſé de les ramener aux conditions, que la ſolution précédente exige. Nous pouvons à la vérité, par ce que nous avons vu ailleurs (345), remplir la première dans dans tous les cas, & le problème ſuivant va nous apprendre à ſatisfaire aux deux autres.

370. PROBLÈME. *Deux nombres p & q étant donnés, on en demande deux autres, tels que leur somme soit égale à q; & que le triple produit de leurs racines cubiques soit égal à p.*

SOL. Désignant ces nombres inconnus l'un par y, l'autre par z; la première condition est que $y + z = q$: la seconde que $3\sqrt[3]{yz} = p$. Donc en divisant cette dernière équation par 3, & l'élevant au cube, on a $yz = \frac{1}{27}p^3$; qui étant multipliée par 4 devient $4\,yz = \frac{4}{27}p^3$.

Si donc on éleve l'équation $y + z = q$ au quarré, lequel sera $y^2 + 2yz + z^2 = q^2$, & que de là on soustraie celle que nous venons de trouver, on aura $y^2 - 2yz + z^2 = q^2 - \frac{4}{27}p^3$; & en extrayant les racines, $y - z = \pm\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}$. Ajoutant cette dernière équation à la primitive $y + z = q$, & dégageant y, on a pour sa valeur, $y = \frac{1}{2}q \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \frac{4}{27}p^3}$; ou bien en faisant entrer la fraction $\frac{1}{2}$ sous le signe radical (178),

$$y = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}.$$

Pour avoir la valeur de z, il n'y a qu'à substituer celle de y dans la primitive $y + z = q$, laquelle donne $z = q - y$, & l'on a,

$$z = \frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}.$$

Il n'est pas douteux que ces valeurs de y & de z ne remplissent les conditions du Problème. Car si on prend leur somme, les quantités radicales s'évanouiront, par rapport à l'opposition des signes; & il ne restera dans chaque valeur que $\frac{1}{2}q$; donc on aura $y + z = q$, ce qui est la première condition. Quant à la seconde, elle est également remplie; car en observant que les valeurs de y & de z présentent, l'une la somme, l'autre la différence de deux quantités, savoir de $\frac{1}{2}q$ & de $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$, pour avoir le produit de l'une par l'autre, il suffit de prendre la différence de leurs quarrés, qui sera $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, où

bien $\frac{1}{27}p^3$. Donc le produit des racines cubiques de ces valeurs sera $\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$ ou $\frac{1}{3}p$; & le triple produit de ces racines sera p, ainsi que l'exige la seconde condition.

371. Coroll. On conclura de là *que toute équation du troisième degré peut être ramenée à la forme de celles dont nous avons parlé plus haut* (368) ; *& qu'ainsi les mêmes formules en pourront indiquer les trois racines.* Car quelle que soit cette équation, on peut faire évanouir son second terme, & alors on peut la représenter par $x^3 = px + q$, dans laquelle p & q indiqueront des nombres connus quelconques. Or, (370) sans rien changer à ces nombres, à la place de q, on pourroit mettre la somme des valeurs de y & de z, prises du Problème précédent : à la place de p, le triple produit des racines cubiques de ces mêmes valeurs ; & alors l'équation $x^3 = px + q$, seroit tout à fait de la forme de celles que nous avons déja résolues (367). Supposant donc ces nombres substitués à la place de p & de q, on dira que dans $x^3 = px + q$, on a pour une racine,

$$(B)\quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \ldots \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Ou bien en supposant, comme ci-dessus, que le premier radical cube, savoir, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$ est ici représenté par c ; & que le second, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$, l'est par d ; on a pour une équation quelconque du troisième degré, les mêmes expressions des racines que nous avons déja eues ; savoir :

$$\text{I.} \ldots\ldots x = c + d$$

$$\text{II.} \ldots x = -\frac{(c+d)}{2} + \frac{(c-d)}{2}\sqrt{-3}$$

$$\text{III.} \ldots x = -\frac{(c+d)}{2} - \frac{(c-d)}{2}\sqrt{-3}$$

372. Il ne s'agit donc à présent que de chercher quelles sont les différentes formes que peuvent prendre ces racines. Pour les découvrir, il faut sur-tout faire attention aux changemens que les diverses valeurs des données p & q produiront dans $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$, qui entre toujours dans les valeurs de c & de d. Or, il ne peut arriver à ce radical d'autres changemens que d'être ou zéro, ou une quantité réelle, ou une imaginaire.

373. Il sera zéro lorsque $\frac{1}{27}p^3$ sera négatif & égal à $\frac{1}{4}q^2$, qui doit toujours être positif (129). Et une équation étant proposée, on voit par les valeurs de p & de q si $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$; tandis que le signe qui précéde p, détermine si $\frac{1}{27}p^3$ sera positif ou négatif dans $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$; car si l'équation proposée est de cette forme, $x^3 = -px \pm q$, $\frac{1}{27}p^3$ sera toujours positif dans le radical ci-dessus; & si elle est de celle-ci, $x^3 = px \pm q$, *il y sera négatif. Donc* dans ce cas les deux radicaux cubiques de l'équation B, se réduiront chacun à $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, ou bien dans nos formules $c = d = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$; ce qui suffit pour en faire évanouir la partie imaginaire. Ainsi les trois racines sont alors réelles, deux d'entr'elles sont chacune la moitié de la troisième & d'un signe contraire; ou bien on a:

$$x = c + d$$

$$x = -\frac{(c+d)}{2}$$

$$x = -\frac{(c+d)}{2}$$

374. Si le radical quarré $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ est une quantité réelle, la première des racines (371) sera réelle; puisque les radicaux cubiques de l'équation B, représentés par c & par d, n'auront rien d'imaginaire. Mais alors les deux autres racines seront imaginaires, puisque chacune contiendra le facteur imaginaire $\sqrt{-3}$, lequel n'étant multiplié ni par des quantités égales & opposées, ni par d'autres imaginaires, il restera nécessairement des termes imaginaires dans le produit. Or, si l'on demande quand est-ce que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ est une quantité réelle, il est aisé de voir que ce sera toutes les fois que p entrera sous le radical avec le signe $+$, ce qui arrivera dans toutes les équations de cette forme $x^3 = -px \pm q$; ou même lorsque p y entrant avec le signe $-$ (ce qui ne peut arriver que dans les équations de cette forme-ci, $x^3 = px \pm q$) on aura $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}q^2$.

375. Examinons à présent le cas ou $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ sera imaginaire, & observons d'abord que ce cas ne peut avoir lieu qu'autant que $\frac{1}{27}p^3$ se trouvera négatif sous le radical, & plus grand que $\frac{1}{4}q^2$. La première condition exige donc que la proposée soit de cette forme $x^3 = px \pm q$; & la seconde que l'on ait $\frac{1}{3}p > \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2}$, ou bien $p > 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2}$. Dans ce cas, qui comme on le voit par la latitude de ses conditions, peut s'étendre à l'infini, chacun des radicaux cubiques de l'équation B est imaginaire, pris séparément (201): cependant ici, comme dans d'autres cas (198), leur somme devient réelle dans la première racine (371), ainsi que leur différence multipliée par $\sqrt{-3}$ dans les deux autres. Personne, à la vérité, n'a pu jusqu'ici en trouver l'expression générale, & c'est cette difficulté qui a fait donner à ce cas le nom *de cas irréductible.*

376. Pour prouver qu'ici les trois racines de l'équation sont réelles, supposons que l'excès de $-\frac{1}{27}p^3$ sur $\frac{1}{4}q^2$ soit désigné par $-n$, & l'on aura (371) $c = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{-n}}$, $d = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{-n}}$. Donc en changeant les radicaux en puissances fractionnaires, à la place de la première racine qui donne $x = c + d$, on aura :

$$x = \left(\frac{1}{2}q + \sqrt{-n}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}q - \sqrt{-n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Or, nous avons vu (198) qu'à quelque même puissance qu'on éleve deux quantités de cette forme, leur somme devient réelle ; parce que les termes imaginaires de l'une sont égaux à ceux de l'autre, & précédés de signes contraires. Mais comme ce calcul nous est nécessaire pour les autres racines, nous l'allons répéter ici en désignant $\frac{1}{2}q$ par a, $\sqrt{-n}$ par $b\sqrt{-1}$, & l'exposant $\frac{1}{3}$ par p, ce qui doit rendre le calcul applicable à toutes les puissances de semblables quantités. Ainsi nous aurons $(a + b\sqrt{-1})^p = \ldots\ldots$

$$(A) \ldots a^p + p\,a^{p-1}b\sqrt{-1} - \frac{p.p-1}{2}a^{p-2}b^2 - \frac{p.p-1.p-2}{2.3.}a^{p-3}b^3\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{p.p-1.p-2.p-3.}{2.3.4.}a^{p-4}b^4 + \frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4}{2.3.4.5}a^{p-5}b^5\sqrt{-1} - \ldots$$

ensuite $(a - b\sqrt{-1})^p = \ldots\ldots$

$$(B) \ldots\ldots a^p - pa^{p-1}b\sqrt{-1} - \frac{p.p-1}{2}a^{p-2}b^2 + \frac{p.p-1.p-2}{2.3}$$
$$a^{p-3}b^3\sqrt{-1} + \frac{p.p-1.p-2.p-3}{2.3.4}a^{p-4}b^4 - \frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4}{2.3.4.5}$$
$$a^{p-5}b^5\sqrt{-1} - \ldots\ldots$$

Or, si l'on ajoute la suite A à la suite B, ainsi que l'exige l'expression de la première racine, qui est $x = c + d$, les termes de rang pair, qui sont les seuls qui contiennent le facteur ima-

ginaire $\sqrt{-1}$, se détruiront, & la valeur de la première racine restera réelle, mais inassignable en termes finis.

Pour prouver qu'il en est ainsi des deux autres, il faut faire attention, 1°. qu'outre la moitié de la première racine, la seconde contient $\left(\frac{c-d}{2}\right)\sqrt{-3}$, c'est-à-dire, $\frac{A-B}{2} \times \sqrt{-3}$; & la troisième $\left(\frac{d-c}{2}\right)\sqrt{-3}$, ou bien $\frac{B-A}{2} \times \sqrt{-3}$. 2°. Qu'en multipliant $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{-1}$, on a $-\sqrt{3}$; puisque $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$; & qu'ainsi $\sqrt{-3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3} \times -1 = -\sqrt{3}$.

De là on conclura qu'en multipliant les suites A & B par $\sqrt{-3}$, d'abord on fera disparoître la forme imaginaire dans les termes de rang pair, où se trouve $\sqrt{-1}$; & que de plus, on changera leurs signes, comme si on en eût multiplié la partie réelle par $-\sqrt{3}$: au contraire, dans les termes de rang impair le facteur $\sqrt{-3}$ fera naître la forme imaginaire, & ne changera point les signes. De sorte qu'après avoir multiplié ces suites par $\sqrt{-3}$, la marche des signes sera :

Pour A . . . + — — + + — . . .

Pour B. . . . + + — — + + . . .

Et si alors on soustrait la suite B de la suite A (ainsi que l'indique $c-d$) les termes de rang impair, qui sont les seuls imaginaires, se détruiront par l'opposition des signes; & les termes de rang pair dans la suite A, seront doublés, ce qui donnera,

$$(C)\quad 2\left(-pa^{p-1}b\sqrt{3} + \frac{p.p-1.p-2}{2.3}a^{p-3}b^3\sqrt{3} - \ldots\ldots \frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4}{2.3.4.5}a^{p-5}b^5\sqrt{3} + \ldots\right).$$

Si au contraire on soustrait la suite A de la suite B, (comme l'indique $d-c$ dans la troisième racine) les termes de rang impair, qui sont les seuls imaginaires se détruiront; & ceux de rang pair seront doublés dans la suite B, ce qui donnera,

(D)

$$(D)\quad 2\left(pa^{p-1}b\sqrt{3}-\frac{p.p-1.p-2}{2.3}a^{p-3}b^{3}\sqrt{3}\right.$$
$$\left.+\frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4}{2.3.4.5}a^{p-5}b^{5}\sqrt{3}-\ldots\right)$$

Rapprochant donc les différentes parties de ces racines, & se souvenant que les majuscules A, B, C, D indiquent les suites à la tête desquelles on les a placées, il viendra en quantités réelles, ces expressions des racines dans le cas irréductible,

$$x=A+B$$
$$x=\frac{-A-B+C}{2}$$
$$x=\frac{-A-B+D}{2}$$

CHAPITRE VII.

De la résolution des équations du quatrième degré.

LA méthode que nous nous proposons d'expliquer ici, a été découverte par M. Euler; & nous allons la présenter telle qu'il l'a donnée dans le premier tome de ses Élémens d'Algébre. Elle consiste, une équation du quatrième degré étant donnée, à en trouver une du troisième, dont *les racines servent* à découvrir celles de la première. Mais auparavant il faut voir comment est-ce qu'avec les racines d'une équation du troisième degré, on peut parvenir à une autre qui sera du quatrième.

377. Soit donc l'équation du troisième degré $z^3-fz^2+gz-h=0$, que j'appellerai *l'équation auxiliaire*, & dont les trois racines soient les quantités connues p, q, r: supposons que l'on ait $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, & qu'on éleve les deux membres de cette équation au quarré, ce qui donnera, $x^2=p+q$

$+ r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Or, (346) $p + q + r = f$; donc en transposant on a, $x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$.

Élevons encore cette dernière équation au quarré & nous aurons, $x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2}$. Or, (346) $4pq + 4pr + 4qr = 4g$: & de plus $8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2} = 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$. Donc $x^4 - 2fx^2 + f^2 - 4g = 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$. D'ailleurs (346) $pqr = h$, & partant $8\sqrt{pqr} = 8\sqrt{h}$: par la supposition $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$. Donc substituant ces valeurs, & transposant, on a l'équation du quatrième degré,

(A) ... $x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h} \times x + f^2 - 4g = 0$,

dans laquelle une racine doit nécessairement être $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

378. Maintenant pour résoudre une équation quelconque du quatrième degré, comparons-la d'abord à l'équation A; ce qui exige que le second terme lui manque, & que le premier n'ait que l'unité pour coefficient, choses possibles dans tous les cas (344 & 345): & de cette comparaison nous tirerons les valeurs que doivent avoir les coefficients de l'auxiliaire, de laquelle on deduira ensuite les racines de la proposée. Soit donc,

(B) ... $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$

qu'on peut prendre pour une formule générale, qui représente toutes les équations du quatrième degré. Pour déterminer les coefficients f, g, h, de son auxiliaire, observons que les premiers membres des équations A & B ne peuvent se réduire à 0, sans que les coefficients des mêmes puissances de x ne soient égaux dans l'une & dans l'autre; ce qui donne 1°. $-a = -2f$, ou $f = \frac{a}{2}$. 2°. $-8\sqrt{h} = -b$, ou bien en élevant au quarré, $64h = bb$, & $h = \frac{1}{64}bb$. 3°. $-c = f^2 - 4g$, ou bien $4g = f^2 + c$; & comme suivant ce que nous avons vu $f = \frac{1}{2}a$, on a $g = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$. De telle sorte que l'auxiliaire sera,

$$(C) \ldots z^3 - \frac{1}{2} az^2 + \left(\frac{1}{16} a^2 + \frac{1}{4} c\right) z - \frac{1}{64} bb = 0 \ (*)$$

laquelle étant résolue par les méthodes du troisième degré, donnera pour racines trois quantités connues, que je suppose être p, q, r; & de là on conclura que dans l'équation générale du quatrième degrè, on a aussi $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

379. La seule difficulté qui se présente ici, c'est que rien n'obligeant à faire précéder chacun de ces radicaux d'un même signe, il semble qu'on puisse les faire indifférement positifs ou négatifs; & que pouvant alors y trouver huit différentes combinaisons des signes, on n'ait par là huit valeurs de x, au lieu de quatre, qu'on en doit avoir. Mais il est aisé de s'assurer que de ces huit combinaisons, il n'y en a que quatre qui puissent avoir lieu dans chaque cas particulier. Car puisque $-8\sqrt{h} = -b$, on a en changeant les signes de l'un & de l'autre $8\sqrt{h} = b$, ou $\sqrt{h} = \frac{1}{8} b$. Or, $\sqrt{h} = \sqrt{p}.\sqrt{q}.\sqrt{r}$. il faut donc que le produit de ces trois radicaux qui déterminent la valeur de x, soit positif lorsque $\frac{1}{8} b$ devient positif, en changeant de signe; ou bien lorsque le coefficient de x est négatif dans la proposée, après avoir placé tous les termes d'un même côté : le contraire arriveroit, si ce coefficient étoit positif. Or, le produit de ces trois radicaux ne peut être positif, qu'autant qu'il n'y a point de signes négatifs qui les précédent, ou qu'ils y sont en nombre pair. Ainsi lorsque le coefficient de x sera négatif dans la proposée, après avoir mis tous ses termes du côté de x^4, on aura,

(*) On doit observer qu'ici $\frac{1}{4} c$ est soustrait de $\frac{1}{16} aa$; puisque quand on a $-c$ dans la proposée, il vient $\frac{1}{16} aa + \frac{1}{4} c$; & que quand on a $+c$, il vient ici $\frac{1}{16} aa - \frac{1}{4} c$.

$$x = \text{ou} \ldots \begin{cases} \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \end{cases}$$

& lorſque ce coefficient de x ſera poſitif dans la propoſée, on aura,

$$x = \text{ou} \ldots \begin{cases} -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \end{cases}$$

380. Soit l'équation $x^4 - 42x^2 + 64x + 105 = 0$, dont on demande les racines. Pour les trouver je la compare à l'équation générale B ; & j'ai, en faiſant coïncider les termes homogènes, $-a = -42$, $-b = 64$, $-c = 105$; ce qui donne pour les coefficients de l'auxiliaire C, $-\frac{1}{2}a = -21$: $\frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c = 110\frac{1}{4} - 26\frac{1}{4} = 84$: $-\frac{1}{64}bb = -64$; donc l'auxiliaire ſera ici,

$$z^3 - 21z^2 + 84z - 64 = 0.$$

Or, cette équation étant réſolue par la méthode des diviſeurs du dernier terme (251), on trouve que ſes trois racines ſont 1, 4, 16 : & comme ici le coefficient de x eſt poſitif dans la propoſée, nous prendrons les ſignes — qui doivent précéder $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, en nombre impair, ce qui donnera pour racines,

$$x = \text{ou} \ldots \begin{cases} -1 - 2 - 4 \ldots - 7 \\ -1 + 2 + 4 \ldots\ldots 5 \\ 1 + 2 - 4 \ldots - 1 \\ 1 - 2 + 4 \ldots\ldots 3 \end{cases}$$

Et en effet ſi l'on multiplie les uns par les autres, ces quatre facteurs-ci $(x+7)(x-5)(x+1)(x-3)$, on trouvera que leur produit eſt égal à la propoſée $x^4 - 42x^2 + 64x + 105 = 0$.

381. Soit encore l'équation $x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$, qui étant comparée à la formule générale B donne $-a = -10$, $-b = -4$, $-c = +8$. Donc en substituant dans l'auxiliaire C, nous aurons $-\frac{1}{2}a = -5$: $\frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c = \frac{100}{16} - 2 = 4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$: $-\frac{1}{64}bb = -\frac{16}{64} = -\frac{1}{4}$. Ainsi l'auxiliaire sera $z^3 - 5z^2 + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, dans laquelle, pour faire disparoître les fractions, il suffit de mettre $\frac{u}{2}$ à la place de z, ce qui donnera $\frac{u^3}{8} - \frac{5u^2}{4} + \frac{17u}{8} - \frac{1}{4} = 0$; & en multipliant tout par 8, $u^3 - 10u^2 + 17u - 2 = 0$. Or, si l'on essaye les diviseurs du dernier terme qui sont ± 2, ± 1, on trouvera par la méthode que nous avons donnée plus haut (251) que -2 réussit; car $\frac{-2}{-2} = 1$: $\frac{17-1}{-2} = -8$: $\frac{-10+8}{-2} = 1$; & que c'est le seul diviseur qui réussisse. Ainsi une racine de l'équation en u est 2, & pour trouver les autres qui doivent être incommensurables (350), on la divisera par $u - 2$, ce qui donnera pour quotient $u^2 - 8u + 1 = 0$; & celle-ci étant résolue par la formule du second degré, fera trouver, $u = 4 \pm \sqrt{15}$.

A présent pour avoir les trois racines de l'auxiliaire, c'est-à-dire, les valeurs de p, q, r, on se souviendra qu'on a supposé $z = \frac{u}{2}$, ce qui oblige à prendre la moitié des valeurs de u; ainsi $p = 1$, $q = \frac{4+\sqrt{15}}{2}$, $r = \frac{4-\sqrt{15}}{2}$; & si pour avoir un nombre quarré au dénominateur de ces fractions, on multiplie haut & bas dans chacune par 2, on aura $q = \frac{8+2\sqrt{15}}{4}$, $r = \frac{8-2\sqrt{15}}{4}$. Or, $\frac{8+2\sqrt{15}}{4}$ est le quarré de $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, ainsi que $\frac{8-2\sqrt{15}}{4}$ est celui de $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$; & l'on pourra s'en convaincre en élevant ces quantités à leur quarré. Par conséquent

$\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{r}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$. Mais puisque ici le coefficient de x est négatif dans la proposée, il faut (379) que dans les valeurs de x, il n'y ait point de signes — devant $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$; ou bien qu'ils y soient en nombre pair. Ainsi on aura pour ces valeurs.

I. :....$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{5}$.

II. ...$x=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}=1\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{5}$.

III...$x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}=-1\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}$.

IV..$x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}=-1\frac{+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}$.

ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.

TROISIEME PARTIE

De la Géométrie.

SECTION PREMIERE,

Des propriétés des Lignes droites & du Cercle.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & notions préliminaires.

1. DÉFINITIONS. I. *LA Géométrie est une science qui traite des propriétés de l'étendue, considérée comme quantité continue.* Or, dans l'étendue en général on distingue trois dimensions, *Longueur, Largeur & Profondeur*; & quand on les conçoit toutes trois réunies, l'étendue prend le nom de *Solide*.

2. II. *On l'appelle Surface quand on n'y considère que deux dimensions*, & alors l'une d'elles est dite la largeur & l'autre la longueur.

FIG. 3. III. On l'appelle *Ligne*, quand on fait abstraction de deux dimensions, & dans ce cas celle qui reste est appellée *longueur*. Ainsi *la ligne est une étendue considérée sans largeur ni profondeur.*

4. IV. Enfin si dans une ligne on ne considère que son extrémité, on n'y sauroit concevoir des dimensions, & c'est-là ce qu'on nomme un *Point*. Ainsi *le point est ce qui n'a pas de dimensions, ni par conséquent de parties.*

5. COROLL. On conclura de ces définitions 1°. *que l'intersection de deux lignes est un point*; car si c'étoit une ligne,
1. dans ce que A B laisseroit sur C D en la coupant, on pourroit prendre la largeur de C D, & réciproquement. Donc les deux lignes A B & C D auroient une largeur, ce qui est contre leur définition (3).

2°. *Que le point est la limite de la ligne.* Car rien n'empêche de concevoir qu'une ligne est terminée là où une autre la coupe. Or, cette section est un point: donc sa limite le sera aussi.

6. V. *Une ligne est droite lorsqu'elle est la plus courte, qu'on peut tirer entre les deux points, qui sont ses limites.* C'est pourquoi elle mesure l'éloignement de ces points.

7. COROLL. 1°. *Entre deux points donnés on ne peut donc tirer qu'une seule ligne droite.* Car le chemin qui mène d'un point à un point ne sauroit être le plus court de tous, s'il y en a un autre d'égale longueur.

8. 2°. *Deux lignes droites ne peuvent avoir deux points com-*
2. *muns, sans se confondre.* Car si les lignes ABC, ADC qui ont deux points communs, sans se confondre, étoient droites, on pourroit tirer deux droites différentes de A à B, ce qui est impossible (7).

9. VI. *Un plan n'est autre chose qu'une surface plate sur laquelle une ligne droite peut s'appliquer en tout sens*; & c'est toujours la moins étendue de toutes les surfaces, qu'on peut imaginer entre les lignes, qui lui servent de limites.

10. VII. On appelle *figure* une étendue quelconque renfermée entre des limites; & si toutes les parties de cette étendue sont sur le même plan, la figure est appellée *plane*.

11. VIII. *Le cercle est une figure plane, dans laquelle toutes les droites tirées d'un point en dedans, jusqu'à la ligne qui la termine, sont égales.* Ce point C est appellé le *Centre*; la ligne ABDE, qui termine la figure, est la *Circonférence*; les droites égales CA, CB, CF, tirées du centre à la circonférence, sont les *Rayons*: une droite, comme BE, qui passant par le centre se termine de part & d'autre à la circonférence, est un *Diamètre*; & si elle ne passe pas par le centre, comme FG, elle est une *Corde*: une partie quelconque de la circonférence, comme AB, BG, est un *Arc*; & une portion de cercle, par ex. ABC, renfermée entre un arc & deux rayons est un *Secteur*; tandis que celle qui est renfermée entre un arc & sa corde, par ex. GFD, est un *Segment*. FIG. 3.

12. COROLL. On conclura de ce que nous venons de dire, 1°. *Que si une droite* AC *fait une révolution entière sur le point* C, *en restant toujours dans le même plan, elle décrira un cercle*; puisque dans la ligne qui terminera cette figure, les distances de tous les points au point C seront égales, étant toutes mesurées par la ligne AC.

13. 2°. *Que dans un même cercle tous les diamètres sont égaux*, puisque chacun vaut deux rayons, & que ceux-ci sont tous égaux (11).

14. 3°. *Que chaque diamètre* BE *partage le cercle en deux parties égales.* Car si la partie BDEC étoit plus petite que BAEC, en la plaçant sur celle-ci, elle ne se confondroit pas avec elle; & on pourroit la représenter par BHEC, dans laquelle le rayon HC seroit plus court que AC. Donc tous les rayons du cercle ne seroient pas égaux, ce qui est absurde (11).

15. 4°. *Que la courbure du cercle* (*) *est uniforme*; car si on le coupe par un diamétre quelconque, & qu'on conçoive une moitié posée sur l'autre, les arcs qui terminent ces moitiés se confondront toujours; ce qui ne peut arriver sans que la courbure ne soit la même par-tout.

16. C'est par rapport à cette uniformité de courbure, qu'il

(*) On prend souvent la circonférence pour le cercle.

FIG. a été possible de partager la circonférence du cercle en un certain nombre d'arcs égaux, lequel a été fixé à 360, pour les cercles de toute grandeur. Chacun de ces arcs qui est $\frac{1}{360}$ de la circonférence, est appellé un *degré* & se désigne par ce caractère (o) : le degré a été partagé en soixante parties égales, qu'on appelle *minutes*, & dont le signe est celui-ci (′) : la minute en soixante *secondes* désignées par (″) : la seconde en soixante *tierces*, qu'on représente par (‴) &c. De façon que pour exprimer soixante degrés, vingt minutes, douze secondes, huit tierces, on écrit 60° 20′ 12″ 8‴.

17. Coroll. Puisque les degrés, ainsi que les minutes sont des parties aliquotes de la circonférence, il est visible que leur grandeur varie, suivant la grandeur de la circonférence dans laquelle on les prend.

CHAPITRE II.

Des propriétés qui résultent de la comparaison de deux lignes droites.

18. TOUTES les propriétés qu'une ligne droite peut avoir relativement à une autre, résultent de quelque rapport particulier, sous lequel on compare ces deux lignes. Or, comme on ne sauroit les comparer, que quant à leur grandeur ou quant à leur situation, il s'ensuit qu'elles ne peuvent avoir d'autres propriétés que celles qui dérivent ou de leurs *rapports de grandeur*, ou de leurs *rapports de situation*. Nous parlerons peu des propriétés de la première espèce, parce qu'elles sont plutôt l'objet du calcul que celui de la Géométrie. Quant à celles qui sont fondées sur les rapports de situation de deux droites
4. 5. AB, CD, il faut d'abord pour en rendre la recherche plus facile, supposer que ces droites sont sur le même plan, & puis concevoir qu'une d'elles, par ex. A B. fasse une révolution entière sur un de ses points E, afin qu'elle prenne toutes les situa-

tions possibles relativement à C D. Alors il peut arriver ou FIG.
que ce point E appartienne aux deux lignes à la fois, ou 4.
qu'il n'appartienne qu'à une seule. Dans le premier cas, 5.
le point de rencontre des deux lignes A B, C D, sera fixe & immobile en E, & toutes leurs situations se réduiront ou à se couper ou à se confondre en une seule droite; ce qui arrivera lorsque A B aura plus d'un point commun avec C D. Dans le second cas, ce point de rencontre sera continuellement mobile; & par rapport à A B il s'approchera & s'éloignera alternativement du point E, tantôt dans la partie A E, tantôt dans la partie B E. Il faut donc que dans le passage de AE à BE, il y ait une situation telle que ce point de rencontre ne se trouve ni dans A E, ni dans B E: car n'y ayant pas de raison de le supposer d'un côté plutôt que de l'autre, ou bien il faut dire qu'il n'est nulle part, ou bien qu'il est des deux côtés à la fois, ce qui est absurde (8).

19. COROLL. On conclura de ce que nous venons de dire, que quand deux droites sont sur le même plan, toutes les situations qu'elles peuvent avoir l'une par rapport à l'autre se réduisent à ces trois-ci: 1°. à se confondre en une seule, & alors je les appelle *Coïncidentes*: 2°. à se couper ou à pouvoir se couper, si on les prolonge, & dans ce cas je les appelle *Concurrentes*: 3°. enfin à ne pouvoir point se couper à quelque distance qu'on les prolonge, & dans cette situation elles sont dites *Parallèles*.

20. La coïncidence de deux lignes droites ne présente d'autre propriété si ce n'est que l'une peut être *négative* par rapport à l'autre. Car si des deux lignes A B, C D on en forme une 4.
seule A D, de telle sorte que l'origine de chacune soit censée 6.
en E, il faudra pour tracer E D aller de E en D, & pour tracer E A aller de E en A: ce qui suffit pour les rendre opposées de la seule manière dont elles peuvent le devenir.

21. Quand deux lignes concurrentes se rencontrent, on dit alors qu'elles sont *inclinées* l'une à l'autre; & comme il y a une infinité de situations différentes, dans lesquelles elles peuvent

FIG. se rencontrer, on dira aussi que leur *inclinaison* peut varier à l'infini.

22. REMARQUE. Il faut cependant observer que le prolongement de deux lignes B A, B C, ne sauroit faire varier leur inclinaison; car si cela étoit ainsi, comme ces lignes peuvent être prolongées à l'infini, elles pourroient tellement varier leur inclinaison ou leur situation par ce moyen, qu'elles deviendroient ou coïncidentes ou parallèles, sans que les points A, B, C eussent changé de place, ce qui est absurde.

7.

23. DÉNITION. *Un angle n'est autre chose que l'inclinaison de deux lignes qui se rencontrent, sans se confondre.* On le désigne par trois lettres A B C dont celle du milieu B répond au sommet, & quelque fois par une seule, & c'est alors celle du sommet.

24. COROLL. Puisque l'inclinaison de deux droites peut varier à l'infini, il s'ensuit qu'un angle peut aussi recevoir toutes les variations possibles, & ces variations se réduisent à ce que un de ses côtés soit plus ou moins éloigné de la coïncidence avec l'autre : ainsi le côté B E est plus éloigné de coïncider avec A B, que ne l'est B D. C'est par là seulement & non par la longueur des côtés (22), que les angles peuvent être plus grands les uns que les autres. *Ils sont donc sous ce rapport de vraies quantités, & par conséquent susceptibles de mesure.*

25. Pour mesurer un angle A B E, le moyen le plus simple qui se présente, c'est d'en prendre un autre à volonté tel que *abc*, qu'on fera servir d'unité de mesure; & de chercher ensuite combien de fois cette unité est contenue dans l'angle à mesurer. Pour cela on posera le sommet *b* sur le sommet B, le côté *ab* sur le côté A B, & on appliquera l'angle *abc* sur A B E autant de fois qu'il se pourra. *Par là on découvrira le rapport de grandeur de l'unité abc avec* A B E, *c'est-à-dire, qu'on mesurera l'angle* A B E.

Mais puisque la grandeur des côtés n'influe point sur la grandeur de l'angle (22), supposons qu'on prenne le côté *ab* = AB, & que du point B, comme centre on décrive l'arc A C D E,

tandis que du point *b* on décrit l'arc *ac*. Il est évident qu'on trouvera par la superposition que l'arc *ac* est contenu dans l'arc ACDE, autant de fois que l'angle unité *abc* est contenu dans l'angle mesuré ABE. Si donc l'arc *ac* est, par ex. d'un degré, le nombre des degrés de l'arc ACDE déterminera combien de fois l'angle ABE contient l'unité de mesure; ou bien il exposera le rapport de grandeur de l'angle ABE avec son unité. D'où l'on peut conclure *qu'un arc de cercle renfermé entre les côtés d'un angle & décrit du sommet comme centre est le vrai exposant de la valeur de cet angle.* Ainsi nous dirons qu'un angle est de 20°, 30°, &c, lorsque cet arc sera de 20°, 30°, &c. FIG. 7.

26. DÉFINITIONS. I. Lors qu'une droite AB rencontre une autre droite CD sans la couper, elle fait avec elle deux angles ABC, ABD. Si ces angles sont égaux, chacun est appellé *angle droit*; s'ils sont inégaux le plus grand est *obtus* & le plus petit *aigu*. 8.

II. On appelle *Complément* d'un angle, celui qu'il faudroit ajouter à cet angle pour le rendre égal à un droit; & *Supplément* celui qu'il faudroit lui ajouter pour le faire égal à deux droits.

27. THÉORÈME I. *Quand une droite en rencontre une autre sans la couper, elle fait avec elle deux angles qui valent en somme une demi-circonférence ou* 180°.

DEM. Supposons que la droite AB rencontre CD, sans la couper, & que du point B avec une ouverture de compas quelconque on décrive l'arc de cercle CAD, qui coupe en deux points C & D la ligne CD. Cet arc mesurera les deux angles ABC, ABD (25): & de plus, puisque par la construction la droite CD passe par le centre B, elle sera un diamètre (11), & l'arc CAD vaudra une demi-circonférence (14). Donc, &c.

28. COROLL. I. *Un angle droit vaut donc* 90° *ou le quart de la circonférence.* Car si l'angle ABC est droit, il égale ABD (26). Or, ABC + ABD = 180°; donc si ces angles sont droits, chacun vaut 90° ou le quart de la circonférence.

FIG. 29. II. Un angle obtus vaut plus de 90°, & un angle aigu vaut moins (26). D'où il s'ensuivra que *le complément d'un angle obtus est négatif, & que celui d'un angle aigu est positif.* Car pour réduire un angle obtus, par ex. celui de 100° à 90°, il faut lui ajouter un angle négatif de 10°, & écrire 100° — 10° = 90°; au contraire, pour réduire un angle aigu, par ex. celui de 80° à 90°, il faut lui ajouter l'angle positif de 10°, en écrivant 80° + 10° = 90°.

30. III. *Si deux droites se coupent, les quatre angles qu'elles forment autour du point de section, valent en somme 360°.* Car si A G
8. coupe C D, la somme des angles est 180° d'un côté de C D, & 180° de l'autre. Et comme tous ceux qu'on pourroit former autour du point B ne valent en somme que ces quatre, il s'ensuit qu'ils valent aussi 360°.

31. IV. Quand deux droites se coupent, comme A G, D C les deux angles qui sont du même côté, d'une de ces lignes, comme A B C, A B D, ou A B D, D B G, sont appellés *angles de suite*; & l'on voit que *ils sont toujours supplément l'un de l'autre.*

32. V. *Quand deux droites* A G, C D *se coupent les angles opposés au sommet, savoir,* A B C & D B G, A B D & C B G *sont égaux.* Car puisque A B C + A B D = 180°, & que A B D + D B G = 180°, on a A B C + A B D = A B D + D B G: ou bien ôtant A B D de part & d'autre, on a A B C = D B G; donc aussi leurs suppléments, A B D, C B G, seront égaux.

CHAPITRE III.

Des parallèles, des perpendiculaires & des obliques.

33. DÉFINITIONS. I. DEUX ou plusieurs lignes droites sont *Parallèles*, lorsqu'étant sur le même plan elles ne se rencontrent, ni ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.

34. II. Elles ſont *Perpendiculaires* l'une à l'autre, lorſqu'en le rencontrant elles font des angles droits; & *Obliques*, lorſqu'elles font des angles obtus ou aigus. FIG.

35. III. Quand deux droites A B, C D, ſoit parallèles, ſoit concurrentes, ſont coupées par un troiſième SR (qu'on appelle *ſécante*), les angles qui ſont entre les deux lignes coupées, tels que a, b, e, f, ſont appellés *internes*, & ceux qui ſont en dehors, comme d, c, h, g, *externes*: on nomme *alternes*, ceux qui ſont l'un à droite, l'autre à gauche de la ſécante: ainſi a & f ſont alternes & internes à la fois, c & h ſont alternes & externes. Enfin on appelle *correſpondants* les angles qui étant du même côté de la ſécante ſont chacun au-deſſus, ou chacun au-deſſous des droites AB, CD, tels ſont les angles c & f, a & h, &c. 9.

36. IV. Quand deux ou pluſieurs angles B, b auront leur ſommet du même côté d'une ligne droite Ab, nous appellerons côtés *correſpondants* les deux qui ſont à la droite ou à la gauche de l'angle. Ainſi A B & a b, B C & b c ſont correſpondants. 14.

37. AXIOME. *Si deux droites* A B, C D, *ſont coupées par une troiſième* S R, *de façon que la ſomme des angles internes, ſoit d'un côté de la ſécante plus petite que de l'autre, ou bien ſi* $a+e<b+f$, *elles concourront, & réciproquement.* Et comme on ne peut avoir $a+e<b+f$, ſans avoir $a+e<180°$ & $b+f>180°$; puiſque (27) $a+b+e+f=360°$, il s'enſuit que *ſi deux droites concourent, la ſomme des angles internes vaut moins de* 180° *d'un côté de la ſécante, & plus de* 180° *de l'autre; & réciproquement.* 9.

38. THÉORÈME I. *Quand deux parallèles* A B, C D *ſont coupées par une ſécante* S R, *les angles alternes-internes ſont égaux entr'eux, ainſi que les alternes-externes & les correſpondants: & réciproquement.*

DEM. 1°. $a=f$: car $a+e=180°$ (ſans quoi A B & C D concourroient). Or, (31) $e+f=180°$. Donc $a+e=e+f$, ou bien $a=f$ & partant $b=e$. Or, (32) $c=a$, $h=f$; donc

FIG. $c = h$ & partant $g = d$; d'ailleurs $d = b$, donc $g = b$ & $f = c$.

2°. La réciproque est que si deux droites étant coupées par une troisième, les angles alternes ou correspondans sont égaux, ces deux lignes sont parallèles. Car si $a = f$, puisque $f + e = 180°$, de même $a + e = 180°$. Donc les droites AB, CD ne sont pas concurrentes (37). Elles sont donc parallèles.

39. COROLL. Il suit de là que *si la ligne* SR *est perpendiculaire à une des deux parallèles, elle le sera à l'autre.* Car si les angles d & c sont droits, leurs correspondans e & f doivent l'être aussi.

40. THÉORÈME II. *Deux lignes* AB, EF *parallèles à une*
10. *troisième* CD *sont parallèles entr'elles.*

DEM. Car puisque AB est parallèle à CD, les angles correspondants SGB, SHD sont égaux : & puisque CD est parallèle à EF, SHD = SIF. Donc SGB = SIF, & par conséquent (38) les deux lignes AB, EF sont parallèles.

41. THÉORÈME III. *Quand deux lignes* AB, CD *sont*
11. *perpendiculaires l'une à l'autre, elles se rencontrent ou se coupent sans pencher d'aucun côté.*

DEM. Puisque les angles en B sont égaux entr'eux (34), si l'on dit que AB penche de quelque côté, il faudra dire qu'elle penche autant vers C que vers D, ce qui est absurde.

42. THÉORÈME IV. *Si la ligne* AB *est perpendiculaire sur* CD, *& que le point* B *soit autant éloigné de* C *que de* D, *tout autre point* O *de* AB, *sera autant éloigné de* C *que de* D ; *& réciproquement.*

DEM. 1°. Concevez que la ligne BD tourne sur AB, en faisant toujours un angle droit avec elle ; alors le point D viendra tomber sur C, puisque (hyp.) BD = BC. Donc AD couvrira AC, & OD couvrira OC : ou bien AD = AC, OD = OC, &c.

2°. L'inverse est, *Que si le point* A *est autant éloigné de* C *que de* D, *ainsi qu'un autre point* B, *la ligne* AB *sera perpendiculaire sur* CD. Car elle ne penchera d'aucun côté sur CD, ce qui rendra les angles ABC, ABD égaux, & par conséquent droits. Donc (34) AB sera perpendiculaire sur CD.

43. COROLL. Il suit de là que *les obliques* A C, A D, *qui partant d'un même point* A *d'une perpendiculaire* A B, *se terminent sur l'autre* C D *à des distances égales du point* B, *sont égales entr'elles ; & réciproquement.* FIG. 11.

44. THÉORÈME V. *La perpendiculaire* A B *est plus courte qu'une oblique quelconque* A D, *tirée du même point* A *sur la ligne* C D.

DEM. Prolongés la perpendiculaire A B jusqu'en P, de façon que vous ayés A B = B P ; ce qui donnera (43) A D = P D ou bien $AD = \frac{AD + PD}{2}$; tandis que par la construction, $AB = \frac{AP}{2}$. Or, $AP < AD + PD$ (6). Donc $AB < AD$.

45. COROLL. I. *La perpendiculaire* A B *mesure donc la distance du point* A *à la ligne* C D ; car cette distance doit être mesurée par la ligne la plus courte qu'on peut mener entre-deux.

46. II. *Du point* A *on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur* C D ; puisque le plus court chemin pour aller du point A à la ligne C D doit être unique ; d'où il suit que *deux perpendiculaires élevées sur la même ligne* C D, *sont parallèles entr'elles.* Car si elles ne l'étoient pas, elles concourroient en quelque point, & de ce point on pourroit abaisser deux perpendiculaires sur la même ligne C D, ce qui est impossible.

47. PROBLÈME I. *Sur un point donné dans une droite élever une perpendiculaire à cette droite.*

SOL. Si ce point, comme B, n'est pas à l'extrémité de la ligne donnée, prenez sur la même deux points C, D, à égale distance du premier : & de ces points C & D décrivés d'une même ouverture de compas deux arcs de cercle qui se couperont en A, joignés par une ligne droite le point A & le point B, ce sera la perpendiculaire cherchée (42).

Si le point sur lequel il faut élever la perpendiculaire est à l'extrémité de la ligne donnée C D, prolongés la, s'il se peut, pour opérer comme ci-dessus ; & si par des circonstances locales, ce prolongement est impossible, comme il arrive quel-

FIG. quefois dans la pratique, vous suivrés une autre méthode dont nous parlerons ci-après.

12. 48. PROBLÈME II. *Partager une droite donnée* A B *en deux parties égales.*

SOL. Des points A & B & d'une même ouverture de compas, décrivés d'un côté deux arcs qui se coupent en E : des mêmes points A & B & d'une même ouverture de compas (qui peut cependant être différente de la première) décrivés de l'autre côté de la droite donnée, deux arcs qui se coupent en D, joignés par une droite les points de section E & D, & le point C, où elle coupera A B, sera le milieu de A B; car E D étant perpendiculaire sur A B (42) & le point E étant à égale distance de A & de B, le point C le sera aussi, ou bien on aura A C = C B.

13. 49. THÉORÈME VI. *Des perpendiculaires* R S, P Q *entre des parallèles* A B, C D *sont égales, & réciproquement.*

DEM. 1°. Du point du milieu N entre S & Q, élevez la perpendiculaire N M. Concevez que les lignes N D, M B, faisant toujours des angles droits en N & en M, la figure soit pliée sur M N. Alors N D tombera sur C N & M B sur A M: & puisque N Q = N S, le point Q tombera sur S; si donc le point P ne tomboit pas sur R mais sur *q*, on pourroit du point S tirer deux perpendiculaires S R, S *q* sur A B, ce qui est absurde. Donc 1°. P Q = R S.

2°. L'inverse du Théorème est que *si sur une droite* C D *on éleve deux perpendiculaires égales* P Q, R S, *la droite* A B, *qui passera par leurs extrémités sera parallèle à* C D. Car les angles en S & en Q restant droits, l'on peut concevoir qu'aux points O & G, qui divisent également P Q & R S, l'on a plié la partie inférieure de la figure sur la supérieure, de façon que le point Q tombe sur P & S sur R; & par conséquent la ligne C D, ayant deux points S & Q, communs avec A B, se confondra avec elle. Donc l'angle O Q D = O P B, ou bien leur somme sera 180°; ce qui ne peut être (37) si les deux lignes A B, C D ne sont parallèles. Donc, &c.

50. THÉORÈME VII. *Deux angles sont égaux, lorsque leurs côtés correspondants sont ou parallèles ou perpendiculaires entr'eux.* FIG.

DEM. 1°. Si A B & *ab*, B C & *bc* sont parallèles, & qu'on prolonge les côtés B C, *ba* qui ne sont pas correspondants, il se formera un angle en D qui sera alterne-interne de B & de *b*. Donc B = D = *b*, ou bien B = *b*. 14.

2°. Si *a b* est perpendiculaire sur son correspondant A B & *b c* sur B C, concevez que l'angle *b* restant le même, ses côtés *a b*, *b c* décrivent chacun un quart de circonférence autour du point *b*. Alors *a b* deviendra parallèle à A B & *b c* à B C. Donc, par la première partie de ce théorème, l'angle *b* égalera B. Ils étoient donc égaux auparavant. 15.

51. REMARQUE. Pour l'égalité de deux angles, il ne suffit pourtant pas que leurs côtés quelconques soient parallèles. Car on peut toujours construire un angle aigu, dont les côtés seront parallèles à ceux d'un angle obtus, pourvu que l'un soit supplément de l'autre, tels sont les angles A B C, *abc*, dans lesquels les côtés A B & *a b*, B C & *b a* sont parallèles; mais non pas correspondants. 16.

CHAPITRE IV.

De quelques propriétés des lignes droites, considérées dans le Cercle.

52. OUTRE les lignes droites, dont nous avons parlé plus haut, le Cercle contient encore celles qu'on désigne sous le nom de *Sécantes* & de *Tangentes*. On appelle Sécante toute droite S T qui coupant la circonférence, se termine hors du Cercle; & Tangente T *t* celle qui touche la circonférence sans la couper, même étant prolongée. 17.

Si l'on conçoit que la Sécante S T tourne sur son extrémité T du côté de *t*, les deux points de section S, *s*, s'approcheront toujours l'un de l'autre, de façon qu'en B ils se réuni-

FIG. ront en un seul ; & dans ce moment la Sécante cessera de l'être pour devenir Tangente. On peut donc dire que la *Tangente n'est autre chose qu'une Sécante évanouissante.*

53. THÉORÈME I. *Dans un même Cercle ou dans des Cercles égaux les cordes égales sou-tendent des arcs égaux, & réciproquement.*

17. DEM. 1°. Si la corde DF = RQ, je dis que l'arc DBF = RAQ. Car si on applique la corde DF sur son égale RQ, le point D sur R & le point R sur Q, l'arc DBF couvrira RAQ. Car si cela n'étoit pas ainsi & qu'un d'eux fut par exemple, RaQ les rayons du même cercle C *a*, CA ne seroient pas egaux, ce qui est absurde (11). Donc 1°. &c.

2°. Si l'arc RAQ = DBF, ils pourront se couvrir parfaitement, & alors le point F tombera sur Q, & le point D sur R. Donc la ligne droite qui joindra D & F, joindra R & Q, ou bien la corde RQ égalera DF.

54. SCHOLIE. Il est aisé de voir que la vérité de ce Théorème dépend de l'uniformité de courbure dans le cercle, & que l'on peut aussi conclure de cette même uniformité : 1°. Que dans des cercles égaux les cordes inégales sou-tendent des arcs inégaux, & réciproquement : 2°. Que les cordes croissent ou décroissent en s'approchant ou s'éloignant du centre, de façon que celles qui en sont également éloignées sont égales, & que le diamétre est la plus grande de toutes.

55. THÉORÈME II. *De ces trois propriétés d'une droite, être perpendiculaire à une corde, la diviser en deux parties égales, & passer par le centre ; deux étant données, la troisième s'ensuit nécessairement.*

DEM. 1°. Si AB est perpendiculaire sur DF, & que de plus elle la partage en deux également au point M, je dis qu'elle passe par le centre C du Cercle. Car MD = MF (hyp.) donc (42) chaque point de la perpendiculaire AB est autant éloigné de D que de F ; & de plus tous les points également éloignés de D & de F sont dans cette perpendiculaire. Donc le centre du Cercle y sera aussi.

2°. Si AB est perpendiculaire sur DF, & qu'elle passe par

le centre C, elle partage D F en deux parties égales. Car puisque C est le centre, il est également éloigné de D & de F : puisque A B est perpendiculaire, chacun de ses points est également éloigné des mêmes points D & F. Donc D M = M F. FIG.

3°. Si A B divise la corde D F en deux également, & qu'elle passe par le centre C, elle est perpendiculaire à cette corde. Car la première condition donne D M = F M, & la seconde C D = C F. Donc (42) A B est perpendiculaire sur D F. 17.

56. THÉORÈME III. *Une perpendiculaire* A B *qui partage la corde* E H *en deux parties égales, partage aussi l'arc sou-tendu en deux arcs égaux.*

DEM. Par l'hypotèse le point N est autant éloigné de E que de H ; & par conséquent tout autre point de la perpendiculaire A B sera autant éloigné de E que de H (42). Donc les cordes B E, B H, qui mesurent deux de ces distances seront égales ; ainsi que les arcs E D B, H F B, sou-tendus par ces cordes sont égaux ; ou bien l'arc E B H est divisé au point B en deux parties égales.

57. COROLL. *Les arcs du même cercle renfermés entre deux parallèles* E H, D F, *sont égaux.* Car si du centre C on abaisse la perpendiculaire C B sur ces parallèles, on aura l'arc E D B = B F H, & l'arc D B = B F. Donc en retranchant cette dernière équation de la précédente, il restera l'arc E D = H F.

58. THÉORÈME IV. *Le rayon* CB *qui aboutit au point de contact* B *est perpendiculaire à la tangente en ce point, & reciproquement.*

DEM. Toute ligne autre que C B, menée du centre sur cette tangente devra sortir de la circonférence, & sera par conséquent plus longue que le rayon de contact C B. Ce rayon est donc la plus courte ligne qu'on puisse mener du centre sur la tangente ; il lui est donc perpendiculaire (44).

L'Inverse est, *que si* T *t est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* C B, *elle sera tangente au point* B. Car si elle entroit dans le cercle, le rayon mené au point de sa sortie, par exemple en *t*, égaleroit le rayon C B. Donc C B ne seroit pas plus courte

FIG. que toute autre ligne menée du centre sur T *t*; elle ne lui seroit donc pas perpendiculaire, ce qui est contre la supposition. Donc, &c.

17. 59. COROLL. Il suit de là 1°. Que toute ligne comme EB, qui tombera sur l'extrémité du rayon, sans lui être perpendiculaire, entrera dans le cercle, puisqu'elle ne pourra se confondre avec la tangente.

18. 2°. Que le point B pouvant appartenir à une infinité de courbes différentes, comme sont les arcs décrits avec les rayons CB, DB, EB, tant en-dessus qu'en dessous de T *t*, la même ligne T *t* sera tangente à toutes ces courbes, & que par conséquent *entre l'arc* XBY *& sa tangente* T *t on peut mener une infinité de courbes qui toucheront l'arc sans le couper; mais qu'on ne peut y mener qu'une seule ligne droite* T *t qui le touche & ne le coupe pas.*

17. 60. PROBLÈME I. *Diviser l'arc* DBF, *ou l'angle* DCF *en deux parties égales.*

SOL. Ayant tiré la corde DF, menez du centre C le rayon CB, perpendiculaire sur cette corde; il partagera l'arc, & par conséquent l'angle en deux parties égales.

61. PROBLÈME II. *Faire passer une circonférence de cercle*
19. *par trois points donnés* B, A, D, *pourvu-qu'ils ne soient pas en ligne droite.*

SOL. D'un de ces points A menez aux deux autres les droites AB, AD : sur le milieu de chacune, élevés les perpendiculaires PC, QC : & le point C ou ces perpendiculaires se rencontreront sera le centre du cercle dont la circonférence passera par les trois points donnés B, A, D.

62. REMARQUE. Puisque les deux perpendiculaires PC, QC ne peuvent se rencontrer qu'en un seul point (8), il s'ensuit *qu'il n'y a qu'un seul cercle, dont la circonférence puisse passer par les trois points donnés.*

63. PROBLÈME III. *Trouver le centre d'un arc donné* BAD.

SOL. Tirez dans cet arc deux cordes quelconques, aboutissant au même point, comme BA, DA : élevés sur le milieu

lieu de chacune les perpendiculaires PC, ? C, le point C où elles FIG.
se couperont, sera le centre du cercle auquel appartient l'arc BAD.

64. PROBLÈME IV. *D'un point A, pris hors d'une droite* 11.
CD, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

SOL. Décrivez de ce point A un arc de cercle *c e d* qui coupe la ligne donnée aux points *c*, *d* : divisés *c d* en deux également au point B (48) ; & c'est par ce point que passera la perpendiculaire demandée (42).

On a là un moyen de mener par le point A une parallèle à la ligne CD ; il suffira d'abaisser de ce point la perpendiculaire AB, & d'élever sur le point A une perpendiculaire à AB ; celle-ci sera nécessairement parallèle à CD (32).

PROBLÈME V. *Sur un point A d'une droite donnée* AB, 20.
construire un angle égal à un angle donné D.

SOL. Du point D comme centre & avec une ouverture de compas quelconque, décrivés l'arc EF : du point A & avec la même ouverture, décrivés l'arc GX : ensuite avec un rayon égal à la corde EF, décrivés du point G l'arc *a* C *b*, & tirant la droite AC vous aurez l'angle demandé. Car ayant les cordes égales FE, CG, & les rayons égaux AG, DE, on aura l'arc CG = FE ; & par conséquent les angles A & B, mesurés par ces arcs seront égaux.

CHAPITRE V.

De la mesure des Angles considérés dans le Cercle.

LA situation d'un angle par rapport à la circonférence d'un cercle peut être telle, qu'il ait son sommet au centre, ou bien entre le centre & la circonférence, ou bien à la circonférence, ou bien enfin hors de la circonférence ; de telle sorte que les côtés en soient les tangentes ou les sécantes. Nous ne dirons rien de la mesure de celui qui a son sommet au centre, parce que nous l'avons déja déterminée ailleurs (25). Il nous reste à mesurer les angles dans les autres situations, sans avoir recours à d'autre cercle qu'à celui qui est touché ou coupé par leurs côtés

65. THÉORÈME I. *L'angle aigu* ABD, *formé à la circonfé-* 21.

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE IMPRIMÉ

FIG. *rence du cercle par une tangente & par une corde* (*) *a pour mesure la moitié de l'arc* B F D, *sous-tendu par la corde.*

21. DEM. Soient le rayon de contact B C, & le rayon F C perpendiculaire à la corde D B; ce qui rend l'arc D F = F B (55), ou bien B F, moitié de B F D. Cela posé je dis que l'angle A B D a pour mesure l'arc B F. Car l'angle A B D = F C B, (puisque par la construction leurs côtés homologues sont perpendiculaires). Mais F C B a pour mesure l'arc B F (25). Donc l'angle aigu A B D a pour mesure l'arc B F.

66. COROLL. I. *L'angle obtus* D B H *a aussi pour mesure la moitié de l'arc* D G E B *renfermé entre ses côtés.* Car cet angle joint à l'angle aigu A B D, a pour mesure la moitié de la circonférence. Or, A B D est mesuré par la moitié de B F D; donc la moitié du reste, savoir $\frac{1}{2}$ DGEB, mesure l'angle DBH.

67. II. *L'angle* D B E, *formé à la circonférence par deux cordes* (**) *a aussi pour mesure la moitié de l'arc* D G E, *renfermé entre ses côtés.* Car D B E = D B H — H B E. Donc D B E a pour mesure $\frac{1}{2}$ D G E B — $\frac{1}{2}$ B E, savoir, $\frac{1}{2}$ D G E.

68. III. *Un angle à la circonférence a donc pour mesure dans tous les cas, la moitié de l'arc renfermé entre ses côtés.* D'où l'on conclura : 1°. Que cet angle est droit, s'il est appuyé sur les
25. extrémités d'un diamètre, comme P A D : 2°. qu'il ne vaut que la moitié de l'angle au centre, lorsque l'un & l'autre sont
23. appuyés sur le même arc; ainsi l'angle A F E = $\frac{1}{2}$ A C E.

22. 69. THÉORÈME II. *L'angle* A B D, *formé entre le centre & la circonférence a pour mesure la moitié de l'arc* A D *renfermé entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* F G, *renfermé entre ses côté prolongés.*

DEM. Du point F soit menée la corde F E parallèle au côté B D; on aura l'angle A B D = A F E (38); or, celui-ci a pour mesure $\frac{1}{2}$ A D + $\frac{1}{2}$ DE, ou bien $\frac{1}{2}$ A D + $\frac{1}{2}$ GF (57). Donc

(*) Cet angle est appellé *Angle du Segment.*

(**) On l'appelle *Angle inscrit.*

l'angle A B D a aussi pour mesure $\frac{1}{2}$ A D + $\frac{1}{2}$ G F. FIG.

70. THÉORÈME III. *L'angle* A B D *formé hors de la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc concave* A E D, *moins la moitié de l'arc convexe* F G *renfermé entre ses côtés.* 23.

DEM. Du point F soit menée la corde F E parallèle au côté B D. L'angle A F E = A B D. Donc l'un & l'autre ont pour mesure $\frac{1}{2}$ AE (68). Or, $\frac{1}{2}$ A E = $\frac{1}{2}$ A D — $\frac{1}{2}$ E D, ou bien $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}$ A D — $\frac{1}{2}$ F G (57). Donc l'angle A B D, &c.

71. PROBLÈME I. *D'un point* A, *pris hors du cercle* D T *t*, *mener deux tangentes à ce cercle.* 24.

SOL. Du point A menez au centre de ce cercle la droite AC, & avec un rayon égal à la moitié de cette droite, décrivez une nouvelle circonférence C T A *t* : des points d'intersection T, *t* avec la circonférence donnée, tirez au point A les droites T A, *t* A, & ce sera les deux tangentes cherchées.

Car si l'on tire dans le premier cercle les rayons de contact CT, C*t*, les angles C T A, C *t* A, appuyés sur un diamètre dans le second cercle, seront droits. Donc les lignes A T, A *t* seront tangentes (58).

72. PROBLÈME II. *Élever une perpendiculaire sur l'extrémité A d'une droite* A B, *qu'on ne peut point prolonger.* 25.

SOL. *D'un point quelconque* C pris au-dessus de la droite *BA & du rayon C A décrivez une circonférence* de cercle qui passera par le point A ; & du point D, où cette circonférence coupera la droite donnée B A, tirez le diamètre D P, la perpendiculaire cherchée passera par P, puisque l'angle D A P est droit (68).

CHAPITRE VI.

Des différentes espèces de polygones en général, & du Triangle en particulier.

SUIVANT l'éthymologie du mot, on doit entendre par *Polygone*, une figure à plusieurs angles ; & comme dans tou-

FIG. te figure rectiligne le nombre des angles est le même que celui des côtés, on peut désigner les différentes espéces de polygones par l'une ou l'autre de ces deux choses indifféremment. C'est pourquoi on appelle *Trilatere* ou plus communément *Triangle*, le polygone qui a trois angles, & par conséquent trois côtés : *Quadrilatere*, celui qui en a quatre : *Pentagone*, celui qui en a cinq : *Exagone*, celui qui en a six, &c. Nous allons d'abord nous occuper des propriétés du triangle, parce qu'elles serviront à découvrir celles des autres polygones.

73. Le triangle est la plus simple de toutes les figures rectilignes que puisse former la Géométrie, puisqu'on ne peut renfermer un espace par des lignes droites, s'il y en a moins de
6. trois. On voit encore qu'avec trois lignes données A, B, C, on ne sauroit construire cette figure, si les deux prises ensemble ne sont plus longues que la troisième ; ce qui fait *que deux côtés quelconques d'un triangle valent en somme plus que le troisième.*

74. Le triangle considéré par rapport à ses angles est appellé *acutangle*, quand il a tous ses angles aigus ; *obtusangle*, quand il a un angle obtus ; *rectangle*, quand il a un angle droit. Par rapport à ses côtés, il est appellé *équilateral*, quand il a tous les côtés égaux ; *yzocelle*, quand deux seulement sont égaux ; & *scalène*, quand ils sont tous inégaux.

Si du sommet d'un angle quelconque d'un triangle on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, prolongé s'il le faut, cette perpendiculaire est appellée *la hauteur* du triangle ; & le côté, sur lequel elle tombe, en est la *base*.

75. THÉORÈME I. *Tout triangle peut être inscrit dans un cercle.*

DEM. Inscrire un polygone dans un cercle, c'est faire passer un circonférence de cercle par le sommet de ses angles. Or, les sommets des trois angles d'un triangle n'étant jamais en ligne droite, on peut y faire passer une circonférence de cercle (61). Donc, &c.

76. THÉORÈME II. *La somme des trois angles d'un triangle est toujours 180°.*

DEM. Si du sommet de l'angle A on mène A P parallèle à C B, & qu'on prolonge le côté A C, on a l'angle P A R = A C B, son correspondant : P A B = A B C, son alterne. Donc les trois angles A + B + C valent en somme tous les angles qu'on peut former sur le point A & du même côté de la droite C R. Ils valent donc en somme 180° (27). FIG. 27.

Si l'on veut se convaincre d'une autre manière de cette vérité importante, qu'on suppose un triangle quelconque D A P inscrit dans un cercle : ses trois angles A, D, P, auront leurs sommets à la circonférence & la renfermeront toute entière. Ils vaudront donc en somme 180°. 25.

77. COROLL. I. Un triangle ne peut donc avoir deux angles droits, ni à plus forte raison deux angles obtus.

78. II. Dans un triangle un angle quelconque est le supplément des deux autres. D'où il suit 1°. que connoissant deux angles, on connoît le troisième. 2°. Que si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre, le troisième angle du premier égalera le troisième du second.

79. III. Quand un triangle a un angle droit, chacun des deux autres est aigu ; & l'un de ceux-là est complément de l'autre.

80. IV. Si l'on prolonge un côté quelconque A D d'un triangle D A P, l'angle extérieur B D P égalera la somme des deux interieurs opposés P + A. Car l'angle extérieur B D P, & la somme des deux intérieurs opposés P + A ont le même supplément ; savoir, P D A. Donc l'angle exterieur vaut la somme des deux intérieurs opposés.

81. THÉORÈME III. *Dans tout triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, & les côtés égaux à des angles égaux.* (*)

DEM. Car inscrivant le triangle dans un cercle, le plus grand côté doit sous-tendre le plus grand arc, le plus petit côté le plus petit arc, & les côtés égaux des arcs égaux. Or, les moi-

(*) L'inverse de cette proposition ne dit rien de différent de la proposition même.

FIG. tiés de ces arcs mesurent les angles opposés (68). Donc, &c.

82. Corroll. Il suit de là 1°. Que dans le triangle équilateral, les trois angles sont égaux. 2°. que dans le triangle yzocelle, les angles opposés aux côtés égaux, sont égaux.

Remarque. On voit que l'inverse de chacune de ces dernières propositions est également vraie.

83. Théorème IV. *Si d'un angle quelconque d'un triangle, on tire une perpendiculaire sur le côté opposé (qu'on appelle la base de cet angle), elle tombera en dedans du triangle, lorsque les deux angles sur la base seront aigus; en dehors, si l'un est obtus; & sur l'extrémité de cette base, si l'un de ces angles est droit.*

28. Dem. 1°. Dans le triangle A B C, qui a deux angles aigus sur la base B C, si la perpendiculaire A P, menée du point A, tomboit à l'extrémité C de cette base, elle formeroit avec elle l'angle aigu A C B, ou d'autres angles plus aigus, si elle tomboit au-delà, ce qui est absurde (34); elle ne peut donc pas tomber hors de cette base.

2°. Si dans le triangle A C D, qui a un angle obtus en C, la perpendiculaire tomboit à l'extrémité C, elle formeroit en C l'angle obtus A C D; ou un angle plus obtus, si elle entroit dans le triangle. Elle doit donc tomber hors de la base C D.

3°. Si dans le triangle A P C, qui a un angle droit en P, la perpendiculaire menée du point A, ne se confondoit pas avec A P, on pourroit abaisser du même point A deux perpendiculaires sur la même ligne P C, ce qui est absurde (46). Elle tombera donc sur le point P.

CHAPITRE VII.

Qui traite de l'égalité & de quelques autres rapports tant des triangles que des parallèlogrammes.

On ne peut mieux prouver qu'une étendue est égale à une autre, qu'en faisant voir que la première placée sur la

seconde, la couvre parfaitement, ou plutôt qu'elle la pénè- FIG.
tre dans toutes ses parties. C'est par ce moyen, connu sous le nom de *Méthode de superposition*, que nous avons fait voir ailleurs l'égalité des lignes dans certains cas (49); nous l'employerons encore ici, pour prouver l'égalité des figures. Et en général, comme on ne peut entendre par figure autre chose que l'espace renfermé dans un certain contour ou *Périmètre* (10), nous dirons que deux figures sont égales, lorsque l'espace qu'elles renferment est égal de part & d'autre (cet espace est encore appellé *l'Aire* de la figure).

84. En comparant ensemble deux triangles, nous dirons que le plus grand côté de l'un est *Homologue* au plus grand côté de l'autre, le moyen au moyen & le plus petit au plus petit. Et lorsque les angles opposés aux côtés homologues seront égaux de part & d'autre, les triangles seront appellés *équiangles*. Il est aisé de voir que deux triangles peuvent être équiangles sans être égaux; car si dans le triangle A B C *on dé-* 29.
crit a b c, de façon que les côtés homologues soient parallèles; les angles opposés à ces côtés seront égaux, sans que les triangles le soient; & réciproquement, deux triangles peuvent être égaux sans avoir ni les angles ni les côtés égaux, ainsi que nous le verrons plus bas.

85. Tout quadrilatere AB CD qui a les côtés opposés parallèles 31.
est un *Parallèlogramme* & si tous ses angles sont droits c'est un *Rectangle*. Une ligne AB qui va d'un angle à l'angle opposé en est la *Diagonale*. Et l'on peut prendre pour base un de ses côtés quelconques, & alors la hauteur sera déterminée par une perpendiculaire, élevée sur ce côté jusqu'à la rencontre du côté opposé.

86. THÉORÈME I. *Si deux triangles sont équiangles & qu'ils ayent de plus un côté homologue égal, les autres côtés seront égaux; & par conséquent les deux figures seront égales en tout.*

Ou bien si l'on a l'angle A = *a*, B = *b*, C = *c*: & de plus 29.
le côté B C = *b c*, les triangles A B C, *a b c* seront égaux en tout.

DEM. Si l'on conçoit le triangle *a b c* placé sur A B C,

FIG. en sorte que le point *b* tombe sur B & *c* sur C, le côté *a b* tom-
29. bera sur A B, puisque les angles *b* & B sont égaux : par une raison semblable *c a* tombera sur C A. Donc l'intersection *a* des côtés *b a* & *c a* tombera sur l'intersection A des côtés B A & C A ; & les deux triangles se confondant alors, seront parfaitement égaux en toutes choses.

87. COROLL. I. *Deux triangles sont donc égaux lorsque ayant deux angles égaux, ils ont de plus un côté égal.* Car alors ils sont équiangles (78) avec un côté égal.

31. 88. II. *Deux droites Parallèles* DA, BC *entre parallèles*, DB, AC *sont égales.* Car si par le sommet des deux angles opposés on tire la droite B A, les deux triangles B A C, B A D, seront égaux en toutes choses ; puisque outre le côté commun B A, ils sont équiangles. Donc.(38) D A = B C & D B = A C. D'où l'on déduit que *dans un parallèlogramme les côtés opposés sont toujours égaux.*

29. 89. THÉORÈME II. *Si deux triangles* A B C, *a b c, ont leurs côtés homologues égaux, ils sont équiangles & égaux ; & réciproquement.*

DEM. Posés le côté *b c* sur son égal B C, de façon que *b* tombe sur B & *c* sur C : avec B A, ou son égal *b a* & du centre B, décrivés l'arc D A E : avec C A ou son égal *c a*, & du centre C, décrivés l'arc F A G. Le sommet de l'angle *a* tombera sur l'intersection des deux arcs décrits par *b a* & par *c a*; de même que le sommet de l'angle A tombera sur l'intersection des deux mêmes arcs décrits par B A & C A. Les points *a* & A tomberont donc l'un sur l'autre, ainsi que par la construction *b* tombe sur B & *c* sur C ; les côtés & les angles se couvriront donc parfaitement ; & par conséquent les deux triangles seront équiangles & égaux.

L'inverse de cette proposition est que *si deux triangles* ABC, *abc, sont équiangles & égaux, ils ont leurs côtés homologues égaux.* Car
30. puisque l'angle *a* = A, si l'on place le triangle *a b c* sur A B C, de façon que le point *a* tombe sur A, & le côté *a b* sur son homologue A B, *a c* tombera sur A C : & je dis encore que les points *b* & *c* tomberont sur B & C. Car autrement, ou bien ils

ils tomberoient tous les deux au-dessus de B C, l'un en H l'au- FIG.
tre en E : ou bien tous les deux au-dessus, l'un en D l'autre 30.
en G : ou bien l'un sur B C & l'autre hors de cette ligne en G ou en E : ou bien enfin l'un en E au-dessus de B C & l'autre en D au-dessous. Or, dans tous ces cas on contrediroit la supposition : d'abord dans les trois premiers, parce que les deux triangles A B C, *a b c*, seroient évidemment inégaux ; & dans le quatrième, parce qu'ils ne seroient pas équiangles ; puisqu'on auroit l'angle *a c b* = A E D, & que celui-ci étant extérieur dans le triangle F E C, seroit plus grand que l'angle C, qui est un des intérieurs opposés. Donc, &c.

90. COROLL. I. *La diagonale* A B *partage donc le parallélogram-* 31.
me en deux triangles équiangles & égaux. Puisque les deux triangles A B C, A B D, outre le côté commun A B, ont encore B C = D A, B D = A C (88). D'où il suit *que le parallélogramme est double du triangle de même base & de même hauteur.*

91. II. *Si aux extrémités de deux lignes égales* D A, B C *aboutissent deux autres lignes égales* D B, A C, *le quadrilatère ainsi formé sera un parallélogramme.* Car tirant la ligne A B, les triangles D A B, B A C seront égaux en tout (89). Donc l'angle B A D = A B C, ce qui suppose B C parallèle à D A (38) : de plus l'angle A B D = B A C ; & partant (38) D B est parallèle à A C.

92. On déduira de là une nouvelle méthode de tirer, par un point donné N, une parallèle à la ligne A B. Car si d'un 32.
point quelconque C de cette ligne, on décrit un arc de cercle qui la coupe en D : qu'avec la même ouverture de compas on décrive du point N l'arc *q p* : & qu'ensuite du point D, avec une ouverture de compas égale à C N, on décrive l'arc S R : l'intersection O de ces deux arcs sera un nouveau point de la ligne cherchée. Puisque par la construction O D = N C & N O = C D ; donc (91) N O & C D sont parallèles.

93. THÉORÈME III. *Si deux triangles* A B C, *a b c*, *ont un* 29.
angle égal, renfermé entre des côtés égaux, ils sont équiangles & égaux.

FIG. 29. DEM. Si l'angle A = *a*, en les posant l'un sur l'autre, les côtés *ab*, *ac* pourront tomber sur A B & A C : d'ailleurs puisque AB = *ab* & AC = *ac*, le point *b* tombera sur B & *c* sur C. Donc *bc* qui joint les points *b* & *c* se confondra avec B C qui joint les mêmes points. Les deux triangles seront donc égaux en tout.

31. 94. COROLL. *Si deux droites* A C, D B, *aboutissent aux extrémités de deux parallèles égales* D A, B C, *elles seront elles-mêmes égales & parallèles.* Car tirant la droite A B, les triangles A B D, B A C, seront équiangles & égaux (93) ; puisque outre le côté commun B A, & BC = D A (hyp.), l'angle ABC = BAD, son alterne-interne. Donc (89) le côté DB = AC : & de plus l'angle DBA = BAC ; ce qui suffit (38) pour que les lignes D B, A C, soient parallèles ; & que la figure D A C B soit un parallèlogramme (85).

33. 95. THÉORÈME IV. *Des parallèlogrammes* A C, B F, *qui ont une base commune* BC, *& qui sont renfermés entre les mêmes parallèles* BC, AF, *sont égaux.*

DEM. AD = BC = EF (85) ; donc ajoutant DE aux lignes EF & AD, on a AE = DF : Or, AB = DC, & en outre (38) l'angle BAE = CDF. Donc le triangle BAE = CDF (93) ; & par conséquent ce qu'ils n'ont pas de commun est égal de part & d'autre, ou bien le quadrilatère ABGD = GCFE. Et si à chacun on ajoute le triangle BGC, les sommes seront encore égales. Or, ces sommes donnent d'un côté le parallélogramme AC, & de l'autre le parallèlogramme BF. Donc AC = BF.

34. 96. COROLL. Il suit de là *que deux parallélogrammes* AC, EG, *renfermés entre deux parallèles* AH, BG, *sont égaux entr'eux, s'ils ont des bases égales* BC, FG, *quoiqu'elles ne soient pas communes.* Car si l'on joint les points B & E, C & H, le quadrilatère BH sera un parallèlogramme (94) qui aura la base BC commune avec AC, & la base EH commune avec EG. Donc (95) BH = AC = EG.

35. 97. THÉORÈME V. *Deux triangles* A B C, D B C, *sont égaux, si étant renfermés entre les mêmes parallèles* E F, B C, *ils ont de*

plus une base commune B C. FIG.

DEM. Du point B tirez B E parallèle à A C, & du point 35.
C tirez C F parallèle à B D (92). Les quadrilatères E C, F B seront des parallélogrammes égaux (85 & 95). Donc les triangles A B C, D B C, qui en sont les moitiés (90), seront égaux.

98. THÉORÈME VI. *Deux triangles* E G B, F H C, *qui ont des bases égales* B G, C H, *& qui sont renfermés entre les mêmes parallèles* E F, G H, *sont égaux entr'eux.*

DEM. Car si on tire B A parallèle à E G & C D parallèle à F H, les parallèlogrammes A G, D H seront égaux (96); & par conséquent les triangles E G B, F H C, seront égaux aussi (90).

99. THÉORÈME VII. *Si deux triangles égaux* A B C, D B C, 36.
ont une base commune B C, *& leurs sommets* A *&* D *du même côté de cette base, ils sont entre deux parallèles* A D, B C.

DEM. Car si A D n'étoit pas parallèle à B C, supposons que ce fut A F, & nous aurions (97) le triangle A B C = B C F. Or, (hyp.) A B C = D B C; donc nous aurions D B C = B C F, c'est-à dire, la partie égale au tout, ce qui est absurde.

100. THÉORÈME VIII. *Si deux triangles égaux* A B C, 37.
D E F, *ont leurs bases égales* B C, E F, *sur la même ligne* B F, *& leurs sommets* A *&* D *du même côté de cette ligne, ils seront entre deux parallèles* A D, B F.

DEM. Car si toute autre ligne passant par le point A, par ex. A H, étoit parallèle à B F, on auroit (98) le triangle H E F = A B C. Or, (hyp.) A B C = D E F. Donc D E F = H E F, ce qui est absurde.

101. THÉORÈME IX. *Deux triangles* A B C, A C D, (*&* .38
par conséquent deux parallèlogrammes) *qui ont même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases* B C, C D.

DEM. 1°. Si les bases B C, C D, sont commensurables, supposés qu'elles soient divisées en parties égales aux points H, E, F, G; & que du point A, on tire les droites A G, A F, &c. Tous les triangles A B G, A G F, &c. sont égaux (98): de plus il s'en trouve autant dans A B C qu'on a pris

FIG. de parties égales dans B C, & autant dans A C D qu'il y a de ces parties dans C D. Donc A B C : A C D :: B C : C D.

2°. Si l'on n'avoit pas la même proportion, en supposant
39&40 que les bases B C, C D, fussent incommensurables, on auroit donc A B C : A C D > ou < B C : C D ; ou bien prenant C G > C B (*fig.* 39) & < C B (*fig.* 40) on auroit A B C : A C D :: C G : C D. Or, cette proportion est impossible. Car supposons d'abord que E D est une aliquote exacte de C D & plus petite que B G : ensuite que B F soit ce qu'il faut ajouter à B C (*fig.* 39) ou retrancher de B C (*fig.* 40) afin que E D la mesure exactement. Alors on a B F < E D (*). Or, (hyp.) E D < B G, donc B F < B G ; & par conséquent le point F tombera entre G & B.

Cela posé, puisque F C est supposée commensurable avec C D, on aura par la première partie de la démonstration A F C : A C D = F C : C D, tandis que (hyp.) A B C : A C D = G C : C D. Or, (*fig.* 39) G C : C D > F C : C D ; & (*fig.* 40) G C : C D < F C : C D. Donc A B C : A C D > A F C : A C D (*fig.* 39) & A B C : A C D < A F C : A C D (*fig.* 40). Et par conséquenr A B C > A F C (*fig.* 39) & A B C < A F C (*fig.* 40) ; ce qui est absurde.

CHAPITRE VIII.

Des lignes proportionnelles.

102. THÉORÈME I. 41. *Si dans un triangle quelconque* A C E, *les deux côtés* A C, A E, *sont coupés par une ligne* B D *parallèle au troisième*,

(*) Quand une ligne ne peut pas être mesurée par une certaine unité, elle contient un nombre de fois juste cette unité, plus une partie de cette unité. On la mesurera donc en lui ajoutant la partie de l'unité qui lui manque, ou en lui retranchant celle qu'elle a de trop. Et comme on peut prendre pour unité une quantité déterminée aussi petite qu'on voudra, pourvu qu'elle soit de même espece que celle qu'on mesure ; il s'ensuit que pour rendre commensurables deux quantités incommensurables, il suffit d'ajouter à une d'elles ou d'en retrancher, une partie plus petite que toute quantité donnée.

ils le sont en parties proportionnelles, ou bien on a, AB : BC FIG.
:: AD : DE ; *& réciproquement.*

DEM. 1°. Tirant les lignes BE, DC, le triangle BDC 41.
= BDE (97) ; & l'on a par conséquent ABD : BDC
:: ABD : BDE. Or, (101) ABD : BDC :: AB : BC ; &
ABD : BDE :: AD : DE. Donc AB : BC :: AD : DE.

2°. *Si une ligne* BD *coupe les deux côtés* AC, AE, *d'un triangle en parties proportionnelles, ou bien si l'on a* AB : BC :: AD : DE, *je dis que cette ligne sera parallèle au troisième côté* CE. Car (101) ABD : BDC :: AB : BC ; & ABD : BDE :: AD : DE. Donc ABD : BDC :: ABD . BDE ; & par conséquent (*Alg*. 205) BDC = BDE : d'ailleurs ces triangles ont, par la construction, une base commune BD & leurs sommets du même côté de cette base. Donc (99) ils sont entre deux parallèles BD, CE.

103. COROLL. On conclura de-là que *si l'on partage les deux côtés d'un triangle par plusieurs lignes* BD, FG, *parallèles au troisième, tous les segments correspondants seront proportionnels entr'eux & proportionnels à ces côtés.* 42.
Car *alternando*, on a, d'après le théorème précédent, AB : AD :: BF : DG. Donc *Componendo* & *alternando*, AB + BF : AD + DG :: BF : DG. Or, AB + BF, ou AF : AD + DG, ou AG :: FC : GE. Donc FC : GE :: BF : DG :: AB : AD :: AC (somme des antécédents) : AE (somme des conséquents).

Ainsi toutes les fois que deux lignes qui font un angle comme AC, AE, sont coupées par des parallèles BD, FG, CE, &c. elles le sont en parties proportionnelles ; & réciproquement, si les segments des lignes coupées sont proportionnels, les lignes qui les forment sont parallèles. Et si au lieu de deux lignes concurrentes on en prenoit un nombre quelconque, qui aboutissant au même point A fussent coupées par des parallèles 43.
BG, *bg*, elles le seroient en parties proportionnelles entr'elles & aux lignes entieres. Car on auroit A*b* : *b*B :: A*c* : *c*C :: A*d* : *d*D, &c, ou bien A*b* + B*b* : A*c* + C*c* :: *b*B : *c*C, &c.

104. REMARQUES. 1°. Si dans un triangle AH*h* on tire des 44.

FIG. parallèles D d, E e, F f, G g, &c. également distantes entr'elles, les segments qu'elles intercepteront sur un côté; sa-
44. voir, de, ef, fg, gh, seront égaux entr'eux; ainsi que les segments D E, E F, F G, G H, qui seront formés sur l'autre. Car abaissant du point d la perpendiculaire dp & du point e la perpendiculaire ep, on a $dp = ep$; puisque les parallèles D d, E e, F f sont également distantes. Donc les triangles dep, efp, outre qu'ils sont équiangles ont un côté égal; & par conséquent les deux autres côtés le sont aussi. Donc $de = ef = fg = gh$. Or, les segments D E, E F, F G, G H, sont proportionnels à ceux-là. Ils sont donc égaux entr'eux.

2°. Si des points D, E, F, G, on tire les droites D L, E M, F N, G O parallèles à A h, les quadrilatères D e, E f, F g, &c. seront des parallèlogrammes (88), & l'on aura D d = L e, E e = M f, F f = N g. Donc L E, M F, N G, O H, seront les différences respectives de ces parallèles. Or, ces différences sont égales; puisque les triangles D L E, E M F, &c. étant égaux en tout (93), donnent L E = M F = N G, &c. Donc *Si dans un triangle on tire des lignes parallèles à un côté, également distantes entr'elles, & prolongées jusqu'aux deux autres, elles formeront une progression Arithmétique.*

5. 105. THÉORÈME II. *Les triangles équiangles* A B C, B D E, *ont leurs côtés homologues proportionnels.*

DEM. Posés le côté B D sur l'alignement de A B: les deux triangles étant tournés du même côté de A D, prolongés D E & A C, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F; & alors puisque (hyp.) l'angle D B E = A, les droites B E, A F, seront parallèles. Donc l'angle B E D = F; or, B E D = A C B (hyp.); donc F = A C B, & partant la ligne F E sera parallèle à C B, ou bien (85) B E F C sera un parallèlogramme. On aura donc par rapport aux parallèles A F, B E (103); A B : B D :: F E ou C B : E D; & par rapport aux parallèles C B, D F; A B : B D :: A C : C F ou B E; & par conséquent A B : B D :: C B : E D :: A C : B E.

106. COROLL. Il suit de là que *si entre deux lignes qui font un angle*

AB, AC *on tire des parallèles* D *d*, E *e*, F *f*, *&c. elles seront* FIG.
proportionnelles aux parties AD, AE, AF, &c. *Qu'elles coupent* 44.
dans les deux lignes AB, AC. Car les triangles A D *d*, A E *e*, AF *f*, sont équiangles ; donc A D : A E :: A *d* : A *e* :: D *d* : E *e* : de même, A E : A F :: A *e* : A *f* :: E *e* : F *f*.

107. THÉORÈME III. *Toute ligne* A D *qui divise un an-* 46.
gle A *d'un triangle* B A C *en deux parties égales, coupe le côté opposé* B C *en parties proportionnelles aux côtés adjacents.*

DEM. Prolongés le côté A C vers E, & du point B tirés B E parallèle à A D : je dis qu'on aura, B D : B A :: D C : A C. Car le triangle A B E est yzocelle, puisque l'angle B E A = D A C son correspondant. Or, (hyp.) l'angle D A C = D A B, & l'angle D A B = A B E son alterne-interne. Donc B E A = A B E ; & par conséquent (81) B A = E A. Or, (103) BD : E A :: D C : AC. Donc BD : B A :: D C : A C.

108. PROBLÈME I. *Diviser une droite donnée* A B, *en trois* 47.
parties qui soient entr'elles dans le rapport de trois nombres commensurables quelconques, par exemple, 2, 3, 5.

SOL. Par le point A tirés la ligne indéfinie A X, qui fasse un angle avec A B : & puisque la somme des trois nombres donnés est 10, avec une même ouverture de compas, prenez en partant du point A, dix parties égales sur A X : de l'extrémité C de la dixième partie, tirés au point B la droite C B : de l'extrémité D du segment A D, qui contient deux de ces parties égales, tirés D G parallèle à B C : de l'extrémité du segment D E, qui en contient trois, tirés E H parallèle à B C. Je dis que A G : G H : H B :: 2 : 3 : 5. Car (103) A G : G H : HB :: A D : D E : E C. Or, par la construction, A D : DE : EC :: 2 : 3 : 5. Donc A G : G H : H B :: 2 : 3 : 5.

109. C'est par ce même moyen que l'on peut diviser une
ligne quelconque A B en un certain nombre de parties égales ; 48.
mais il est plus court de procéder ainsi. Sur l'extrémité A tirés la ligne indéfinie A P ; & par l'extrémité B, tirés la ligne B M parallèle à A P : si vous voulez diviser A B en six parties égales, prenez sur A P cinq parties égales quelconques en partant

FIG. de A : prenez aussi cinq parties sur B M égales aux précéden-
48. tes, & qui commencent en B ; alors les lignes M P, M P, seront parallèles (94) ; & puisque B M = M M, B N = N N : de même, puisque A P = P P, A N = N N ; & partant A B est divisée aux points N, N, &c. en six parties égales.

49. 110. PROBLÈME II. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* A, B, C.

SOL. Ayant tiré deux lignes indéfinies A X, A Z, qui se rencontrent au point A, prenez sur A Z la partie A G égale à A & la partie A E égale à B : prenez sur A X, la partie A H égale à C : joignez les points G & H, & tirés par E la ligne E F parallèle à G H ; je dis que A F sera la quatrième proportionnelle cherchée ; puisque l'on a (103) A G : A E :: A H : A F.

COROL. *On déduira de là un moyen d'avoir une troisième proportionnelle à deux lignes données.* Car si dans l'exemple précédent on suppose B = C, on a A E = A H, & la proportion devient ∺ A G : A E : A F.

CHAPITRE IX.

De quelques notions générales sur la similitude des figures, & de leur application aux triangles.

111. DÉFINITION. *DEUX figures, ou bien, en général, deux portions d'étendue quelconques, sont semblables, lorsqu'elles ne diffèrent entr'elles que par leur grandeur.* Ainsi tous les points, toutes les lignes, tous les angles, en un mot toutes les parties quelconques qui se trouvent dans l'une des figures semblables doivent se trouver dans l'autre ; car si cela n'étoit pas ainsi on pourroit, par cette seule différence & sans recourir à l'inégalité de grandeur, distinguer une figure de l'autre ; & dès lors elles ne seroient plus semblables (les lignes ou les parties quelconques de ces figures, qui gardent entr'elles les mêmes rapports

de

de grandeur & de ſituation, ſeront appellées *Homologues*). FIG.

112. COROLL. On conclura de la définition de la ſimilitude, 1°. *que deux lignes droites ſont toujours ſemblables.* Car le nombre, & la ſituation reſpective des parties étant les mêmes dans chacune, elles ne peuvent différer que par leur grandeur. Et par les raiſons contraires, *deux lignes courbes ne ſont pas toujours ſemblables.*

113. 2°. *Que les arcs qui contiennent le même nombre de degrés, ſont ſemblables.* Car s'ils appartiennent au même cercle, comme AB, BD, ils n'admettent pas même la différence de grandeur; bien qu'elle ne détruiſe pas la ſimilitude (111). Ils ſont donc alors non-ſeulement ſemblables, mais encore *identiques.* S'ils appartiennent à des cercles différents, comme AD, EF, qui ſont ſuppoſés concentriques; ils ſont chacun en même raiſon avec leurs circonférences: & de plus, tous les autres rapports, ſoit de grandeur, ſoit de ſituation, qui ſe trouvent entre les parties de AD, ſe retrouvent les mêmes entre les parties homologues de EF. Ces deux arcs ſont donc ſemblables; & l'on voit par les raiſons contraires, *que ceux qui ne contiennent pas le même nombre de degrés, ſont diſſemblables.* 50.

114. 3°. *Que deux angles ne peuvent être ſemblables, qu'autant qu'ils ſont égaux.* Car dans deux angles inégaux ACB, ACD, le côté AC n'eſt pas ſitué par rapport à BC dans l'un, ainſi que le même AC l'eſt par rapport à CD dans l'autre: de plus, les arcs AB, AD, qui les meſurent, ne ſauroient être en même raiſon avec la circonférence; & par conſéquent les angles inegaux peuvent être diſtingués l'un de l'autre, ſans recourir à leur grandeur; ou bien (111) ils ne ſont jamais ſemblables. Ce qui prouve que *dans deux figures rectilignes ſemblables* ABDEFG, *abdefg, les angles formés par les lignes homologues, ſavoir,* A *&* *a*, B *&* *b*, D *&* *d*, ABG, *abg, &c. ſont toujours égaux.* 51.

115. Il ſuit de là *que dans ces mêmes figures les côtés homologues ſont proportionnels entr'eux & proportionnels aux contours entiers.* Car ſi l'on applique l'angle *a* ſur ſon égal A, que le côté *ab* tombant ſur AB devienne AR & que *ag* ſoit AS, alors *bg*

FIG. se confondra avec RS, & l'on aura l'angle ARS = *abg*
51. = ABG. Donc SR & BG seront parallèles (38); & par conséquent (103) AB : AR ou *ab* :: AG : AS ou *ag*. Si l'on applique ensuite l'angle *b* sur B, & qu'on joigne *d*, *a*, ainsi que D, A; les droites *da*, DA, seront parallèles (*); & l'on aura BA : *ba* :: BD : *bd*; une pareille superposition de l'angle *d* sur D donneroit, BD : *bd* :: DE : *de*. Donc GA : *ga* :: AB : *ab* :: BD : *bd* :: DE : *de* ::, &c. Or, (*Alg.* 231) AB + BD + DE + &c. : *ab* + *bd* + *de* + &c. :: AB : *ab* :: BD : *bd*. Donc les contours sont proportionnels aux côtés homologues. Et comme la seule chose qui peut troubler la similitude dans deux polygones de la même espece, c'est ou leurs angles ou leurs côtés, on en conclura *que cette similitude aura oujours lieu dans ces sortes de figures, lorsque les angles seront égaux & les côtés homologues proportionnels.*

116. THÉORÈME I. *Les triangles équiangles sont nécessairement semblables.*

DEM. Ces sortes de triangles ont leurs côtés homologues proportionnels (105); donc ils sont semblables (115).

117. THÉORÈME II. *Les triangles qui ont leurs côtés homologues ou parallèles ou perpendiculaires, sont semblables.*

52. DEM. Si les triangles ABC, *abc*, ont leurs côtés homologues ou parallèles ou perpendiculaires, les angles A, *a*; B, *b*; C, *c*, sont égaux (50); donc les triangles sont équiangles & par conséquent semblables.

53. 118. THÉORÈME III. *Les triangles* ABC, *abc*, *qui ont les côtés homologues proportionnels, sont équiangles; & par conséquent semblables.*

DEM. Sur AB prenez AD = *ab*, & du point D tirez DE parallèle à BC. Les triangles ADE, ABC, sont équiangles.

Donc on a (105) AB : AD :: $\left\{\begin{array}{l} AC : AE \\ BC : DE \end{array}\right.$

tandis que (hyp.) AB : *ab* :: $\left\{\begin{array}{l} AC : ac \\ BC : bc \end{array}\right.$

(*) On n'a pas tracé ces lignes dans la figure pour éviter la confusion.

Or, ici toutes les raisons sont égales haut & bas, puisque FIG.
(Constr.) AD = *ab*. Donc AC : AE :: AC : *ac*, ou bien 53.
(*Alg.* 205) AE = *ac* : de même BC : DE :: BC : *bc*, ou bien DE = *bc*. & par conséquent le triangle *abc* est égal en tout à ADE (89); lequel étant équiangle & semblable à ABC, l'autre le sera aussi.

119. COROLL. *Il suffit donc pour déterminer la similitude de deux triangles de savoir ou que leurs côtés homologues sont proportionnels, ou que les angles opposés à ces côtés sont égaux.*

120. THÉORÈME IV. *Si deux triangles* ABC, *abc*, *ont deux angles égaux* A *&* *a*, *& les côtés autour de ces angles proportionnels, ils sont semblables.*

DEM. Dans AB prenez AD = *ab*, & du point D menez DE parallèle à BC; ce qui donnera (102) AB : AD ou *ab* :: AC : AE. Or, (hyp.) AB : *ab* :: AC : *ac*. Donc AE = *ac*; & par conséquent (93) le triangle *abc* est égal en tout à ADE; & puisque (117) celui-ci est semblable à ABC, l'autre le sera aussi.

121. COROLL. Il suit de là que *si deux lignes* AB, AC, 44.
qui font un angle en A, *sont coupées en parties proportionnelles par deux autres lignes* D*d*, E*e*, *celles-ci sont parallèles.* Car (hyp.) DE : AD :: *de* : A*d*, donc *Componendo*, AE : AD :: A*e* : A*d*; & les triangles AD*d*, AE*e*, outre l'angle commun en A, ont les côtés autour de cet angle proportionnels. Par conséquent ils sont semblables, & leurs angles correspondants AD*d*, AE*e*, sont égaux (114). Donc les lignes D*d*, E*e*, sont parallèles.

122. THÉORÈME V. *Si du sommet de l'angle droit d'un* 54.
triangle rectangle BAC, *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypothénuse* (*), *il se formera deux triangles* CAD, ABD, *semblables au grand* CBA; *& par conséquent semblables entr'eux.*

DEM. Les triangles CBA, CAD, ont un angle commun

(*) On appelle *Hypothénuse* le côté opposé à l'angle droit dans un triangle rectangle.

FIG. en C : & de plus un angle droit l'un en D, l'autre en A. Ils
54. ſont donc équiangles & par conſéquent ſemblables : il en eſt de même des triangles C B A & A B D, qui, outre l'angle commun en B, ont chacun un angle droit, l'un en D, l'autre en A. Donc chaque petit triangle eſt ſemblable au grand ; & par conſéquent ils ſont ſemblables entr'eux.

123. COROLL. I. *La perpendiculaire* A D, *abaiſſée du ſommet de l'angle droit, eſt moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens de l'hypothénuſe.* Car, (115) les triangles ſemblables A C D, A B D donnent, ∺ B D : A D : D C.

124. II. *Chaque côté du triangle rectangle* A B C *eſt moyen proportionnel entre l'hypothénuſe entière & le ſegment contigu.* Car les triangles ſemblables A B D, C A B donnent, ∺ B D : A B : B C ; & les triangles ſemblables C A D, C B A, donnent ∺ C D : A C : C B.

125. REMARQUE. Si le triangle A B C étoit ſuppoſé yzocelle, & que A D fut une perpendiculaire abaiſſée de ſon ſommet ſur la baſe B C, elle la partageroit en deux parties égales B D, C D ; puiſqu'alors les deux triangles A B D, A C D étant égaux en tout (93), donneroient B D = C D.

CHAPITRE X.

De quelques propriétés générales des polygones.

126. LES polygones ſe diviſent en *réguliers & irréguliers.* On appelle *réguliers*, ceux qui ont tous les angles & tous les côtés égaux ; & *irréguliers*, ceux qui ont ou des angles ou
55. des côtés inégaux. Ainſi le quadrilatère A B C D, dans lequel tous les angles ſont droits, & tous les côtés égaux eſt régulier, & on l'appelle en particulier *Quarré.* Si les quatre côtés étoient égaux, & les ſeuls angles oppoſés inégaux, comme
56. dans le quadrilatère E F G H, le polygone irrégulier ſeroit

appellé *Rhombe*; tandis qu'il ſeroit appellé *Lozange*, s'il n'y FIG.
avoit que les côtés oppoſés, & les angles oppoſés qui fuſſent
égaux comme dans C D H G. Enfin ſi dans un quadrilatère ir- 56.
régulier P Q S R, il n'y a que deux côtés parallèles P Q, 57.
S R, il ſera appellé *Trapèze*.

On appelle encore polygone *ſymétrique*, celui dont les côtés oppoſés ſont égaux & parallèles. Ainſi le quarré eſt régulier & ſymétrique à la fois, le parallèlogramme eſt irrégulier & ſymétrique.

Dans toute eſpèce de polygone on appelle angles *Saillants* ceux qui ont la pointe tournée en dehors de la figure; & angles *Rentrants*, ceux dont la pointe eſt tournée en dedans.

127. THÉORÈME I. *Si d'un angle quelconque* A, *d'un polygone* A B C D, *on tire des droites* A C, A D, *aux autres angles*: 58.
1°. *Le polygone ſera partagé en autant de triangles qu'il a de côtés, moins deux.* 2°. *S'il n'a pas d'angles rentrans, les angles de tous ces triangles vaudront en ſomme les angles du polygone.* (il ſuffit, pour la démonſtration, de voir la figure).

128. THÉORÈME II. *La ſomme de tous les angles, dans un polygone qui n'en a pas de rentrants, eſt* 180°. *multipliés par le nombre des côtés, moins deux.*

DEM. Car ſi dans le polygone A B C D E, on mène de A les droites A C, A D, aux autres angles, il ſe formera autant de triangles qu'il y a de côtés, moins deux; & en outre, tous les angles de ces triangles ſeront formés des angles du polygone. Or, chaque triangle vaut 180° (76). Donc leur ſomme vaudra 180°, multipliés par le nombre des côtés, moins deux.

129. COROLL. I. Appellant $\int$, la ſomme des angles d'un polygone & n le nombre de ſes côtés, on a donc $\int = 180° \times \overline{n - 2}$. Or, dans tout quadrilatère $n - 2 = 2$; donc $\int = 180° \times 2 = 360°$. Dans le pentagone $n - 2 = 3$, donc $\int = 180° \times 3 = 540°$. Dans l'exagone, $n - 2 = 4$, donc $\int = 720°$, &c.

130. II. Tous les angles étant égaux dans le polygone ré-

FIG. gulier, il s'ensuit que la valeur de chacun dans le quadrilatère régulier est $\frac{360°}{4} = 90°$: dans le pentagone $\frac{540°}{5} = 108°$; dans l'exagone $\frac{720°}{6} = 120°$, &c.

131. III. *Dans tout polygone qui n'a pas d'angles rentrants, la somme des supplémens de tous ses angles est* 360°. Car chaque angle saillant avec son supplément, vaut 180°. Donc appellant n le nombre des côtés, la somme des angles & de leurs supplémens sera $180° \times n$; tandis que celle des angles seuls n'est que $180 \times \overline{n - 2}$ (128). Soustrayant cette derniere somme de la première, leur différence, savoir, 360°, donnera la somme des supplémens des angles saillants.

132. THÉORÈME III. *Si dans un polygone symétrique*
59. ABDEFG, *on joint par des lignes droites les sommets des angles opposés* A *&* E, B *&* F, D *&* G: 1°. *Il se formera autant de triangles, qu'il y aura de côtés dans le polygone*: 2°. *Ceux qui seront appuyés sur les côtés parallèles, seront égaux.*

DEM. 1°. La première partie du Théorème est évidente à l'inspection de la figure.

2°. Je dis que le triangle BDC = FGC. Car puisque le polygone est symétrique, les côtés opposés BD, GF, sont égaux: d'ailleurs l'angle BDC = FGC, & l'angle DBC = CFG (38). Donc le triangle BDC = FGC (87). Et comme le même raisonnement peut se faire pour deux triangles quelconques ainsi formés, il s'ensuit que ceux qui sont appuyés sur des côtés parallèles, sont égaux.

133. COROLL. Il suit de là: 1°. *Que dans tout polygone symétrique les droites* DG, BF, AE, *tirées d'un angle à l'angle opposé, se coupent en parties égales*; & par conséquent au même point C, lequel est appellé pour cette raison le *centre* du polygone.

134. 2°. *Que toute autre ligne, comme* L l, *qui passant par le centre* C, *se termine aux côtés opposés* AG, DE, *est partagée également en* C. Car les triangles ACL, EC l, sont égaux en tout (87). Donc LC = lC.

135. 3°. Que si le polygone est symétrique & régulier, toutes FIG.
les lignes AE, BF, DG, qui joignent les angles opposés, 59.
sont égales, ainsi que leurs moitiés CA, CB, CD, CE, &c. & partant les triangles CED, CDB, &c. sont yzocelles & égaux en tout. *Donc les perpendiculaires* CP, C*p*, *abaissées du sommet de ces triangles sur leurs bases, sont égales.* (*)

136. 4°. *Que dans tout polygone symétrique les angles opposés quelconques* A *&* E *sont égaux.* Car par rapport aux parallèles AG, DE, on a l'angle GAE = AED; & en vertu des parallèles AB, EF, on a l'angle EAB = AEF. Or, l'angle A = GAE + EAB, & l'angle E = AED + AEF. Donc A = E.

137. L'on conclura de là, que puisque un parallèlogramme
ADBC est un polygone symétrique, les angles opposés 31.
A & B, D & C sont égaux; ou bien que la somme de deux angles de suite A + C, vaut celle des deux autres D + B. Or, (128) tous ces angles valent en somme 360°. Donc A + C, ou D + B = 180°; c'est-à-dire, que *dans un parallélogramme les angles de suite sont suppléments l'un de l'autre* (26).

138. THÉORÈME IV. *Tout polygone régulier peut être inscrit & circonscrit à un cercle.*

DEM. 1°. Puisque les lignes *ae*, *bf*, *dg*, se coupent au 60.
point C en parties égales (132) il s'ensuit que si du centre C & avec une de ces parties C*a*, on décrit une circonférence de cercle, elle passera par les sommets de tous les angles *a*, *b*, *d*, &c. du polygone; le quel sera par conséquent inscrit au cercle.

2°. Si du centre C on abaisse sur les côtés du polygone ABDEFG, des perpendiculaires, comme CP, C*p*, elles seront égales (134). Et par conséquent si du point C, on décrit un cercle avec une de ces perpendiculaires, ces lignes en seront les rayons; & les côtés du polygone étant perpendi-

(*) Ces sortes de perpendiculaires sont appellées les *Apothèmes* ou les *Rayons droits* du polygone; & les droites CA, CB, en sont les *rayons Obliques*.

FIG. culaires à l'extrémité de ces rayons, feront des tangentes de ce même cercle (58). Donc le polygone fera alors circonfcrit au cercle.

139. COROLL. I. Puifque tous les côtés d'un polygone régulier, infcrit dans ce cercle, fous-tendent des arcs égaux, on aura la valeur de chacun de ces arcs en divifant 360° par le nombre des côtés du polygone. Ainfi le côté du triangle équilatéral fous-tend le tiers de la circonférence ou 120° : le côté du quarré fous-tend 90° ; & par conféquent pour infcrire le quarré, il fuffit de joindre les extrémités de deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre ; le côté du pentagone regulier fous-tend un arc de 72°. 2° : Le côté de l'exagone, un arc de 60°. &c.

140. II. *Si dans un cercle l'on infcrit un exagone regulier a b-*
60. *d e f g, un de fes côtés vaudra le rayon du cercle.* Car le triangle C *e d*, eft yzocellé (134) : & de plus, l'angle en C vaut 60° (139). Donc chacun des autres angles en *c* & en *d* fera auffi de 60° ; & par conféquent le triangle yzocelle C *c d* fera équilatéral, ou bien le côté C *d* = C *e*, qui eft le rayon du cercle circonfcrit.

141. L'on conclura de là que *le périmètre de l'exagone régulier eft au diamètre du cercle circonfcrit, comme* 3 *eft à* 1. Or, la circonférence du cercle eft plus grande que le périmètre d'un polygone infcrit. Donc *la circonférence du cercle eft au diamètre, dans un rapport plus grand que celui de* 3 *à* 1.

142. REMARQUE. Cette propriété de l'exagone régulier nous fuffit pour divifer en trois parties égales la circonférence entière, fa moitié, fon quart, & tout autre arc qui fera dans cette progreffion fou-double. Car portant fix fois le rayon du cercle fur la circonférence, on y infcrit d'abord l'exagone régulier, dont la moitié *a b d e* partage la demi-circonférence en trois arcs égaux. Si l'on joint par des lignes droites les points *a*, *d*, *f*, on infcrit le triangle équilatéral qui partage la circonférence entière en trois parties égales. Si du centre *c* on abaiffe fur les côtés de l'exagone des perpendiculaires

pendiculaires C P, C p, &c. On partagera les arcs sous-tendus FIG
en deux parties égales. Menant des droites par les points de division P, d, p, on inscrira un dodécagone régulier; & par conséquent on divisera la circonférence entière en douze arcs égaux, ou bien le quart de cette circonférence en trois parties égales. Par une méthode semblable on diviseroit encore la huitième, la seizième, la trente-deuxième partie de la circonférence en trois arcs égaux; mais la ligne droite & le cercle ne pouvant suffire pour faire une pareille division d'un arc quelconque, on peut dire que *le fameux problème de la trisection de l'angle ne sauroit être résolu par la Géomètrie élémentaire.* 60.

143. THÉORÈME V. *En inscrivant dans un cercle des polygones réguliers, dont le nombre des côtés croisse toujours en progression double, on peut rendre la différence du cercle au polygone plus petite que toute quantité assignable.*

DEM. Pour que cette différence puisse devenir plus petite que toute quantité assignable, il suffit qu'elle diminue plus que de la moitié, chaque fois qu'on doublera le nombre des côtés du polygone régulier inscrit. Or, cela arrivera nécessairement ainsi. Car si C T est le rayon droit du polygone, 61.
prolongé jusqu'à la circonférence du cercle, & que sur la tangente au point T on prenne Q R = A B, le quadrilatère A B R Q sera un parallèlogramme (94) plus grand que le segment A T B S. Donc le triangle A T B, moitié de ce parallèlogramme (90), sera plus grand que la moitié du segment A T B S. Or, en doublant le nombre des côtés du polygone inscrit on ôte de ce segment circulaire le triangle A T B; donc on le diminue de plus que de la moitié : & la même chose arrivant pour tous les segments, qui, pris en somme font la différence du cercle au polygone, on en conclura que cette différence pourra devenir plus petite que toute quantité assignable.

144. COROLL. I. *Le cercle est donc la limite de laquelle s'approchent toujours, sans jamais y atteindre, des poligones réguliers inscrits, dont le nombre des côtés croît en progression double.* Et

FIG. c'est pour cette raison qu'on *peut considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.* Or, dans cette espèce de poligone, appellant s la somme de tous les angles, on a $s = 180° \times (\infty - 2)$, qui revient à cette expression $s = 180° \times \infty$. Donc chacun de ces angles sera $\frac{180° \times \infty}{\infty}$, ou 180°.

145. II. *Tous les cercles sont donc des figures semblables* (115). Ainsi leurs circonférences, leurs diamètres, leurs rayons, leurs arcs d'un même nombre de degrés, &c. pouvant être regardés comme des lignes homologues de figures semblables, forment des quantités proportionnelles.

CHAPITRE XI.

Dans lequel on expose quelques propriétés du cercle & des lignes droites qui s'y rapportent.

146. THÉORÈME I. *LES parties de deux cordes qui se coupent dans le cercle, sont réciproquement proportionnelles.*

62. DEM. Si par des lignes droites on joint les points E & C, H & I, le triangle E C D sera semblable au triangle H D I; puisque outre les angles égaux en D, les angles E & H ont la même mesure, savoir, $\frac{1}{2}$ C G I (68). On aura donc E D : D H :: C D : D I.

147. COROLL. I. Il suit de là *que si une corde* C H *est divisée également par une autre* E I, *sa moitié sera moyenne proportionelle entre les deux segmens ou parties de celle-ci.* Car alors D H = C D; & la proportion précédente devient ∺ E D : D H : D I. Or, si d'un point quelconque de la circonférence on tire une perpendiculaire sur un diamètre, comme R P sur F G, elle sera la moitié de la corde R S (55); & le diamètre F G pourra être regardé comme une autre corde

qui divise la première également au point P. Donc on aura FIG.
∺ FP : RP : PG. C'est-à-dire, *qu'une perpendiculaire abaissée de la circonférence du cercle sur un de ses diamètres est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de ce diamètre.* 62.

148. Par cette propriété *on peut toujours trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* A *&* B. Car si l'on réunit ces deux lignes en une seule, que je suppose F G : que de son point du milieu B, pris pour centre, on décrive une circonférence avec la moitié F B : & que du point P, où se réunissent A & B, on éleve jusqu'à cette circonférence la perpendiculaire P R, elle sera la moyenne proportionnelle cherchée. Car ∺ FP : PR : PG. Or, par la construction, FP = A, & PG = B. Donc ∺ A : PR : B.

149. THÉORÈME II. *Les cordes de deux arcs* SFR, *sfr*, *qui contiennent le même nombre de degrés, sont proportionnelles à ces arcs.* 63.

DEM. Si après avoir trouvé les centres B, *b*, de ces deux arcs (63), on tire les rayons qui joignent leurs extrémités, les triangles BSR, *bsr*, seront semblables; puisque outre les angles égaux en B & *b*, ils auront les côtés autour de ces angles proportionnels (145). Donc SR : *sr* :: SB : *sb* :: la circonférence décrite avec le rayon SR, est à la circonférence décrite avec le rayon *sr* :: comme l'arc SFR, partie de la première, est à l'arc *sfr*, partie semblable de la seconde.

150. REMARQUE. *Si dans un même cercle on prend des arcs inégaux, les cordes ne seront pas proportionnelles à ces arcs.* Car si les arcs SEF, FGR, sont égaux, l'arc SFR sera double de chacun de ceux-là; tandis que la corde SR est moins que double de SF ou de FR (6); ce qui prouve que dans le même cercle les cordes varient en plus petite raison que les arcs. Et c'est pourquoi la corde de 60° étant égale au rayon (140), celle d'un arc double, c'est-à dire, de 120°, est moindre que le diamètre.

151. THÉORÈME III. *Si on mene deux tangentes* T*t*, V*u*, *au diamètre* FG; *& qu'après l'avoir divisé en un nombre impair* 64.

FIG. *de parties égales, on éleve par les points de division* P, P, *&c. des cordes perpendiculaires* D *d*, B *b*, A *a*, E *e*; *je dis que de tout*
64. *les arcs interceptés entre deux cordes voisines, les plus petits se trouveront entre celles, qui comme* A *a*, B *b*, *seront également éloignées du centre* C; *& les plus grands, entre une tangente* T *t ou* V *u*, *& la corde voisine* D *d ou* E *e*.

DEM. 1°. Les arcs B X A, *b x a*, sont les plus petits. Car les cordes A *a*, B *b*, étant également éloignées du centre C, sont égales (54); & par conséquent l'arc B F *b* = A G *a*: d'ailleurs A X B = *a x b* (57); donc B F *a* = B G *a*, ou bien chacun de ces arcs vaut la demi-circonférence; & par conséquent l'angle inscrit B A *a* est droit (68); ou bien la corde B A est perpendiculaire sur les deux parallèles A *a*, B *b*. Mais les autres angles inscrits D B *b*, F D *d*, n'étant pas appuyés sur une demi-circonférence ne peuvent point être droits. Donc B A est la seule corde perpendiculaire entre les parallèles également éloignées A *a*, B *b*, D *d*, T *t*; & par conséquent elle est plus courte que toute autre corde B D, D F. Donc l'arc B X A, qu'elle sous-tend, est plus petit que tout autre arc renfermé entre deux de ces parallèles.

2°. L'arc D Y F ou son égal E Z G, est le plus grand de tous. Car l'angle F D *d* est plus petit que tout autre angle inscrit B, ou A; puisqu'il est appuyé sur un plus petit arc. Donc D F est la corde la plus oblique, & par conséquent la plus longue qu'il y ait entre les parallèles D *d*, B *b*, A *a*, &c. Donc l'arc D Y F qu'elle sous-tend, ou son égal E Z G, est le plus grand de tous ceux qui sont interceptés entre ces parallèles.

152. THÉORÈME IV. *Si dans deux cercles concentriques on tire deux parallèles* AB, CD, *l'arc* B C *du grand cercle ren-*
65. *fermé entre ces parallèles, sera d'un moindre nombre de degrés, que l'arc b c du petit cercle, renfermé entre ces mêmes parallèles.*

DEM. Ayant joint les points A & C, tirés par *a* la ligne *a e* parallèle à A C. L'angle B A C a pour mesure $\frac{1}{2}$ B C, & son égal *b a e* a pour mesure $\frac{1}{2}$ *b e*. Donc il y a autant de

degrés & de minutes dans $\frac{1}{2}$ B C, que dans $\frac{1}{2}$ *b c*. Et par con- FIG.
séquent il y en a moins dans $\frac{1}{2}$ B C, que dans $\frac{1}{2}$ *b c*; ou dans 65.
B C, que dans *b c*.

153. THÉORÈME V. *Si deux sécantes partant d'un même point extérieur* S, *vont se terminer à la partie concave de la cir-* 66.
conférence ; elles seront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, ou bien on aura S V : S R :: S P : S O.

DEM. Si des points d'intersection O & P on mene les cordes O R, P V, on aura les triangles semblables S P V, S O R; parce que outre l'angle commun en S, les angles en R & en V sont appuyés sur le même arc O P. Donc on a S V : S R :: S P : S O.

154. COROLL. I. Si la sécante S R tournant sur le point S s'éloigne du centre, les points d'intersection P & R s'approcheront de plus en plus ; de façon qu'ils se réduiront au seul point T, lorsque la sécante s'évanouissant deviendra la tangente S T. On aura donc alors, S P = S R = S T. Et la proportion ci-dessus deviendra ÷ S V : S T : S O. D'où l'on déduit, *que si la tangente & la sécante partent d'un même point hors du cercle, celle-la sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière & sa partie extérieure.*

155. COROLL. II. Si avec le côté C B d'un triangle quelconque A C B, pris pour rayon, on décrit une circonférence de cercle : qu'on prolonge le côté A C jusqu'en D: & si le triangle est 67&68.
obtusangle (*fig.* 68.) qu'on prolonge le côté A B jusqu'en F, on aura dans tous les cas, A B : A D :: AE : A F. Or, A D = A C + C B, A E = AC — C B; & si C P est une perpendiculaire abaissée de l'angle C sur le côté opposé A B, on aura A F = A P — P B (*fig.* 67.), & A F = AP + P B (*fig.* 68.). D'où l'on pourra conclurre : *que dans un triangle quelconque un côté* (A B) *est à la somme des deux autres* (A C + C B), *comme leur différence* (A C — C B) *est à la différence ou à la somme des segments* (A P ∓ P B), *formés sur ce côté ou sur son prolongement, par la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé* (à la différence, si cette perpendicu-

FIG. laire tombe en dedans du triangle (*fig.* 67.) ; & à la somme, si cette perpendiculaire tombe en dehors (*fig.* 68)).

69. 156. PROBLÈME I. *Partager une droite donnée* A B *en moyenne & extrême raison.* *

SOL. Sur l'extrêmité A élevés la perpendiculaire AC, qui soit égale à $\frac{1}{2}$ AB : du point C, avec le rayon C A, décrivez la circonférence A E F : & ayant joint les points C & B, prolongés B C, jusqu'en F : prenez enfin sur A B la partie B D = B E ; je dis que la ligne A B sera divisée en moyenne & extrême raison au point D, c'est-à-dire, que l'on aura ∺ B A : B D : A D.

DEM. 1°. Par la construction B D = B E & F E = A B, puisque la ligne donnée A B, ainsi que le diamètre F E, sont chacun doubles de C A.

2°. Par ce que nous avons vu ailleurs (154) B F : B A :: B A : B D. Donc B F — B A : B A — B D :: B A : B D. Or, B F — B A = B E ou B D ; B A — B D = A D ; donc B D : AD :: B A : B D, ou bien ∺ B A : B D : A D.

157. PROBLÈME II. *Construire un triangle yzocelle dont chaque angle à la base, soit double de celui du sommet.*

SOL. Supposés la ligne A B divisée au point D en moyenne & extrême raison : de ce point & avec le plus grand segment A D décrivez un arc de cercle : du point B & d'un rayon B C = A D, décrivez du même côté un arc qui coupera le premier en C : joignez les points A, B, C, & vous aurez le triangle cherché. Car (constr.) D A = D C = B C. Donc le triangle A D C est yzocelle ; & de plus l'angle extérieur B D C = A + A C D, ou bien B D C = 2 A. Or (120) le triangle B D C est semblable au triangle B C A (puisque l'angle B est commun, & qu'ayant (hyp.) B D : D A :: D A : B A, on aura B D : B C :: B C : B A). Donc le triangle BDC

* Une quantité est partagée *en moyenne & extrême raison*, lorsqu'on la divise en deux parties, dont la plus grande est moyenne proportionnelle entre la plus petite & la quantité entière.

étant yzocelle (constr.) B C A le sera aussi ; & chaque angle à la base du premier ; savoir, B ou B D C valant 2 A ; chaque angle à la base du second ; savoir, B ou C, vaudra aussi 2 A, c'est-à-dire, qu'ils seront chacun doubles de celui du sommet. FIG. 70.

158. PROBLÈME III. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle.*

SOL. Construisez sur le rayon B A de ce cercle un triangle yzocelle A B C, qui ait chaque angle à la base double de celui du sommet (156) : portés dix fois la base B C de ce triangle sur la circonférence du cercle, & vous aurez le décagone inscrit. 71.

Car alors $A = \frac{1}{5} 180°$, tandis que B, ainsi que $C = \frac{2}{5} 180°$. Donc $A = 36°$. c'est-à-dire, que B C est la corde d'un arc de 36°. ou le côté du décagone.

159. COROLL. *On déduira de là un moyen d'inscrire dans le cercle un pentagone régulier.* Car si on joint par une ligne droite C E, les extrêmités E & C de deux côtés contigus du décagone, cette droite sous-tendra un arc de 72°, & sera par conséquent le côté du pentagone régulier inscrit C E F G H.

160. REMARQUES. Il faut observer 1°. *Que le pentagone & le triangle équilateral suffisent pour inscrire dans le cercle le quindécagone régulier.* Car l'arc B H D sous-tendu par un côté du triangle équilatéral, vaut $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{15}$ de la circonférence ; tandis que l'arc B H G sous-tendu par les deux côtés du pentagone vaut $\frac{2}{5}$ ou $\frac{6}{15}$ de la circonférence. Donc l'arc D G vaudra $\frac{1}{15}$, c'est-à-dire, que sa corde sera le côté du quindécagone. 72.

2°. *Qu'on peut diviser géometriquement la circonférence du cercle de trois en trois degrés.* Car en doublant le nombre des côtés (138) on peut avec le quindécagone inscrire un poligone régulier de 120 côtés ; & alors chacun sous-tendra des

FIG. arcs de trois degrés. On le peut encore en inſcrivant dans le même cercle un polygone de 20 côtés & un autre de 24,
72. qui ayent le ſommet d'un angle au même point B. Car ſi B D étoit le côté du premier, & B H celui du ſecond, l'arc B H D ſeroit de 18°, & l'arc B H de 15°. Donc leur différence D H ſeroit de 3°, & la corde de cet arc, portée ſur la circonférence, la diviſeroit en 120 arcs de trois degrés chacun.

SECTION

SECTION SECONDE.

Des Surfaces.

CHAPITRE PREMIER.

Des rapports & de la mesure des surfaces planes.

160. NOUS avons dit plus haut (2) que l'étendue considérée avec deux dimensions seulement, est ce qu'on désigne en Géométrie par le mot de *surface*; & qu'alors une de ces dimensions est appellée sa *longueur*, & l'autre sa *largeur*. FIG.

Les surfaces sont *planes* ou *courbes*. On appelle *Planes*, celles sur lesquelles une ligne droite peut s'appliquer en tout sens en se confondant avec elles; & *courbes*, celles où l'on ne peut point faire une semblable application.

261. Mesurer une quantité c'est determiner combien de fois elle en contient une autre, qui pour cette raison est appellée sa *mesure* ou son *unité*. Cette unité doit être de la même espèce que la quantité mesurée, puisqu'entre des quantités hétérogènes, on ne peut concevoir aucun rapport de grandeur. Ainsi une surface ne sauroit être mesurée que par une surface. Mais comme parmi les différentes espèces de figures qui pourroient servir à cet objet, la plus propre est celle qui a ses angles droits & sa hauteur égale à sa base, on a pris le quarré de préférence à toute autre figure, pour mesurer les surfaces. C'est pourquoi *quarrer* une surface ne désigne autre chose que la mesurer; ou bien determiner combien de fois elle contient un quarré d'une grandeur donnée, lequel est appellé *pied quarré*, *toise quarrée*, &c. suivant que la longueur d'un de ses côtés est d'un *pied courant*, d'une *toise courante*, &c.

FIG. 162. THÉORÈME I. *Les surfaces de deux triangles (& par conséquent celles de deux parallèlogrammes) qui ont des bases égales, sont entr'elles comme leurs hauteurs.*

73. DEM. Soient les deux triangles ABC, DEF, dont les bases BC, EF, sont égales, & les hauteurs AH, DI, inégales: soit CG = BH & FK = EI. Alors on aura GH = KI, & comme ces lignes peuvent être prises pour les hauteurs des triangles AGH, DKI, on aura (101), AGH : DKI :: AH : DI. Or (98), AGH = ABC, & DKI = DEF; donc ABC : DEF :: AH : DI.

163. THÉORÈME II. *Si les bases de deux parallèlogrammes S & s sont entr'elles comme les nombres B, b: leurs hauteurs comme les nombres H, h; & que les unes & les autres varient à la fois, on aura, S : s :: B × H : b × h.*

DEM. Si les bases seules étoient différentes, on auroit (101), S : s :: B : b; & si c'étoit les hauteurs, il viendroit (162) S : s :: H : h. Donc (*Alg.* 216 & 237) les unes & les autres variant à la fois, on aura, S : s :: B × H : b × h.

164. COROLL. Il suit de là que si le parallèlogramme s est un quarré, & qu'on le prenne pour unité de surface; tandis que sa base ou sa hauteur servent d'unité de longueur, pour mesurer la base & la hauteur de S; on aura, S : s :: B × H : 1. C'est-à-dire que *exprimant le rapport de la base & de la hauteur de S par celui des deux nombres B, H, qui ont la base ou la hauteur de s pour unité, on sera assuré que le parallèlogramme S contient autant de fois sa mesure s, que le produit B × H contient d'unités.* Ce qui s'exprime en disant, *que la surface d'un parallèlogramme est égale au produit de sa base multipliée par sa hauteur.* *

165. SCHOLIE. Pour rendre cette vérité plus manifeste,
74. supposons que le quarré *a c* doive servir d'unité, pour mesurer le

* On voit assez que cette proposition, prise dans le sens littéral, est absurde; car il est impossible (*Arith.* 29) & de multiplier une ligne par une ligne, & d'avoir une surface pour produit. Ainsi on doit chercher le vrai sens de cet énoncé dans ce qui le précède, & le regarder comme une expression abregée, qu'on n'emploie ici que pour éviter une trop longue circonlocution.

rectangle A C. Suivant ce que nous avons dit, on doit d'abord chercher le nombre B, qui exprime combien de fois la base A B contient son unité *a b*, & je le suppose ici 4 : ensuite le nombre H, qui exprime combien de fois la hauteur A D contient cette même unité *a b*, ou son égale *a d*; je suppose que ce nombre soit 3; & alors 4 × 3 ou bien 12, exprimera combien de fois l'unité de surface *a c* est contenue dans A C. En effet si on prend sur A B quatre parties égales à *a b*, & trois sur A D; & que par les points de division E, F, G, H & I, on éléve des perpendiculaires E *e*, F *f*, G *g*, H *h*, I *i*, on formera dans le retrangle A C douze quarrés, dont chacun sera égal à *a c*. FIG. 74.

166. COROLL. *Pour avoir la surface d'un triangle quelconque, il faut donc prendre la moitié du produit de sa base multipliée par sa hauteur*; puisqu'il est toujours la moitié d'un parallèlogramme de base égale & de hauteur égale (90).

167. THÉORÈME III. *La surface d'un trapèze* P Q R S *doit être exprimée pour le produit de la perpendiculaire* P H, *tirée entre les côtés parallèles* P Q, S R, *multipliée, on par la demi-somme de ces côtés, ou par la ligne* M N, *tirée du milieu de* P S *parallèlement à* P Q. 57.

DEM. 1°. Le triangle P S R = P H × $\frac{1}{2}$ S R, & le triangle P Q R = P H × $\frac{1}{2}$ P Q. Donc la surface du trapèze, ou bien la somme de ces deux triangles, sera P H × $\frac{S R + P Q}{2}$.

2°. Le trapèze pouvant être pris pour un triangle tronqué, dans lequel les parallèles P Q, M N, S R, sont à égales distantances, on a (104), ÷ S R. M N. P Q. Donc (*Alg.* 262.) M N = $\frac{S R + P Q}{2}$. Et par conséquent la surface du trapèze pourra encore être exprimée par P H × M N.

168. THÉORÈME IV. *La surface d'un polygone régulier* A B D E F G, *est exprimée par la moitié du produit de son contour multiplié par son apothème.*

DEM. Si on joint les sommets des angles opposés du poly- 60.

FIG. 60. gone par les droites AE, BF, DG, on le partagera en triangles yzocelles ACB, BCD, &c. qui ont tous la même hauteur, savoir, l'apothème ; & dont les bases forment le contour entier du polygone. Donc désignant l'apothème par p, on a, $ACB = \frac{1}{2}p \times AB$: $BCD = \frac{1}{2}p \times BD$: $DCE = \frac{1}{2}p \times DE$, &c. Donc la somme de ces trois triangles ou la surface du polygone $= \frac{1}{2}p\ (AB + BD + DE + EF + FG + GA)$.

169. Coroll. I. Puisque le cercle peut être consideré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés (144), & que sous ce rapport il a le rayon pour apothème ; il s'ensuit que *sa surface est égale au produit du rayon multiplié par la demi-circonférence* ; ou bien, *à celle d'un quarré, dont le côté seroit moyen proportionnel entre le rayon & la demi-circonférence* ; ou bien encore, *à celle d'un triangle qui auroit le rayon pour hauteur, & la circonférence pour base.*

170. Coroll. II. La surface d'un secteur de polygone régulier qui ne contient que des triangles entiers, comme ABDC (& par conséquent celle d'un secteur circulaire) est égale *à la moitié du produit de l'apothème multiplié par la partie du contour qui termine ce secteur.* D'où il suit que pour avoir la surface du segment circulaire *b p d*, il suffiroit de retrancher de celle du secteur *c b p d* la surface triangulaire *c b d*.

171. Scholie. I. Si le polygone dont on cherche la surface n'est point régulier, il faut le partager en triangles, & prenant ensuite la surface de chacun en particulier, la somme de ces surfaces donnera celle du polygone entier.

172. Scholie. II. D'après tout ce que nous avons dit jusqu'ici, on voit que le fameux problême de la quadrature du cercle consiste à trouver exactement la surface de cette figure, ou bien à faire voir qu'elle ne peut point être trouvée ; car l'une & l'autre de ces deux manières resoudroit également la question. Et comme cette surface seroit connue (169), si l'on trouvoit le rapport exact de la circonférence à une ligne droite donnée, c'est à la recherche de ce rapport que les Géometres

le sont attachés. Certains ont prétendu que sa valeur est inassignable, & qu'ainsi la quadrature du cercle est impossible; d'autres au contraire ont cru ce rapport assignable, & ont fixé des limites plus ou moins rapprochées, entre lesquelles il se trouve. Ainsi Archimède a fait voir que le diamétre étant 7, la circonférence est entre 21 & 22, mais plus près de 22 que de 21. Adrien-Metius a donné un rapport plus approché, en disant que le diamétre étant 113, la circonférence est entre 354 & 355, mais plus près de ce dernier nombre que de l'autre. Ludolph en a approché jusqu'à la 35me. décimale; M. de Lagny a encore porté cette approximation plus loin dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, de l'année 1719, en disant, que le diamétre étant 1, la circonférence sera exprimée par 3, 141592 &c. jusqu'à 127 caractéres décimaux; de façon qu'il ne s'en faudra pas d'une unité décimale du 127e. rang qu'on n'ait par-là la véritable valeur de la circonférence. Enfin Neuton, Leybnits & d'autres grands Géométres (car ne n'est qu'à ceux-là qu'il appartient d'esperer quelques succès dans cette recherche) ont trouvé différentes approximations, parmi lesquelles nous nous nous bornons à rapporter la suivante, dont l'invention est attribuée à Leybnits, quoique d'autres Géometres l'aient réclamée dans le temps; savoir, que le quarré du rayon étant 1, le quart du cercle sera $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. Ainsi à l'infini en approchant toujours de sa valeur alternativement en dessus & en dessous. FIG.

173. THÉORÈME V. *Dans tout triangle rectangle* A B C, *le quarré* B G *construit sur l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés* A D + A E, *construits sur les deux côtés.* * 75.

DEM. Par le point A, tirez la ligne A H parallèle à C G, & joignez les points A & G, A & F; joignez encore les points D & B, C & E. Cela posé, le triangle D C B = A C G (93); car l'angle en C est égal dans chacun; puisque outre un angle

* Ce Théorème important est appellé le Théorème de Pytagore, parce que ce célébre Philosophe en est l'inventeur.

FIG. 75. droit, il contient la partie commune A C B, & de plus les côtés autour de cet angle, savoir, D C & A C, C B & C G, sont égaux. Or le triangle D C B est la moitié du quarré D A, & le triangle A C G est la moitié du parallèlogramme C H (90). Donc le quarré D A = C H : & par un raisonnement semblable on prouvera que A E = P F. Ou bien que D A + A E = C F.

174. Coroll. Il suit de là que si on donne en nombres le quarrré de l'hypothénuse $= c^2$, & le quarré d'un côté $= b^2$, désignant le nombre qui exprime l'autre côté par a, on auroit $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Et connoissant en nombres les quarrés des deux côtés a^2, b^2, pour trouver l'expression numérique de l'hypothénuse c, on auroit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Donc si les deux côtés sont égaux, ou bien si $a = b$, il viendra en substituant a pour b, $c = \sqrt{2aa} = a\sqrt{2}$, c'est-à-dire, qu'alors le nombre qui exprime l'hypothénuse est *incommensurable* avec a ou b. Or, dans ce cas le triangle rectangle est la moitié d'un quarré, & l'hypothénuse en est la diagonale. Donc *les nombres qui expriment les côtés d'un quarré, sont toujours incommensurables avec celui qui en exprime la diagonale.*

175. Théorème VI. *Deux surfaces quelconques* S, s, *sont entr'elles, comme les produits des nombres dont les rapports expriment ceux de leurs élémens lineaires.*

Dem. Supposons que u soit l'unité de surface, & que ses élémens lineaires soient l'unité de longueur; tandis que le rapport des deux nombres B & H, exprime celui des élémens lineaires de S; & que le rapport des deux nombres b, h, exprime celui des élémens de s; ce qui donnera $\left\{ \begin{array}{l} S : u :: BH : 1 \\ u : s :: 1 : bh \end{array} \right\}$ d'où l'on conclura, *ex æqualitate ordinata*, que $S : s :: BH : bh$.

176. Coroll. I. Il suit de là que *si deux surfaces sont égales, leurs élémens lineaires sont en raison réciproque.* Car si $S = s$, $BH = bh$. Donc $B : b :: h : H$. (On voit évidemment que l'inverse est encore vraie, c'est-à-dire, que si $B : b :: h : H$, on à $S = s$, puisque alors $BH = bh$). Or, les élémens lineaires qui déterminent la surface d'un triangle ou d'un parallèlogramme sont

la base & la hauteur (164). Donc *deux triangles ou deux parallè-* FIG.
logrammes égaux ont leurs bases en raison inverse de leurs hauteurs, & réciproquement.

177. COROLL. II. Lorsque deux figures S, s, sont semblables toutes leurs dimensions homologues sont proportionnelles (115). Donc $B : b :: H : h ::$ une dimension quelconque de la première, est à une dimension homologue de la seconde. Et par conséquent (*Alg.* 216) la proportion $S : s :: BH : bh$, devient $S : s :: B^2 : b^2 :: H^2 : h^2$. C'est-à-dire, que *deux figures semblables sont entr'elles, comme les quarrés des nombres, qui expriment leurs dimensions homologues quelconques.*

178. Il suit de là que si sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC, on construit trois polygones semblables, de telle 76.
manière que les lignes AC, CB, BA, en soient des dimensions homologues, la surface S de celui qui sera construit sur l'hypothénuse vaudra la somme des surfaces P + Q des deux autres. Car désignant l'hypothénuse par le nombre A, un côté par le nombre B & l'autre par le nombre C, on aura (177)

$$\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} S : P :: A^2 : B^2 \\ S : Q :: A^2 : C^2 \end{array} \right\}$$

Donc (*Alg.* 232) $2S : P + Q :: 2A^2 : B^2 + C^2$

Ou bien..... $S : P + Q :: A^2 : B^2 + C^2$

Or, (173) $A^2 = B^2 + C^2$. Donc $S = P + Q$.

179. On peut déduire de là la quadrature des espaces circulaires, connus sous le nom de *Lunulles d'Hypocrate* (*). Car si sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC, pris pour 77.
diamétres, on décrit trois demi-cercles ALB, AEC, CDB, la surface de celui qui sera décrit sur l'hypothénuse vaudra la somme des surfaces des deux autres (178). Donc ce qui ne sera pas commun de part & d'autre sera égal; ou bien on aura AECM + CDBL = ACB, c'est-à-dire que *la surface des deux lunulles circulaires sera égale à celle du triangle rectangle, sur lequel elles sont construites.*

(*) Hypocrate étoit un Géomètre Grec, connu par cette découverte.

FIG. 78. 180. THÉORÈME VII. *Dans un triangle rectangle* A B D, *le quarré formé sur l'hypothénuse (qu'on désigne par* A D^2) *est aux quarrés* A B^2, B D^2, *formés sur les côtés, comme l'hypothénuse est à chacun de ses segments* A P, P D, *formés par une perpendiculaire* B P, *abaissée du sommet de l'angle droit.*

DEM. Les triangles A B D, A B P, B P D, sont semblables; donc ils sont comme les quarrés A D^2, A B^2, B D^2 : d'ailleurs ces triangles ont une même hauteur B P, donc ils sont comme leurs bases A D, A P, P D. Donc A D^2 : A B^2 : B D^2 :: A D : A P : P D.

181. COROLL. L'on conclura de là que les quarrés construits sur deux cordes A B, A C, menées de l'extrémité d'un diamètre AD, sont entr'eux comme les portions correspondantes du diamètre, savoir A P, A Q, interceptées entre le point A & les perpendiculaires B P, C Q, abaissées de l'autre extrémité de ces cordes sur le diamètre. Car les triangles A B D, A C D, étant rectangles (68), on a (180)... $\begin{cases} AB^2 : AD^2 :: AP : AD \\ AD^2 : AC^2 :: AD . AQ \end{cases}$

Donc (*ex æqualitate ordinata*) . . . . $\{ AB^2 : AC^2 :: AP : AQ$

182. PROBLÈME I. *Réduire une figure rectiligne quelconque* A B C D E *à une autre d'égale surface, & qui ait un angle de moins.* 79.

SOL. Supposons qu'on veuille ôter l'angle C : pour cela tirés par les extrémités de ses côtés la droite D B : par le point C menez-lui la parallèle C F, jusqu'à la rencontre en F du côté A B prolongé, & tirés la droite D F. Je dis que le quadrilatère AFDE = le pentagone A B C D E. Car le triangle B G F qu'on a ajouté est égal au triangle D G C qu'on a retranché ; puisque les triangles B D F, B D C, étant égaux (97), ce qu'ils n'ont pas de commun, savoir B G F, D G C, sera égal de part & d'autre.

On peut par ce moyen réduire un polygone irrégulier quelconque à un triangle & en mesurer ainsi la surface.

183. PROBLÈME II. *Construire un quarré égal à deux ou à plusieurs autres quarrés donnés.*

SOL.

SOL. Joignez les deux côtés, A B, B C, des deux quarrés donnés, de façon qu'ils fassent un angle droit en B; & le quarré construit sur l'hypothénuse A C vaudra la somme des quarrés construits sur A B & sur B C (173). Si on vouloit un quarré qui en contint un de plus, on éléveroit sur l'extrémité de l'hypothénuse A C, la perpendiculaire C D égale au côté de ce troisième, & le quarré construit sur A D vaudroit les trois quarrés donnés : on procéderoit de même pour y ajoûter le quarré construit sur D E; de sorte que le quarré construit sur l'hypothénuse A E vaudroit la somme des quatre précédens. FIG. 80.

CHAPITRE II.

Des surfaces planes, considérées par rapport à leurs positions respectives.

184. UNE surface plane ou un plan peut avoir relativement à d'autres plans, ou relativement à des lignes droites, tous les rapports de situation que ces dernières admettent entr'elles; & ces rapports peuvent être définis ainsi qu'ils l'on déjà été en parlant des lignes. Ainsi un plan est *perpendiculaire* à un autre, lorsqu'il ne penche d'aucun côté sur celui-ci, ou bien lorsqu'il fait avec lui un ou deux angles droits : il lui est *oblique*, lorsqu'il penche plus d'un côté que de l'autre : & enfin deux plans sont *parallèles*, lorsqu'ils ne se rencontrent ni ne peuvent se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge; ou bien encore lorsque sur l'un des plans, on peut tirer en plus d'un sens (& par conséquent en tout sens) des droites paralléles à d'autres droites, prises sur l'autre plan.

Il y a deux différentes manieres de concevoir la formation des plans, ou bien en se représentant qu'une ligne droite B C, se meut le long de BA, restant toujours paralléle à elle-même; ou bien 89.

FIG. que B C tourne ſur le point B, faiſant toujours un angle droit
84. avec A B. Dans ces deux cas l'eſpace parcouru par la droite B C ſera évidement un plan; mais dans le cas de la révolution de cette droite, ce plan ſera terminé par une ligne circulaire (12).

81. 185. THÉORÈME I. *Une ligne droite qui a deux points* C *&* D *dans un plan* A B, *eſt toute entière dans ce plan.*

DEM. Car ſur le plan AB prolongeons la partie C D de la droite en queſtion juſqu'en E, & ſuppoſons qu'il y ait, s'il ſe peut, une autre partie D F de cette droite dans un plan ſupérieur ou inférieur au plan A B. Alors la prétendue droite C D F aura plus d'un point commun avec la droite C E, ſans ſe confondre avec elle, ce qui eſt abſurde (8).

186. THÉORÈME II. *Un triangle* A B C *eſt tout entier dans un même plan.*

DEM. Car ſi une partie A D E B étoit dans un plan & l'autre partie D E C dans un autre, la droite A C auroit la partie A D dans le premier plan, & la partie D C dans le ſecond, ce qui eſt abſurde (185).

3. 187. THÉORÈME III. *La ſection commune de deux plans* A B, D C, *eſt une ligne droite.*

DEM. 1°. Cette ſection E F eſt une ligne. Car autrement elle auroit une largeur, & par conſéquent un des deux plans auroit une épaiſſeur, ce qui eſt abſurde (2).

2°. Cette commune ſection E F eſt un ligne droite. Car autrement par les points E & F communs aux deux plans, on pourroit tirer ſur l'un la droite E H F, & ſur l'autre la droite E G F; & alors ces droites auroient deux points communs, ſavoir, E & F, ſans ſe confondre, ce qui eſt encore abſurde (8).

188. THÉORÈME IV. *Deux ou pluſieurs plans ſe confondent lorſqu'ils ont trois points communs, pourvu que ces points ne ſoient pas en ligne droite.*

DEM. Car ſi les trois angles d'un triangle aboutiſſent à ces trois points, les plans renfermeront chacun ce triangle; or,

(186) un triangle est tout entier dans le même plan ; donc ces plans se confondront en un seul. FIG.

189. COROLL. Il suit de là 1°. Que trois points qui ne sont pas en ligne droite, déterminent la position d'un plan. 2°. Que deux lignes qui se rencontrent, peuvent toujours être mises sur le même plan. 3°. Qu'un point fixe & une ligne déterminée peuvent toujours être mis sur un même plan.

190. THÉORÈME V. *Si une ligne* A B *est perpendiculaire à la fois aux deux lignes* B C *&* B D, *qui se coupent, elle le sera au plan de ces deux lignes.* 84.

DEM. Concevez que la ligne B C restant toujours perpendiculaire à A B tourne sur le point B : alors elle se confondra successivement avec B D & avec toutes les perpendiculaires à A B, qu'on peut mener autour du point B, telles que B E, 84.
B F, &c. ou bien toutes ces perpendiculaires seront sur le plan tracé par B C. Donc puisque A B ne penche d'aucun côté par rapport à ces lignes (41), elle ne penchera point par rapport à leur plan ; ou bien elle sera perpendiculaire à ce plan. Or, celui-ci ayant ses trois points B, C, D, communs avec le plan qui contient les deux lignes B C, B D, se confondra avec lui (188). Donc AB sera perpendiculaire au plan de ces deux lignes.

191. REMARQUE. On pourra, par un raisonnement semblable, prouver l'inverse de cette proposition, savoir, que *si une ligne* A B *est perpendiculaire à un plan, elle le sera à toutes les lignes* B C, B D, B E, *&c. qui, placées sur ce plan, viennent aboutir au pied de cette perpendiculaire.*

192. THÉORÈME VI. *Si la ligne* A B *est l'intersection commune de deux plans* BEFA, BCDA, *& que sur le même point* P *de cette ligne on éleve deux perpendiculaires* P R, P Q, *chacune sur un de ces deux plans, l'arc* R Q, *qui mesurera l'angle* R P Q, *formé par ces perpendiculaires, mesurera aussi l'angle formé par ces plans.* 85.

DEM. Concevez d'abord qu'un de ces plans soit couché sur l'autre, & qu'ainsi la ligne P R soit couchée sur P Q : qu'ensuite l'un des deux étant immobile, l'autre fasse

FIG. une révolution entière sur la section commune A B, & qu'ainsi le point R décrive une circonférence autour du point P. Alors une partie quelconque de la révolution de ce plan sera à la révolution entière, comme l'arc Q R, décrit dans cette partie de révolution, sera à sa circonférence. Donc l'arc
85. Q R, par son rapport à sa circonférence, exprimera combien vaut une partie de révolution de ce plan, ou bien l'angle plan qu'elle forme, par rapport à la révolution entière. Cet arc est donc la mesure de l'angle plan, dans le même sens que nous avons pris ailleurs, un pareil arc, pour la mesure de l'angle *linéaire*.

86. 193. THÉORÈME VII. *Si une ligne* P p *est perpendiculaire au plan* A B, *tous les plans qui la renferment, tels que* C D, E F, *&c. seront perpendiculaires au même plan* A B.

DEM. Si sur le plan A B & du point *p* on mène la ligne *p* R perpendiculaire à la section E *e*, & la ligne *p* S perpendiculaire à la section C *c*, elles seront l'une & l'autre perpendiculaires à P *p* (191); donc les angles P *p* R, P *p* S, seront droits; or, le premier mesure l'inclinaison du plan E F sur A B, & le second celle du plan C D sur A B (192). Donc ces deux plans sont perpendiculaires sur A B (184), & il en seroit de même de tous ceux qui renfermeroient la ligne P *p*.

194. RÉCIPROQUEMENT, *Si deux plans* C D, E F, *sont*
86. *perpendiculaires à un troisième* A B, *leur intersection* P *p sera une ligne perpendiculaire à ce troisième*. Car tirant sur ce plan AB & du même point les droites *p* R, *p* S, les angles P *p* R, P *p* S, seront droits, parce qu'ils mesureront l'inclinaison de ces plans sur le plan A B (192). Donc P *p* est perpendiculaire sur les lignes *p* R, *p* S; & par conséquent (190) elle l'est sur le plan de ces deux lignes, lequel est A B.

195. THÉORÈME VIII. *Si deux plans parallèles* A C, *a c*,
87. *sont coupés par un troisième* E *f*, *leurs intersections* E F, *e f*, *seront deux lignes parallèles*.

DEM. Car si ces deux lignes n'étoient pas parallèles, en les

mettant sur le même plan E f, elles pourroient se rencontrer ; FIG
& par conséquent les deux plans A C, ac, se rencontreroient aussi. Ils ne seroient donc pas parallèles (184) ; ce qui est contre la supposition.

196 REMARQUE. On voit assez par ce que nous avons dit ailleurs sur les lignes droites (38), que si deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les angles correspondants seront égaux entre eux, ainsi que les alternes-internes & les alternes-externes ; & réciproquement.

197. THÉORÈME IX. *Si d'un même point* P, *pris hors de deux plans parallèles* A B, ab, *on mène des droites* P R, P S, P T, P V, *à travers ces plans, elles dessineront sur chacun des figures semblables* R T, rt. 88.

DEM. Si l'on conçoit un plan qui passe par les points R, S, P, il formera sur les plans A B, ab, les deux intersections parallèles R S, rs (195), (par un semblable moyen on trouveroit que S T & st, T V & tu, V R & ur, T R & tr sont parallèles) : on aura donc cette suite de raisons égales (106), R S : rs :: S T : st :: T R : tr ; & par conséquent les deux triangles R S T, rst, ayant leurs côtés proportionnels, seront semblables (118). Donc l'angle S = s & de plus tous les côtés autour de ces angles seront proportionnels. Comme on peut faire le même raisonnement pour les angles T & t, V & u, R & r, on en conclura que les deux quadrilatères R T, rt, ont leurs angles homologues égaux, & leurs côtés homologues proportionnels ; & qu'ainsi ils sont semblables.

198. COROLL. I. Si du point P on tire la ligne P Q perpendiculaire aux deux plans, on aura toujours P Q : P q :: P T : P t :: T V : tu. Or (177), V R S T : $urst$ :: T V^2 ; tu^2. Donc V R S T : $urst$ :: P Q^2 : P q^2 ; c'est-à-dire, que *les surfaces de ces deux figures sont comme les quarrés de leurs distances au point* P. Or, les quarrés de ces distances sont dans une raison constante par rapport aux deux plans immobiles A B, ab ; *donc qu'elles que soient les figures dessinées sur ces plans pa-*

FIG. *rallèles & immobiles, par les mêmes droites qui partent d'un point*
88. *fixe* P, *leurs surfaces sont toujours dans le même rapport.*

199. COROLL. II. *Deux angles* TVR, *tur, qui ne sont pas sur le même plan, sont égaux, pourvu qu'ils aient leurs côtés homologues parallèles.* Car ils peuvent être mis sur deux plans parallèles & devenir les angles homologues de deux figures semblables (197).

89. 200. PROBLÈME I. *D'un point* P *pris hors d'un plan* AB, *abaisser une perpendiculaire à ce plan.*

SOL. Tirés d'abord dans le plan AB la ligne indéfinie R*r*, & dans un plan qui passe par P & par R*r*, abaissés du point P la ligne PO perpendiculaire à R*r* (64) : du point O, tiré dans le plan AB la ligne *p*O perpendiculaire à R*r* : joignés sur un même plan le point P & la ligne *p*O, & enfin du point P abaissés P*p* perpendiculaire sur *p*O ; je dis que cette ligne sera la perpendiculaire cherchée.

Car si par le point *p* on mène sur le plan AB, la ligne *p*Q parallèle à R*r*, elle est perpendiculaire au plan P*p*O ; puisque sa parallèle R*r* est perpendiculaire à ce plan (190). Donc Q*p* & O*p*, seront perpendiculaires à P*p* ; ou bien P*p* sera perpendiculaire au plan des lignes Q*p*, O*p* (190) ; donc P*p* tombera du point P perpendiculairement sur le plan AB.

90. 201. PROBLÈME II. *Sur un point d, pris dans le plan* BC *élever une perpendiculaire à ce plan.*

SOL. D'un point quelconque E, pris hors de ce plan, abaissés la perpendiculaire E*e*, & après avoir mis sur un même plan le point *d* & la perpendiculaire E*e*, tirés à celle-ci une parallèle qui passe par le point *d* (92), & cette ligne *d*D sera la perpendiculaire cherchée.

202. PROBLÈME III. *Par un point* P *mener des plans per-*
86. *pendiculaires au plan* AB.

SOL. abaissés de ce point sur le plan AB, la perpendiculaire P*p*, & tous les plans qui la renfermeront, seront perpendiculaires au plan AB (293).

203. REMARQUE. On voit par cette opération, que par un point fixe, on peut mener une infinité de plans perpendiculaires à un autre plan ; mais que de ce même point on ne peut abaiſſer qu'une ſeule ligne perpendiculaire au même plan. FIG.

SECTION TROISIEME.

Des Solides.

CHAPITRE PREMIER.

Notions générales ſur les Solides & propriétés particulières du Priſme.

204. DÉFINITIONS. I. NOUS avons déjà dit (1) que par *Solide* ou *Volume*, on entend en Géomètrie, l'Etendue conſidérée avec ſes trois dimenſions, *Longueur*, *Largeur*, & *Profondeur*. De façon qu'une figure ſolide ne ſera autre choſe qu'un eſpace terminé en tout ſens ; ou bien une étendue dans laquelle ces trois dimenſions ſeront limitées. Or, les limites qui terminent une étendue de tout côté, ne peuvent être que des ſurfaces ; & c'eſt d'après le nombre & l'eſpèce de ces ſurfaces que le ſolide prend différens noms. On lui donne, en général, celui de *Polyèdre*, quand il n'eſt terminé que par des ſurfaces planes, ou bien des plans. S'il n'y a que quatre plans ou quatre faces qui le terminent (& il ne ſauroit y en avoir moins), on l'appelle *Tetraëdre* ; de façon que le Tetraëdre eſt le plus ſimple de tous les ſolides. S'il eſt terminé par 5, 6, 7, 8, &c. plans, on l'appelle *Pentaëdre*, *Exaëdre*, *Eptaëdre*, *Octaëdre*, &c.

205. II. Un polyèdre eſt *Régulier*, lorſque les plans qui le termi-

FIG. nent ſont des polygones *réguliers*, *égaux & ſemblables*; & ſi une de ces conditions manque, il eſt *Irrégulier*.

206. III. Deux Solides ſont *ſemblables* lorſqu'ils ſont terminés par un égal nombre de plans ſemblables.

207. IV. Le *Priſme* eſt un polyèdre terminé par des plans,
99. diſpoſés de manière que les deux oppoſés, comme ABCDE, FGHIK, ſont des polygones égaux, ſemblables & parallèles; & que tous les autres, comme ABGF, BCHG, &c. ſont des parallèlogrammes.

208. V. Les *Baſes* du priſme ſont les deux faces oppoſées & parallèles, ABCDE, FGHIK, que nous avons dit être toujours égales & ſemblables. Les *Arêtes* ſont les droites parallèles & égales, AF, BG, CH, &c. qui forment la commune ſection de deux faces contigues. La *Hauteur* du priſme eſt une perpendiculaire abaiſſée d'une de ſes baſes ſur l'autre (*); & ſuivant que cette perpendiculaire eſt ou n'eſt pas parallèle, & par conſéquent égale à chacune des arêtes, le priſme eſt *Droit* ou *Oblique*.

209. VI. Le *Parallèlipipède* eſt un priſme à ſix faces parallèles deux-à-deux, & formant ainſi des parallèlogrammes égaux & ſemblables. Si tous les plans ou toutes les faces qui terminent ce ſolide ſont des rectangles, il eſt appellé *Parallèlipipède rectangle*; & ſi outre cela ces plans ſont tous égaux, alors ils forment des quarrés, & le ſolide devient un *Cube*. On lui donne en particulier le nom de *pied cube*, de *toiſe cube*, &c. ſuivant que chacune de ſes faces eſt un pied quarré, une toiſe quarrée, &c.

210. Il y a deux manières de concevoir la formation du priſme. La première conſiſte à ſe repréſenter des parallèlogrammes AF, BG, CH, DE, qui étant unis par leur longueur
91.

(*) Quelquefois on prend pour baſe du priſme la face ſur laquelle le ſolide eſt cenſé appuyé; & alors ſa hauteur eſt une perpendiculaire abaiſſée du point le plus élevé du ſolide ſur cette face.

aboutiſſent

aboutissent à deux plans parallèles A B C D, E F G H, lesquels FIG.
seront les bases du prisme. La seconde manière se réduit à ima- 91.
giner un polygone quelconque E F G H, qui se mouvant parallèlement à lui-même le long d'une droite E A (qu'on appelle pour cette raison la *Directrice du mouvement*) décrit un espace solide qui est nécessairement un prisme (207). Si le plan générateur A B C D est un cercle, le prisme prend le nom de *Cylin-* 92.
dre; & comme alors chaque base a un centre, on peut joindre ces centres par une ligne droite, laquelle est appellée *l'Axe* du Cylindre. Ce solide est *Droit* ou *Oblique*, suivant que son axe est perpendiculaire ou oblique à ses bases. Quand le cylindre est droit, on peut concevoir qu'il a été formé par le mouvement circulaire d'un rectangle A B C D, qui fait une révolution en- 93.
tière sur un de ses côtés immobiles A B. Alors la droite C D décrit la surface convexe du cylindre, & les droites A D, B C, ainsi que des rayons de cercle, décrivent les bases du cylindre.

211. DEMANDE. *Nous demandons qu'on nous accorde que deux solides sont égaux & semblables, lorsqu'ils sont terminés par un même nombre de plans égaux & semblables.*

La vérité de cette demande ne sauroit être contestée; puisque dans ce cas les angles d'un de ces solides étant nécessairement égaux à ceux de l'autre, les deux solides n'ont rien qui puisse établir une différence quelconque entre eux. Ils peuvent donc être superposés, & ils sont non-seulement semblables, mais encore égaux en tout.

212. THÉORÈME I. *Le Parallèlipipède droit* EFGHIKLM *& le Parallèlipipède oblique* ABCDEFGH, *de même base & de mé-* 94.
me hauteur, sont égaux en solidité.

DEM. Les prismes triangulaires AIEB'KF, DMHCLG sont égaux (211); donc si l'on retranche de chacun la partie commune DINCKO, les restes seront égaux; or, ces restes étant ajoûtés au prisme ENHFOG forment d'un côté le parallèlipipède droit, & de l'autre l'oblique. Donc &c.

213. COROLL. Il suit de là 1°. *Que sans changer sa solidité,*

FIG. *un parallèlipipède oblique peut être réduit à un parallèlipipède droit de même base & de même hauteur* ; & qu'ainsi on peut rendre ses faces perpendiculaires à ses bases & par conséquent rectangulaires.

2°. *Que les bases elles mêmes peuvent être réduites en rectangles* ; puisqu'on peut toujours les considérer comme deux faces du solide.

214 THÉORÈME II. *Quel que soit le parallèlipipède*
91. ABCDEFGH, *droit ou oblique, les prismes triangulaires* ADCEHG, ABCEFG *en seront les moitiés.*

DEM. Les deux lignes AE, CG, étant parallèles (208), on voit d'abord qu'un même plan peut passer par les quatre points A, C, G, E, & devenir la section commune des deux prismes triangulaires. Or ces deux prismes sont égaux (211). Donc chacun sera la moitié du parallèlipipède proposé ABCDEFGH.

215. COROLL. Il suit de là, *que deux prismes triangulaires, l'un droit & l'autre oblique, de même base & de même hauteur, sont égaux*; car ils sont chacun les moitiés de deux parallèlipipèdes égaux (212).

216. THÉORÈME III. *Deux prismes triangulaires droits, de hauteur égale, sont entre eux comme leurs bases.* Ou bien désignant ces solides par P & p, leurs bases par B & b, on a $P : p :: B : b$.

DEM. 1°. Si ces bases sont commensurables, supposons les divisées en parties égales à leur commune mesure : que la première contienne un nombre N de ces parties, tandis que la seconde en contient un nombre n; ce qui donnera $B : b :: N : n$; que sur chacune de ces parties égales on éleve des prismes droits de même hauteur que P ou p : alors ces petits prismes seront égaux de part d'autre (211), & par conséquent leurs sommes seront entr'elles $:: N : n$; or, les solidités P & p sont comme ces sommes; donc 1°. on aura $P : p :: N : n :: B : b$.

2°. Si les bases que je suppose représentées par les triangles
95. ABC, DEF, sont incommensurables, je dis qu'on aura la même proportion. Car si cela n'étoit pas ainsi, supposons que ABH étant plus grand que ABC, on eût $P : p :: ABH : DEF$;

Prenons sur D E F une aliquote plus petite que A C H, & supposons que A C G est ce qu'il faut ajoûter à la base A B C, pour pouvoir la mesurer par cette aliquote : dans ce cas A B G < A B H, & de plus elle est commensurable avec D E F. Désignant donc par Q le prisme droit, élevé sur A B G, par P celui qui est élevé sur A B C, & par *p* celui qui est élevé sur D E F, on aura par la première partie du Théorème Q : *p* :: A B G : D E F, tandis que l'on à (hyp.) P : *p* :: A B H : D E F. Or, A B H > A B G. Donc P > Q, ou bien la partie est plus grande que le tout ; ce qui est absurde. Donc, &c. FIG. 95.

217. Coroll. I. *Deux prismes triangulaires obliques : ou bien l'un droit & l'autre oblique, de hauteur égale, sont entre eux comme leurs bases.* Car les prismes triangulaires & obliques valant des prismes triangulaires droits, de même base & même hauteur (215), les uns doivent suivre le même rapport que les autres.

218. Coroll. II. *Des prismes de hauteur égale, soit droits soit obliques, ou bien l'un droit & l'autre oblique, qui ont pour bases des polygones quelconques, sont entre eux comme ces bases.* Car si ces polygones ont un égal nombre de côtés, comme A B C D E & *a b c d e*, qu'on désigne par P le premier prisme & par *p* le second : par P′, P″, P‴ les prismes construits sur les triangles A B C, A C D, A D E, & par *p′*, *p″*, *p‴* les prismes élevés sur les triangles *a b c*, *a c d*, *a d e*, on aura (216) : 96.

P′ : P″ : P‴ :: A B C : A C D : A D E.

Donc . . . P : P′ :: A B C D E : A B C.

de même . . . *p* : *p′* :: *a b c d e* : *a b c*.

Or, (216). P′ : *p′* :: A B C : *a b c*.

Donc . . . P : *p* :: A B C D E : *a b c d e*.

Si les bases qu'on compare n'ont pas le même nombre de côtés, comme A B C D E, M N L, appellant Q le prisme élevé sur la seconde & gardant pour l'autre les dénominations ci-dessus, on aura :

P′ : P″ : P‴ : Q :: A B C : A C D : A D E : M N L.

Donc . . . P : Q :: A B C D E : M N L.

FIG. & de tout cela on conclura, que *deux prismes quelconques de bases égales & de hauteurs égales, sont égaux en solidité.*

219. REMARQUE. Le Corollaire, ainsi que le Théorème précédent, supposent qu'en comparant les solidités de deux prismes, on détermine leurs bases de la même manière dans chacun, c'est-à-dire, en prenant une des deux faces égales qui s'y trouvent toujours (207). Car si dans deux prismes triangulaires
97. A B C D E F, G H I K L M, on prenoit pour base du premier le parallèlogramme A D F C; & pour base du second, le triangle G H I: & que de plus les hauteurs prises au-dessus de ces bases étant égales, le parallèlogramme A D F C fut double du triangle G H I, les deux solides, loin d'être en raison de ces bases, seroient égaux entre eux. Car si à chacun on en ajoûtoit un autre qui lui fut égal & semblable, ils deviendroient des parallèlipipèdes à hauteurs égales & à bases égales; puisque l'une de ces bases seroit A D F C & l'autre G H I × 2. Ces parallèlipipèdes seroient donc égaux (218); & par conséquent (214), les prismes triangulaires A B C D E F, G H I K L M, le seroient aussi.

220. THÉORÈME IV. *Des prismes droits de même base sont entre eux comme leurs hauteurs*; ou bien appellant les prismes droits A B C G H I, A B C D E F, le premier P, & le second *p*,
98. on aura P : *p* :: B H : B E.

DEM. 1°. Si les hauteurs B H & B E sont des lignes commensurables, supposons-les divisées en parties égales, & que par chacune de ces divisions on coupe ces deux prismes parallèlement à la base commune A B C: dans ce cas ces sections termineront des prismes égaux, & le nombre de ceux qui seront dans P sera au nombre de ceux qui seront dans *p* :: B H : B E, ou bien on aura P : *p* :: B H : B E.

2°. Si l'on n'avoit pas la même proportion lorsque B H & B E sont incommensurables, supposons qu'on eût P : *p* :: B N : B E: ajoûtons à B H la partie H L, qui la rende commensurable avec B E, par une aliquote plus petite que H N: appellons Q le pris-

me ABCKLM, qui auroit BL pour hauteur. Cela posé : FIG.

Q : p :: BL : BE. 98.

Tandis que (hyp.) P : p :: BN : BE.

Or, BN > BL. Donc P > Q, ce qui est absurde.

221. Remarque. Puisqu'un prisme oblique vaut un prisme droit de base égale & de hauteur égale (218), il est aisé de voir que l'analogie du Théorème précédent s'étend à toute sorte de prismes.

222. Coroll. I. *Des prismes quelconques* ABCDEF (*fig.* 98) *&* ABCDEFI (*fig.* 99), *qui ont des bases égales, sans être les mêmes, sont entr'eux comme leurs hauteurs.* Car si sur la base ABC on éleve le prisme ABCKLM de même hauteur que ABCDEFI, il sera égal à celui-ci (218). Or, le prisme ABCDEF est au prisme ABCKLM comme la hauteur BE est à la hauteur BL ; donc, &c. 99.

223. Coroll. II. Puisque des prismes quelconques à hauteurs égales sont comme leurs bases (218), & que ceux qui ont des bases égales, sont comme leurs hauteurs (222), on en conclura (Alg. 237) qu'ils sont entr'eux en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs : ou bien que désignant le rapport de leurs bases par celui des deux nombres B, *b* ; le rapport de leurs hauteurs par celui des deux nombres, H, *h*, & les deux prismes par P & *p*, on aura toujours P : *p* :: BH : *bh*.

224. Il s'ensuit de là 1°. *Que si dans deux prismes les bases sont en raison inverse des hauteurs, leurs solidités sont égales, & réciproquement.* Car si B : *b* :: *h* : H, on aura BH = *bh*, & par conséquent P = *p*. Pareillement si P = *p*, BH = *bh*, ou bien B : *b* :: *h* : H.

225. 2°. *Que deux prismes semblables sont entr'eux en raison triplée ou comme les cubes des deux nombres, dont le rapport exprime celui des dimensions homologues quelconques de ces solides.* Car toutes les faces de ces solides étant des figures planes semblables (206), leurs dimensions homologues sont proportionnelles entr'elles (115) ; & par conséquent proportionnelles aux hauteurs. Donc ici la raison des bases, ou bien B : *b*, est composée de deux rai-

FIG. ſons égales (117); & ſi on lui ajoûte celle des hauteurs, laquelle eſt H : *h*, on aura B H : *b h*, qui ſera compoſée de trois raiſons égales; & qui vaudra par conſéquent la raiſon qu'il y a entre les cubes des nombres qui ſont les termes d'une de ces raiſons, ou bien qui expriment le rapport de deux dimenſions homologues de ces ſolides.

226. 3°. Que ſi *p* eſt le priſme qu'on prend pour unité de meſure d'un autre priſme P, tandis que la baſe & la hauteur du premier ſont les unités de meſure pour la baſe & la hauteur du ſecond, la proportion ci-deſſus (223) deviendra P : 1 :: B H : 1. Ce qui ſignifie que *ſi l'on multiplie le nombre qui exprime combien de fois la baſe* B *d'un priſme quelconque, contient ſon unité de meſure, par celui qui exprime combien de fois la hauteur contient ſon unité, le produit indiquera combien de fois le priſme* P *contient celui qui lui ſert d'unité, ou bien il expoſera ſa valeur meſurée par cette unité*; ce qui s'énonce ordinairement d'une manière abrégée, en diſant, *que la ſolidité d'un priſme quelconque eſt exprimée par le produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur* (*).

227. REMARQUE. Il faut obſerver ici qu'on prend ordinairement le cube pour la meſure des ſolidités, ainſi que dans les ſurfaces on ſe ſert du quarré. La raiſon de ce procédé eſt que le cube ayant ſes trois dimenſions égales, la même unité de longueur, ſavoir, l'arête du cube, ſert pour les trois dimenſions du ſolide; ce qui eſt plus ſimple que ſi chacune de ces dimenſions avoit ſa meſure particulière, comme il pourroit arriver ſi l'on prenoit un autre priſme pour unité.

D'après cela, ſi l'on veut ſavoir par ex. combien de pieds cubes ſont contenus dans un priſme, on cherche d'abord le nombre des pieds quarrés qui ſont contenus dans ſa baſe, on le mul-

(*) Il eſt inutile d'avertir que cette propoſition doit être priſe dans le ſens de ce qui la précéde, & que cela ſuffit pour faire diſparoître l'abſurdité qu'elle ſemble préſenter d'abord, en diſant qu'il faut multiplier une ſurface par une ligne (Voyez la note de la page 231).

tiplie par le nombre qui exprime combien il y a de pieds dans sa FIG.
hauteur, & ce produit exprime le nombre de pieds cubes que contient le solide mesuré.

228. THÉORÈME V. *La surface latérale d'un prisme quelconque* ABCDEFI *droit ou oblique, est exprimée par le produit d'une* 99.
de ses arêtes AF *multipliée par le contour d'une section a b c d e, faite dans ce prisme perpendiculairement à ses arêtes.*

DEM. Puisque toutes ces arêtes sont parallèles (208), si l'une est perpendiculaire au plan de la section, les autres le seront aussi; & par conséquent (191) les lignes ab, bc, cd, &c. qu'elles rencontreront sur ce plan, seront perpendiculaires à ces mêmes arêtes AF, BG, CH, &c. ou bien si celles-ci sont prises pour bases dans les parallèlogrammes AG, BH, CI, &c. les autres en seront les hauteurs. Donc la surface latérale du prisme sera $AF \times ab + BG \times bc + CH \times cd +$ &c; & comme AF, BG, CH sont des lignes égales (208), on aura pour l'expression de la surface, $AF \times ab + AF \times bc + AF \times cd +$ &c. ou bien $AF \times \overline{ab + bc + cd +}$ &c. c'est-à-dire, le produit d'une arête par le contour d'une section perpendiculaire.

229. REMARQUE. Puisque les bases d'un même prisme sont des polygones égaux, ayant mesuré l'une par les méthodes ci-dessus (168 & 171), on connoît l'autre; & alors pour avoir la surface entière du solide, il faut ajoûter sa surface latérale à celle de ses bases.

230. COROLL. Si le prisme est droit, la section perpendiculaire $abcde$ sera égale à sa base, & chacune des arêtes vaudra la hauteur; donc alors *la surface latérale de ce solide sera exprimée par le contour de la base multipliée ou par sa hauteur, ou par une de ses arêtes.* On voit qu'il n'en sauroit être de même dans les prismes obliques, parce que dans ceux-là le contour de la section faite perpendiculairement à la longueur n'est pas égal à celui de la base.

231. REMARQUE. Il faut observer ici que le cylindre pou-

FIG. vant être considéré comme un prisme qui a pour base un polygone d'une infinité de côtés, tout ce que nous avons dit de l'un de ces solides, peut s'appliquer à l'autre ; & comme celui-ci a toujours un axe qui détermine sa longueur, on peut faire entrer l'expression de cette ligne dans toutes les déterminations ou nous avons employé celle de l'arête du prisme.

CHAPITRE II.

De la Pyramide.

232. DÉFINITIONS. I. *LA Pyramide est un polyèdre formé par la réunion de*
100. *plusieurs triangles* S O T, S T R, S R Q, S Q P, S P O, *disposés de manière que leurs bases forment le contour d'un polygone* O T R Q P, *& que tous leurs sommets aboutissent à un même point* S. Ce point est appellé le *sommet* de la Pyramide, tandis que le polygone O T R Q P en est la *Base*. Si cette base est un triangle, on a une Pyramide *Triangulaire* ou bien un *Tetraèdre* ; si elle est un quadrilatère, un pentagone, un exagone, &c. la pyramide est appellée *Quadrilatère*, *Pentagonale*, *Exagonale*, &c.

233. II. Une Pyramide est *Régulière*, quand elle a pour base un polygone régulier, & que en outre toutes ses faces sont des triangles isocelles & égaux ; elle est *Irrégulière* quand une de ces conditions manque. *L'Apothéme* dans une pyramide régulière est la perpendiculaire S X qui mesure la hauteur d'une de ses faces, & par conséquent de toutes les autres. *L'Axe* dans une pyramide, qui a pour base un polygone quelconque simétrique ou régulier, n'est autre chose que la droite menée du sommet au centre de sa base ; & ces pyramides sont ou *Droites* ou *Obliques* ; suivant que l'axe est ou n'est pas perpendiculaire au plan de leur base.

234.

234. III. La *Hauteur* d'une pyramide eſt la perpendiculaire abaiſſée du ſommet ſur le plan de ſa baſe. FIG.

235. IV. Si l'on ſuppoſe que le cercle P R Q T eſt immobile, & que la droite S P ayant un point fixe en S au-deſſus de ce cercle, fait une révolution entière autour de ſa circonférence, on pourra concevoir un ſolide renfermé entre le plan circulaire P R Q T, & la ſurface convexe décrite par cette droite, & ce ſolide ſera un *Cone*. Il aura un *Axe*, ſavoir, la droite S C menée du ſommet au centre de la *Baſe*, ou du cercle P R Q T; & ſuivant que cet axe ſera perpendiculaire ou oblique au plan de la baſe; ou bien ſuivant que la mobile S P fera toujours le même angle ou des angles variables avec ce plan, le Cone ſera *Droit* ou *Oblique*. C'eſt pourquoi on peut ſe repréſenter le cone droit, comme un ſolide formé par la révolution d'un triangle rectangle S C P, qui, reſtant toujours perpendiculaire ſur le même plan, fairoit une révolution entière ſur le côté immobile S C. 101.

236. THÉORÈME I. *Si une Pyramide eſt coupée par des plans parallèles à ſa baſe, les différentes ſections formeront des figures ſemblables à la baſe, & par conſéquent ſemblables entr'elles; & ces ſections ſeront comme les quarrés de leurs diſtances au ſommet.*

DEM. Car dans la même Pyramide les deux ſections ABCD, *a b c d*, ne ſont autre choſe que des figures deſſinées ſur des plans parallèles par des lignes droites S A, S B, S C, &c. menées du même point S. Elles ſont donc ſemblables (197); & leurs ſurfaces ſont comme les quarrés de leurs diſtances au ſommet S de la pyramide (198). 102.

237. COROLL. On conclura de là *que ſi deux Pyramides* A B C D S, D E F S, *de même hauteur & de différentes baſes, ſont coupées parallèlement à ces baſes à même diſtance du ſommet, les deux ſections a b c d*, A B C, *ſeront entr'elles comme les baſes* A B C D, D E F. Car appellant dans chaque pyramide ſa hauteur H, & la diſtance de la ſection au ſommet *h*, l'on aura d'un côté, ABCD : *abcd* :: $H^2 : h^2$; & de l'autre DEF : ABC :: 102.& 103.

FIG. $H^2 : h^2$. Donc ABCD : DEF :: *abcd* : ABC.

238. THÉORÈME II. *Si l'on coupe une pyramide triangulaire*
103. DEFS, *par un plan* ABC *parallèle à la face opposée* : 1°. *La petite pyramide* ABCS *qui naîtra de là sera semblable à la grande* : 2°. *Si la section divise également les côtés de la grande pyramide aux points* A, B, C, *chaque face de la petite vaudra le quart de la face correspondante de la grande.*

DEM. 1°. La face ABC est semblable à DEF (236) : en outre, la ligne AB étant parallèle à DE, ainsi que BC l'est à EF, & AC à DF (195), le triangle SAB est semblable au triangle SDE, le triangle SBC est semblable à SEF, & SAC à SDF. Donc (206) la petite pyramide ABCS sera semblable à la grande DEFS.

2°. Si les côtés SD, SE, SF, sont divisés également aux points A, B, C, on aura (106) $AB = \frac{1}{2} DE$, $BC = \frac{1}{2} EF$, $AC = \frac{1}{2} DF$. Donc (177) $ABC = \frac{1}{4}$ DEF, & pour la même raison $SAB = \frac{1}{4}$ SDE, $SBC = \frac{1}{4}$ SEF, & $SAC = \frac{1}{4}$ SDF. Donc, &c.

239. COROLL. On conclura de là *que si dans une Pyramide*
104. *triangulaire* ABDC (*) *on fait deux sections* HIK, HGE, *qui partagent également les côtés de la Pyramide aux points* H, I, K, G, E, *on en retranchera deux nouvelles Pyramides* HIKC, AEGH, *semblables & égales entr'elles.* Semblables, parce que chacune sera semblable à la grande (238) : & égales, parce que les faces HIK, & AEG, valant chacune $\frac{1}{4}$ ABD (238), seront égales entr'elles ; de même HIC & AEH valant chacune $\frac{1}{4}$ ABC, seront égales (il en est ainsi des autres faces). Et par-

(*) On n'a point ombré cette Pyramide, crainte de confusion ; & il nous a paru plus commode de prendre pour sa base la face ABD, ce qui suppose le sommet placé en C.

tant les deux Pyramides H I K C, HGEA, étant terminées par un égal nombre de faces égales, seront elles-mêmes égales (211). FIG.

240. THÉORÈME III. *Toute Pyramide triangulaire* A B D C *peut être décomposée en deux Pyramides* A E G H, H I K C, *égales, semblables entr'elles & semblables à la grande, & en deux Prismes triangulaires égaux* B I F E H G, F D G I K H. 104.

DEM. Si les côtés de la Pyramide sont divisés également aux points E, F, G, H, I, K : qu'on fasse passer une section par les trois points I, H, K, & une autre par les trois points H, E, G, on retranchera les deux Pyramides H I K C, A E G H égales, semblables entr'elles & semblables à la totale (239). Il s'agit donc de prouver que ce qui reste de la Pyramide totale, savoir, I K H B D G E, peut être décomposé en deux prismes triangulaires égaux.

Or, cela est ainsi; car les triangles H I K, G F D, sont égaux, puisque (238) chacun est le quart de A B D : ils sont équiangles, puisque chacun est semblable à A B D ; donc leurs côtés homologues sont égaux : en outre (195) H K est parallèle à G D, I K à F D, I H à E B, & par conséquent à F G. Donc dans le solide I H K F G D les deux faces triangulaires sont égales, & les côtés de l'une parallèles & égaux aux côtés correspondans de l'autre ; & par conséquent les autres faces sont des parallèlogrammes (91), ce qui indique nécessairement un prisme triangulaire : comme il en est de même des deux faces B I F, E H G, le solide qui reste, savoir, B I F E H G sera également un prisme triangulaire. Or, en prenant pour base du premier le triangle G F D, & pour base du second le parallèlogramme B F G E, qui est une de ses faces, ces solides ont même hauteur, & de plus la base de l'un est un parallèlogramme double de la base triangulaire de l'autre (90). Ils sont donc égaux (219) ; & par conséquent &c.

241. REMARQUE. Il faut observer qu'en décomposant une pyramide triangulaire, ainsi qu'il est indiqué dans le Théorème précédent, une des deux Pyramides égales H I K C a

FIG. 104. néceſſairement une face H I K commune avec un des deux priſmes égaux, ſavoir, avec F D G H I K; & qu'ainſi en prenant cette face pour baſe dans ces deux ſolides, & la face parallèle A B D pour baſe dans la Pyramide totale, on peut dire (238) que *chacun de ces ſolides à une baſe ſous-quadruple de celle de la Pyramide dont ils ſont tirés.* Et comme le plan H I K ne peut partager également les côtés A C, B C, D C de la grande Pyramide, ſans diviſer ſa hauteur en deux parties égales, dont l'une meſure alors la hauteur de la Pyramide H I K C, & l'autre celle du priſme F D G H I K, *chacune de ces hauteurs ſera la moitié de celle qu'a la Pyramide totale.*

242. THÉORÈME IV. *Une Pyramide triangulaire quelconque eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur.*

C'eſt-à-dire, que ſi l'on déſigne par b la baſe de ce priſme & par h ſa hauteur, ce qui donnera $b\,h$ pour l'expreſſion de ſa ſolidité (226), on aura $\frac{1}{3}\,b\,h$ pour celle de la pyramide.

DEM. Si l'on décompoſe la Pyramide donnée, & toutes celles qui naîtront de celle-là, ainſi qu'il eſt indiqué dans le Théorème précédent, la première diviſion donnera deux priſmes égaux & deux Pyramides égales: la ſeconde, quatre priſmes égaux & quatre Pyramides égales; la troiſième, huit priſmes égaux & huit Pyramides égales, & toujours de même. En outre, un des deux priſmes & une des deux Pyramides, qui viennent de chaque décompoſition, ont une hauteur ſous-double & une baſe ſous-quadruple de celle qu'a la Pyramide dont ils ſont tirés (241 & 238). Donc par la première diviſion on aura un priſme & une pyramide qui auront chacun pour hauteur $\frac{1}{2}\,h$ & pour baſe $\frac{1}{4}\,b$. Donc (226) le priſme vaudra $\frac{1}{2}\,h \times \frac{1}{4}\,b$ ou $\frac{1}{8}\,b\,h$, & les deux priſmes enſemble vaudront $\frac{1}{4}\,b\,h$.

Par la ſeconde diviſion on aura quatre priſmes égaux, dont un aura ſa hauteur exprimée par $\frac{1}{4}\,h$, & ſa baſe exprimée par $\frac{1}{16}\,b$. Donc ſa ſolidité ſera exprimée par $\frac{1}{64}\,b\,h$, & celle des

FIG.

quatre ensemble par $\frac{1}{16} bh$.

Par la troisième division on aura huit prismes égaux, & un de ceux-là aura sa hauteur exprimée par $\frac{1}{8} h$ & sa base par $\frac{1}{64} b$. Donc sa solidité sera $\frac{1}{512} bh$, & celle des huit ensemble, $\frac{1}{64} bh$. Et comme de pareilles divisions peuvent être réitérées, jusqu'à ce que l'excès de la Pyramide donnée sur la somme de ces prismes soit plus petit que toute quantité assignable, on pourra dire alors que cette Pyramide vaut la somme de ces prismes. Or, cette somme étant représentée par la progression géomètrique décroissante à l'infini $\frac{1}{4} bh$, $\frac{1}{16} bh$, $\frac{1}{64} bh$, $\frac{1}{256} bh \ldots$ ou bien par $bh\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots\right)$ est (*Alg.* 258) $\frac{1}{3} bh$. Donc l'expression de la solidité de la Pyramide donnée sera $\frac{1}{3} bh$; tandis que (226) celle de la solidité du prisme de même base & de même hauteur sera bh; ou bien la premièr^e sera le tiers de la seconde.

243. COROLL. I. *Une Pyramide* O P Q R T S *qui a pour base un polygone quelconque est donc le tiers du prisme de même base & de même hauteur : ou bien sa solilidité sera exprimée dans tous les cas par le tiers du produit de sa base multipliée par sa hauteur.* Les Pyramides triangulaires O P T S, P T R S, P Q R S, sont chacune le tiers des prismes triangulaires de même hauteur, élevés sur leurs trois bases (242). Donc la somme de ces trois Pyramides, ou bien la Pyramide totale, sera le tiers de la somme de ces trois prismes, ou bien du prisme total; & par conséquent (226) sa solidité sera exprimée par le tiers du produit de sa base multipliée par sa hauteur. 100.

244. COROLL. II. Il suit de là 1°. Que les Pyramides qui ont des hauteurs égales & des bases égales, sont égales entr'elles, qu'elle que soit la forme de ces bases. 2°. Que celles qui ont des bases égales, sont comme leurs hauteurs. 3°. Que

FIG. celles qui ont des hauteurs égales, ſont comme leurs baſes. 4°. Que celles qui ont les baſes en raiſon inverſe des hauteurs, ſont égales & réciproquement. 5°. Que celles qui ſont ſemblables, ſont entr'elles comme les cubes de leurs hauteurs ou de deux autres dimenſions homologues quelconques. Toutes ces conſéquences ſont fondées ſur ce que les Pyramides ſont le tiers de priſmes de même baſe & de même hauteur, & que ceux-ci admettent entr'eux tous ces divers rapports.

245. SCHOLIE. Pour avoir la ſolidité d'une Pyramide tronquée à baſes parallèles, il faudra la completter, & ſouſtraire la ſolidité du complément de celle de la Pyramide entière. Or,
102. puiſqu'on connoît la baſe *abcd* de ce complément *abcd*S, il ne s'agit que de trouver ſa hauteur S*h*, qu'on aura de cette manière. AB : *ab* :: SH : S*h*. Donc AB — *ab* : *ab* :: SH — S*h* ou H*h* : S*h* $= \frac{ab \times Hh}{AB - ab}$. Connoiſſant S*h*, en l'ajoûtant à *h*H on a SH; & par conſéquent on a la ſolidité de la Pyramide *abcd*S qui ſert de complément, ainſi que celle de la Pyramide totale ABCDS. Donc en ſouſtrayant l'une de l'autre, on aura celle de la Pyramide tronquée ABCD*abcd*.

246. THÉORÈME V. *La ſurface latérale d'une Pyramide régulière eſt égale à la moitié du contour de ſa baſe multipliée par ſon apothème.*

DEM. Cette ſurface eſt néceſſairement égale à la ſomme des triangles qui la compoſent. Or, dans la Pyramide régulière l'apothème eſt la hauteur commune de tous ces triangle (233), & leurs baſes forment le contour de la baſe de la Pyramide. Donc, &c.

247. REMARQUES. I. Si la Pyramide régulière ABCDS, étoit coupée à la moitié de ſa hauteur par un plan parallèle à ſa baſe, le contour *abcd* de cette nouvelle ſection ſeroit la moitié du contour de la baſe (106). *On peut donc encore, pour avoir la ſurface de la Pyramide régulière, multiplier ſon apothème par le contour d'une ſection moyenne, faite parallèlement à ſa baſe.*

II. Si la Piramide eſt irrégulière, on ne ſauroit meſurer ſa

surface, ainsi qu'il est indiqué dans le Théorème précédent ; FIG.
parce que les divers triangles qui forment ses faces n'ont pas tous la même hauteur. Il faut donc alors pour estimer cette surface, prendre celle de chaque face triangulaire en particulier, & leur somme sera la surface latérale de la pyramide.

248. THÉORÈME VI. *Si l'on coupe une pyramide régulière par un plan a b c d parallèle à sa base, la surface latérale du tronc* ABCD *a b c d sera égale au reste de l'apothème* P *p multiplié, ou* 102.
bien par la demi-somme des contours des deux bases A C, *a c : ou bien par le contour entier d'une section moyenne & parallèle à ces bases.*

DEM. Chaque face de la pyramide tronquée comme A *b*, B *c*, &c. forme un trapèze ; puisque A B & *a b*, B C & *b c*, &c. sont parallèles (195) : en outre, le reste de l'apothème, savoir P *p*, mesure dans tous ces trapèzes la distance des deux côtés parallèles. Donc le trapèze A *b* = P *p* × $\frac{AB + ab}{2}$: le trapèze B *c* = P *p* × $\frac{BC + bc}{2}$, & ainsi des autres : d'ailleurs, à la place de la demi-somme des côtés parallèles de ces trapèzes, on pourroit prendre les droites moyennes & parallèles à ces côtés (167), lesquelles forment le contour d'une section moyenne & parallèle. Donc la somme de ces trapèzes ou bien la surface latérale du tronc, pourra être exprimée indifféremment, ou par la demi-somme des contours des deux bases multipliée par l'apothème, ou par le contour entier de la section moyenne & parallèle, multipliée par cet apothème.

249. REMARQUE. Puisque le Cône peut être considéré comme une pyramide qui a une infinité de faces, ou qui a pour base un polygone régulier d'une infinité de côtés : & que d'ailleurs, ce que nous avons dit de la pyramide en général est indépendant du nombre des côtés de la base, il s'ensuit que tout cela peut s'appliquer au Cône ; & que les mêmes rapports que nous avons trouvés plus haut, soit en comparant les

FIG. pyramides entr'elles, soit en les comparant aux prismes, se trouveront aussi en comparant les Cônes entr'eux, ou bien en les rapportant à des cylindres.

CHAPITRE III.

De la Sphère.

250. DÉFINITIONS I. *LA Sphère est un solide dans lequel tous les points de la surface sont à égale distance d'un point pris en dedans, qui est le centre du solide.* Toute ligne droite qui traverse la Sphère en passant par le centre, en est un *Diamètre* ou un *Axe*; & la moitié de cette ligne qui mesure la distance du centre à la surface, en est un *Rayon*.

251. Pour se représenter la formation de ce solide, il faut con-
105. cevoir un demi cercle A B D C qui fasse une révolution entière sur son diamètre immobile A D. Dans ce mouvement la demi-circonférence A B D décrira une surface convexe, dont tous les points seront à égale distance du centre C, & qui par conséquent terminera une Sphère; & toutes les lignes comme E F, B C, menées de la demi-circonférence perpendiculairement à son diamètre A D, décriront dans cette révolution des cercles (12).

252. II. On distingue dans la Sphère *des grands* & *des petits* cercles. Les premiers ont pour centre le centre même de la Sphère; & les autres ont leur centre dans un autre point de ce solide. D'où il suit que les grands cercles de la Sphère ont tous un diamètre commun, puisqu'ils ont le même centre, & qu'ainsi ils sont égaux; mais qu'il n'en est pas de même des petits cercles.

253. III. Si un plan passe par le centre de la Sphère il la partage en deux parties égales, & chacune est appellée un *Hémisphère*. S'il passe hors du centre, il la partage en deux-

parties

parties inégales, dont la petite est appellée une *Calote Sphèrique*; & enfin si deux plans parallèles coupent ce solide, la partie qu'ils interceptent entr'eux, s'appelle une *Zone*. FIG.

254. IV. Nous appellons *Sphéroïde* le solide engendré par la révolution d'un demi-polygone régulier & simétrique A D E-FGB, qui tourne sur un diamètre AB, mené d'un angle à l'angle opposé de ce polygone. 106.

255. THÉORÈME I. *Si un Polygone régulier & simétrique fait une révolution entière sur un diamètre* A B *mené d'un angle à l'angle opposé, il décrira un Sphéroïde, dont la surface sera exprimée par le produit de l'axe* A B, *multiplié par la circonférence du cercle inscrit dans le polygone.*

DEM. Dans cette révolution les côtés contigus à l'axe, comme AD, BG, décriront des surfaces de cones entiers, les côtés obliques à cet axe, comme D E, G F, décriront des surfaces de cones tronqués, & enfin les côtés qui lui seront parallèles, comme E F, décriront des surfaces cylindriques. Or, chacune de ces surfaces doit être exprimée par le produit de la portion de l'axe qu'elle renferme, multipliée par la circonférence du cercle inscrit.

1°. Du point X, qui est le milieu du côté A D, soit tiré le rayon X C & la ligne X x perpendiculaire à A B & parallèle à D L. Les triangles A D L, X C x, seront semblables (117). Donc A L : A D :: X x : X C; ou bien les circonférences étant comme les rayons, A L : A D :: circ. X x : circ. X C. Donc A L × circ. X C = A D × circ. X x. Or, A D × circ. X x = la surface conique décrite par A D (246). Donc cette surface = A L × circ. X C.

2°. Du point H, pris au milieu de E D, tirés aussi le rayon H C, & la ligne H I perpendiculaire à A B & parallèle à E M. Les triangles semblables D E K, H C I (117) donneront, D K ou L M : D E :: H I : H C; ou bien L M : D E :: circ. H I : circ. H C. Donc L M × circ. H C = D E × circ. H I. Or, la surface du cone tronqué décrite par le côté D E, est exprimée

FIG. par D E × circ. H I (247) ; donc elle le sera aussi par L M × circ. H C.

3°. La surface cylindrique décrite par E F parallèle à l'axe, est déterminée, suivant ce que nous avons vu (230), par E F × circ. F R ; ou ce qui est le même, par M R × circ. P C. De sorte que la surface de chacun des solides qui composent le Sphéroide, sera exprimée par la portion de l'axe qu'ils renferment, multipliée par la circonférence du cercle inscrit dans le polygone ; & par conséquent la surface totale du Sphéroide aura pour expression le produit de l'axe entier multiplié par la circonférence de ce cercle inscrit.

256. COROLL. Si le polygone régulier a une infinité de côtés, il pourra être confondu avec le cercle inscrit (144) ; & par conséquent le Sphéroide pourra alors être considéré comme une Sphère. D'où il suit que *la surface de la Sphère aura pour expression, le produit de son axe multiplié par la circonférence d'un de ses grands cercles.* Ou bien appellant cette surface s, son axe a, la circonférence du grand cercle c, on aura $s = a\,c$.

257. Il suit de-là 1°. Que *la surface de la Sphère est quadruple de celle de son grand cercle.* Car celle-ci (169) $= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}a\,c$, tandis que l'autre $= a\,c$.

258. 2°. Qu'*elle vaut la surface convexe du Cylindre circonscrit.* Car la hauteur de ce Cylindre est nécessairement a, & le contour de sa base est c ; donc sa surface est $a\,c$, ainsi que celle de la Sphère.

259. 3°. Qu'*elle est à la surface totale du Cylindre circonscrit* :: 2 : 3. Car pour avoir la surface totale du Cylindre, à sa surface convexe exprimée par $a\,c$ (230), il faut ajoûter celle de chaque base exprimée par $\frac{1}{4}a\,c$; ce qui donnera $a\,c + \frac{1}{2}a\,c$ ou $\frac{3}{2}ac$. Donc la surface de la Sphère sera à celle du Cylindre :: $a\,c : \frac{3}{2}a\,c$ :: 2 : 3.

260. REMARQUE. Par la manière dont on a trouvé la sur-

FIG.

face de la Sphère, on voit que celle d'une calotte, ou d'une zone Sphèrique quelconque, sera déterminée *en multipliant la portion de l'axe qu'elle renferme, ou bien son épaisseur, par la circonférence d'un grand cercle de la Sphère*; & qu'ainsi les surfaces de deux calottes ou de deux zones différentes de la même Sphère, sont entr'elles comme leurs épaisseurs.

261. THÉORÈME II. *La solidité de la Sphère a pour expression le tiers de sa surface multipliée par son rayon.*

DEM. Si l'on inscrit un polyëdre dans une Sphère, la différence de ces deux solides deviendra d'autant plus petite, que le polyëdre aura plus de faces; de façon que si ce nombre de faces est infini, la différence de ces deux solides sera nulle & la Sphère pourra être prise pour le polyëdre. Or, la solidité de celui-ci devra être exprimée par le tiers du produit de sa surface multipliée par son rayon. Car si sur chacune de ses faces on conçoit une pyramide qui a son sommet au centre du solide, & qui par conséquent a pour hauteur le rayon de la Sphère, la somme de ces pyramides formera la solidité du polyëdre, & leurs bases en seront la surface. Donc puisque chacune est exprimée par le tiers de sa base multipliée par sa hauteur (243), leur somme, ou bien la solidité du polyëdre, le sera par le tiers de la surface de ce solide multipliée par son rayon. Donc pareillement la solidité de la Sphère &c.

262. COROLL. Appellant donc la solidité ou le volume de la Sphère v, son axe a, sa surface s, celle de son grand cercle s, on aura $v = \frac{1}{6} a \times s$. Or, $s = 4 s$. Donc $v = \frac{1}{6} a \times 4 s = \frac{4}{6} a s = \frac{2}{3} a s$. Ce qui prouve *que la solidité de la Sphère peut encore être exprimée par les deux tiers de l'axe multiplié par la surface d'un grand cercle.*

Or, si l'on conçoit un Cylindre circonscrit à la Sphère & un cone inscrit dans ce Cylindre, le premier sera exprimé par $a s$, & le second par $\frac{1}{3} a s$. *Donc ces trois solides, savoir, le cone, la*

FIG. *Sphère & le Cylindre, seront dans le rapport des trois nombres* $\frac{1}{3}as$, $\frac{2}{3}as$, as: *ou bien comme* 1, 2, 3.

263. Remarque. Puisque les Sphères peuvent être considérées comme des polyèdres réguliers d'une infinité de faces, on pourra toujours les prendre pour des solides semblables; & par conséquent leurs surfaces étant comme les produits de deux dimensions proportionnelles, & leurs solidités comme les produits de trois de ces dimensions, on pourra dire que les premières sont entr'elles comme les quarrés, & les secondes comme les cubes ou de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou des circonférences de leurs grands cercles, &c.

SECTION QUATRIEME,

De la Trigonométrie plane.

CHAPITRE PREMIER.

Notions générales & propriétés des Sinus, Tangentes & Sécantes.

264. Définition. I. *La Trigonométrie plane est l'art de résoudre un triangle rectiligne quelconque, ou bien de déterminer la valeur de ses angles & de ses côtés.* On l'appelle *Plane*, pour la distinguer de la Trigonométrie *Sphérique*, qui apprend à faire les mêmes recherches sur des triangles formés par des arcs de cercle, qu'on conçoit tracés sur la surface d'une Sphère.

265. Observation. *Des six choses que présente l'idée d'un triangle, savoir, trois angles & trois côtés, si l'on n'en connoît que deux, il n'est pas possible d'avoir, sans indétermination, la valeur*

des quatre autres. Puisqu'on trouvera toujours plusieurs, & quel- FIG.
quefois même une infinité de triangles différens, qui présenteront les mêmes données, & auxquels on pourroit indifféremment appliquer la même solution. Ainsi les deux côtés du triangle C B D étant égaux aux deux côtés C D, C E, ou 107.
C F, C G, de tout autre triangle différent, la connoissance de ces deux côtés ne sauroit servir à résoudre aucun de ces triangles en particulier. Celle de deux & même de trois angles laisse la même indétermination; puisque une infinité de triangles différens, tels que A B C, *a b c*, pourvu qu'ils aient leurs 52.
côtés parallèles, doivent avoir leurs angles égaux. Enfin, si l'on ne connoît qu'un angle A & le côté adjacent A B, une infinité 108.
de triangles différens A B E, A B D, A B C, &c. présenteront les mêmes données; & si le côté connu B C est opposé 109.
à l'angle connu A, l'indétermination reste encore; puisque si du point C comme centre, & du rayon B C on décrit l'arc B D: qu'on en décrive un semblable du point D avec le rayon D C, du point E avec le rayon D E, les triangles A B C, A D C, A D E, &c. quoique différens entr'eux, auront tous le même angle A, & le côté opposé à cet angle, égal. *Il faut donc pour résoudre un triangle qu'on connoisse trois des six parties qui le composent, & que dans ce nombre il se trouve un côté.*

266. DÉFINITION II. *Le Sinus d'un arc ou de l'angle qu'il mesure, est la perpendiculaire abaissée d'une extrémité de cet arc, sur le rayon qui passe à l'autre extrémité.* Ainsi dans l'arc A B, si l'on 110.
abaisse du point A la perpendiculaire A P sur le rayon B C, elle sera le sinus de cet arc ou de l'angle A C B qu'il mesure. *Le cosinus d'un arc est le sinus de son complément*: ainsi A D étant le complément de A B, son sinus A O sera le cosinus de A B. Or, comme on a toujours A O = P C, il s'ensuit que *le cosinus d'un arc vaut la partie du rayon comprise entre le sinus & le centre.*

267. DÉFINITION III. *Le sinus verse d'un arc est la partie* B P *du rayon, comprise entre le sinus & l'arc.* On l'appelle *sinus verse* par opposition à A P, qui est appellé *sinus droit.* Le sinus

FIG. verse du complément d'un arc est son *cosinus verse*, tel est
110. D O par rapport à l'arc A B.

268. COROLL. I. On conclura de la définition ci-dessus, *que le sinus d'un arc est toujours la moitié de la corde qui soutend un arc double.* Car puisque le sinus A P est perpendiculaire à C B, il est la moitié de la corde A G, qui soutend l'arc A B G, lequel est double de A B (55 & 56) (*); d'où il s'ensuit :

269. 1°. *Que les sinus croissent les arcs croissant, jusqu'à ce que ceux-ci sont parvenus à 90°. : qu'ils décroissent ensuite jusqu'à 180°., & qu'enfin le plus grand de tous les sinus, savoir, celui de 90°, vaut le rayon.* Car les cordes des arcs doubles croissent depuis l'arc 0 jusqu'à celui de 90°; & alors cette corde est la plus grande de toutes, puisqu'elle vaut le diamètre; donc sa moitié, ou bien le sinus de l'arc de 90°, vaut le rayon. Mais depuis 90° jusqu'à 180°, les cordes des arcs doubles décroissent, & à ce terme cette corde est 0. Donc les sinus décroissent aussi depuis 90° jusqu'à 180°.

270. 2°. *Que le sinus d'un angle ou d'un arc est égal à celui de son supplément*; puisque la même corde A G soutend le double de l'arc A B, & le double de son supplément A D E.

271. 3°. *Que le cosinus d'un angle obtus* B C Q, *ou ce qui est le même, d'un arc* B D Q *plus grand que 90°, est égal à celui de son supplément* Q E; puisque l'un & l'autre est C R (266). Mais il faut observer que relativement au centre C, le cosinus C R tombe du côté opposé à celui où il tomboit lorsque l'angle B-C Q valoit moins de 90°. Ainsi (20) *le cosinus d'un angle obtus est négatif relativement aux cosinus des angles aigus qu'il contient, mais son sinus ne l'est pas.*

(*) C'est d'après cette propriété que M. Godin, de l'Académie des Sciences de Paris, a donné une Ethimologie très-vraisemblable du mot *Sinus*. Le cordes, a-t-il dit, s'appellent en Latin *Inscriptæ*, & les sinus étant leurs moitiés, ont dû être d'abord appellés *Semisses inscriptarum*, qu'on a écrit par abreviation de cette manière S. Inf. On a ensuite rapproché ces deux abréviations qui ont fait le mot *Sins*, on lui a donné une terminaison Latine, & il en est résulté celui de *Sinus*. (Voy. Mont. Hist. des Math. Addit. P. XXXIII).

272. COROLL. II. *Dans un triangle rectangle le sinus d'un angle aigu est le cosinus de l'autre*; puisqu'un de ces angles est le complément de l'autre. FIG.

273. REMARQUE. Si l'arc A B est si petit qu'on puisse, sans erreur sensible, le prendre pour une ligne droite, *son sinus verse* B D *vaut le quarré de cet arc, divisé par le diamètre* B E. Car alors B A E est un triangle rectangle en A (68), & le sinus A D est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypothénuse. Donc (124) $\div\div$ BD : BA : BE, ou bien $BD = \frac{BA^2}{BE}$. III.

274. DÉFINITION IV. *Si sur l'extrêmité du rayon* B C, *qui termine l'arc* A B, *on éleve la perpendiculaire* B T, *jusqu'à la rencontre du rayon prolongé* C A, *qui passe à l'autre extrêmité du même arc, elle sera la tangente de cet arc* A B, *ou de l'angle* A C B *qu'il mesure.* D S tangente du complément A D sera *la cotangente* de ce même arc A B. IIO.

COROLL. On peut conclure de cette définition :

275. 1°. *Que depuis* 0 *jusqu'à* 90° *la tangente d'un arc augmente & sa cotangente diminue.*

276. 2°. *Qu'à ces deux termes il n'y a point de tangente*; puisque dans un cas il n'y a point d'arc; & que dans l'autre, le rayon étant parallèle à la tangente, tirée de l'extrêmité de l'arc, il ne peut y avoir de rencontre entr'eux (*).

277. 3°. *Qu'au delà de* 90° *plus l'arc ou l'angle augmente, plus sa tangente diminue, de façon qu'elle égale toujours celle de son supplément.* Car pour l'angle obtus B C Q la tangente est B *t*, ainsi que pour son supplément B C G; & plus l'angle B C Q devient obtus, plus le point *t* se rapproche du point B. Il faut cependant observer qu'alors la tangente est prise au-dessous du

(*) On dit communément que la tangente d'un arc de 90° est infinie, tandis que nous disons ici que cet arc n'en a aucune. Ces deux manières de s'exprimer, qui semblent si opposées, ne le sont cependant qu'en apparence.

FIG. rayon B C, tandis qu'elle étoit prise au-dessus, lorsque cet
110. angle B C Q étoit aigu ; & qu'ainsi *un angle devenant obtus, la situation de sa tangente est opposée à celle qu'elle avoit, cet angle étant aigu.* On voit assez qu'il en est de même pour sa cotangente D V ; & que plus l'angle B C Q devient obtus, plus cette ligne D V augmente.

278. 4°. *Que la tangente de 45° est égale au rayon.* Car alors le triangle B C T est yzocelle, puisque l'angle en C étant de 45°, l'angle en T doit l'être aussi. Donc B T = B C.

279. DÉFINITION V. *La sécante d'un arc* A B *n'est autre chose que le rayon* C T, *qui passe par une extrémité de cet arc, prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente* B T, *tirée de l'autre extrémité.*

280. COROLL. 1°. La sécante d'un arc ou d'un angle o est donc égale au rayon, puisqu'alors le point T tombe sur le point B. 2°. Depuis l'arc o la sécante augmente & la cosécante diminue jusqu'à celui de 90°, & là il cesse d'y avoir une sécante ; puisqu'il n'y a plus de concours entre le rayon & la tangente. 3°. Au délà de 90° la sécante reparoît, pour décroître jusqu'à 180°, où elle vaut encore le rayon.

281. THÉORÈME I. *Dans tout triangle les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.*

DEM. Si l'on inscrit le triangle dans le cercle, chacun de ses côtés sera la corde d'un arc double de celui qui mesure l'angle opposé (68) : & par conséquent la moitié de chaque côté sera le sinus de cet angle. Les divers côtés seront donc entr'eux, comme les sinus des angles opposés.

282. THÉORÈME II. *Le sinus d'un arc de 30° vaut la moitié du rayon de cet arc.*

DEM. La corde qui soutend l'arc de 60° vaut le rayon (140) ; donc le sinus de 30°, qui est la moitié de cette corde (268), vaut la moitié du rayon.

283. REMARQUE Les cordes des arcs doubles n'étant pas proportionnelles à ces arcs (150), les moitiés des arcs & des cordes

cordes ne sauroient être en proportion. C'est pourquoi *les sinus* FIG.
de deux arcs ne sont point entr'eux comme ces arcs ; mais ils sont plus grands par rapport aux petits arcs, que par rapport aux grands.

284. THÉORÈME III. *Pour un arc quelconque* A B *on a* 110.
ces deux proportions :

cos A B : *sin* A B :: R : *tang* A B.

÷÷ *cos* A B : R : *sec* A B.

DEM. Les triangles équiangles A P C, T B C, donnent

P C : A P :: B C : B T.

P C : A C :: B C : C T.

Donc, &c.

285. REMARQUE. Nous verrons plus bas (291) que connoissant le sinus d'un arc, on connoit son cosinus ; & par conséquent on a, d'après le Théorème précédent, sa tangente & sa sécante.

286. COROLL. De ce que l'on a ÷÷ *cos* A B : R : *sec* A B, on peut conclure que pour un autre arc N B, on auroit également ÷÷ *cos* N B : R : *sec* N B. Donc *cos* A B × *sec* A B = *cos* N B × *sec* N B, ou bien *cos* A B : *cos* N B :: *sec* N B : *sec* A B, ce qui exprime que *les Cosinus de deux arcs sont en raison inverse de leurs sécantes.*

287. THÉORÈME IV. *Le rayon d'un arc quelconque est moyen proportionnel entre la tangente & la cotangente de cet arc.*

DEM. Les Triangles semblables C B T, C D S, donnent B T : B C :: C D : D S, ou bien ÷÷ *tang* B A : R : *cot* B A.

COROLL. Comme la même proportion aura lieu pour tous autre arc B N, c'est-à-dire, qu'on aura ÷÷ *tang* B N : R : *cot* B N, il s'ensuit que quels que soient les deux arcs B N & B A, on aura, *tang* B A × *cot* B A = *tang* B N × *cot* B N ; ou bien, *tang* B A : *tang* B N :: *cot* B N : *cot* B A ; ce qui désigne *que les tangentes de deux arcs sont en raison inverse de leurs cotangentes.*

288. THÉORÈME V. *La somme des sinus de deux arcs est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme de ces arcs est*

FIG. *à la tangente de leur demi-différence.*

112. DEM. 1°. Si l'on a les deux arcs B A, B D, dont les sinus sont A p, D P : que du point A on mène A c parallèle au diamètre B b, & qu'on prolonge D P jusqu'en G, on aura A p = E P, D P = P G, B G = B D. Donc la somme des deux sinus sera G E, & leur différence D E ; tandis que la somme des deux arcs B A, B D, sera G A & leur différence A D.

2°. Si du point c on tire les droites c D, c G, & que d'un rayon C c on décrive l'arc dg, qui passe au centre C des arcs donnés, l'angle A c G aura pour mesure ag ou bien $\frac{1}{2}$ A G (67). Donc $ag = \frac{1}{2}$ A G, & pour la même raison $ad = \frac{1}{2}$ A D. Par conséquent si on fait passer au point a la ligne T t perpendiculaire sur le rayon ac, la partie a T sera la tangente de ag demi-somme des arcs donnés, & la partie at sera la tangente de ad leur demi-différence. Or, (106) G E : D E :: a T : at. Donc la somme des sinus de deux arcs, &c.

289. COROLL. Si donc on désigne les deux angles d'un triangle par A, a : les côtés opposés par C, c : leurs sinus par S, s : on aura, $S + s : S - s :: tang \frac{A + a}{2} : tang \frac{A - a}{2}$. Mais par ce que nous avons dit plus haut (281) $S : s :: C : c$, ou bien $S + s : S - s :: C + c : C - c$. Donc en substituant on aura, $C + c : C - c :: tang \frac{A + a}{2} : tang \frac{A - a}{2}$; c'est-à-dire, *que la somme de deux côtés d'un triangle quelconque est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de leur demi-différence.*

290. THÉORÈME VI. *Dans tout triangle rectangle on a ces deux proportions : 1°. Le rayon est au sinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle : 2°. Le rayon est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit appartenant à cet angle aigu, est à l'autre côté de l'angle droit.*

DEM. 1°. Les sinus des angles d'un triangle étant propor-

tionnels aux côtés opposés (281), on a ici : le sinus de l'angle droit ou le rayon (269) est au sinus d'un angle aigu, comme l'hypothénuse est au côté opposé à cet angle. FIG.

2°. Dans le triangle rectangle A B C, si du point C & d'un rayon C A on décrit l'arc A *a*, il est évident que A B sera la tangente de cet arc ou de l'angle en C. Donc R : *tang* C :: A C : A B. 113.

291. PROBLÈME I. *Connoissant le sinus d'un arc, trouver son cosinus, & réciproquement.*

SOL. Le sinus A P & le cosinus P C sont toujours les deux côtés d'un triangle rectangle, dont le rayon A C est l'hypothénuse. Donc on a (173) $PC = \sqrt{AC^2 - AP^2}$, & $AP = \sqrt{AC^2 - PC^2}$, ou bien connoissant le sinus d'un arc, pour avoir le cosinus, *il faut soustraire le quarré du sinus de celui du rayon, & prendre la racine quarrée du reste. Et connoissant le cosinus, pour avoir le sinus, il faut soustraire le quarré du cosinus de celui du rayon & prendre la racine quarrée du reste.* 110.

292. COROLL. En soustrayant la valeur du sinus ou du cosinus du rayon, on a le cosinus verse ou le sinus verse ; *donc de ces quatre choses : le sinus, le cosinus, le sinus verse, le cosinus verse ; si l'on en connoît une, on connoît toutes les autres.*

293. PROBLÈME II. *Connoissant le sinus d'un arc* A D B, *trouver celui de sa moitié* A D. 114.

SOL. Le triangle rectangle A B P donne $AB = \sqrt{AP^2 + PB^2}$; donc $\frac{AB}{2}$ ou bien *sin* $AD = \frac{\sqrt{AP^2 + PB^2}}{2}$.

294. PROBLÈME III. *Connoissant le sinus d'un arc* B D, *trouver* A P *sinus d'un arc double* A D B.

SOL. Le rayon C D étant perpendiculaire à la corde A B, les deux triangles B A P, B C Q, sont rectangles & semblables. Donc on a, $BC : CQ :: BA : AP = \frac{CQ \times BA}{BC}$, c'est-à-dire, *que le sinus d'un arc double d'un arc donné, vaut le cosinus*

FIG. *de celui-ci, multiplié par le double de son sinus, & divisé par le rayon.*

115. 295. PROBLÈME IV. *Connoissant les sinus de deux arcs* B D, D E, *trouver le sinus & le cosinus, tant de leur somme que de leur différence.*

SOL. 1°. Si l'on prolonge le sinus P E jusqu'en A, l'arc A D = D E, & par conséquent la différence des deux arcs donnés sera B A, dont le sinus est A H; tandis que leur somme sera B E, qui a pour sinus E F. Or, pour trouver l'expression de ces deux lignes, qu'on tire d'abord P *p*, A *a*, parallèles au rayon B C: P Q perpendiculaire à ce même rayon, & l'on aura P Q = *p* F : E *p* = *p a* (102); puisque E P = P A. De plus, le triangle P Q C sera semblable au triangle D G C; & par conséquent D C : D G :: P C : P Q; ou bien, R : *sin* B D :: *cos* D E : P Q = $\frac{\text{sin BD} \times \text{cos DE}}{\text{R}}$. Le triangle E P *p* sera semblable au triangle D G C, & l'on aura D C : G C :: E P : E *p*; ou bien R : *cos* B D :: *sin* D E : E *p* = $\frac{\text{sin DE} \times \text{cos BD.}}{\text{R}}$

Donc pour exprimer à la fois P Q + E *p*, ou E F sinus de la somme: & P Q — E *p*, ou A H, sinus de la différence des deux arcs, B D, D E, on aura $\frac{\text{sin BD} \times \text{cos DE} \pm \text{sin DE} \times \text{cos BD.}}{\text{R}}$

2°. Pour trouver les cosinus F C, H C, les triangles P Q C, D G C, donnent D C : G C :: P C : C Q = $\frac{\text{GC} \times \text{PC} =}{\text{DC}}$ $\frac{\text{cos BD} \times \text{cos DE}}{\text{R}}$; & les triangles E P *p*, D G C, donnent D C : D G :: E P : P *p* = $\frac{\text{DG} \times \text{EP}}{\text{DC}} = \frac{\text{sin BD} \times \text{sin DE.}}{\text{R}}$

Or, C F, cosinus de la somme des deux Arcs B D, D E, vaut C Q — P *p*; & C H cosinus de leur différence vaut C Q + P *p*, puisque P *p* = Q F = Q H (102). Donc le cosinus de la somme & de la différence de ces arcs sera $\frac{\text{cos BD} \times \text{cos DE} \mp \text{sin BD} \times \text{sin DE.}}{\text{R}}$

FIG

CHAPITRE II.

De la résolution de toute sorte de triangles rectilignes.

296. POUR résoudre les triangles rectilignes, on a d'abord cherché à connoître les sinus qui répondent aux divers angles, afin d'en pouvoir conclure la valeur de ces angles. Pour cela on a supposé que le rayon d'un cercle quelconque fut divisé en un très-grand nombre de parties égales, p. ex. en 100000, & l'on a fixé tantôt exactement, tantôt par approximation, combien de ces parties sont renfermées dans le sinus d'un angle donné quelconque. On a construit des tables à plusieurs colonnes, dont l'une contient les différens arcs en degrés & minutes; & dont les autres contiennent les sinus, tangentes & sécantes de ces arcs, calculés d'après la valeur convenue du rayon des tables. Par ce moyen dès qu'on connoît un arc, on trouve vis-à-vis son sinus; & réciproquement, connoissant un sinus, on voit à quel arc il répond. Mais comme les grands nombres qui entrent dans ces calculs, étoient très-incommodes pour les multiplications & les divisions, on a mis à côté leurs Logarithmes, par le moyen dèsquels ces opérations se changent en de simples additions & soustractions. Les problèmes suivants en fourniront divers exemples.

297. PROBLÈME I. *Mesurer un angle.*

SOL. Pour mesurer un angle, on emploie le *Graphomètre* ou le *Rapporteur*, suivant que l'angle est décrit ou sur le terrein ou sur le papier.

Le Graphomètre est un demi-cercle A D B, dont la circonférence est divisée en degrés, & dont le centre C porte sur un pied C P, de façon que le plan de l'instrument est mobile en tout sens. Un de les diamètres A B est fixe, & l'autre E F (qu'on 11

FIG. appelle l'*Alidade*) est mobile sur le centre C. Ils portent cha-
116. cun à leurs extrémités des *Pinnules*, qui ne sont autre chose que des plaques de cuivre, élevées perpendiculairement sur ces diamètres, & percées d'un petit trou ou d'une petite fente. Si l'on veut mesurer sur le terrein un angle M C N, on s'assure par le moyen d'un aplomb, que le centre de l'instrument répond au sommet de l'angle, on le rend parallèle au plan de cet angle, & puis ayant visé à travers les pinnules A & B, un piquet élevé sur le point N, on tourne l'alidade E F, jusqu'à ce qu'on voie, à travers ses pinnules, un autre piquet, placé sur le point M; alors le nombre des degrès, qui se trouvent dans l'arc B F, détermine la valeur de l'angle M C N.

117. Le Rapporteur est un demi-cercle A F B, divisé en ses degrès, dont on se sert, ou bien pour mesurer un angle D C E, tracé sur le papier, ou bien pour lever un angle connu, tracé sur le terrein. Dans le premier cas on place le centre de l'instrument au sommet de l'angle, son diamètre A B, sur l'alignement d'un côté C E, & le nombre des degrès contenus dans l'arc B G, donne la valeur de l'angle. Dans le second cas, on prend l'arc B G du même nombre de degrès que l'angle donné, & ayant marqué sur le papier les points C, B, G, on tire les droites C B, C G, qui forment l'angle B C G, égal à celui qu'on veut lever & rapporter sur le papier.

298. PROBLÈME II. *Connoissant dans un triangle quelconque un côté & deux angles, trouver le troisième angle & les deux autres côtés.*

SOL. 1°. Le troisième angle est évidemment connu, puisqu'il est le supplément des deux autres (78).

118. 2°. Dès qu'on connoît les trois angles du triangle A B C, avec un côté quelconque A B, on a les deux autres côtés A C, B C, par les proportions suivantes :

$$\sin C : \sin B :: AB : AC.$$
$$\sin C : \sin A :: AB : BC.$$

299. PROBLÈME III. *Etant donnés deux côtés & un angle, trouver tout le reste.*

SOL. Ou bien l'angle connu est renfermé entre les côtés connus, ou bien il est opposé à l'un d'eux. FIG.

Premier cas. Si dans le triangle A B C, on connoît seulement l'angle B, & les côtés B A, B C, qui le forment, on cherchera d'abord la valeur des deux autres angles A & C, dont on connoît la somme (78), par cette analogie, $AB + BC : BA - BC :: tang \frac{A+C}{2} : tang \frac{A-C}{2}$, dans laquelle les trois premiers termes étant évidemment connus, le quatrième fera trouver la tangente de la demi-différence des deux angles A & C; & par conséquent la demi-différence de ces mêmes angles. Si donc on l'ajoûte à la demi-somme, on aura le plus grand angle C (qu'on connoîtra, parce qu'il sera opposé au plus grand côté donné B A); & si on l'en soustrait, on aura le plus petit A. Tous les angles étant connus, pour avoir le côté inconnu A C, on dira, *sin* A : *sin* B :: B C : A C. 118.

Second cas. Si l'angle donné A est opposé à un des côtés connus B C, on cherchera d'abord l'angle C, en faisant, B C : B A :: *sin* A : *sin* C; ce qui donnera la valeur du sinus de l'angle C, ou bien cet angle lui-même, par le moyen des tables. Les deux angles A & C étant connus, on aura le troisième B, qui sera leur supplément, & alors le côté inconnu A C se trouvera en disant, *sin* A : *sin* B :: B C : A C.

300. REMARQUE. Il faut observer ici que dans ce second cas, l'angle C n'étant connu que par son sinus, & la même valeur de sinus appartenant, soit à l'angle aigu C, soit à l'angle obtus A D B, qu'on suppose supplément du premier, le même calcul doit se rapporter indifféremment à ces deux angles, & par conséquent aux deux triangles A B C, A B D. Cela indique qu'alors le problème a deux solutions, & que l'état de la question doit indiquer celle qui convient au cas dont il s'agit, en faisant savoir si l'angle opposé au côté A B est aigu ou obtus.

301. PROBLÈME IV. *Connoissant les trois côtés du triangle* A B C, *trouver ses trois angles.*

FIG. 118. SOL. Si A C eſt le plus grand côté, on eſt aſſuré (81) que B eſt le plus grand angle, & qu'ainſi la perpendiculaire B P tombera au-dedans du triangle (83). On a donc cette proportion (155), $AC : AB + BC :: AB - BC : AP - PC$, par laquelle on connoîtra la différence des deux ſegments A P, P C: & comme on connoît leur ſomme A C, on aura (*Alg.* 327) la valeur de chacun en particulier. On pourra donc réſoudre le triangle rectangle A B P (299), puiſque, outre l'angle droit, on connoîtra ſes deux côtés A B & A P; & l'on aura l'angle A, lequel étant connu, le triangle donné A B C ſera réſolu par le problème précédent.

302. REMARQUE. On voit aſſez que pour connoître la différence des deux ſegments A P, P C, il n'eſt pas néceſſaire dans la pratique, d'abaiſſer la perpendiculaire B P, mais qu'il ſuffit de faire cette proportion : *le plus grand côté eſt à la ſomme des deux autres, comme leur différence eſt à x, dont la valeur ſera la différence des ſegments.*

Nous allons rapporter ici quelques exemples, auxquels on fera l'application des problêmes précédents.

303. EXEMPLE I. *On demande de trouver la diſtance de deux* 119. *endroits* A *&* B, *dont on peut approcher.*

SOL. Ayant choiſi une ſtation commode en C, meſurés d'abord l'angle A C B, puis les côtés A C, B C; & réſolvant le triangle A B C (299), dans lequel vous connoiſſez deux côtés & un angle, vous trouverez le côté inconnu A B.

$$\text{Suppoſons.... } \begin{cases} AC = 60 \text{ Toiſes} \\ BC = 86 \text{ T} \\ C = 57^\circ \end{cases}$$

$$\text{ce qui donnera } \begin{cases} AC + BC = 146 \text{ T.} \\ AC - BC = 26 \text{ T.} \\ \dfrac{A + B}{2} = 61^\circ\ 30' \end{cases}$$

Donc (*Alg.* 288) Log 146. Log 26 :: Log *tang* 61°. 30'. Log *tang* $\frac{A - B}{2}$

Log

FIG. 119.

$$\text{Or, } \begin{cases} Log\ 146 \ldots\ldots = 2.\ 1643529 \\ Log\ 26 \ldots\ldots = 1.\ 4149733 \\ Log\ tang\ 61^\circ\ 30' = 10.\ 2652356 \end{cases}$$

Donc $Log\ tang\ \frac{A-B}{2} = 9.\ 5158560$ & partant $\frac{A-B}{2} = 18^\circ\ 9'$.

Or, $A > B$, donc $A = 79^\circ\ 39'$ & $B = 43^\circ\ 21'$.

On a donc (281) $sin\ 79^\circ\ 39' : sin\ 57^\circ :: 86^T : AB$.

$$\text{Mais } \begin{cases} Log\ sin\ 79^\circ\ 39' = 9.\ 9928753 \\ Log\ sin\ 57^\circ = \ldots\ 9.\ 9235914 \\ Log\ 86 = \ldots\ldots 1.\ 9344984. \end{cases}$$

Donc $Log\ AB = 1.\ 8652145$, & partant $AB = 74^T$.

204. EXEMPLE II. *On demande la distance de deux points A & B, dont un seul A est accessible.*

SOL. Ayant choisi pour station le point C, d'où l'on peut découvrir les points A & B, mesurés l'angle C, l'angle A, & le côté AC; on conclura de là l'angle B, & l'on établira cette proportion pour avoir le côté AB.

$$sin\ B : sin\ C :: AC : AB.$$

$$\text{Supposons } \begin{cases} C = 64^\circ \\ A = 80^\circ, \text{ \& partant } B = 36^\circ \\ AC = 236^T. \end{cases}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} Log\ sin\ 36^\circ = 9.\ 7692187 \\ Log\ sin\ 64^\circ = 9.\ 0536602 \\ Log\ 236 \ldots = 2.\ 3729120. \end{cases}$$

Donc $Log\ AB = 1.\ 6573535$; & partant $AB = 45^T$.

205. EXEMPLE III. *Mesurer la distance de deux lieux inaccessibles A & B.*

SOL. Ayant mesuré une base ED, telle que de ses points E, C, D, on puisse voir A & B, prenés ensuite du point C les angles ACB, ACE, d'où vous conclurés la valeur de leur supplément BCD: prenés la mesure des angles E & D, ainsi que des côtés EC, CD; & vous connoîtrez dans chaque

FIG. triangle A E C, B D C, deux angles & un côté ; ce qui suffit pour avoir les deux côtés A C, B C. Donc dans le triangle A B C, outre l'angle C, vous connoîtrés les deux côtés qui le forment, ce qui suffira pour avoir le troisième côté A B.

206. EXEMPLE IV. *On demande de trouver l'élévation per-*
120. *pendiculaire d'une montagne au-dessus de la ligne horizontale* A B.

SOL. Ayant choisi deux stations commodes A & B, d'où l'on puisse voir le sommet S, & ayant mesuré à la toise la base A B, prenez la valeur des angles S A B, S B A, & vous aurez le côté S B (298). Celui-là étant connu, prenez l'angle S B E, dont le côté B E est horizontal, & alors dans le triangle rectangle S B E, vous connoîtrez l'angle aigu en B, l'angle droit en E, & l'hypothénuse S B. Il sera donc aisé de le résoudre & d'avoir le côté S E, qui est la hauteur de la montagne.

207. EXEMPLE V. *Trouver la hauteur d'une tour, ou d'un objet quelconque, élevé perpendiculairement sur l'horizon, soit qu'on puisse ou qu'on ne puisse pas en approcher.*

121. SOL. 1°. Si la tour A B est accessible, mesurez sur une ligne horizontale, la distance C F du pied de la tour à un point F, que vous choisirez de façon que l'angle en F soit à peu près de 45° : prenez cet angle, & dans le triangle rectangle A C F, vous connoîtrez, outre l'angle droit en C, les deux angles aigus en F & en A ; ce qui suffit pour trouver la valeur du côté A C, auquel ajoûtant la hauteur de l'instrument F G, vous aurez la hauteur entière de la tour.

2°. Si la tour est inaccessible, choisissez deux stations en D & en F, telles que les angles D A F, F A C, ne soient pas trop aigus : prenez la valeur des angles en F, & de l'angle en D, ainsi que la longueur de la ligne D F : & alors connoissant un côté & deux angles du triangle D A F, vous aurez la valeur de F A. Celle-là étant connue, on a dans le triangle rectangle F A C, l'angle en F, l'angle droit en C, & l'hypothénuse F A, ce qui suffit (299), pour trouver le côté A C, qui est la hauteur de la tour.

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES,

Sur les Sections Coniques.

CHAPITRE PREMIER.

De la Théorie des lignes Courbes en général.

208. TOUTES les Courbes qu'on peut décrire sur un plan, FIG. sont ou *régulières* ou *irrégulières*. On appelle *régulières*, celles qui sont décrites suivant une loi constante & uniforme, telle est par exemple la circonférence du cercle, qui est décrite suivant cette loi, que chacun de ses points est à égale distance du centre. Les courbes *irrégulières* sont celles qui ne sont assujetties à aucune loi, tels sont les traits qu'un Écrivain trace au hazard sur le papier. Ces sortes de courbes ne sauroient être l'objet de la Géométrie.

Descartes imagina le premier de déduire de la description d'une courbe régulière une équation indéterminée, qui exprimat la loi, suivant laquelle la courbe est décrite, ou du moins qui en fut une conséquence nécessaire; & cette équation devant désigner une propriété qui convint indistinctement à tous les points de la courbe, il l'appella *l'équation de la courbe*. Réciproquement, ayant une équation indéterminée quelconque, ce même Géomètre chercha quelle étoit la courbe à laquelle elle

FIG. appartenoit, ou bien qu'elle étoit la loi, ſuivant laquelle il falloit décrire cette courbe. Tout ce que nous allons dire ici préſentera des exemples de cette double manière d'enviſager les lignes courbes, qui paſſe, avec raiſon, pour une des plus heureuſes découvertes qu'on ait faites en Mathématiques.

209. DÉFINITIONS. Soient les deux droites indéfinies
122. Q q, R r, qui ſe coupent en A, ſous un angle quelconque (ici on le ſuppoſe droit, pour une plus grande facilité); qu'on prenne ſur Q q la partie A C, que j'appelle a, avec laquelle du point C, on décrira le cercle A M B m. Alors la ligne R r ſera appellée relativement à cette courbe, *l'Axe des ordonnées*, & Q q *l'Axe des abſciſſes*. Le point A ſera *l'Origine* des abſciſſes & des ordonnées. Toute ligne comme M P, qui ſera abaiſſée d'un point de la circonférence parallélement à R r, ſera une *ordonnée*, & la partie A P ſera ſon *abſciſſe*. Les ordonnées & les abſciſſes ſeront appellées, d'un nom commun, les *coordonnées*. Et par rapport à leurs ſituations oppoſées relativement à l'axe des abſciſſes, toutes les ordonnées qui ſeront au deſſus de cet axe ſeront dites *poſitives*, & celles qui ſeront au-deſſous, ſeront dites *négatives*. Il en ſera de même des abſciſſes relativement à l'axe des ordonnées, c'eſt-à-dire, que nous appellerons *poſitives*, celles qui ſont à la droite, & *négatives* celles qui ſont à la gauche de cet axe.

On eſt convenu que l'abſciſſe d'une courbe ſeroit déſignée par x, & l'ordonnée par y. Mais comme chaque point de la courbe a ſon abſciſſe & ſon ordonnée particulière, & que cependant on les déſigne toutes indiſtinctement par x & par y, ces lettres expriment plutôt des indéterminées que des inconnues.

210. Cherchons préſentement l'équation au cercle A M B m, dont le centre eſt en C, & dont le rayon A C eſt une quantité connue qu'on a priſe à volonté ſur A q, & qu'on déſigne par a; ce qui donnera pour ſon diamètre A B, la quantité connue $2a$; d'ailleurs, puiſque A P eſt appellé x, la diſtance P C

de l'ordonnée au centre C sera nécessairement $a - x$, toutes les fois que cette ordonnée M P tombera entre l'origine A & le centre C; & cette distance p C sera $x - a$, lorsque l'ordonnée $m\,p$ tombera au-delà du centre relativement à l'origine A. En outre, en supposant, comme ici, les deux axes perpendiculaires, l'un à l'autre, on a pour un point quelconque M, un triangle rectangle tel que M P C, qui donne (173) $MP^2 = CM^2 - PC^2$. Or, M P est y, C M est a, P C est $a - x$ ou $x - a$, qui ont le même quarré. Donc $y^2 = a^2 - a^2 + 2ax - x^2 = 2ax - x^2 = \overline{2a - x} \times x$: & comme $2a - x =$ B P, & $x =$ A P. l'équation précédente exprime, *que pour un point quelconque de cette courbe, le quarré de l'ordonnée vaut le rectangle fait sur les deux segments correspondants du diamètre*; ou ce qui est le même, *que la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la courbe sur le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre*, ainsi que la Géométrie nous l'avoit enseigné plus haut (147).

FIG. 122.

211. Comme il est loisible de placer l'origine où l'on veut, on auroit pu la placer au centre C, & on auroit eu la même propriété exprimée en termes différens. Car alors C P $= x$, A P $= a - x$ & B P $= a + x$. Or, le triangle rectangle M P C donne, $\overline{MP}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{CP}^2$, ou bien $y^2 = a^2 - x^2 = \overline{a - x} \times \overline{a + x}$, ou $\div\div\, a - x : y : a + x$. Ce qui prouve encore *que la perpendiculaire* M P *est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre.*

212. Supposons maintenant qu'on s'occuppe de l'opération qui est l'inverse de la précédente, c'est-à-dire, qu'ayant l'équation indéterminée $yy = 2ax - x^2$, on cherche la courbe, à laquelle elle appartient. Pour y parvenir on prendra d'abord dans cette équation la valeur de y, ce qui donne $y = \pm \sqrt{2ax - xx}$; ensuite on tracera les deux axes ou les deux droites indéfinies R r, Q q (qu'on suppose toujours ici se couper à angles droits) : plaçant l'origine en A, on supposera que

FIG. 122. du côté des abſciſſes poſitives on fait x ſucceſſivement égale à $0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +$ &c., ce qui donnera pour les valeurs correſpondantes de y (en ſuppoſant que la quantité connue $2a = 6$) : $0, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{8}, \pm 3, \pm\sqrt{8}, \pm\sqrt{5}, \pm 0$; & au-delà de ce terme, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant $x > 6$, toutes les valeurs de y ſeront imaginaires, puiſque dans l'équation $y = \pm\sqrt{2ax - xx}$, le terme négatif x^2 ſera plus grand que le poſitif $2ax$.

Cherchant enſuite les valeurs des y du côté des x négatives, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant celles-ci ſucceſſivement égales à $0, -1, -2, -3$, &c. on verra que la première eſt 0, & que toutes les autres ſont imaginaires, puiſque x étant négative, le terme $2ax$ devient néceſſairement négatif dans l'équation $y = \sqrt{2ax - xx}$; & de tout cela on conclura :

213. 1°. Que la courbe dont l'équation eſt $y^2 = 2ax - xx$, paſſe par l'origine A; puiſque en ſuppoſant $x = 0$, on a $y = 0$; & qu'il n'y a évidemment d'autre point que l'origine, qui puiſſe correſpondre à la fois à une abſciſſe 0 & à une ordonnée 0.

214. 2°. Que cette courbe ne s'étend point du côté des abſciſſes négatives, puiſque les ordonnées étant toutes imaginaires de ce côté, aucune ligne ne ſauroit en exprimer la valeur.

215. 3°. Que du côté des abſciſſes poſitives, la courbe s'écarte d'abord également de l'axe des abſciſſes, tant en deſſus, qu'en deſſous; puiſque à chaque valeur poſitive de x, répondent d'abord deux ordonnées égales & croiſſantes, l'une poſitive, l'autre négative, ſavoir, $0, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{8}, \pm 3$: qu'elle s'en rapproche enſuite dans le même ordre; puiſque ſes ordonnées décroiſſent également, en devenant $\pm 3, \pm\sqrt{8}, \pm\sqrt{5}, 0$; & qu'enfin l'ordonnée redevient 0, ou bien que la courbe rencontre encore l'axe des abſciſſes, lorſqu'on fait $x = 2a = 6$.

216. 4°. Que la courbe en queſtion ne s'étend pas au-delà du point ou l'abſciſſe vaut $2a$ ou 6; puiſque faiſant $x > 2a$, la valeur de y eſt imaginaire dans l'équation $y = \sqrt{2ax - xx}$; & qu'ainſi la courbe eſt *rentrante*.

217. 5°. Enfin, que là où l'abſciſſe eſt ſuppoſée $= 3$, ou bien $= a$, la double ordonnée devient ± 3, c'eſt-à-dire, la plus grande de toutes, & égale à l'abſciſſe ; d'où l'on voit, que ſi on prend $AB = 2a$ & $AC = a$, la courbe en queſtion s'écartera également du point C, tant au-deſſus qu'au deſſous de AB, & tant à la droite qu'à la gauche de ce même point ; & qu'ainſi ſa courbure eſt parfaitement uniforme en tout ſens. Faiſant donc paſſer une courbe par les points A & B, & par les extrémités des ordonnées (qu'on peut ſuppoſer plus rapprochées pour la tracer plus exactement) on verra qu'elle n'eſt autre choſe que le cercle A M B m, dont le centre eſt en C, & dont le diamètre eſt A B. FIG. 122.

218. Remarque. Dèſqu'on ſuppoſe les ordonnées M P, mp, perpendiculaires aux abſciſſes, chaque ordonnée exprime la diſtance d'un point de la courbe M ou m, à l'axe des abſciſſes: & réciproquement, chaque abſciſſe A P, A p, exprime les diſtances de ces mêmes points M & m à l'axe des ordonnées ; puiſque les perpendiculaires M N, $m\,n$, ſur l'axe des ordonnées R r, meſurent ces diſtances, & qu'elles ſont égales à A P & A p. D'où l'on conclura:

219. 1°. Que ſi l'équation d'une courbe eſt telle, qu'en ſuppoſant une certaine valeur à x, on rende $y = 0$, la courbe rencontrera l'axe des abſciſſes à une diſtance de l'origine, égale à cette abſciſſe : & réciproquement, s'il y a une valeur de y, qui rende $x = 0$, la courbe rencontrera l'axe des ordonnées à une diſtance de l'origine, exprimée par cette ordonnée.

220. 2°. Que s'il n'y a aucun terme conſtant (*) dans l'équation d'une courbe, elle paſſe par l'origine ; puiſque alors x devenant 0, y devient 0. Mais s'il y en a un, elle n'y paſſe pas ; puiſque dans ce cas la ſuppoſition de $x = 0$, ne rend point y égale à 0. Auſſi avons-nous vu plus haut (210), que quand on

(*) On entend par *terme conſtant*, celui où les variable x ou y, n'entrent pas.

FIG. prend pour l'équation au cercle $yy = 2ax - xx$, l'origine est dans un point de la circonférence ; & que quand on a pour cette équation $y^2 = a^2 - x^2$, l'origine est au centre (211).

221. DÉFINITIONS I. *On appelle sommets d'une courbe, tous les points ou cette courbe coupe l'axe des abscisses.* De façon qu'à l'inspection de l'équation, on voit 1°. Si la courbe a des sommets : 2°. Combien elle en a : 3°. Que celles dont l'équation est du second degré, n'en peuvent avoir plus de deux.

222. II. *Les lignes sont distinguées en divers ordres, suivant les différents degrés de l'équation qui en exprime la nature.* Ainsi l'équation $ay + bx + c = 0$, exprime une ligne du premier ordre, c'est la ligne droite : $y^2 - 2ax + xx = 0$, exprime une ligne du second ordre, c'est le cercle, &c.

223. Soit l'équation du second degré $xy = a$, qui donne $y = \frac{a}{x}$: supposons que sur l'axe des abscisses & du côté des x
123. positives, on prenne $AT = a = 1$, $AS = 2$, $AO = 3$, & ainsi de suite pour les autres abscisses. D'après cette supposition, les valeurs correspondantes des ordonnées T M, S M, O M, &c. seront $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. jusqu'à l'infini ; de façon que les y diminuant toujours à proportion que les x positives augmentent, la courbe jettera une branche infinie, qui de ce côté s'approchera toujours de l'axe des abscisses, sans jamais le rencontrer.

Supposons présentement que prenant les x toujours positives, on leur donne différentes valeurs au-dessous de l'unité ou de A T, & qu'on les fasse $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ &c ; alors les ordonnées correspondantes, toutes placées entre A & T, seront $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ ou 2, $\frac{1}{\frac{1}{3}}$ ou 3, $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ ou 4, &c. ainsi de suite toujours en croissant, jusqu'à l'infini, à proportion que les abscisses décroîtront. La branche de la courbe où elles se termineront, s'étendra donc à l'infini le long de l'axe A R des ordonnées ; & ne rencontrera jamais cet axe

axe, ou bien ne le rencontrera qu'à une distance infinie de l'origine. Par conséquent cette courbe jettera deux branches infinies dans l'angle R A q des coordonnées positives. Si l'on suppose les x négatives, il est clair qu'alors l'équation $y = \frac{a}{-x}$, rend les ordonnées négatives, & qu'ainsi cette même courbe étend encore deux branches parfaitement semblables dans l'angle Q A r des coordonnées négatives; & comme ces deux parties sont désignées par une seule équation irréductible $xy = a$, elles appartiennent à une seule & même courbe, appellée *Hyperbole*. FIG. 123.

223. COROLL. D'après l'équation de l'Hyperbole, on doit donc conclure : 1°. *Que cette courbe ne passe pas à l'origine*; car $xy = a$, ou $xy - a = 0$ a un terme constant. 2°. *Qu'elle n'a pas de sommets*, ou ce qui est le même, qu'elle ne les a qu'à une distance infinie de l'origine; car pour avoir $y = 0$, il faut dans l'équation $y = \frac{a}{x}$, supposer x infinie. 3°. *Que les ordonnées sont en raison réciproque de leurs abscisses*; car appellant une abscisse X & son ordonnée Y, un autre quelconque x & son ordonnée y, on a $XY = a = xy$, ou bien $X : x :: y : Y$.

224. DÉFINITION. *On appelle Assymptote rectiligne d'une courbe, toute ligne droite de laquelle cette courbe s'approche toujours, sans jamais l'atteindre.* Ainsi dans l'hyperbole les deux axes R r, Q q, sont ses deux Assymptotes rectilignes.

225. REMARQUE. Outre la courbe du second degré, dont nous venons de parler, les Géomètres ont donné le nom d'*Hyperbole* à toutes celles, dont l'équation est renfermée dans cette expression générale $y^m x^n = a$, ou $y^m = \frac{a}{x^n}$, quels que soient les nombres entiers que désignent m & n; & ils appellent cette espèce de courbes *la Famille des Hyperboles*. Si $m = n = 1$, on a $yx = a$; & c'est l'Hyperbole du second degré, dont nous venons de parler : si $m = 2$ & $n = 1$, on a $y^2 x = a$, & c'est l'Hyperbole du troisième degré, ou Cubique; si $m = 2$ & $n = 2$,

FIG il vient $x^2 y^2 = a$, & c'est l'Hyperbole du quatrième degré &c

226. Soit encore proposé de trouver la courbe, dont l'équation est $y^2 = px$. Pour cela je fais la quantité connue $p = 1$, & je donne à x, du côté positif, les valeurs successives 0, 1, 2, 3, 4.... Les ordonnées qui en résulteront seront 0, ± 1, $\pm \sqrt{2}$, $\pm \sqrt{3}$, $\pm \sqrt{4}$.... Et je vois que p étant positif, la courbe manque du côté des x négatives, puisque px devient alors négatif, & que l'équation se changeant en $yy = -px$, toutes les valeurs des y sont imaginaires. D'où je conclus 1°. *Que si*
124. *l'on prend le point* A *pour l'origine, la courbe possera par ce point*; puisque l'équation n'a pas de terme constant; ou bien que $x = 0$ donne $y = 0$: 2°. *qu'elle n'a que ce seul sommet*; puisqu'il n'y a qu'une $x = 0$ qui puisse donner $y = 0$. 3°. *Qu'elle a deux branches infinies & égales* A M, A *m*, *qui s'étendent & s'éloignent toujours, & également des abscisses positives, sans reparoître du côté des abscisses négatives*; & qu'ainsi la courbe n'est pas rentrante. 4°. *Que ces branches s'écartent moins de l'axe des abscisses, que de celui des ordonnées*; car la distance de chaque point M ou *m*, à l'axe des ordonnées, est exprimée par la perpendiculaire M N, ou son égale A P, qui est x; tandis que la distance de ce point à l'axe des abscisses, est exprimée par M P ou y, qui vaut $\sqrt{x}$. 5°. *Que ses axes ne peuvent* point lui servir d'assymptote, puisque loin de s'en approcher, elle s'en éloigne toujours.

227. Remarque. La courbe dont nous venons de parler, est celle qu'on nomme *Parabole*. C'est sous cette même dénomination qu'on a renfermé toutes les courbes, dont l'équation se présente sous cette forme générale, $y^m = p^{m-1} x$, qui représente l'entière *Famille des Paraboles*. Quand $m = 2$, l'équation est $y^2 = px$, & c'est la Parabole simple & ordinaire: quand $m = 3$, l'équation $y^3 = p^2 x$, représente la Parabole cubique, &c.

FIG.

CHAPITRE II.

De l'Ellipse.

228. DÉFINITION I. SI l'on suppose que sur un plan quelconque on prenne à volonté deux points fixes F, *f*, dont on connoît l'éloignement, 125.
& qu'on décrive une courbe A M B *a b*, en suivant cette loi : *qu'à chaque pas du point générateur, la somme de ses deux distances aux deux points fixes* F, *f*, *soit toujours la même & égale à une ligne donnée* 2 *a* ; la courbe ainsi formée sera une Ellipse.

229. COROLL. 1°. D'après cette génération, il est aisé de décrire cette courbe par un mouvement continu. Car prenant un fil infléxible, dont la longueur égale la ligne connue 2 *a*, fixant ses deux extrêmités en F & *f*, si on le tient toujours également tendu avec un stile, la pointe de ce stile décrira la courbe en question ; puisque la somme des deux distances de chaque point de la courbe aux deux points fixes F, *f*, vaudra toujours la longueur entière du fil, ou 2 *a*.

230. 2°. Si sur le point C, qui tient le milieu entre F & *f*, on élève la perpendiculaire B *b*, jusqu'à la rencontre de la courbe, *cette perpendiculaire sera une ligne connue, de cela seul qu'on connoît* F *f*. Car alors F B = *f* B = *a*. Donc dans le triangle rectangle B C F, on aura $BC = \sqrt{a^2 - \overline{CF}^2}$; par conséquent $Bb = 2\sqrt{a^2 - \overline{CF}^2}$.

231. 3°. *Quand la courbe passera sur la ligne, qui joint les points* F *& f, elle sera à distances égales de ces deux points, ou bien on aura*, F A = *f a*. Car 2 *a* = F A + *f* A = F *a* + *f a*. Or, *f* A = *f* F + F A, & F *a* = F *f* + *f a*. On aura donc F A + *f* F + F A = *f* F + *f a* + *f a* : ou bien en réduisant, 2 F A = 2 *f a*, & enfin F A = *f a*.

FIG. D'où l'on conclura *que la ligne* A a, *qui traverse la courbe en*
125. *passant par les points* F, f, *est égale à la ligne donnée* 2 a. Car F a + $f a = 2 a$, par la nature de la courbe. Or, $f a =$ F A. Donc F a + F A ou A $a = 2 a$.

232. DÉFINITION II. La ligne connue A a s'appelle le *grand Axe* de l'Ellipse, je la fais $= 2 a$: la ligne B b perpendiculaire sur le milieu du grand axe, s'appelle le *petit Axe*, & comme elle est connue (230), je la fais $= 2 b$: les points fixes F, f, sont les *Foyers*; A, a sont les sommets; C est le *Centre*. La distance connue F f des deux foyers est *l'Excentricité*, que je fais $= 2c$, & partant F C ou f C $= c$. On apppelle *Rayon vecteur*, une droite f M ou F M, menée d'un foyer sur un point de la courbe, ce qui fait que chaque point de la courbe se rapporte à deux rayons vecteurs. Supposons qu'on place l'origine des coordonnées au centre C, de façon que C P $= x$ & P M $= y$; alors f P $= c + x$ & F P $= c - x$.

233. Avant de passer plus loin, il faut remarquer que le point B étant autant éloigné de F que de f, on doit avoir B F $= a$, tandis que B C $= b$, & C F $= c$. Donc dans le triangle rectangle B C F, $\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{CF}^2$, ou bien $b^2 = a^2 - c^2$, Donc $\div\div a + c : b : a - c$. Or, $a + c =$ F a, & $a - c =$ F A. Donc *le demi-petit axe est moyen proportionnel entre les distances d'un des foyers aux deux sommets.*

234. Pour trouver l'équation à l'Ellipse, il faut se souvenir que pour un point quelconque M, la somme des deux rayons vecteurs est 2 a; donc si je fais leur différence $= 2 z$, le plus grand f M $= a + z$, & le plus petit $= a - z$.

Cela posé, dans les triangles rectangles M P F, M P f, on a $\overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FP}^2$, & $\overline{fM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{fP}^2$. ou bien exprimant l'une & l'autre équation analytiquement :

$$a^2 - 2az + z^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2.$$
$$a^2 + 2az + z^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2.$$

Si l'on soustrait la première équation de la seconde, il reste $4az = 4cx$, donc $z = \frac{cx}{a}$.

Substituons cette valeur de z dans la première équation, & elle devient, $a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$. Donc FIG. 125.

$y^2 = a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}$. Or, $a^2 - c^2 = b^2$ (233); & $-x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{-a^2x^2 + c^2x^2}{a^2} = \frac{-x^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{-b^2x^2}{a^2}$.

Donc $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Or, $a^2 - x^2 = \overline{a+x} \times \overline{a-x} = aP \times AP$. Ainsi dans cette courbe *le quarré de l'ordonnée est égal au rectangle des abscisses, multiplié par une fraction dont le numérateur est le quarré du demi-petit-axe, & le dénominateur est le quarré du demi-grand-axe.*

235. REMARQUE. Si l'on avoit placé l'origine en A, & qu'on eût fait $AP = z$, on auroit $x = a - z$. Donc en substituant cette valeur dans l'équation trouvée $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, il viendroit, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a^2 + 2az - z^2) = \frac{b^2}{a^2}(2az - z^2) = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{2a - z} \times z$, qui exprime la même propriété, d'une façon analogue à ce que nous avons vu dans le cercle, en comptant les abscisses tantôt du centre, tantôt du sommet.

236. COROLL. Concluons de là : 1°. Que l'équation seule de cette courbe désigne, *qu'elle a deux branches égales de chaque côté de l'axe des abscisses ;* puisque y a toujours deux valeurs égales.

237. 2°. Qu'en plaçant l'origine en A, *elle coupe l'axe à l'origine & à la distance de l'origine* $= 2a$. Car alors y devient 0, en supposant $z = 0$, & en supposant $z = 2a$.

238. 3°. Que si l'on faisoit $b = a$, alors l'équation de cette courbe deviendroit $y^2 = a^2 - x^2$, qui est la même que celle du cercle. Or, $b = a$, suppose $c = 0$; puisqu'on a toujours (233) $b^2 = a^2 - c^2$. Donc *un cercle peut être considéré comme une Ellipse, dont l'excentricité est nulle.*

FIG. 125.

239. De ce que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, il s'en suit que l'on a cette proportion $y^2 : a^2 - x^2 :: b^2 : a^2$, c'est-à-dire, *que le quarré de l'ordonnée est au rectangle des abscisses, comme le quarré du demi-petit axe est au quarré du demi-grand-axe.*

240. 3°. Si l'on décrit un cercle sur le grand axe de l'Ellipse, & qu'on place pour l'un & l'autre l'origine au sommet A, on aura pour l'ordonnée du cercle $Y^2 = 2ax - x^2$: & pour l'ordonnée correspondante dans l'Ellipse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Donc mettant le tout en proportion, $Y^2 : y^2 :: 2ax - x^2 : \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) :: 1 : \frac{b^2}{a^2} :: a^2 : b^2$. Donc $Y : y :: a : b$. Or, appellant V & v deux autres ordonnées correspondantes dans le même cercle & dans la même Ellipse, on auroit également $V : v :: a : b$. Donc $Y : y :: V : v$, c'est à-dire, *que les ordonnées de l'Ellipse sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes dans le cercle circonscrit.* Ce qui prouve que pour décrire une ellipse il suffiroit de diviser proportionnellement toutes les ordonnées d'un cercle, & de faire passer la courbe par les points de division.

241. DÉFINITION III. On appelle *Paramètre*, dans une section conique, la double ordonnée qui passe par le foyer; & comme on emploie souvent son expression, nous allons en chercher la valeur dans l'Ellipse.

242. Pour la trouver, je remarque que l'abscisse qui répond à cette ordonnée est $a - c$; mettant donc cette valeur à la place de x dans l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, j'ai $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a \times \overline{a - c} - \overline{a - c}^2) = \frac{b^2}{a^2}(2a^2 - 2ac - a^2 + 2ac - c^2) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2)$. Et comme $b^2 = a^2 - c^2$, on a $y^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2}{a^2}$. Donc $y = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ (233) : ou bien $2y = \frac{4b^2}{2a}$: c'est-à-dire, *que le paramètre vaut le quarré du petit axe divisé par le*

grand axe, ou bien encore *qu'il est une troisième proportionnelle au grand & au petit axe*, puisque faisant $2y = p$, on a $\div\div 2a : 2b : p$. D'où il suit qu'en considérant le cercle comme une Ellipse, dont l'excentricité est nulle, *le Paramètre du cercle est un diamètre.* FIG. 125.

243. Il est maintenant aisé de faire entrer le paramètre dans l'équation à l'Ellipse. Car puisque $p = \frac{2b^2}{a}$, on a $b^2 = \frac{1}{2}ap$. Substituant donc à la place de b^2 dans la première équation à l'Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, on a $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$, ou bien $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$.

Si l'on substitue à la place de b^2 dans la seconde équation à l'Ellipse, qui est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, on aura $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2) = px - \frac{px^2}{2a}$.

244. De l'expression du paramètre, il s'ensuit que dans cette courbe *il est plus petit que la quadruple distance du sommet au foyer voisin.* Car appellant cette distance d, on a $d = a - c$, tandis que $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{2a^2 - 2c^2}{a}$ (233). Donc $p : d :: \frac{2(a^2 - c^2)}{a} : a - c :: \frac{2(a+c)}{a} : 1 :: 2a + 2c : a$. Donc $p : 4d :: 2a + 2c : 4a$. Or, $2a + 2c < 4a$, puisque $2c < 2a$ (232). Donc $p < 4d$.

245. Remarque. L'équation à l'Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, qui est venue en comptant les coupées du centre, nous donne l'équation au petit axe. Car dans le parallélogramme des coordonnées CPMD, CD = MP, & DM = CP. Donc l'ordonnée du petit axe est l'abscisse du grand, & l'abscisse du petit est l'ordonnée du grand. Ainsi appellant ici l'ordonnée x & l'abscisse y, on a, $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$. Ce qui prouve 1°.

FIG. 125. *Que les propriétés de l'Ellipse, rapportée à son petit axe, sont les mêmes que celles de la même courbe, rapportée au grand axe. 2°. Qu'ainsi si l'on décrit un cercle sur le petit axe, ses ordonnées seront proportionnelles à celles qui leur correspondront dans le petit Axe.*

246. COROLL. *La surface de l'Ellipse est donc moyenne proportionnelle entre celle du cercle inscrit & celle du cercle circonscrit.* Car appellant la surface du cercle circonscrit C, celle de l'inscrit c, & celle de l'Ellipse E, on a, $C : E :: 2a : 2b$, & $E : c :: 2a : 2b$. Donc $\frac{::}{::}$ $C : E : c$.

247. D'où il suit que $E^2 = Cc$. Appellant S la surface d'une autre Ellipse, D & d les cercles circonscrit & inscrit, on auroit $S^2 = Dd$. Donc $E^2 : S^2 :: Cc : Dd$. Or, si l'on désigne les deux demi-axes de la première Ellipse par A & par B, les deux demi-axes de la seconde par a & par b, les deux cercles circonscrits auront pour rayons A, a : & les deux inscrits, B, b. Donc on aura (177) $C : D :: A^2 : a^2 . c : d :: B^2 : b^2$. Et par conséquent (*Alg.* 233), $Cc : Dd :: A^2 B^2 : a^2 b^2$. Donc $E^2 : S^2 :: A^2 B^2 : a^2 b^2$, ou $E : S :: AB : ab$, c'est-à-dire, *que les surfaces de deux Ellipses, qu'on compare, sont entr'elles en raison composée de leurs axes.*

CHAPITRE III.

De l'Hyperbole.

248. DÉFINITION. 126. SUPPOSONS que sur une droite indéfinie Qq on prenne deux points fixes F, f; & que sur le plan qui contient cette ligne on prenne une infinité de points, comme M, tels que la différence des distances de chacun aux deux points fixes F, f, soit toujours la même, & égale à une ligne droite donnée, que j'appelle $2a$: alors la courbe D A E, qui passera par tous ces points, sera une *Hyperbole*, & les points F, f, en seront les *Foyers*.

249

249. Pour décrire une Hyperbole par un mouvement continu, il ne faut donc que fixer l'extrémité d'une règle à un point *f*, qui sera un foyer, autour duquel elle puisse tourner ; avoir un fil infléxible G M F, plus ou moins long que la règle *f*G, dont un bout sera attaché en G & l'autre en F, & par un stile M, tenir une portion du fil M G, appliquée à la règle, tandis que celle-ci tourne sur le point *f*. Alors la différence des distances du stile aux deux foyers, sera toujours la même, & vaudra la différence qu'il y a entre la longueur du fil & celle de la règle. FIG. 126.

Si après avoir décrit la branche D M A, on renverse la règle, le stile tracera la branche A E, parfaitement semblable à la précédente ; & si on fixe de la même manière l'extrémité de la règle en F, & qu'on attache le bout du fil en *f*, on tracera la courbe *d a e*, tout à fait semblable à D A E, & qui tournera sa convexité vers la première. Ces deux courbes s'appellent *les Hyperboles opposées.*

250. COROLL. D'après la génération de cette courbe, on peut conclure : 1°. *Qu'elle coupera la ligne indéfinie* Q *q*, *dans deux points* A *&* *a*, *qui seront entre les deux foyers* (Ces points en sont appellés les *sommets*).

251. 2°. *Que les deux sommets* A, *a*, *sont également éloignés des deux foyers* F, *f*; ou bien que F A = *f a*. Car par la nature de la courbe on a, *f* A — F A = 2 *a* = F *a* — *f a*. Donc retranchant de *f* A & de F *a* la partie commune A *a*, on a *f a* — F A = F A — *f a*. Donc 2 *f a* = 2 F A, ou *f a* = F A.

252. Il suit de là *que la distance des sommets* A, *a*, *vaut la quantité connue* 2 *a*. Car *f* A — F A = 2 *a*, ou bien *f a* + *a* A — F A = 2 *a*. Or, *f a* = F A ; donc A *a* = 2 *a*. (La ligne A *a* qui joint les deux sommets, est appellée *le premier Axe* des Hyperboles, & le point du milieu C en est le *Centre*).

253. Si sur le milieu C du premier axe on élève la perpendiculaire B *b*, terminée aux points B, *b*, en portant de A les lignes A B, A *b*, égales à la demi-excentricité F C, cette perpen-

FIG. diculaire sera appellée le *second Axe* des Hyperboles opposées. Et
126. comme ce second axe est nécessairement une quantité connue, dès qu'on connoît B A & C A, nous l'appellerons $2b$. Ici comme dans l'Ellipse l'excentricité F f est appellée $2c$, l'ordonnée P M est y : & plaçant l'origine des abscisses au centre, C P sera x. Donc P F $= c - x$, & P $f = c + x$.

254. THÉORÈME I. *Dans cette courbe le second demi-axe est moyen proportionnel entre les distances d'un même foyer aux deux sommets.*

DEM. Il faut démontrer que ∺ F A : B C : F a ; ou bien que ∺ $c - a : b : c + a$. Or, cela est ainsi ; car le triangle rectangle B C A donne $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{CA}^2$, ou bien $bb = cc - aa$. Donc ∺ $c - a : b : c + a$.

255. THÉORÈME II. *Dans cette courbe le quarré d'une ordonnée vaut le rectangle de ses abscisses, multiplié par une fraction dont le numérateur est b^2 & dont le dénominateur est a^2.*

DEM. Puisqu'ici la différence des deux rayons vecteurs est toujours $2a$, appellant leur somme $2z$, le plus grand sera $z + a$, & le plus petit $z - a$.

127. Cela posé, dans les triangles rectangles M P F, M P f, on a $\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2$, & $\overline{Mf}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{Pf}^2$. Donc substituant les expressions Algébriques, on a :

$$zz - 2az + aa = yy + cc - 2cx + xx$$
$$zz + 2az + aa = yy + cc + 2cx + xx$$

Soustrayant la première équation de la seconde, $4az = 4cx$, ou $z = \frac{cx}{a}$ & $zz = \frac{ccxx}{aa}$. Substituant cette valeur de z & de z^2 dans la première équation, on a : $\frac{ccxx}{aa} - 2cx + aa = yy + cc - 2cx + xx$. Donc $yy = \frac{ccxx}{aa} - xx - cc + aa = \frac{ccxx - aaxx}{aa} - (cc - aa) = \frac{(cc - aa)xx - aa(cc - aa)}{aa}$.

Or, $cc - aa = bb$. Donc $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa} = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$.

256. REMARQUES. I. Si l'on place l'origine en A, & qu'on fasse A P $= z$, on aura $x = a + z$, substituant cette valeur dans l'équation précédente, on a, $yy = \frac{bb}{aa}(aa + 2az + zz - aa)$ $= \frac{bb}{aa}(2az + zz)$: ce qui exprime toujours la même propriété. Mais en examinant cette équation $yy = \frac{bb}{aa}(2az + zz)$, on en peut déduire : 1°. Que du côté des x positives chaque ordonnée à deux valeurs, savoir $\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2az + zz)}$, & que cette courbe jette deux branches de chaque côté de ses abscisses. 2°. Que du côté des abscisses négatives la courbe disparoît, tant que z est plus petit ou égal à $2a$. Car alors $yy = \frac{bb}{aa}(2az + zz)$ devient $yy = \frac{bb}{aa}(-2az + zz)$; & par conséquent le second membre est négatif, tant que $2az > zz$: ou bien tant que $2a > z$. Donc alors les valeurs de y sont imaginaires. Mais si $2a = z$, on a $y = 0$, ce qui exprime que du côté des x négatives, la courbe va couper l'axe des abscisses à la distance de l'origine $= 2a$. Si $z > 2a$, $2az < zz$. Donc la courbe reparoit au-de-là de ce point, & elle a deux branches, une de chaque côté de l'axe ; ce qui prouve que les deux Hyperboles opposées sont une même courbe partagée en deux parties séparées par le premier axe ; puisque une même équation les représente toutes deux. FIG. 127.

257. II. Si l'on supposoit que dans l'Hyperbole le second axe fut égal au premier, ou bien que $b = a$, l'équation, en comptant les abscisses du sommet, seroit $yy = 2az + zz$; & par conséquent *elle ne différeroit de celle du cercle* (210), *que par le signe qui précéde le quarré* zz, *lequel est ici positif, tandis que dans le cercle il est négatif* (l'Hyperbole dans laquelle le second axe égale le premier, s'appelle *Hyperbole équilatère*).

258. III. Enfin il faut observer que, soit qu'on prenne l'é-

FIG. 127. quation de l'Hyperbole du centre, ſoit qu'on la prenne du ſommet, elle ne différe de celle de l'Ellipſe que par les ſignes, & que l'une & l'autre ſont renfermées dans cette expreſſion, $yy = \frac{bb}{aa}(\pm aa \mp xx)$: ou dans celle-ci, $yy = \frac{bb}{aa}(2ax \mp xx)$.

259. On appelle *Paramètre* dans l'Hyberbole la double ordonnée qui paſſe par le foyer. Pour avoir la valeur de cette ordonnée, on obſervera qu'alors, en comptant du centre, $x = c$; donc $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ devient $yy = \frac{bb}{aa}(cc - aa)$. Or, $cc - aa = bb$. Donc $yy = \frac{b^4}{aa}$ & $y = \frac{bb}{a}$; Ainſi $2y = \frac{4bb}{2a}$. Donc appellant le paramètre p, j'ai $p = \frac{4bb}{2a}$, ou bien $\div\div 2a : 2b : p$.

260. Si l'on veut faire entrer le paramètre dans l'équation à la courbe, on ſait que $p = \frac{4bb}{2a}$, & qu'ainſi $2ap = 4bb$, & $\frac{1}{2}ap = bb$. Subſtituant donc cette valeur pour bb dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, on a $yy = \frac{p}{2a}(xx - aa)$: & ſi l'on comptoit les abſciſſes du ſommet, on auroit eu, $yy = \frac{p}{2a}(2az + zz)$.

261. THÉORÈME III. *Dans l'Hyperbole le paramètre eſt plus grand que le quadruple de la diſtance du ſommet au foyer, ou bien,* $p > 4(c - a)$.

DEM. Car $p = \frac{2bb}{a} = \frac{2(cc - aa)}{a} = \frac{4 \times 2(c+a)(c-a)}{4a}$. Donc $p : 4(c-a) :: 2(c+a) : 4a$. Or, $2(c+a)$, ou $2c + 2a > 4a$. Donc $p > 4(c - a)$.

262. REMARQUES. I. L'équation $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, que nous avons trouvée en comptant les abſciſſes du centre,

FIG. 127.

nous donne l'équation au second Axe. Car ici, comme dans l'Ellipse (244), x représente l'ordonnée au second axe, & y son abscisse. Or, $xx = \frac{aa}{bb}(yy + bb)$: Équation bien différente de celle du premier axe, puisque $yy + bb$ ne peut point représenter le rectangle des abscisses.

263. II. Si l'on prend sur le second axe Bb deux points F', f', tels que C F' = Cf' = B A, on pourra, de ces deux points pris pour foyers, décrire deux Hyperboles (*) opposées D B G, $d b g$, qui auront B b pour premier axe & A a pour second axe. Il est clair que l'on a dans ces deux courbes les mêmes propriétés que dans les deux premières, en changeant seulement b en a, & a en b. Ainsi puisque en faisant C P = x, nous avons eu $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ou $\overline{PM}^2 = \frac{bb}{aa}(\overline{CP}^2 - aa)$, il s'ensuit qu'en faisant C S = x, nous aurons $\overline{DS}^2 = \frac{aa}{bb}(\overline{CS}^2 - bb)$: d'où $\overline{CS}^2 = \frac{bb}{aa}(\overline{DS}^2 + aa)$. (La première de ces deux équations est celle du premier Axe Bb des nouvelles Hyperboles, & la dernière est pour leur second Axe A a).

264. III. Les calculs nécessaires pour trouver les expressions de certaines lignes dans l'Ellipse & l'Hyperbole, peuvent se faire de la même manière. C'est pourquoi nous employerons pour les démonstrations suivantes deux figures de ces courbes, que nous construirons semblablement. Lorsque les résultats, ou quelques-uns de leurs termes, auront un signe double $\pm$ ou $\mp$, il faudra prendre le signe supérieur pour l'Ellipse, & l'inférieur pour l'Hyperbole.

265. THÉORÈME IV. *L'expression du petit rayon vecteur* F M, *est*, $FM = \frac{\pm a^2 \mp cx}{a}$: *celle du grand rayon vecteur* fM

(*) Ces Hyperboles sont appellées les Hyperboles conjuguées aux deux autres, & réciproquement.

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE UNIVERSITAIRE

FIG 125 & 127. *est*, $fM = \frac{aa + cx}{a}$ (l'origine étant au centre, comme nous la supposerons dans la suite.)

DEM. Nous avons vu (234) 1°. Que dans l'Ellipse $FM = a - z$, & $fM = a + z$; 2°. Que $z = \frac{cx}{a}$; (il en est de même pour l'Hyperbole (255) avec les changemens de signe, c'est à-dire, que $FM = -a + z$, & $fM = a + z$). Donc en réunissant les deux courbes $FM = \pm a \mp z = \pm a \mp \frac{cx}{a} = \frac{\pm aa \mp cx}{a}$. De même $fM = \frac{aa + cx}{a}$.

266. *La Soutangente* dans ces courbes est la partie PT du premier axe, comprise entre l'ordonnée MP, & la tangente TM.

267. THÉORÈME V. *Dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole l'expression de la Soutangente* PT, *est* $PT = \frac{\pm aa \mp xx}{x}$.

DEM. Soit Mm l'élément dont le prolongement forme la tangente MT : de ses extrémités ménons les ordonnées MP, mp. Tirons de plus la petite droite Mr parallèle à l'axe Aa. Les triangles semblables Mmr, TMP, donneront, $mr : Mr :: MP : PT$. Or, (258) $\overline{pm}^2 = \frac{bb}{aa}(\pm aa \mp \overline{Cp}^2)$, ou à cause de $pm = PM + mr$, & de $Cp = CP \mp Mr$, $\overline{PM}^2 + 2PM \times mr + \overline{mr}^2 = \frac{bb}{aa}(\pm aa \mp \overline{CP}^2 + 2CP \times Mr \mp \overline{Mr}^2)$. Négligeant $\overline{mr}^2$, $\overline{Mr}^2$, & ayant d'ailleurs $\overline{PM}^2 = \frac{bb}{aa}(\pm aa \mp \overline{CP}^2)$, il vient $2PM \times mr = \frac{bb}{aa} \times 2CP \times Mr$, qui donne $mr : Mr :: \frac{bb}{aa} CP : PM$. Donc aussi $\frac{bb}{aa} CP : PM :: PM : PT = \frac{\overline{PM}^2}{\frac{bb}{aa} CP} = \frac{\pm aa \mp xx}{x}$.

268. La perpendiculaire M N, sur la tangente au point de contact, s'appelle *Normale*; & la partie P N de l'axe comprise entre l'ordonnée M P & la Normale M N, est la *sous-Normale*. FIG. 125 & 127.

269. THÉORÈME VI. *L'expression de la sous-Normale* P N *est* $\frac{\pm aax \mp ccx}{aa}$: *& celle de la Normale* M N (appellant les rayons vecteurs F M, *f* M, l'un R, l'autre *r*) *est* $\frac{b}{a}\sqrt{Rr}$.

DEM. 1°. Le triangle rectangle N M T, donne (123) $\div\div$ $PT : PM : PN = \frac{\overline{PM}^2}{PT} = \frac{bbx}{aa}$: ou à cause de $bb = \pm aa \mp cc$ (233 & 254) $PN = \frac{\pm aax \mp ccx}{aa}$.

2°. La Normale $MN = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2} = \sqrt{\frac{bb}{aa}(\pm aa \mp xx) + \frac{b^4x^2}{a^4}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\pm a^2 \mp x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2})} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\pm a^4 \mp a^2x^2 + b^2x^2}{a^2}}$. Si l'on met pour b^2, sa valeur $\pm a^2 \mp c^2$, on aura réduction faite, $MN = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\pm a^4 \mp c^2x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\pm a^2 \mp cx}{a} \times \frac{a^2 + cx}{a}} = \frac{b}{a}\sqrt{FM \times fM}$ (265) $= \frac{b}{a}\sqrt{Rr}$.

270. COROLL. On aura donc 1°. $CT = CP \pm PT = x \pm \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x}$.

2°. $FT = \pm CT \mp CF = \pm \frac{aa}{x} \mp c = \frac{\pm a^2 \mp cx}{x} = \frac{a}{x}\left(\frac{\pm aa \mp cx}{a}\right) = \frac{a}{x} FM$ (265): par la même raison, $fT = CT + Cf = \frac{a}{x} fM$.

FIG. 125 & 127. 3°. $TN = PT + PN = \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x} \pm \frac{a^2 x \mp c^2 x}{a^2} = \frac{\pm a^4 \mp c^2 x^2}{a^2 x} = \frac{FM \times fM}{x}$ (265).

271. THÉORÈME VII. *Si l'on tire d'un foyer* F *ou* f, *une perpendiculaire* FQ *ou* fq *sur la tangente* TM, *on aura* $FQ = b\sqrt{\frac{FM}{fM}}$ *&* $fq = b\sqrt{\frac{fM}{FM}}$.

DEM. 1°. Soit la Normale MN, les triangles semblables TNM, TFQ donneront, $TN : NM :: FT : FQ$. Substituant les expressions déja trouvées, on aura, $\frac{FM \times fM}{x} : \frac{b}{a}\sqrt{FM \times fM} :: \frac{a}{x} FM : FQ = \frac{b}{fM}\sqrt{FM \times fM} = b\sqrt{\frac{FM}{fM}}$.

2°. Les triangles semblables TNM, Tfq, donnent $TN : NM :: fT : fq$, ou bien $\frac{FM \times fM}{x} : \frac{b}{a}\sqrt{FM \times fM} :: \frac{a}{x} fM : fq = b\sqrt{\frac{fM}{FM}}$.

272. Si l'on mène une autre tangente en un autre point M', les Rayons vecteurs FM', fM', & la perpendiculaire FQ' sur la nouvelle tangente, on aura $FQ' = b\sqrt{\frac{FM'}{fM'}}$. Donc $FQ : FQ' :: \sqrt{\frac{FM}{fM}} : \sqrt{\frac{FM'}{fM'}}$. Or, 1°. dans l'Ellipse si l'on suppose que $FM > FM'$, on aura $fM < fM'$, puisque $FM + fM = FM' + fM' = 2a$ (228). Donc alors $\frac{FM}{fM} : \frac{FM'}{fM'} > FM : FM'$; & par conséquent on aura $FQ : FQ' > \sqrt{FM} : \sqrt{FM'}$. 2°. Dans l'Hyperbole les deux rayons vecteurs FM, fM, croissent en même-tems. Donc $\frac{FM}{fM} : \frac{FM'}{fM'} < FM : FM'$. Donc aussi $FQ : FQ' < \sqrt{FM} : \sqrt{FM'}$. D'où il suit que *les perpendiculaires*

perpendiculaires menées d'un foyer sur les tangentes à différens points, *croissent dans l'Ellipse en plus grande raison, & dans l'Hyperbole en plus petite raison, que les racines quarrées des rayons vecteurs tirés du même foyer aux points de contact.* FIG. 125 & 127.

373. Puisque $FQ = b\sqrt{\frac{FM}{fM}}$, $fq = b\sqrt{\frac{fM}{FM}}$, on aura $\overline{FQ}^2 : \overline{fq}^2 :: b^2\frac{FM}{fM} : b^2\frac{fM}{FM} :: \overline{FM}^2 : \overline{fM}^2$. Donc aussi $\overline{FM}^2 - \overline{FQ}^2 : \overline{fM}^2 - \overline{fq}^2 :: \overline{FQ}^2 : \overline{fq}^2 :: \overline{FM}^2 : \overline{fM}^2$. Or, $\overline{FM}^2 - \overline{FQ}^2 = \overline{MQ}^2$, $\overline{fM}^2 - \overline{fq}^2 = \overline{Mq}^2$ (173). Substituant & extrayant les racines, on a $MQ : Mq :: FQ : fq :: FM : fM$. Ainsi (118) les triangles FMQ, fMq, sont équiangles, & l'angle FMQ = l'angle fMq. Ce qui prouve *que dans l'Ellipse & l'Hyperbole la tangente fait des angles égaux avec les deux rayons vecteurs, qui aboutissent au point de contact*; & qu'ainsi pour tirer cette ligne sur le point M, *il suffit de diviser en deux également* (60), *l'angle formé par les deux rayons vecteurs* FM, fM, *ou par leur prolongement.*

374. Si l'on mène les droites FR, Gg, l'une par le foyer, l'autre par le centre, parallèlement à la tangente TM, le triangle MFR aura deux angles égaux (373) l'un en F, l'autre en R. Donc $MR = MF = \frac{\pm a^2 \mp cx}{a}$, & $fR = fM \mp MR = \frac{a^2 + cx}{a} - \frac{a^2 + cx}{a} = \frac{2cx}{a}$. Or, (103) $fC : CF :: fX : XR = fX$. Donc $XR = \frac{1}{2}fR = \frac{cx}{a}$; par conséquent $XR \pm MR$ ou $MX = \frac{cx}{a} + \frac{a^2 - cx}{a} = a$; c'est-à-dire, que *la partie* MX *du rayon vecteur* fM, *comprise entre le point de contact* M, *& une droite* Gg, *qui passe par le centre parallèlement à la tangente* TM, *vaut la moitié du grand-Axe.*

375. THÉORÈME VIII. *Dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole toute ligne droite, comme* Mm', *qui passe par le point* C, *lequel*

FIG. 125 & 127. *est à distances égales des deux foyers* F, f, *& qui est terminée de part & d'autre à la courbe, est partagée dans ce point en deux parties égales, ou bien on a* C M = C m'.

DEM. Si du foyer f, & d'un rayon égal à F M, on décrit un arc de cercle, qui coupe la courbe en m', & d'un côté de l'axe opposé à M, on aura le rayon vecteur fm' = F M; & par conséquent (328 & 348) fM = F m'. Donc le quadrilatère F M fm' sera un parallèlogramme (91): & si le point C est le milieu de la diagonale F f, il le sera de la diagonale M m' (133); ou bien, aura, C M = C m': il en sera de même pour toute autre ligne qui, passant par le point C, se terminera de part & d'autre à la courbe.

376. COROLL. De ce que F M fm' est un parallèlogramme on conclura que l'angle F M f = F $m'f$, & qu'ainsi l'angle T M F = t $m'f$, ou bien *que les deux tangentes opposées* M T, $m't$ *sont parallèles.*

377. DÉFINITION. Le *Centre* d'une courbe, ainsi que d'un poligonne quelconque, est un point situé de telle sorte, que toutes les droites qui passent par ce point & se terminent à la courbe ou au contour du polygonne, y sont partagées également. On appelle *Diamètres* les droits qui passent par le centre & se terminent au contour de la figure. Ainsi l'Ellipse, l'Hyperbole, le Cercle, & les polygonnes soit réguliers, soit symmètriques (134) ont un centre, & des diamètres. Dans l'Ellipse & l'Hyperbole, deux diamètres M m', D d, sont dits *conjugués* l'un à l'autre, lorsque le premier est parallèle à la tangente tirée sur l'extrémité du second.

128 & 129.

378. THÉORÈME IX. *Si des extrémités* M, D, *de deux diamètres conjugués ont tiré les ordonnées* M P, D I, *à l'axe* A a, *on aura*: 1°. $MP \times DI = \frac{b^2}{a^2} CP \times CI$, *ou* $CI : DI :: MP : \frac{b^2}{a^2} \times CP$. 2°. $\overline{CI}^2 = \pm a^2 \mp \overline{CP}^2$.

DEM. 1°. Si l'on mène la Normale M N, les triangles D I C, M P N étant semblables (117), donneront CI : DI :: MP :

PN. Or, (369) $PN = \frac{b^2}{a^2} x = \frac{b^2}{a^2} CP$. Donc $CI : DI :: MP : \frac{b^2}{a^2} CP$, ou $MP \times DI = \frac{b^2}{a^2} CP \times CI$. FIG. 128 & 129.

2°. On aura donc $\overline{CI}^2 : \overline{DI}^2 :: \overline{MP}^2 : \frac{b^4}{a^4} \overline{CP}^2$. Or, (358) $\overline{MP}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\pm a^2 \mp \overline{CP}^2)$, $\overline{DI}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\pm a^2 \mp \overline{CI}^2)$. Donc $\overline{CI}^2 : \frac{b^2}{a^2}(a^2 \mp \overline{CI}^2) :: \frac{b^2}{a^2}(\pm a^2 \mp \overline{CP}^2) : \frac{b^4}{a^4} \overline{CP}^2$. Ou en simplifiant, $\overline{CI}^2 : a^2 \mp \overline{CI}^2 :: \pm a^2 \mp \overline{CP}^2 : \overline{CP}^2$. Ajoûtant les antécédents aux conséquents dans le cas du signe supérieur, où les soustrayant pour le signe inférieur, on a réduction faite, $\overline{CI}^2 : a^2 :: \pm a^2 \mp \overline{CP}^2 : a^2$, ce qui donne $\overline{CI}^2 = \pm a^2 \mp \overline{CP}^2$.

379. THÉORÈME X. *Si l'on mène au diamètre* M m′, *une ordonnée* m p *parallèle à son conjugué* D d, *on aura, en faisant* $mp = y$, $Cp = x$, $CM = m$, $CD = n$, $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(\pm m^2 \mp x^2)$.

DEM. Tirons les perpendiculaires mO, pQ, & la parallèle pL à l'axe A a : nous aurons (258) $\overline{mO}^2 = \pm b^2 \mp \frac{b^2}{a^2} \overline{CO}^2$. Or, 1°. $mO = mL + pQ$, & $CO = CQ \mp pL$. 2°. Les triangles mLp, DIC, donnent $DC(n) : mp(y) :: DI : mL = \frac{y}{n} \times DI :: CI : Lp = \frac{y}{n} CI$; & les triangles CMP, CpQ donnent $CM(m) : Cp(x) :: MP : pQ = \frac{x}{m} MP :: CP : CQ = \frac{x}{m} CP$. Donc $mO = \frac{y}{n} DI + \frac{x}{m} MP$, $CO = \frac{x}{m} CP \mp \frac{y}{n} \times CI$. Substituant dans la première équation, elle devient $\frac{y^2}{n^2} \overline{DI}^2 + \frac{2xy}{mn} MP \times DI + \frac{x^2}{m^2} \overline{MP}^2 = \pm b^2 \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{m^2} \times$

FIG 128 & 129. $\overline{CP^2} + \frac{2xy}{mn} \times \frac{b^2}{a^2} CP \times CI \mp \frac{b^2 y^2}{a^2 n^2} \overline{CI^2}$. Or, (378) $MP \times DI = \frac{b^2}{a^2} CP \times CI$, & $\overline{DI^2} = \pm b^2 \mp \frac{b^2}{a^2} \overline{CI^2}$, $\overline{MP^2} = \pm b^2 \mp \frac{b^2}{a^2} \overline{CP^2}$. Substituant & réduisant, on aura, $\frac{b^2 y^2}{n^2} \pm \frac{b^2 x^2}{m^2} = \pm b^2$; Donc $y^2 = \pm n^2 \mp \frac{n^2 x^2}{m^2}$, ou $y^2 = \frac{n^2}{m^2} (\pm m^2 \mp x^2)$.

380. Coroll. Puisque dans l'Ellypse $mm - xx = (m + x)(m - x) = m'p \times Mp$: & que dans l'Hyperbole $xx - mm = (x + m)(x - m) = m'p \times Mp$, on a dans l'une & l'autre courbe, $yy = \frac{nn}{mm}(m'p \times Mp)$: ou bien, $yy : m'p \times Mp :: nn : mm$, propriété analogue à celle que nous avons trouvée ailleurs (339) pour les axes.

381. Remarque. Si l'origine des abscisses est au sommet M, ou si $Mp = x$, on aura $m'p = 2m \mp x$, ce qui change l'équation $yy = \frac{nn}{mm}(Mp \times m'p)$ en $yy = \frac{nn}{mm}(2mx \mp xx)$.

382. Théorème XI. *L'expression d'un demi-diamètre* CM, *rapporté aux axes est* $CM = \sqrt{\frac{\pm aa\,bb + cc\,xx}{aa}}$: *Et celle de son conjugué est* $CD = \sqrt{\frac{\pm a^4 \mp cc\,xx}{aa}}$, *ou* (365) $CD = \sqrt{FM \times JM}$.

Dem. Soient les ordonnées MP, DI, perpendiculaires sur l'axe A a, nous aurons 1°. $CM = \sqrt{\overline{CP^2} + \overline{MP^2}} = \sqrt{xx \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}}$, mettant dans $\frac{bbxx}{aa}$ la valeur $\pm aa \mp cc$ de bb, on a réduction faite, $CM = \sqrt{\frac{\pm aa\,bb + cc\,xx}{aa}}$ ...

2°. $CD = \sqrt{\overline{CI^2} + \overline{DI^2}} = \sqrt{\overline{CI^2} \pm bb \mp \frac{bb}{aa} CI^2}$.

Or, $\overline{CI}^2 = \pm aa \mp \overline{CP}^2 = \pm aa \mp xx$. Substituant & réduisant, $CD = \sqrt{\pm aa \mp xx + \frac{bbxx}{aa}}$. Mettant $\pm aa \mp cc$ au lieu de bb, il vient $CD = \sqrt{\frac{\pm a^4 \mp ccxx}{aa}} = \sqrt{FM \times fM}$ (365). FIG. 128 & 129.

383. Coroll. Il suit de là que $\overline{CM}^2 \pm \overline{CD}^2 = \pm bb + aa$, ou $\overline{CD}^2 \pm \overline{CM}^2 = \pm aa + bb$. Ce qui signifie *que dans ces courbes la somme ou la différence des quarrés des deux demi-diamètres conjugués, est égale à la somme ou à la différence des quarrés des deux demi axes.*

384. Théorème XII. *Le Parallèlogramme* C M *t d*, *construit sur les demi-diamètres conjugués* C M, C *d*, *& sur leur tangentes, est égal au rectangle des demi-Axes, ou bien* C M *t d* = *a b*.

Dem. Soit M *q* perpendiculaire sur C *d*, nous aurons (164) $CMtd = Mq \times Cd = Mq\sqrt{FM \times fM}$. Or, si l'on mène le rayon vecteur *f* M, & la ligne *f* S perpendiculaire sur la tangente T M, les triangles équiangles M X *q*, *f* M S donneront $fM : fS :: MX : Mq$, ou (371 & 374) $fM : b\sqrt{\frac{fM}{FM}} :: a : Mq = ab\sqrt{\frac{1}{FM \times fM}} = \frac{ab}{\sqrt{FM \times fM}}$. Donc $Mq \times \sqrt{FM \times fM}$, ou $CMtd = ab = Mq \times Cd$. Ainsi en faisant $Mq = q$, $Cd = n$, on aura $ab = nq$, & par conséquent les parallèlogrammes construits sur deux diamètres conjugués quelconques sont tous égaux, puisque chacun vaut le rectangle formé sur les Axes.

385. Théorème XIII. *Si sur les axes de l'Hyperbole* A *a*, B *b*, *on construit le rectangle* R V *r u*, *les diagonales* R *r*, V *u*, *seront les Asymptotes de l'Hyperbole.* 130.

Dem. Les triangles semblables C A R, C P N, donnent C A : A R :: C P : P N, ou en faisant C P = *x*, C A = *a*, A R =

FIG. 130. $CB = b$, $a : b :: x : PN = \frac{bx}{a}$. Par conséquent $\overline{PN}^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Or, (355) $\overline{PM}^2 = -b^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Donc $\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2 = b^2$, c'est-à-dire, que dans la même courbe la différence des quarrés $\overline{PN}^2$ & $\overline{PM}^2$ est constante, ou bien que $\overline{PM}^2$ croît autant que PN. Donc PM croît plus que PN; & par conséquent la courbe s'approche toujours de R r. Cette ligne en est donc l'asymptote (324): & il en est de même de V u, par rapport à l'autre branche.

386. THÉORÈME XIV. *Si d'un point* M *de l'Hyperbole, on mène à l'Asymptote voisine la droite* MN *parallèle au second axe, & qu'on la prolonge jusqu'à l'autre Asymptote, on aura* $MN \times Mn = b^2$.

DEM. Nous avons vu (385) que $\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2 = b^2$. Or, $\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2 = (PN + PM)(PN - PM) = (Pn + PM)(PN - PM) = Mn \times MN$. Donc $MN \times Mn = b^2$: pour la même raison on aura $mn \times mN = b^2$; & si l'on mène E e parallèle à N n, on aura encore $TE \times Te = b^2 = MN \times Mn = mn \times mN$.

387. THÉORÈME XV. *Si d'un point quelconque* M *de l'Hyperbole on mène à l'Asymptote voisine la droite* M p, *parallèle à l'autre Asymptote; & qu'on fasse* $Mp = y$, $Cp = x$, $CR = Cu = 2r$, *on aura l'équation* $y = \frac{r^2}{x}$.

DEM. Tirons par le point M la droite N M n parallèle au second axe, & M S parallèle à C N, les triangles M N p, u R C ysosceles & semblables donneront, $MN : uR :: Mp : CR$; de même les triangles M S n, R C u, ysoscelles & semblables, donneront $Mn : uR :: MS$ ou $Cp : CR$. Multipliant par ordre les termes de ces deux proportions, on aura $MN \times Mn : \overline{uR}^2 :: Mp \times Cp : CR^2$. Or, (386) $MN \times Mn = b^2 = CB^2 = \overline{AR}^2 = (\frac{1}{2} uR)^2 = \frac{\overline{uR}^2}{4}$. Donc aussi $Mp \times Cp = \frac{\overline{CR}^2}{4}$; met-

FIG. 130.

tant les expressions analytiques, il vient, $yx = r^2$, ou $y = \frac{r^2}{x}$.

388. COROLL. I. La quantité $r^2 = \frac{\overline{CR}^2}{4} = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{AR}^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$ étant constante, il s'ensuit *que les ordonnées* M p *à l'Asymptote* C R, *parallèles à l'autre Asymptote, sont entr'elles en raison inverse des abscisses correspondantes.*

389. COROLL. II. Si l'on tire sur une Assymptote C c des ordonnées mo, ms, mr, mq, parallèles à l'autre Assymptote, on aura donc :

$$mo : ms :: Cs : Co$$
$$mr : mq :: Cq : Cr$$

De ces deux proportions on conclura (*Alg.* 209 & 230) :

$$mo - ms : Cs - Co :: ms : Co :: ms \times mo : Co \times mo.$$
$$mr - mq : Cq - Cr :: mq : Cr :: mq \times mr : Cr \times mr.$$

Or, si l'on suppose que mo & ms sont aussi éloignées que mr & mq, on aura $Cs - Co = Cq - Cr$, tandis que (386), $Co \times mo = Cr \times mr$. Donc $mo - ms : mr - mq :: ms \times mo : mq \times mr$, ou bien *les différences de deux ordonnées sont entr'elles, comme les produits de ces mêmes ordonnées.* Et si en outre on suppose que mo & ms, mr & mq sont infiniment près, on aura $ms \times mo = \overline{ms}^2 = \overline{mo}^2$: & $mq \times mr = \overline{mq}^2 = \overline{mr}^2$. C'est-à-dire, que *dans ce cas les différences des ordonnées sont entr'elles, comme les quarrés de ces mêmes ordonnées.*

CHAPITRE IV.

De la Parabole.

390. DÉFINITION. SOIENT les droites indéfinies T N, S D S' perpendiculaires l'une à l'autre. Fixons à volonté un point F sur 131.

FIG. 131. l'une, & imaginons que l'on prenne sur le plan de ces lignes des points M, tels que les perpendiculaires M S sur D S, soient égales aux droites M F, tirées des mêmes points au point fixe F, la courbe qui passe par cette suite de points est *une Parabole*. Le point F en est le *foyer*. Les lignes telles que F M sont des *rayons vecteurs* : la droite S D S', se nomme *la Directrice* de la Parabole : T N en est *l'Axe*, & son intersection en A, avec la courbe forme le *sommet* : les perpendiculaires M P sur l'axe sont *les ordonnées*, & A P *les abscisses*.

391. COROLL. Il suit de cette définition : 1°. Que F A = A D, ou bien que *le sommet de la courbe est à même distance du foyer & de la Directrice*. 2°. Que si l'on prend un équerre D S O, & un fil inextensible F M O = S O, dont une extrémité soit fixée en F, & l'autre en O, la Parabole sera décrite d'un mouvement continu, par un stile M, qui étant mobile le long de S O, tiendra le fil F M O toujours tendu, tandis que la branche S D glissera sur la directrice S S'. Car alors on aura toujours M S = M F.

392. Pour avoir l'équation de la Parabole, soit M P = y, A P = x, A D = A F = a. Cela posé, le triangle rectangle M-P F donne, $\overline{PM}^2 = \overline{MF}^2 - \overline{PF}^2$. Or, M F = M S = P D = A P + A D = $x + a$, P F = A P − A F = $x - a$. Donc $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax$.

393. DÉFINITION. La quantité constante $4a$ s'appelle le *Paramètre de l'Axe*. Si l'on fait $4a = p$, l'équation ci-dessus devient $y^2 = px$.

394. COROLL. Il suit de là 1°. *Que l'ordonnée qui passe par le foyer, vaut la moitié du Paramètre, ou bien que* $m'F = \frac{1}{2}p$. Car dans ce cas $x = AF = a = \frac{1}{4}p$. Donc $\overline{m'F}^2 = p \times \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}p^2$, ou $m'F = \frac{1}{2}p$.

395. 2°. Que p étant une quantité constante, les quarrés des ordonnées sont comme les abscisses correspondantes ; ou bien que

que *les ordonnées sont entr'elles, comme les racines quarrées des abscisses.* FIG. 131.

396. 3°. Qu'à chaque abscisse répondent deux ordonnées égales, l'une positive, l'autre négative; puisqu'on a toujours $y = \pm \sqrt{px}$. Ainsi *la courbe a deux branches égales, l'une à droite, l'autre à gauche de l'axe* T N.

397. 4°. Que les abscisses & les ordonnées croissent en même tems; qu'ainsi les branches de la Parabole ne peuvent jamais se rencontrer en s'écartant du sommet, c'est-à-dire, *que la Parabole n'est point une courbe rentrante.*

398. 5°. Qu'en faisant l'abscisse x négative, y devient imaginaire. Ainsi *la courbe ne s'étend pas au-delà du sommet* A.

399. PROBLÈME. *Mener une tangente à un point quelconque* M *de la Parabole.*

SOL. De ce point M tirés sur la directrice la perpendiculaire M S': partagés également par la droite M' T l'angle S' M F formé au point M par cette perpendiculaire & par le rayon vecteur F M' (60), & cette ligne sera la tangente cherchée. Car le triangle S' M' F étant isocelle (390) & M T étant une perpendiculaire abaissée du sommet sur la base F S', chacun de ses points sera à égale distance de F & de S'; donc si le point o pris en dedans de la Parabole appartenoit à cette perpendiculaire on auroit F o = S' o. Donc si du rayon S' o & du centre S' on décrivoit l'arc on: & si du rayon F o & du centre F on décrivoit l'arc or, ces deux arcs se coupant en o, le point r seroit plus près de la directrice que le point o: en outre si du point n on tiroit sur la directrice la perpendiculaire $n\int'$, & du point r la perpendiculaire $r\int$, on auroit F o = S' o = S' n > $\int' n$, & F o = F r = $\int r$. Donc $\int r > \int' n$, ou bien en tirant ri parallèle à la directice, $\int' i > \int' n$, ou la partie est plus grande que le tout, ce qui est absurde.

400. COROLL. I. *Dans cette courbe la tangente* M T *forme donc des angles égaux avec le rayon vecteur* M F, *qui aboutit au point de contact; & avec une droite* M O *tirée de ce point parallèlement*

FIG. *à l'axe.* Car la ligne O M S étant parallèle à l'axe ou perpen-
131. diculaire à la directrice, l'angle T M F = T M S = E M O, qui lui est opposé.

401. II. *La tangente au sommet* A *de la Parabole est donc perpendiculaire à l'axe* A N. Car le rayon vecteur F A & la ligne A D parallèle à l'axe, étant dans le même alignement, sont censés faire en A un angle de 180°. Donc l'angle F A Q, qui en est la moitié, est de 90°.

402. III. *Le triangle* F M T *est donc ysocelle*; car l'angle F-M T = E M O = M T F (38).

403. THÉORÈME I. *La soutangente* P T *dans la Parabole est double de l'abscisse correspondante* P A, *ou bien son expression est* P T = $2x$, & *celle de la tangente* M T *est* $\sqrt{px + 4xx}$.

DEM. 1°. Le triangle ysocelle F M T donne F T = F M = M S = P A + A D. Donc F T − A D, ou F T − A F, ou encore A T = P A, & par conséquent P A + A T, ou P T = 2 P A = $2x$.

2°. Le triangle rectangle M P T, donne $\overline{MT}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PT}^2 = yy + 4xx = px + 4xx$. Donc M T = $\sqrt{px + 4xx}$.

404. THÉORÈME II. *Dans cette courbe la sou-Normale* P N *vaut la moitié du Paramètre & la Normale* M N *vaut la racine quarrée du paramètre multiplié par le rayon vecteur qui aboutit au point* M.

DEM. 1°. Ayant élevé sur le point de contact la perpendiculaire M N sur la tangente M T, on aura (123) ∺ P T : P M : P N = $\frac{\overline{PM}^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$.

2°. Le triangle rectangle M N P, donne M N = $\sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2} = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2} = \sqrt{p(x + \frac{1}{4}p)}$. Or, $x + \frac{1}{4}p$ = P D = M S = M F. Donc M N = $\sqrt{p \times FM}$.

405. COROLL. Si l'on abaisse du foyer F, la perpendiculaire F Q sur la tangente, les triangles F Q T, N P M, donneront, M N : P N :: F T : F Q. Or, M N = $\sqrt{p \times FM}$, P N

$= \frac{1}{2}p$, F T = F M. Substituant on trouvera, F Q $= \frac{1}{2}\sqrt{p \times FM}$. FIG.

Puisque dans cette expression tout est constant excepté F M, il s'ensuit que *dans la Parabole les perpendiculaires menées du foyer sur les tangentes aux différens points de la courbe, sont comme les racines quarrées des rayons vecteurs correspondants.*

406. DÉFINITION. On appelle *Diamètre* toute droite M L, tirée d'un point quelconque M de la Parabole, parallèlement à son Axe A O. Le point M en est l'origine. *Ses Ordonnées* sont les droites $m\,p$ parallèles à la ligne T M, qui touche la courbe à l'origine de ce diamètre. *L'Abscisse* est la partie M p du Diamètre, comprise entre son origine M & l'ordonnée correspondante $m\,p$. 132.

407. Pour avoir l'équation au Diamètre, soit $m\,p = y$, M $p = x$: menons à l'Axe les ordonnées M P, m O, ainsi que la Normale M N : faisons de plus A P $= c$, P M $= b$. Cela posé, nous aurons $\overline{m\,O}^2 = p \times$ A O. Or, 1°. m O $= m$ L + M P $= m$ L $+ b$: A O = A P + M p + p L $= c + x + p$ L. 2°. Les triangles P M N, L $p\,m$, donnent (117) : M N, ou $\sqrt{p \times MF}$: $m\,p$, ou y :: P N, ou $\frac{1}{2}p$: m L $= \frac{\frac{1}{2}py}{\sqrt{p \times MF}}$ :: P M, ou b : p L $= \frac{by}{\sqrt{p \times MF}}$. Donc m O $= \frac{\frac{1}{2}py}{\sqrt{p \times MF}} + b$, & A O $= c + x + \frac{by}{\sqrt{p \times MF}}$. Substituant dans $\overline{m\,O}^2 = p \times$ A O, il vient $\frac{\frac{1}{4}p^2y^2}{p \times MF} + \frac{bpy}{\sqrt{p \times MF}} + bb = pc + px + \frac{bpy}{\sqrt{p \times MF}}$. Or, $bb = \overline{PM}^2 = p \times AP = pc$. Donc en réduisant $\frac{\frac{1}{4}pyy}{FM} = px$, ce qui donne $yy = 4$ M F $\times x$ (la quantité constante 4 M F s'appelle le *Paramètre du Diamètre* M L, & si on le fait $= q$, on aura $yy = qx$, ainsi que pour l'axe (393)).

CHAPITRE V.

De la Cycloïde.

FIG. 133. 408. DÉFINITION. SI un cercle A E R roule sur une droite A B, posée dans le plan de cette figure, de sorte que A B soit toujours tangente, le point A de la circonférence qui d'abord est en contact avec cette droite, décrira dans ce mouvement une ligne courbe A M S B, que l'on nomme *Cycloïde*. La ligne A B en est la *Base*; la perpendiculaire D S sur le milieu de la base est son *Axe*; le point S le *Sommet*; & le cercle A E R est appellé le cercle *Générateur*.

Si ce cercle ne fait qu'appliquer sa circonférence sur A B, alors la base A B est égale à la circonférence du cercle générateur, & la courbe A M S B est une Cycloïde *ordinaire*. S'il a un mouvement de rotation qui lui soit propre au tour de son centre dans le sens A E R, outre celui qu'il a dans le même sens en roulant sur A B, le point générateur A reviendra en contact avec A B plutôt qu'il n'y seroit revenu sans ce mouvement propre; & alors la base sera plus petite que dans la Cycloïde ordinaire, ou bien elle sera plus petite que la circonférence du cercle générateur; & dans ce cas la courbe tracée par le point A est une Cycloïde *accourcie*. Enfin si le cercle générateur rouloit d'un mouvement propre dans le sens A R E, par une raison contraire, la base seroit plus grande que la circonférence de ce cercle, & alors la Cycloïde seroit *allongée*.

409. Il suit de là 1°. Que la Cycloïde sera ordinaire, lorsque le point A ne tournera au tour du centre du cercle générateur, qu'en vertu du roulement de ce cercle sur A B; qu'elle sera accourcie, lorsque ce point aura un mouvement propre dans le même sens; & qu'elle sera allongée lorsqu'il aura un mouvement propre en sens contraire.

410. 2°. Que dans la Cycloïde ordinaire la base est égale à la circonférence du cercle générateur, qu'elle est plus petite que cette circonférence dans la Cycloïde accourcie & qu'elle est plus grande dans la Cycloïde allongée. FIG. 133.

411. REMARQUE. Il faut que le mouvement du point générateur dans le sens A R E, soit plus petit que celui qu'il a dans le sens A E R par le roulement du cercle sur la base A B. Sans cela il pourroit se faire que ce point générateur décrivit une ligne droite, ou bien d'autres espéces de Cycloïdes, dont nous ne parlerons pas ici.

412. THÉORÈME. I. *Si d'un point quelconque* M *de la Cycloïde ordinaire on tire la perpendiculaire* M P *sur l'Axe* D S, *sa partie* M O *sera égale à l'arc correspondant* S O *du cercle générateur décrit sur l'Axe, compris entre cette droite* M P, *& le sommet* S.

DEM. Supposons que lorsque le point générateur est en M, le cercle générateur touche la base au point V : nous aurons l'arc M T V = l'arc O o D (57). Par conséquent (38) la corde M V sera parallèle à la corde O D, ce qui donnera (88) M O = D V. Or, par la nature de la Cycloïde ordinaire, la demi-base A D = la demi-circonférence D O S, & la partie A V = l'arc appliqué M T V = O *o* D. Donc D V ou M O = D O S — D *o* O = S O.

413. COROLL. D'après cette propriété il est aisé d'avoir l'équation à la Cycloïde. Car appellant l'ordonnée M P, y : & l'arc S O, u : on a toujours O M = u & O P = *sin* u. Donc M P ou $y = u + \sin u$.

414. THÉORÈME II. *La tangente en un point quelconque* M *de la Cycloïde ordinaire, est parallèle à la corde* S O *de l'arc correspondant* S I O *du cercle décrit sur l'Axe.* 134.

DEM. Soit M *m* un arc élémentaire dont le prolongement en ligne droite forme la tangente M T : menons M P, *m p*, perpendiculaires sur l'Axe : M *r* parallèle à O *o* : prolongeons S O jusqu'en *x*, & *o* O en une ligne droite *o* O N. Le triangle O *o x* aura son angle en O égal à l'angle N O S (32), son angle en

FIG. 134. x égal à l'angle S O F (50). Or, N O S = S O F, puisqu'ils sont mesurés (65 & 67) par les moitiés des arcs égaux (56) S I O, S K F. Donc (82) O o = o x = M r = m r. Donc les triangles O o x, M r m, sont semblables, & l'angle en x = l'angle en m. Donc m M est parallèle à x O, ou bien T M est parallèle à S O.

415. THÉORÈME III *Un arc Cycloïdal quelconque* S M *est double de la corde* S O *de l'arc correspondant* S I O *du cercle générateur décrit sur l'Axe, ou* S M = 2 S O.

DEM. Soit l'arc n o décrit du point S comme centre avec le rayon S o, il est clair que nO & M m ou O x, sont les incrémens correspondants de la corde S O, & de l'arc Cycloïdal S M. Or, O x = 2 n O (125). Donc aussi S M = 2 S O.

416. COROLL. La demi-Cycloïde A M S est donc double de son Axe S D, puisque cet Axe est la corde de l'arc correspondant dans le cercle générateur; par conséquent *la Cycloïde entière est quadruple de son Axe.*

417. THÉORÈME IV. *La tangente* M T *à un point quelconque* M *de la Cycloïde, fait avec l'ordonnée* P M, *qui aboutit à ce point, un angle* P M T, *dont le cosinus varie en raison de la racine quarrée de la partie de l'Axe* P D, *renfermée entre la base* D A *& l'ordonnée* P M.

DEM. La corde S O étant parallèle à la tangente M T (414), l'angle P M T = P O S, dont le complément est P S O. Or, dans le triangle rectangle S O D, si D S est pris pour le sinus total, D O sera le sinus de ce complément D S O: d'ailleurs D O varie en raison de la racine quarrée de P D (181). Donc le sinus de l'angle D S O, ou bien le cosinus de l'angle P M N, varie dans ce même rapport.

PRINCIPES DE CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE PREMIER.

Servant d'introduction à ce Calcul.

FIG

418. SI l'on inſcrit ou ſi l'on circonſcrit des polygonnes à une figure courbe, on pourra tellement augmenter le nombre des côtés de ces polygonnes, qu'ils différeront de l'aire curviligne d'une quantité, qu'on rendra toujours auſſi petite qu'on voudra, & par conſéquent plus petite qu'une quantité donnée quelconque. Ce que nous avons dit des polygonnes rélativement aux figures courbes & planes, on peut le dire des polyèdres, rélativement aux figures ſolides & courbes: & même en général de toute ſorte de quantités variables, rélativement à celles dont elles s'approchent tellement dans leurs variations, qu'elles en peuvent différer d'une quantité moindre qu'une quantité donnée quelconque.

419. DÉFINITION I. *On entend par* Limite *d'une quantité variable, la valeur ou l'état auquel elle tend toujours dans ſes variations, ſans y parvenir jamais; & dont elle peut cependant approcher, de manière qu'elle en différe d'une quantité moindre qu'une quantité donnée quelconque.* Ainſi le cercle (143), ou même en général

FIG. une figure courbe & plane quelconque eſt la limite de ſes polygonnes, ſoit inſcrits ſoit circonſcrits; la ſphère eſt la limite des ſphéroydes, & le Cone celle des pyramides, qui peuvent lui être inſcrites & circonſcrites.

420. THÉORÈME I. *Si l'on a deux ſuites de quantités croiſſantes, a, c, e, g... &c ... b, d, f, h ... &c. qui aboutiſſent l'une à la quantité u, l'autre à la quantité x; & que les termes correſpondants dans les deux ſuites, ſavoir a & b, c & d, e & f, &c. ſoient dans un rapport conſtant, je dis que leurs limites u & x, ſeront dans le même rapport, ou bien qu'on aura, $a : b = u : x$.*

DEM. Pour démontrer ce Théorème, il ſuffit de faire voir qu'on ne peut ſuppoſer, ſans qu'il s'enſuive une abſurdité, que le rapport de u à x ſoit ou plus grand ou plus petit que celui de a à b. Suppoſons en effet qu'on eût $u : x > a : b$; en prenant dans la première ſuite une quantité m plus petite que la limite u, on pourroit donc avoir $m : x = a : b$. Or, quelque petite que ſoit la différence entre m & u, on peut trouver une infinité de quantités plus grandes que m & plus petites que u: ſi nous ſuppoſons qu'une de celles-là ſoit o, & que ſa correſpondante dans l'autre ſuite ſoit p, on aura par l'hypothèſe, $o : p = a : b$. Donc $o : x > a : b$; & partant $o : x > o : p$, ou bien $p > x$, ce qui eſt abſurde, puiſque p eſt contenu dans x.

Si l'on ſuppoſoit que $u : x < a : b$, on auroit, *invertendo*, $x : u < b : a$, ce que l'on démontreroit abſurde par un raiſonnement ſemblable au précédent. Il faut donc que l'on ait néceſſairement $u : x = a : b$.

421. Cette propriété des limites & celle que nous démontrerons dans le Théorème ſuivant, ont fourni aux anciens une méthode des plus ingénieuſes, pour paſſer des figures terminées par des lignes droites ou par des plans, à celles qui ſont terminées par des lignes ou par des ſurfaces courbes. Pour démontrer, par exemple, que deux cercles différens A & B, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres, Euclide raiſonne à-peu-près de cette manière, dans la 2me. propoſition du

12me.

12me. Livre. Si l'on inſcrit des polygonnes ſemblables dans des cercles différents, ces polygonnes ſont entr'eux comme les quarrés conſtruits ſur les diamètres de ces cercles (& cela eſt prouvé dans la 1re. propoſition du même Livre). Donc quelque grand que ſoit le nombre des côtés de ces polygonnes, la même raiſon ſubſiſtera toujours entre ces figures; & ce ſera par conſéquent la raiſon entre les limites de ces polygonnes croiſſants, leſquelles limites n'étant autre choſe que les cercles A & B, il s'enſuit que ces cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres. FIG.

422. Nous verrons plus bas que les modernes ont ſuivi la même méthode toutes les fois qu'ils ont raiſonné d'après l'idée de l'infini; mais auparavant faiſons quelqu'autre application.

Soit la demi-Ellipſe A I B, & le demi-cercle A H B, décrit ſur ſon grand axe A B: qu'on tire les ordonnées D P, F Q, H C, perpendiculaires à l'axe, de façon que A P = P Q = Q C: qu'on tire auſſi les cordes A E, E G, G I, & A D, D F, F H. Les triangles A P E, A P D, ayant même baſe A P, ſeront entr'eux comme leurs hauteurs P E, P D: ou bien (340) comme le petit axe (2 *b*) eſt au grand axe (2*a*). Pareillement les trapèzes correſpondants comme P E G Q, P D F Q, ayant leurs côtés parallèles à égale diſtance, ſont comme les ſommes de ces côtés, ou :: P E + Q G : P D + Q F. *Or, puiſque* (340) P E : P D :: Q G : Q F, on a P E + Q G : P D + Q F :: P E : P D :: 2 *b* : 2 *a*. Donc (*Alg.* 231) la ſomme des triangles & des trapèzes contenus dans l'Ellipſe, ou bien le polygonne inſcrit dans cette courbe, ſera à la ſomme des triangles & des trapèzes contenus dans le cercle, ou bien au polygonne du même nombre de côtés, inſcrit dans le cercle, :: 2 *b* : 2 *a*; & la même raiſon ſubſiſtera toujours entre les polygonnes ainſi décrits, quoique en augmentant le nombre de leurs côtés ils croiſſent continuellement. Donc leurs limites, qui ſont évidemment l'Ellipſe & le Cercle circonſcrit, ſeront dans la même raiſon, c'eſt-à-dire, comme le petit axe eſt au grand axe. 135.

FIG. Nous avons vu (168) que la ſurface de tout polygonne régulier vaut la moitié du produit de ſon périmètre multiplié par ſon apothème. Elle vaut donc celle d'un triangle qui auroit l'apothème pour hauteur, & le périmètre pour baſe. Or, ſi l'on conçoit un polygonne régulier inſcrit dans le cercle, & que le nombre de ſes côtés aille toujours croiſſant, on aura une ſuite de polygonnes qui croîtront toujours & qui auront le cercle pour limite ; & ſi l'on ſe repréſente une ſuite de triangles qui aient pour hauteur l'apothème du polygonne correſpondant & ſon perimètre pour baſe, chaque triangle ſera égal à chaque polygonne;& la limite de ces triangles croiſſants ſera un triangle qui auroit le rayon du cercle pour hauteur & ſa circonférence pour baſe. Donc le même rapport d'égalité qu'il y avoit entre chaque triangle, & le polygonne correſpondant, ſubſiſtera entre les limites : ou bien le cercle ſera égal à un triangle qui auroit le rayon pour hauteur & la circonférence pour baſe.

423. THÉORÈME II. *Ce que nous avons dit dans le Théorème précédent, des quantités qui ſont les limites des ſuites croiſſantes, doit s'entendre auſſi de celles qui ſont limites des ſuites décroiſſantes.*

DEM. Car ſi cela n'étoit pas ainſi, on pourroit donc dire en employant les dénominations du Théorème précédent que $u : x \lessgtr a : b$. Or, il eſt d'abord impoſſible qu'on ait $u : x < a : b$. Car alors en prenant parmi les quantités décroiſſantes qui aboutiſſent à u, une quantité $m > u$, on pourroit avoir $m : x = a : b$. Or, entre m & u, on peut ſuppoſer dans la première ſuite une infinité de quantités chacune plus grande que u & plus petite que m. Donc ſi une de ces quantités eſt o, & que ſa correſpondante dans l'autre ſuite ſoit p, on aura, par l'hypothèſe, $o : p = a : b$, & $o : x < m : x$, & par conſéquent $o : x < o : p$. Donc $x > p$, ce qui eſt abſurde, puiſque p eſt une des quantités décroiſſantes qui aboutiſſent à x. En raiſonnant comme dans le Théorème précédent, on démontrera qu'il eſt abſurde de ſuppoſer $u : x > a : b$; donc on a $u : x = a : b$.

424. COROLL. I. *Deux ſuites de quantités a, c, e, g... &c...*

b, d, f, h . . . &c. dont les correspondantes sont égales, ont pour limite la même quantité ou bien des quantités égales. Car quelles que soient ces quantités, soit croissantes soit décroissantes, la même raison d'égalité, qui se trouve entre deux termes correspondants quelconques, doit se trouver entre leurs limites. FIG.

425. COROLL. II. L'on conclura de là : *Que si l'on a deux suites de raisons, dont les correspondantes soient toujours égales, elles auront pour limite la même raison, ou bien des raisons égales.* Car considérant ces raisons comme de vraies quantités, ainsi qu'elles le sont en effet, ces deux suites doivent aboutir à la même raison ou à des raisons égales.

426. THÉORÈME. III. *Si l'on a deux suites de quantités variables, soit croissantes soit décroissantes, dont l'une a, c, e, g..&c aboutisse à la quantité u, & l'autre b, d, f, h....&c, aboutisse à la quantité x, je dis que la suite des raisons des termes correspondans, savoir, a : b, c : d, e : f . . . &c, aboutira à la raison des deux limites u & x ; ou bien que la limite des raisons sera la raison des limites.*

DEM. Désignons par $\pm y$ la différence variable entre u & chacune des quantités a, c, e, . . . &c. qui aboutissent à u : & par $\pm z$ la différence variable entre x & chacune des quantités b, d, f . . . &c qui aboutissent à x ; ce qui donnera $u \pm y$ pour chaque terme de la première suite, $x \pm z$ pour chaque terme de la seconde, & $u \pm y : x \pm z$ pour exprimer en général la raison entre deux termes correspondants quelconques.

Or, y & z pouvant toujours approcher de o sans y parvenir jamais, & en différer aussi peu qu'on voudra, la raison de $u \pm y : x \pm z$ pourra toujours approcher de celle de $u : x$, sans y parvenir jamais, & en différer moins que d'une quantité donnée quelconque. Donc $u : x$, savoir la raison des limites u & x de ces quantités, est la limite des raisons de $u \pm y : u \pm z$, qui regnoient entre ces mêmes quantités.

427. DÉFINITION II. Nous appellerons *dernière raison* celle qui est la limite d'une suite quelconque de raisons ; & si cette

FIG. suite est comparée avec une autre qui lui soit égale terme à terme, nous appellerons ces deux suites de raisons des *suites parallèles.*

136. 428. COROLL. Si l'on a une courbe R M A, qui tourne sa concavité vers l'axe A B, que par l'extrémité de deux ordonnées R P, M Q, on fasse passer la sécante R M S, & que l'ordonnée M Q étant immobile, l'ordonnée R P s'en rapproche continuellement; il est évident que les sécantes R S, R′ S′, R″ S″ . . . &c. passant au point M, ont pour limite la tangente M T : que les sous-sécantes correspondantes P S, P′ S′, P″ S″ . . . &c. ont pour limite la sou tangente Q T : & que les ordonnées décroissantes R P, R′ P′, R″ P″ . . . &c ont pour limite l'ordonnée M Q. On peut donc conclure d'après le Théorème précédent, que *pour toutes les sécantes qui passent au point* M *la dernière raison entre ces sécantes & leurs sous-sécantes est la raison de la tangente* M T *à sa sous-tangente* Q T : *que la dernière raison entre les ordonnées décroissantes & leurs sous-sécantes, est la raison de l'ordonnée* M Q, *tirée sur le point* M, *à sa sous-tangente* Q T : *que la dernière raison entre les ordonnées & les sécantes est celle de la même ordonnée à la tangente* M T, *toujours menée de ce point* M.

429. THÉORÈME IV. *Quoiqu'on ait deux suites de quantités décroissantes qui aboutissent à zéro, on peut néanmoins concevoir que leurs rapports ne s'évanouissent pas, ou bien que leur dernière raison est une raison finie & déterminée.*

DEM. Soit la courbe R M A, dans laquelle on prend deux ordonnées M Q, P R : du point M soit tirée M N parallèle à l'axe des abscisses A B, ce qui donnera R N pour la différence des deux ordonnées, & M N pour la différence de leurs abscisses. Concevons que l'ordonnée M Q étant immobile, R P s'en rapproche toujours, de façon que les différences des deux coordonnées, savoir R N & M N, R′ N′ & M N′, R″ N″ & M N″ . . . &c, diminuent continuellement, pour s'évanouir lorsque le point R arrivera en M. Cela posé, je dis que la raison entre ces mêmes différences ne tend pas à s'évanouir,

ou bien que la limite de ces raiſons eſt une raiſon finie & dé- FIG.
terminée. Car à chaque point comme R, R′, R″ ... de l'arc 136.
RM, on aura trois triangles ſemblables, ſavoir pour le point R, RNM, RPS, MQS : pour le point R′, R′N′M, R′P′S′, MQS′ : pour le point R″, R″N″M, R″P″S″, MQS″ ; &c. Donc on aura ces trois ſuites de raiſons dont les correſpondantes ſont égales :

$$\left.\begin{array}{l} RN : MN \\ R'N' : MN' \\ R''N'' : MN'' \\ \&c \ : \ \&c \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} RP : PS \\ R'P' : P'S' \\ R''P'' : P''S'' \\ \&c. \ : \ \&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} MQ : QS \\ MQ : QS' \\ MQ : QS'' \\ \&c. \ : \ \&c. \end{array}\right.$$

Or, les raiſons de la troiſième ſuite vont en augmentant, puiſque les antécédents ſont conſtants, & que leurs conſéquents diminuent, en devenant QS′, QS″ ... &c. Donc les raiſons de la première ſuite croiſſent auſſi, quoique leurs termes RN & MN, R′N′ & MN′ ... &c. tendent à s'évanouir, & s'évanouiſſent en effet lorſque le point R tombe ſur M. Leur limite n'eſt donc pas zéro, puiſque loin de s'approcher de cette prétendue limite, elles s'en écartent toujours. D'ailleurs les raiſons de la ſeconde ſuite ont pour limite une raiſon déterminée, ſavoir, celle de l'ordonnée MQ à ſa ſous-tangente QT (428). Donc les autres ſuites ont auſſi la même limite ou une limite égale (425). Par conſéquent quoiqu'on ait deux ſuites de quantités décroiſſantes, &c.

430. Remarque. Il faut obſerver ici que dans deux ſuites de quantités qui aboutiſſent à zéro, on ne peut point dire, d'après le Théorème III. que la limite des raiſons eſt la raiſon des limites ; car ces limites n'étant point des quantités, on ne ſauroit concevoir un rapport entr'elles. Il faut donc alors chercher cette dernière raiſon hors de la ſuite décroiſſante de ces quantités, & prendre la raiſon de o : o qui eſt dans ce cas, celle des limites, plutôt pour un *Symbole* qui annonce la dernière raiſon, que pour l'expreſſion de cette raiſon.

FIG. 431. THÉORÈME V. *Pour avoir la limite d'une suite de raisons, dont les termes aboutissent en même-tems à* 0, *il faut prendre la raison des termes correspondants à* 0, *dans une suite parallèle de raisons dont les termes ne s'évanouissent pas.*

Par exemple, si j'ai la suite de raisons C, dont les termes x & y tendent à s'évanouir en devenant, x', $y' \ldots x''$, $y'' \ldots x'''$, $y''' \ldots 0$, 0; je dis que la limite de ces raisons sera la raison des deux termes a & b, qui dans la suite parallèle D, correpondent à y & x devenus 0.

$$\begin{array}{c} C \\ \left.\begin{array}{c} x : y \\ x' : y' \\ x'' : y'' \\ x''' . y''' \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 : 0 \end{array}\right\} = \end{array} \begin{array}{c} D \\ \left\{\begin{array}{c} a : b + y \\ a : b + y' \\ a : b + y'' \\ a : b + y''' \\ \vdots \quad \vdots \\ a : b \end{array}\right. \end{array}$$

DEM. 1°. Puisque y diminue en devenant y', y'', y''' ... &c. chaque raison de la suite D, & par conséquent chaque raison de la suite C (425), approche toujours de la raison de a à b. 2°. Pour rendre la raison de $x : y$ égale à la raison de $a : b$, il faudroit supposer que x & y sont 0, & que cependant il y a une raison proprement dite entre ces quantités, ce qui est contradictoire (*Alg.* 202); donc la raison de $x : y$, n'atteint jamais à la raison de $a : b$. 3°. Cependant x & y pouvant chacune approcher de 0 de plus près qu'une quantité donnée, quelque petite qu'on la suppose, la raison de $x : y$ pourra aussi approcher de celle de $a : b$ de plus près qu'une quantité donnée, quelque petite quelle soit. Donc (419) cette raison de $a : b$ a toutes les propriétés qui doivent caractériser la vraie limite des raisons entre les variables x & y qui tendent à s'évanouir.

432. COROLL. I. On conclura de là que si dans une cour-
136. be R M A, les différences de deux coordonnées, savoir R N & M N, ainsi que la corde interceptée R M, décroissent jusqu'à s'évanouir, par le rapprochement continuel du point R vers le point M, *la limite Géométrique du rapport des deux différence* R N *&* M N *sera le rapport de l'ordonnée* M Q *à sa soutangente* Q T: *que la limite du rapport de la corde* R M, *à la différence* M N *des deux abscisses, sera le rapport de la tangente* M T *à la sou-*

tangente Q T : *& que la limite du rapport de la même corde* R M *à la différence* R N *des deux ordonnées, sera le rapport de la tangente* M T *à l'ordonnée* M Q. Car quelque part qu'aboutisse ce point R dans l'arc R R′ M, le triangle R M N étant semblable au triangle R S P, on aura toujours R N : M N : R M :: R P : P S : R S. Or, quand les trois premières lignes, savoir R N, M N, R M, deviennent o, R P devient M Q, P S devient Q T, R S devient M T. Donc (431) les raisons entre ces dernières lignes M Q, Q T, M T, sont les vraies limites des raisons qui regnoient entre les premières. FIG. 136.

433. Corol. II. Il suit de là *que la condition qui donne la dernière raison dans une suite de quantités décroissantes jusques à* o, *est de supposer ces quantités égales à* o. C'est par là qu'on trouvera dans une suite parallèle de quantités qui ne s'évanouissent pas, l'expression analytique de cette dernière raison; & si d'ailleurs on en connoît aussi l'expression géométrique, on pourra de ces deux raisons égales former une proportion, & trouver par ce moyen la valeur de quelqu'un des termes qui entreront dans la proportion.

434. Par exemple, supposons que la courbe R M A soit une Parabole ordinaire, & proposons-nous de trouver d'après son équation $yy = px$, l'expression analytique de la dernière raison entre les différences variables R N, M N, de deux coordonnées aux deux points R & M : appellons z la différence décroissante des deux ordonnées, telles que R P & M Q, R′ P′ & M Q, R″ P″ & M Q, &c, laquelle différence tend à s'évanouir : appellons u la différence décroissante des abscisses correspondantes, laquelle devient successivement M N, M N′, M N″ ... &c. A la place de y, nous avons donc $y + z$: & à la place de x, $x + u$ (*). Donc l'équation de la courbe devient $yy + 2yz$

(*) On voit assez que cette différence z (& il en est de même de u) est positive ou négative, suivant qu'on soustrait la plus petite ordonnée de la plus grande, ou la plus grande de la plus petite.

FIG. 136. $+zz = px + pu$. Otant la première de celle-ci on à, $2yz + zz = pu$. Ce qui donne $p : 2y + z :: z : u$. Or, si l'on suppose ici $z = 0$ & $u = 0$, ainsi qu'il le faut nécessairement pour avoir la dernière raison de z à u, la raison correspondante devient $p : 2y$, c'est-à-dire, que la dernière raison entre les différences z & u qui décroissent jusqu'à s'évanouir, est exprimée algébriquement par la raison de $p : 2y$. Or, l'expression géométrique de cette même raison est la raison de l'ordonnée M Q à la sous-tangente Q T (432). Nous pouvons donc dire $p : 2y ::$ MQ : QT; ou bien, puisque M Q est y, $p : 2y :: y :$ QT $= \frac{2yy}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$, c'est-à-dire, que par cette méthode, ainsi que par la méthode ordinaire (403) on trouve dans cette courbe la soutangente double de l'abscisse correspondante.

435. REMARQUES IMPORTANTES. 1°. Si au lieu de prendre la dernière raison des variables x & y du Théorème précédent, dans une suite parallèle D, on vouloit se la représenter dans la suite même C de ces variables décroissantes, on le pourra à ces conditions-ci : 1°. Que les dernières valeurs des quantités x & y (que je désigne par cette caractéristique d en cette manière dx, dy (*)) soient considérées comme de vraies quantités, afin d'établir entr'elles un rapport : 2°. Que ce rapport égale celui de $a : b$, qui est la vraie limite des rapports entre x & y, dans l'exemple du Théorème précédent : 3°. Que les dernières valeurs dx, dy, soient supposées plus petites que toute quantité assignée dans la suite décroissante des x & des y, & par conséquent plus petites qu'une quantité donnée quelconque. Ainsi les dernières valeurs de deux quantités x & y, qui décroissent jusqu'à s'évanouir, pourront être considérées sous deux rapports différents, ou comme *li-*

(*) Nous avons adopté de préférence cette caractéristique d, pour désigner une dernière valeur, parce que c'est la lettre initiale du mot *dernier*.

mites

FIG.

mites de ces quantités, ou comme *termes de leur dernière raison prise dans la suite même de ces quantités* : sous le premier rapport elles sont o, sous le second elles peuvent & doivent être considérées comme de vraies quantités.

436. Si ces dernières valeurs des quantités décroissantes sont considérées comme termes de la dernière raison, elles doivent nécessairement admettre toute sorte de rapports entr'elles ; puisque cette dernière raison que leur rapport représente, peut être une raison déterminée quelconque. Mais soit comme limites, soi comme termes d'une dernière raison, il seroit absurde de dire : 1°. *Qu'elles ont un rapport assignable avec une quantité donnée a* : 2°. *Qu'elles peuvent augmenter par l'addition ou diminuer par la soustraction cette même quantité.* Car si le rapport de $dx : a$ étoit assignable, ou pouvoit être représenté par celui de deux quantités données m & n on auroit $dx : a :: m : n$, & par conséquent $dx = \frac{am}{n}$. Or, si dx est pris comme limite des décroissemens, il est o, & l'équation devenant $o = \frac{am}{n}$ est évidemment absurde : si dx est pris comme terme d'une dernière raison, il est supposé plus petit que toute quantité donnée, & cependant l'équation $dx = \frac{am}{n}$ détermine une infité de quantités plus petites que dx, savoir, $\frac{am}{2n}, \frac{am}{3n}, \frac{am}{4n} \ldots$ &c, ce qui seroit contradictoire. Si l'on disoit que $a + dx$ vaut une quantité plus grande que a, par exemple b : & que $a - dx$ vaut aussi une quantite moindre que a, par exemple c, on auroit donc $a + dx = b$, & $a - dx = c$; & par conséquent $dx = b - a$, & $dx = a - c$: équations évidemment absurdes pour la même raison que l'équation précédente, soit qu'on considére dx comme o, soit qu'on la considére comme terme d'une dernière raison. Ainsi *les dernières valeurs des quantités qui décroissent jusqu'à s'évanouir, de quelque manière qu'on les considére*,

FIG. *sont absolument* incomparables *avec une quantité donnée quelconque.*

437. Après ce que nous venons de dire, il sera aisé de se faire des idées exactes sur ce qu'on doit entendre en Géométrie par les infiniment petits & les infiniment grands. Nous dirons donc, pour commencer par les premiers, *que les infiniment petits ne sont autre chose que les dernières valeurs des quantités qui décroissent jusqu'à s'évanouir.* Or, ces dernières valeurs pouvant être considérées ou comme *Limites* de ces quantités, ou comme *termes de leurs dernières raisons*, il s'ensuit que les infiniment petits peuvent être considérés, & le sont en effet, sous ce double rapport. En tant que limites des quantités qui décroissent jusqu'à s'évanouir, les infiniment petits sont o, & on ne peut dire sans absurdité que les uns sont plus grands que les autres. Ils ne peuvent donc point sous ce rapport admettre quelque raison entr'eux, ni devenir par conséquent l'objet du calcul. En tant que termes des dernières raisons entre des quantités décroissantes jusqu'à s'évanouir, ils sont considérés comme de vraies quantités, nécessairement plus petites que toute quantité donnée. Mais de quelque manière qu'on considére l'infiniment petit, on ne peut point dire sans renverser les suppositions déja faites, *qu'il a un rapport assignable avec une quantité donnée a, ou qu'il peut augmenter cette quantité par l'addition & la diminuer par la soustraction* (436).

438. Les infiniment petits dx, dy, en tant que termes des dernières raisons entre les variables x & y, étant considérés comme quantités, peuvent donc être pris pour de nouvelles variables décroissantes, qui auront encore leurs dernières valeurs, qu'on désignera par la caractéristique dd, de cette manière ddx, ddy, & qu'on appellera des *infiniment petits du second ordre.* Ceux-ci à leur tour considérés comme limites des variables décroissantes dx, dy, seront o : comme termes de leur dernière raison, ils seront pris pour des quantités, plus petites à la vérité que toute valeur donnée dans la suite décroissante des dx & dy, & excluant par là tout rapport assig-

nable avec ces quantités, mais susceptibles de représenter par FIG. leur mutuelle comparaison toute sorte de rapports finis & déterminés.

On voit assés que rien ne borne l'esprit dans cette gradation d'infiniment petits considérés comme termes de dernières raisons entre des quantités décroissantes; qu'ainsi *on peut sous ce rapport s'en représenter d'une infinité d'ordres différens & que sans renverser les suppositions déjà faites, ceux d'un ordre quelconque ne sauroient être comparés avec ceux d'un ordre superieur.*

439. Si l'on demande présentement de quel ordre sera le produit de deux infiniment petits du premier ordre, dx, dy; il est aisé de prouver que ce sera un infiniment petit du second ordre, ou bien qu'il aura avec l'infiniment petit du premier, un rapport plus petit que tout rapport donné, c'est-à-dire, qu'il sera incomparable avec lui. Car $dx \times dy : dx :: dy : 1$. Or, $dy : 1$ est plus petit que tout rapport donné, sans quoi dy auroit une valeur déterminée; donc aussi $dx \times dy : dx$ est un rapport plus petit que tout rapport donné. Le produit de trois infiniment petits du premier ordre sera pour la même raison, un infiniment petit du troisième, c'est-à-dire, qu'il aura avec l'infiniment petit du second, un rapport plus petit que tout rapport donné; puisque $dx \times dy \times dz : dx \times dy :: dz : 1$; & toujours de même, de façon que *l'ordre d'un infiniment petit est déterminé par le nombre de facteurs infiniment petits du premier ordre, qu'il renferme.* Ainsi $(dx)^2$ est infiniment petit du second ordre, $(dx)^3$ est infiniment petit du troisième ordre, $(dx)^n$ est infiniment petit de l'ordre n.

440. Tout ce que nous venons de dire de l'infiniment petit, doit s'entendre de l'infiniment grand & se prouver de même. Si l'on demande donc ce que c'est que l'infiniment grand ou simplement *l'infini*, nous dirons que *c'est la dernière valeur d'une quantité qui croit au-delà de tout terme assignable*: que cette dernière valeur peut être considérée ou comme *limite d'accroissemens*, ou comme *terme d'une dernière raison* entre diverses quan-

FIG. tités. Sous le premier rapport, l'infini n'eſt point une quantité, puiſqu'on ne peut rien concevoir de plus grand que lui ; c'eſt pour les quantités croiſſantes, ce qu'eſt o pour les décroiſſantes : ſous le ſecond, l'infini eſt conſidéré comme une quantité toujours plus grande qu'une quantité donnée dans cette ſuite croiſſante, & cependant pouvant être conſidérée comme une nouvelle variable, qui donne naiſſance à des infinis d'un ordre ſuperieur, ſans que rien en borne le nombre. Mais tout ce que nous avons dit ci-deſſus, ſoit des quantités finies par rapport aux infiniment petits, ſoit des infiniment petits comparés entr'eux, doit s'entendte également des infinis comparés, ſoit avec les quantités finies, ſoit avec d'autres infinis. Ainſi nous dirons 1°. Que de quelque manière qu'on conſidére l'infini, ſoit comme limite d'accroiſſemens, ſoit comme terme d'une dernière raiſon, il ne peut avoir aucun rapport aſſignable avec une quantité donnée a. Car ſi ce rapport étoit aſſignable, c'eſt-à-dire, s'il pouvoit être repréſenté par celui de deux nombres donnés m & n on auroit $\infty : a :: m : n$, donc $\infty = \frac{am}{n}$, ce qui eſt abſurde. 2°. Que toute fraction qui a pour numérateur une quantité donnée & pour dénominateur, l'infini, comme $\frac{a}{\infty}$, eſt o. Car elle eſt la limite d'une ſuite de fractions $\frac{a}{1}, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4} \ldots \frac{a}{\infty}$, qui ont le numérateur conſtant & le dénominateur toujours croiſſant, laquelle limite eſt néceſſairement o (419). 3°. Qu'une quantité donnée quelconque ajoûtée ou ſouſtraite à l'infini ne ſauroit le changer, ou bien que $\infty \pm a = \infty$, & qu'il n'y a point là, à proprement parler, d'addition ni de ſouſtraction ; car $\infty \pm a : \infty :: 1 \pm \frac{a}{\infty} : 1$ (en diviſant chaque terme par ∞) : Or, $1 \pm \frac{a}{\infty} : 1 :: 1 : 1$, puiſque nous venons de voir que $\frac{a}{\infty}$ eſt o. Donc $\infty \pm a = \infty$. 4°. Par ce que nous avons dit, on voit encore

FIG.

dans quel ſens il faut prendre cette expreſſion $\frac{0}{0} = 1$, qu'on trouve ſi ſouvent dans le calcul ; car cela ſignifie que 1 eſt la limite, à laquelle tend une ſuite de fractions, dont les numérateurs & les dénominateurs décroiſſent toujours juſqu'à s'évanouir, comme ſeroit, par exemple celle-ci $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots\ldots \frac{0}{0}$. Et en effet cette ſuite vaut celle-ci, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots \frac{\infty}{\infty} = 1$, dans laquelle le numérateur & le dénominateur de chaque fraction, tendant toujour à l'égalité, la limite eſt néceſſairement une fraction, qui a ſes deux termes égaux, ou qui vaut 1.

CHAPITRE II.

Contenant les principes du calcul Différentiel.

441. DÉFINITION. LE calcul Différentiel n'eſt autre choſe que la méthode de réſoudre, dans tous les cas, le Problème ſuivant : *Connoiſſant la loi qui regne entre deux Variables x & y : & déſignant par D x * la différence finie de deux valeurs de x, par D y la différence finie des valeurs correſpondantes de y, trouver l'expreſſion Algébrique de la dernière raiſon entre les différences finies D x & D y, quand elles décroiſſent juſqu'à s'évanouir en même-temps.* Par exemple, connoiſſant d'après l'équation de la courbe R M A, la loi qui regne entre ſes ordonnées & ſes abſciſſes : & ſup-

* La lettre D n'eſt ici qu'une caractériſtique, ſervant à déſigner la différence finie entre les deux valeurs d'une même variable.

FIG. 136. posant que R N soit la différence finie de deux ordonnées R P, M Q : & M N celle de leurs abscisses correspondantes A P, A Q, on se propose, par le calcul Différentiel, de trouver la limite des rapports, ou bien la dernière raison entre les différences R N, M N, qu'on suppose décroissantes jusqu'à s'évanouir en même-temps.

Or, nous avons vu (431) que pour trouver la limite des raisons qui regnent entre des quantités qu'on suppose décroître jusqu'à s'évanouir, comme sont ici les différences finies D x, D y, il faut avoir une suite parallèle de raisons, formée par des quantités qui ne s'évanouissent pas, & prendre dans cette suite la raison des termes qui correspondent à D x & D y, devenus o ; ou bien qu'il faut simplement supposer ces différences D x, D y, égales à o (433), & voir ce que devient, d'après cette supposition, la raison des termes correspondants dans la suite parallèle, pour faire de cette raison la limite cherchée. C'est ainsi que nous avons procédé dans le Chapitre précédant n°. 434, quand nous avons déterminé la limite des rapports entre les différences finies R N, M N, des coordonnées d'une Parabole ; & par une semblable méthode on exprimera toujours en termes finis la dernière raison entre le différences finies D x, D y, des coordonnées d'une courbe, pourvu qu'il n'entre dans son équation d'autres indéterminées que x & y.

442. Si, non seulement on vouloit prendre cette dernière raison dans la suite parallèle, où elle est exprimée en termes finis & déterminés, mais qu'on voulut se la représenter dans la suite même des différences décroissantes D x, D y, il faudroit, d'après ce que nous avons vu (437), supposer ces différences infiniment petites, c'est-à-dire, telles que nous avons supposé les dernières valeurs des quantités décroissantes jusqu'à o, quand nous les avons considérées comme termes de leur dernière raison. Les différences finies D x, D y, considérées sous ce rapport, seront désignées par la caractéristique d en cette manière dx, dy ; & nous les appellerons des *Diffé-*

rentielles ou *des différences infiniment petites*, ou ſimplement encore des *différences*; car par ce mot on n'entend dans ce calcul que des différences infiniment petites. Nous pourrons donc diſtinguer divers ordres de différences, ainſi que nous avons diſtingué précédemment divers ordres d'infiniment petits, & nous appellerons *différences premières* celles du premier ordre, qui ſeront déſignées par la ſimple caractériſtique d: *différences ſecondes*, ou différences de différences, celles du ſecond ordre, indiquées par la double caractériſtique $d\,d$ ou ou d^2, en cette manière $d\,d\,x$, $d^2\,x$; ce qui déſigne *différence ſeconde* de x: de même $d\,d\,d\,x$ ou $d^3\,x$ déſignera la *différence troiſième* de x: $d^4\,x$, *la différence quatrième*, *&c.* de ſorte que dans ce calcul la lettre d n'exprimant aucune quantité, & la lettre x en exprimant une dont on ne s'occuppe pas, on ne peut ni ſupprimer ni écrire l'une ſans l'autre. FIG.

443. REMARQUES. I. Puiſque différentier n'eſt autre choſe que chercher l'expreſſion finie de la dernière raiſon entre des quantités qui décroiſſent juſqu'à s'évanouir, & que pour trouver cette expreſſion, il faut deux ſuites parallèles de raiſons, dont l'une renferme des quantités qui s'évanouiſſent, & l'autre des quantités qui ne s'évanouiſſent pas; il s'enſuit qu'on ne peut différentier que des *équations* & non point de *ſimples quantités*; car il n'y a qu'une équation qui puiſſe fournir une proportion, ou bien deux raiſons égales qui ſeront chacune l'origine des deux ſuites parallèles de raiſons qu'il faut néceſſairement avoir pour différentier. Et ſi dans la ſuite nous différentions des *quantités abſolues*, il reſtera ſous-entendu qu'elles ſont ſuppoſées former un membre d'équation, & qu'étant combinées avec celles qui forment l'autre membre, elles donnent deux raiſons égales, qui ſervent d'origine aux deux ſuites parallèles de raiſons dont on a beſoin ici.

444. II. Lorſque nous voudrons indiquer une différentiation à faire, nous renfermerons la quantité qui doit être différentiée entre deux crochets, précédés de la caractériſtique,

FIG. de cette manière $d(x)$, $d(ay+x)$, $d(x^2)$, &c. Lorsque nous aurons à exprimer le produit d'une différentielle multipliée par elle-même, comme $dx \times dx$, nous écrirons dx^2 : pour $dx \times dx \times dx$, nous écrirons dx^3 ; &c. Il faudra donc bien distinguer ces trois expressions d^2x, dx^2, $d(x^2)$; car la première désignera la différence seconde de x : la seconde, la différence première de x multipliée par elle-même ; & la troisième, une différentiation à faire sur x^2.

445. Règle générale. Pour différentier une quantité 1°. *Substituez à la place de chaque variable, cette même variable $\pm$ sa différence, selon que la variable augmentera ou diminuera* :

2°. *Du résultat retranchez la quantité proposée & le reste sera la différence cherchée.*

Dans les applications que nous allons faire de cette Règle ; nous ne regarderons comme variables que les quantités représentées par u, x, y, z, à moins que nous n'avertissions du contraire.

Exemple I. On demande la différence de $a+x+y$. Je substitue $x \pm dx$ au lieu de x, & $y \pm dy$ au lieu de y ; ce qui change la quantité proposée en celle-ci, $a+x \pm dx + y \pm dy$. Je retranche la proposée, & il vient, reduction faite, $\pm dx \pm dy$.

446. Coroll. Il suit de là que *l'on aura tout de suite la différence d'une somme de quantités, en effaçant les termes constans, & substituant, à la place de chaque terme variable, sa différence.* Ainsi $d(a-x) = -dx$, ou $+dx$ selon que x augmente ou diminue, ce qui est d'ailleurs évident.

447. Exemple II. On demande la différence de ax. Je substitue $x \pm dx$ au lieu de x, j'ai $a \times \overline{x \pm dx} = ax \pm adx$. Donc retranchant la donnée ax, $d(ax) = \pm adx$. Ce qui fournit cette Règle : *la différence du produit d'une constante & d'une variable, vaut le produit de la quantité constante, multipliée par la différence du facteur variable.* Ainsi $d(axy) = ad(xy)$.

448. Exemple III. Cherchons la différence de xy. Il faut

faut mettre $x \pm dx$ au lieu de x, & $y \pm dy$ au lieu de y, ce FIG qui changera le produit proposé en celui-ci, $\overline{x \pm dx} \times \overline{y \pm ay} = xy \pm y\,dx \pm x\,dy + dx\,dy$; Donc $d(xy) = \pm y\,dx \pm x\,dy + dx\,dy$, ou bien (436 & 439) $d(xy) = \pm y\,dx \pm x\,dy$. Pour la même raison $d(xyz) = (\overline{x \pm dx} \times \overline{y \pm dy} \times \overline{z \pm dz}) - xyz = \pm yz\,dx \pm xz\,dy \pm xy\,dz$, &c. D'où il suit que *pour avoir la différence d'un produit, dont les facteurs sont variables, il faut différentier ce produit pour chaque variable, comme si tout le reste étoit constant, & prendre ensuite la somme de ces différences pour la différence cherchée.* Si l'on supposoit les facteurs variables égaux, le produit seroit une puissance, que l'on différentieroit de même ; mais nous allons la différentier d'une manière plus générale.

449. EXEMPLE IV. Pour avoir $d(x^m)$. Je mets $x \pm dx$ au lieu de x, ce qui change x^m en $\overline{x \pm dx}^m = x^m \pm m\,x^{m-1} \times dx + \frac{m.\,m-1}{2}\,x^{m-2}\,dx^2 \pm$, &c. (*Alg.* 134) : soustrayant la proposée x^m (445), & rejettant les termes qui renferment plusieurs différentielles pour facteurs (439), on aura $d(x^m) = \pm m\,x^{m-1}.\,dx$. *Pour avoir donc la différence d'une variable x qui a un exposant m constant, il faut mettre -1 à la suite de son exposant, ce qui donne ici x^{m-1}, multipliant ensuite ce résultat x^{m-1} par le premier exposant m, & par la différence $\pm dx$ de la racine, le produit $\pm m\,x^{m-1}\,dx$ sera la différence demandée.* Ainsi $d(z^n) = \pm n\,z^{n-1}\,dz$.

Si l'on fait dans la dernière expression $n = \frac{1}{2}$, ce qui donne $z^n = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$, & $z^{n-1} = z^{\frac{1}{2}-1} = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$, on aura $d(\sqrt{z}) = \frac{\pm\frac{1}{2}\,dz}{\sqrt{z}}$. Si l'on eût fait $n = -p$, on auroit eu $d(z^{-p}) = \mp p\,z^{-p-1}\,dz = \frac{\mp p\,dz}{z^{p+1}}$.

FIG. Soit $z = (a^2 - x^2)$, on aura $d((a^2 - x^2)^n) = \pm n(a^2 - x^2)^{n-1} \times d(a^2 - x^2) = \pm n(a^2 - x^2)^{n-1} \times -2xdx = \mp 2nxdx(a^2 - x^2)^{n-1}$.

Si $n = -1$, il vient $d(z^{-1}) = \mp z^{-1-1}.dz = \frac{\mp dz}{z^2}$. Mais $z^{-1} = \frac{1}{z}$. Donc $d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\mp dz}{z^2}$.

450. Pour avoir la différence d'une fraction $\frac{u}{z} = u.\frac{1}{z}$, on fera (448.) $d\left(\frac{u}{z}\right) = \frac{\pm 1}{z} du \pm u\, d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pm du}{z} \mp \frac{u\,dz}{z^2} = \frac{\pm z\,du \mp u\,dz}{z^2}$; ainsi *pour différentier une fraction* $\frac{u}{z}$, *il faut prendre le produit* ($\pm z\,du$) *du dénominateur, multiplié par la différence du numérateur : ensuite le produit* ($\pm u\,dz$) *du numérateur, multiplié par la différence du dénominateur : soustraire enfin le second produit du premier, & diviser le reste* ($\pm z\,du \mp u\,dz$) *par le quarré* z^2 *du dénominateur.*

Si le numérateur u étoit une quantité constante a, on feroit $du = da = 0$, ce qui donneroit, $d\left(\frac{a}{z}\right) = \frac{\mp a\,dz}{z^2}$: si l'on fait seulement le dénominateur z constant, on aura $dz = 0$; ainsi $d\left(\frac{u}{b}\right) = \frac{\pm b\,du}{b^2} = \frac{\pm du}{b}$. Soit $u = x^m$, $b = m$, nous aurons $d\left(\frac{x^m}{m}\right) = \frac{\pm m x^{m-1}}{m} dx = \pm x^{m-1} dx$. Ainsi les applications que nous avons faites de la règle générale (445) font voir comment on doit différentier les quantités variables ; & les règles particuliéres que les résultats nous ont donné, fournissent le moyen d'en abréger le calcul dans les divers cas.

451. Coroll. Soient les deux fractions $\frac{m}{x}$, $\frac{m}{x'}$, qui ayent un même numérateur constant, & supposons que $dx = dx'$: cela posé, on aura $d\left(\frac{m}{x}\right) = \frac{\mp m\,dx}{xx}$, & $d\left(\frac{m}{x'}\right) = \frac{\mp m\,dx'}{x'x'}$. Donc

$d\left(\frac{m}{x}\right) : d\left(\frac{m}{x'}\right) :: \frac{\mp m\,dx}{xx} : \frac{\mp m\,dx'}{x'x'} :: \frac{m}{xx} : \frac{m}{x'x'} :: \frac{mm}{xx}$ FIG.

$: \frac{mm}{x'x'} :: \left(\frac{m}{x}\right)^2 : \left(\frac{m}{x'}\right)^2$. C'est-à-dire, que *dans ces sortes de fractions les différences sont proportionnelles aux quarrés de ces mêmes fractions*, ou bien *que la dernière raison entre leurs defférences est la raison de leurs quarrés.*

Or, dans l'hyperbole rapportée à ses assymptotes, les ordonnées qui répondent aux abscisses x, x', peuvent être représentées par ces fractions $\frac{m}{x}$, $\frac{m}{x'}$ (388); donc, si on suppose les différences de ces abcisses, savoir dx, dx', égales, *les différences des ordonnées seront comme les quarrés de ces mêmes ordonnées*, ainsi que nous l'avons prouvé plus haut (389) d'une autre manière.

452. Outre les différences premières, on fait souvent usage dans ce calcul des *différences secondes*; & pour trouver celles-ci, il faudra les prendre sur les différences premières, de la même manière que ces dernières ont été prises sur les quantités données (445), en regardant comme de nouvelles variables les dx, dy, &c. des variables x, y, &c. (nous prendrons les formules précédentes avec le signe superieur).

453. EXEMPLES. $d^2(ax) = d(a\,dx) = a\,d^2x$ (445).... $d^2(xy) = d(x\,dy + y\,dx) = d(x\,dy) + d(y\,dx) = x\,d^2y + dx\,dy + dy\,dx + y\,d^2x = x\,d^2y + 2\,dx\,dy + y\,d^2x$. Si l'on supposoit dx constante, on auroit $d^2x = 0$, ainsi alors $d^2(xy) = x\,d^2y + 2\,dx\,dy$.

454. En supposant que la différence dx d'une variable x est constante, on simplifie souvent les calculs; c'est pourquoi nous ferons usage par la suite de cette supposition.

$d^2(x^m) = d(m\,x^{m-1}\,dx) = m\,x^{m-1}\,d^2x + m.\overline{m-1}.x^{m-2}.dx^2$. Si dx est constante, on a, $d^2x = 0$; ainsi $d^2(x^m) = m.\overline{m-1}.x^{m-2}\,dx^2$.

FIG. Soit $x = z$, & $m = \frac{1}{2}$, nous aurons $dx = dz$, $d^2 x = d^2 z$, $x^{m-1} = z^{\frac{1}{2}-1} = z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$, $x^{m-2} = z^{\frac{1}{2}-2} = z^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z^3}} = \frac{1}{z\sqrt{z}}$. Substituant dans la première expression de $d^2(x^m)$, il vient $d^2\sqrt{z} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{z}} d^2 z + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{z\sqrt{z}} dz^2 = \frac{d^2 z}{2\sqrt{z}} - \frac{dz^2}{4z\sqrt{z}} = \frac{2z\,d^2 z - dz^2}{4z\sqrt{z}}$.

Soit maintenant $z = px \mp \frac{px^2}{2a}$, & faisons dx constante; nous aurons, $dz = p\,dx \mp \frac{px\,dx}{a}$; donc $d^2 z = \mp \frac{p\,dx^2}{a}$; ou, en multipliant, par la valeur de z, $z\,d^2 z = \mp \frac{p^2 x\,dx^2}{a} + \frac{p^2 x^2\,dx^2}{2a^2}$: substituant ces valeurs de $z\,d^2 z$ & de dz dans $d^2\sqrt{z}$, que nous avons eu précédemment, il vient, réduction faite, $d^2\sqrt{px \mp \frac{px^2}{2a}} = \frac{-p^2\,dx^2}{4(px \mp \frac{px^2}{2a})\sqrt{px \mp \frac{px^2}{2a}}}$.

455. Dans l'Ellipse & l'Hyperbole on a (343 & 360) $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$: le signe superieur est pour l'Ellipse & l'inférieur pour l'Hyperbole. On a donc aussi $y = \sqrt{px \mp \frac{px^2}{2a}}$; ou $d^2 y = d^2\sqrt{px \mp \frac{px^2}{2a}} = \frac{-p^2\,dx^2}{4y^3}$. On auroit la même valeur pour $d^2 y$, d'après l'équation $y^2 = px$, & l'une & l'autre de ces valeurs nous serviront dans la suite.

456. Proposons-nous de trouver la valeur de $d^2 y$ par l'équation $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{2ax - x^2}$, nous aurons, dx étant cons-

FIG.

tante, $d^2 y = \frac{dx}{x} d(\sqrt{2ax - x^2}) + \sqrt{2ax - x^2} \times$

$d(\frac{dx}{x})$, (445); or $d\sqrt{2ax - x^2} = \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $d(\frac{dx}{x})$

$= \frac{-dx^2}{x^2}$: donc $d^2 y = \frac{a\,dx^2 - x\,dx^2}{x\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{dx^2\sqrt{2ax - x^2}}{x^2}$

$= \frac{(a\,dx^2 - x\,dx^2)x - dx^2(2ax - x^2)}{x^2\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{-a\,dx^2}{x\sqrt{2ax - x^2}}$.

457. *Différences des Sinus, &c.* Si dans un cercle l'on imagine un arc différentiel M*m*, son sinus *m*P, sa tangente M*t*, sa sécante C*t*, & qu'on mène *m r* parallèle à C M, les triangles C P*m*, *m r t*, donneront C P : P *m* :: *m r* ou P M : *r t*. Or, (436) P *m* doit être négligé par rapport à C P. Donc aussi *r t* doit être rejetté par rapport à M *r* ou M P. D'ailleurs P M est (373) de l'espèce des différences secondes; donc *r t* sera de l'espèce des différences troisièmes. Or, *r t* = M *t* — P *m*. Donc la différence du sinus & de la tangente d'un arc différentiel est nulle, ou bien le sinus & la tangente d'un arc différentiel doivent être regardés comme des lignes égales. Pareillement la corde qui est plus grande que le sinus, & l'arc qui est plus petit que la tangente, seront des lignes égales entr'elles & égales aux deux premières. 137.

Cela posé, pour avoir la différence du sinus d'un arc donné A M = *x*, je suppose que M *m* soit la différence de cet arc; je mène ensuite les rayons C A, C M, les sinus M P, *m p*; & M *r* parallèle à C A. Les triangles C P M, *m r* M, donneront, C M : C P :: *m* M : *m r*. Or, C P = *cos* A M = *cos x*, *m* M = *d x*, *m r* = *d* (M P) = *d* (*sin x*); donc en faisant le rayon C M = *r*, on aura, $r : \cos x :: dx : d(\sin x) = \frac{dx \cos x}{r}$. C'est-à-dire, 138

que la différence du sinus d'un arc vaut la différence de cet arc multipliée par le cosinus du même arc & divisée par le rayon.

458. Pareillement si l'on nomme un autre arc du même cercle *x'*, on aura $d(\sin x') = \frac{dx' \cos x'}{r}$; ainsi en supposant *d x* = *d x'*, nous

FIG. aurons $d(\sin x) : d(\sin x') :: \cos x : \cos x'$. Or, si $x < x'$, $\cos x$ sera $> \cos x'$. Donc *les différences des sinus des petits arcs sont plus grandes que celles des sinus des grands arcs.*

459. Les mêmes triangles C M P, m r M, donnent, C M : P M : m M : M r, ou $r : \sin x :: dx : Mr = \frac{dx \sin x}{r}$. Ainsi C p $= CP - Mr = \cos x - \frac{dx \sin x}{r}$. Donc $d(\cos x) = \frac{-dx \sin x}{r}$. Ou bien *la différentielle du cosinus d'un arc vaut le sinus de cet arc, multiplié par sa différentielle, prise avec un signe contraire & divisée par le rayon.*

On pourroit de la même manière trouver les expressions différentielles de la tangente, de la cotangente, &c.

460. *Différence des Logarithmes.* Si sur une droite A B, on prend
139. des parties a P, a p, a Q, a q, &c. en proportion ou en progression arithmétique, & si sur leurs extrémités, on élève des perpendiculaires P M, p m, Q N, q n, &c. en proportion ou en progression géométrique, la courbe b M m N n, qui passera par les extrémités de ces perpendiculaires, s'appellera *Logarithmique*, & cette dénomination est fondée sur ce que en supposant 1, la perpendiculaire a b, qui répond à l'origine a des abscisses a P, a p, &c. ces mêmes abscisses sont les logarithmes des ordonnées correspondantes.

461. Soit a P $= x$, P p = Q q $= dx$, on aura a P. a p : a Q. a q, & par conséquent P M : p m :: Q N : q n, ou pm — P M : P M :: qn — Q N : Q N ; ou bien mr : P M :: ns : N Q. Or, en menant les tangentes M T, N F, & les lignes M r, N s, parallèles à l'axe A B, les triangles m r M, M P T, donneront mr : P M :: M r ou P p : P T ; & les triangles n s N, N Q F, donneront, ns : N Q :: N s ou Q q : Q F. Donc P p : P T :: Q q : Q F, par conséquent P T = Q F. Ce qui apprend que *dans la logarithmique les soutangentes sont toutes égales & constantes.*

462. Cela posé, faisons M P $= y$, $mr = dy$, a P $= x$,

$Pp = dx$, $PT = m$, la proportion $mr : MP :: Pp : PT$ devient $dy : y :: dx : m$, d'où $dx = \frac{m\,dy}{y}$, équation différentielle de la Logarithmique. FIG. 139.

463. Puisque en faisant $ab = 1$, on a aP, ou $x = l(PM) = l(y)$, il suit que $dx = d(ly) = \frac{m\,dy}{y}$. Si la soutangente m ou $PT = ab = 1$, on aura $d(ly) = \frac{dy}{y}$, & comme la supposition $m = 1$ est la plus simple, on dit que $\frac{dy}{y}$ est *la différence du logarithme naturel de y*. D'où il suit que *la différence du Logarithme naturel d'une quantité y vaut la différence de cette quantité divisée par la quantité même*; mais dans toute autre supposition *la différence du Logarithme d'une quantité y vaudra le produit de la différence* $\frac{dy}{y}$ *du logarithme naturel, multipliée par la sou-tangente m.*

464. La quantité par laquelle il faudroit multiplier le logarithme naturel d'une quantité pour avoir son logarithme dans une autre Logarithmique, est appellée *le Module*. Il doit être constant pour tous les logarithmes d'un même systême; car par la nature de la Logarithmique, si les ordonnées sont en proportion ou en progression géométrique, leurs abscisses, que nous prenons pour leurs logarithmes, doivent être en proportion ou en progression arithmétique. Il faudra donc que les abscisses de la logarithmique naturelle, soient multipliées par une même quantité pour devenir égales à celles des mêmes ordonnées dans une autre logarithmique.

465. Soit ly le logarithme naturel de y, p le module dans un autre systême de logarithmes, nous aurons ply pour le logarithme de y dans le dernier systême. Or, en différentiant $d(ply) = p.d(ly) = \frac{p\,dy}{y}$. Donc *le module dans un systême de logarithmes est égal à la soutangente m de la logarithmique qui représente ce systême.*

FIG. 139. 466. Pour avoir $d\,(l\,(a+x))$, je ferois $y = a + x$, ce qui donne $dy = dx$, substituant dans $d\,(ly) = \frac{dy}{y}$, on trouvera $d\,(l\,(a+x)) = \frac{dx}{a+x}$, lorsque la soutangente ou le module $= 1$; ou en substituant dans $d\,(ly) = \frac{m\,dy}{y}$, il vient $d\,(l\,(a+x) = \frac{m\,dx}{a+x}$ pour le module m. Il sera donc aisé de différentier les expressions qui contiennent des logarithmes, il suffit pour cela que l'on puisse prendre y pour la quantité dont on a le logarithme. Or, en supposant ab positive, l'ordonnée y ne peut représenter que des quantités positives; & s'il s'agissoit de différentier le logarithme d'une quantité négative, on observera que les quantités négatives ne peuvent point être comparées aux quantités positives (*Alg.* 203); & qu'ainsi elles ne sauroient avoir des logarithmes, relativement à l'unité positive ab. Mais si l'on prend $ab' = ab$, & qu'on prolonge dans le sens négatif les ordonnées P M, Q N, &c, de manière que P M′ = P M, Q N′ = Q N, &c. la courbe b' M′ N′, qui passera par tous les points b', M′, N′, &c. aura pour ses ordonnées des quantités négatives P M′, Q N′, &c. qui auront avec l'unité négative ab', les mêmes raisons que les quantités positives P M, QN, &c. ont avec l'unité positive ab; & qu'ainsi aP étant supposée = logarithme de P M, on aura aussi aP = logarithme de P M′, &c. par conséquent *le logarithme d'une quantité négative est le même que celui de la même quantité positive.* Donc la différence du logarithme d'une quantité négative sera la même que celle du log. de la même quantité positive. Ainsi $d\,l\,(-y) = \frac{dy}{y}$. La régle pour avoir cette différence sera la même que pour $d\,l\,(y)$. Ainsi je prends la différence de $-y$, qui est $= -dy$, je la divise par la quantité $-y$, ce qui fait $\frac{-dy}{-y} = \frac{dy}{y}$. Si le module au lieu d'être

tre $= 1$ étoit $= m$, on auroit $d\,l\,(-y) = \frac{m\,dy}{y}$. FIG.

467. L'équation $d\,(l\,y) = \frac{dy}{y}$ donne $dy = y.\,d\,(l\,y)$. Ce qui nous apprend que *la différence* ($d\,y$) *d'une quantité* (y) *vaut le produit de la quantité même* (y), *multipliée par la différence* $d\,(l\,y)$ *de son Logarithme naturel.* Par exemple, $d\,(x^m) = x^m.\,d\,l\,(x^m) = x^m.\,d\,(m\,l\,x) = x^m.\,\frac{m\,dx}{x} = \frac{m\,x^m\,dx}{x} = m\,x^{m-1}\,dx$. Il en est de même des différences des autres quantités : on peut les trouver par cette nouvelle régle, à laquelle il faut nécessairement recourir lorsque les exposants sont variables. Ainsi $d\,(a^x) = a^x \times d\,(l\,a^x) = a^x.\,d\,(x\,l\,a) = a^x.\,dx\,l\,a$ (les quantités a^x, x^x, &c. s'appellent *quantités exponentielles*).

468. Pour faire quelque application des principes précédents, proposons-nous de déterminer la tangente d'une courbe quelconque dont on ait l'équation, en supposant les coordonnées perpendiculaires entr'elles. Il est assez évident que les expressions différentielles de la tangente ou de la sou-tangente, de la normale ou de la sou-normale, sont également propres à résoudre ce problême. Or, pour trouver ces expressions, soit M m l'increment de l'arc S M ; son prolongement en ligne 140.
droite formera la tangente T M. Tirons les ordonnées M P, $m\,p$, perpendiculaires sur l'axe S N, la droite M r parallèle au même axe, & nommons P M $= y$, $m\,r = dy$, S P $= x$, P p $=$ M $r = dx$, M $m = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$.

Cela posé, les triangles M $m\,r$, M P T, donnent $m\,r\,(dy)$: M $r\,(dx)$ :: P M(y) : P T $= \frac{y\,dx}{dy}$, expression différentielle de la sou-tangente P T. On n'aura donc qu'à différentier l'équation de la courbe pour avoir la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & la substituer, ce qui déterminera la valeur de la sou-tangente.

469. Par exemple, dans la Parabole ordinaire $y^2 = p\,x$; donc

FIG. 140. $2ydy = pdx$ ou $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. Ainsi $PT = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$, comme on l'a déjà trouvé (403).

470. Dans l'Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$: Ainsi $2ydy = \frac{b^2}{a^2}(2adx - 2xdx)$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)}$. Ainsi $PT = \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)} = \frac{2ax - x^2}{a-x}$. L'équation du cercle $y^2 = 2ax - x^2$ donne le même résultat.

471. Dans l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, ce qui donne en calculant comme pour l'Ellipse, $PT = \frac{2ax + x^2}{a+x}$.

472. Les mêmes triangles Mmr, MTP, donnent $mr\,(dy)$: $Mm\,(ds) :: PM\,(y) : TM = \frac{yds}{dy} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}}$. On pourra donc déterminer la tangente, en différentiant l'équation de la courbe.

Il en sera de même de la normale MN, & de la sou-normale PN, dont on aura les expressions différentielles par les triangles Mmr, NMP, qui donnent $PN = \frac{ydy}{dx}$, & $MN = \frac{yds}{dx} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}}$.

473. Nous ferons encore usage du calcul différentiel pour déterminer le rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe dont on ait l'équation.

Supposons que l'arc différentiel $Mm = ds$ puisse être décrit du centre C avec le rayon $CM = Cm$ (la ligne CM est appellée *rayon osculateur* ou *rayon de courbure*) : soient les ordon-

nées M P, mp, perpendiculaires sur l'axe S P, & la ligne M r parallèle à cet axe : du centre C & du rayon C N décrivons l'arc N q : faisons $MP = y$, $mr = dy$, $SP = x$, $Pp = Mr = dx$, & supposons dx constante. Nous aurons $Nn = d(SN) = d\left(x + \frac{y\,dy}{dx}\right) = \frac{dx^2 + dy^2 + y\,d^2y}{dx} = \frac{ds^2 + y\,d^2y}{dx}$. FIG. 140.

Cela posé, on a $Nq : Mm :: CN : CM$, ou $Mm - Nq : Mm :: CM - CN$ ou $MN : CM$. Or, (472) $MN = \frac{y\,ds}{dx}$, $Mm = ds$; d'ailleurs les triangles Nqn, Mrm, donnent $Mm\,(ds) : Mr\,(dx) :: Nn\left(\frac{ds^2 + y\,d^2y}{dx}\right) : Nq = \frac{ds^2 + y\,d^2y}{ds}$; ainsi $Mm - Nq = \frac{-y\,d^2y}{ds}$. Substituant dans la première proportion, il vient $\frac{-y\,d^2y}{ds} : ds :: \frac{y\,ds}{dx} : CM = \frac{ds^3}{-dx\,d^2y} = \frac{(\sqrt{dx^2 + dy^2})^3}{-dx\,d^2y}$.

474. Pour appliquer cette formule aux sections coniques, observons que $MN = \frac{y\,ds}{dx}$; donc $ds^3 = \frac{dx^3}{y^3}\overline{MN}^3$; substituant on aura $CM = \frac{dx^2 . \overline{MN}^3}{-y^3\,d^2y}$.

Or, dans l'Ellipse & l'Hyperbole (455) on a $d^2y = \frac{-p^2\,dx^2}{4y^3}$, ainsi $CM = \frac{\overline{MN}^3}{\frac{1}{4}p^2}$ ... D'ailleurs (369) $MN = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2}}$

& en menant le diamètre D d parallèle à M T, on a (384) 128.

$Mq = q = \frac{ab}{\sqrt{\left(\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2}\right)}}$. Ainsi $MN \times q = b^2$, ou MN & 129.

FIG.

140. $= \frac{b^2}{q}$; donc $\overline{MN}^2 = \frac{b^4}{q^3} = \frac{\frac{1}{4}a^2 p^2}{q^2}$ (342); par conséquent $\overline{MN}^3 = \frac{\frac{1}{4}a^2 b^2 p^2}{q^3}$; ce qui donne $CM = \frac{a^2 b^2}{q^3}$... Si l'on mène

128. du foyer f le rayon vecteur $fM = R$, la droite $fS = T$ perpen-

& 129. diculaire sur la tangente MS, on aura $MX = a$ (374); ainsi les triangles MXq, fMS donneront $fM(R) : fS(T) :: MX(a) : Mq = q = \frac{aT}{R}$; substituant il vient $CM = \frac{b^2 R^3}{aT^3} = \frac{\frac{1}{2}pR^3}{T^3}$. Si on fait $FM = r$, $FS = t$, on aura $CM = \frac{\frac{1}{2}pr^3}{t^3}$.

475. Puisque (455) l'équation $y^2 = px$ donne $d^2y = \frac{-p^2 dx^2}{4y^3}$, il suit qu'on a de même dans la Parabole $CM = \frac{\overline{MN}^3}{\frac{1}{4}p^2}$...;

132. Soit $FM = FT = r$, soit la perpendiculaire FS tirée du foyer sur la tangente $= t$; nous aurons la normale $MN = 2t$, ainsi $\overline{MN}^2 = 4t^2$. Or, si l'on mène SA, elle sera (401) parallèle à MP; ainsi (124) $\overline{FS}^2$ ou $t^2 = FA \times FT = \frac{1}{4}pr$ (393). Donc $\overline{MN}^2 = pr$, & $\overline{MN}^3 = 2prt$. Par conséquent $CM = \frac{2prt}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{2rt}{\frac{1}{4}p}$. Or, $\frac{1}{4}p = \frac{t^2}{r}$; donc $CM = \frac{2r^2}{t}$..

... Si l'on multiplie cette valeur par $\frac{1}{4}p$, & qu'on la divise ensuite par son égale $\frac{t^2}{r}$, ce qui ne peut la changer, on aura comme ci-devant, $CM = \frac{\frac{1}{2}pr^3}{t^3}$.

476. Pour trouver le rayon de courbure dans la Cycloïde ordinaire ou simple, prenons l'arc différentiel M m, menons les ordonnées M P, $m p$, perpendiculaires, & M r parallèle à l'axe S D; dans le cercle générateur S O D R, tirons les cordes O S, O D; & faisons S P $= x$, M P $= y$, D S $= 2a$, nous aurons P p = M $r = dx$, $mr = dy$. Cela posé : FIG. 134.

Puisque (414) S O est parallèle à la tangente T M, les triangles M mr, S O P, donneront mr : M r :: O P : S P, ou $dy : dx$ :: $\sqrt{2ax - x^2} : x$; d'où $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{2ax - x^2}$; ainsi (456) $d^2y = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - x^2}}$; & $dy^2 = (\frac{dx}{x}\sqrt{2ax - x^2})^2 = \frac{2adx^2}{x} - dx^2$, ou bien $dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}$, ou encore $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{2a}{x}}$. Substituant ces valeurs dans la formule générale C M $= \frac{(\sqrt{dx^2 + dy^2})^3}{-dxd^2y}$ on aura, réduction faite, C M $= 2\sqrt{2a(2a - x)}$; $= 2\sqrt{\text{D S} \times \text{D P}}$. Or, (124) D S $\times$ D P $= \overline{\text{D O}}^2$. Donc C M $= 2 \times$ D O $= 2 \times$ M K (88); ce qui fait voir que *la base* A B *de la cycloïde divise le rayon osculateur* C M *en deux parties égales* C K, K M.

CHAPITRE III.

Contenant quelques notions de calcul Intégral.

477. LE calcul intégral n'est autre chose que la méthode inverse du calcul différentiel, & son objet est par conséquent la solution de ce problème : *connoissant les dernières raisons entre les différences de deux quantités, trouver les raisons mêmes qui existent*

FIG. *entre ces quantités.* Le nom de calcul intégral a été donné à cette méthode, parce que dans les principes de Leybnits son objet est de sommer ou de rendre entières des quantités dont on ne connoît que des parties infiniment petites. C'est pourquoi on désigne toujours une intégration à faire par la lettre $\int$, qu'on met devant une expression différentielle : ainsi $\int a\,d\,x$ veut dire *intégrale* de $a\,d\,x$, ou *somme* $a\,d\,x$, ou enfin *somme de* $a\,d\,x$; ces trois manières de s'énoncer sont également usitées.

478. COROLL. Il suit de là *que les règles du calcul intégral seront les inverses de celles du calcul différentiel*; & qu'ainsi les résultats seront exacts, si en les différentiant, leurs différences sont égales à celles que l'on s'étoit proposé d'intégrer.

479. D'après ces notions on croiroit qu'il ne doit y avoir aucune difficulté à intégrer une différence quelconque. Cela seroit en effet, s'il ne se présentoit que des différentielles *completes*, c'est-à-dire, *conformes aux résultats du calcul différentiel.* Mais souvent la solution d'un problême dépend de l'intégration d'une différentielle qui n'a pas cette condition, soit réellement soit en apparence. Alors on est obligé d'avoir de nouvelles règles pour la ramener à cette forme, lorsqu'on le peut; ou bien on la réduit en séries dont on puisse intégrer tous les termes séparément. Si ensuite on peut sommer la série, on a l'intégrale exacte; autrement on se livre aux approximations.

Avant d'aller plus loin, nous observerons qu'une même différence peut avoir des intégrales différentes, à raison des constantes qui (446) ne sauroient faire partie des différences. Le calcul intégral appliqué à la solution de quelque problême, doit choisir celle qui en remplit les conditions; il doit par conséquent faire déterminer la constante nécessaire que nous représenterons généralement par C, & que nous ajoûterons à l'intégrale variable, trouvée par la règle suivante. Cette règle ne s'applique qu'aux différentielles monomes, dans lesqu'elles il n'y a qu'une même variable avec sa différence.

480. RÈGLE. *Augmentez d'une unité l'exposant de la variable;*

divisez ensuite par l'Exposant ainsi augmenté & par la différence de la variable, le résultat sera l'intégrale de la différentielle monome proposée. Cette règle est visiblement l'inverse de celle qui a été prescrite (449) pour différentier les puissances d'une variable. Ainsi $\int m x^{m-1} dx = \frac{m x^m dx}{m dx} = x^m + C \ldots \int x^m dx = \frac{x^{m+1} dx}{m+1 . dx} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$. Soit $m = 0$, il viendra $\int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$. FIG.

481. Si l'on suppose que x représente une quantité complexe, dx en sera la différence. D'où il suit que cette règle s'étend aux quantités complexes affectées d'un exposant quelconque m, pourvu qu'on ait hors de cet exposant la différence de la racine. Par exemple $\int . 2 z dz (a^2 + z^2)^m = \frac{(a^2 + z^2)^{m+1}}{m+1} + C$. Il n'est pas même nécessaire d'avoir le facteur constant qui peut entrer dans la différence de la racine. Ainsi $\int z^2 dz (a^2 b + z^3)^m = \frac{(a^2 b + z^3)^{m+1}}{3(m+1)} + C$. Donc en général $\int x^{m-1} dx (a + b x^m)^p = \frac{(a + b x^m)^{p+1}}{m b (p+1)} + C$.

Cette règle nous suffit pour les usages que nous ferons du calcul intégral. On pourroit en avoir d'autres, en observant ce qui arrive dans la différentiation. Par exemple, de ce que $d(xy) = x dy + y dx$, on concluroit que $\int (x dy + y dx)$ se trouvera, en intégrant $x dy$, comme si x étoit constante, ce qui donne $\int (x dy + y dx) = xy + C$. Le grand détail qu'il faut pour l'intégration des différences à plusieurs variables nous empêche d'aller plus loin. C'est pourquoi nous supposerons qu'on n'ait qu'une seule variable : alors on intégrera chaque terme par la règle précédente.

482. Il faut pourtant en excepter les termes où l'exposant

FIG. de la variable est $= -1$. Car $x^{-1} dx = \frac{dx}{x} = d(lx)$; par conséquent $\int x^{-1} dx = lx + C$: au lieu que par la règle précédente on auroit $\int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$, quantité absurde.

483. Corollaire. Il suit de là que $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$: d'ailleurs, faisant ici la division indiquée, on trouve que $\frac{dx}{a+x} = \frac{dx}{a} - \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{a^3} - \frac{x^3\,dx}{a^4} +$, &c. Ainsi $\int \frac{dx}{a+x}$ ou $l(a+x) = C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$, &c. Or, C est une constante; elle ne peut donc pas changer, quelque valeur qu'on suppose à x. Faisons $x = 0$, & nous aurons $l(a) = C$. Substituant on aura $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$, &c. de même $\int \frac{-dx}{a-x} = l(a-x)$; d'où l'on déduit, en faisant le calcul comme nous l'avons fait pour $l(a+x)$, que $l(a-x) = la - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} -$, &c. Par conséquent $l(a+x) - l(a-x)$ ou (*Alg.* 284) $l\frac{a+x}{a-x} = \frac{2x}{a} + \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{5a^5} +$ &c.

484. Pour faire quelque usage de cette formule dans le calcul des logarithmes, supposons $\frac{x}{a} = \frac{1}{2z-1}$; ce qui donne $x = \frac{a}{2z-1}$; par conséquent $a + x = \frac{2az}{2z-1}$ & $a - x = \frac{2az - 2a}{2z-1}$. Nous aurons $\frac{a+x}{a-x} = \frac{2az}{2az-2a} = \frac{z}{z-1}$. Substituant ces valeurs il viendra $l\frac{z}{z-1}$ ou $lz - l(z-1)$

ou

ou en transposant $l\,z = l(z-1) + \frac{2}{2z-1} + \frac{2}{3(2z-1)^3}$ FIG.

$+ \frac{2}{5(2z-1)^5} +$, &c. série fort convergente lorsque z est un nombre un peu grand. Elle servira à calculer les Logarithmes naturels ; car si $z = 2$, $l(z-1) = l(1) = 0$ (*Alg.* 282). Donc en substituant on aura $l(2) = 0 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5}$ $+ \frac{2}{7 \cdot 3^7} +$, &c. Calculant les huit premières fractions jusqu'à neuf décimales pour n'en conserver que sept, on trouvera $l(2) = 0,6931472$. Si l'on fait ensuite $z = 3$, on aura $l(z-1) = l(2)$; ainsi on trouvera $l(3)$. De même $l(4) = l(2^2) = 2\,l(2) = 1,3862944$; donc en faisant $z = 5$, ce qui donne $l(z-1) = l(4)$, on pourra trouver $l(5) = 1,6094379$, en calculant seulement les quatre premières fractions pour en ajoûter la somme avec la valeur de $l(4)$. Il en est de même des logarithmes des autres nombres premiers, qui donneront ceux des nombres composés. Ainsi par exemple $l(10) = l(2) + l(5) = 2,3025851$.

Dès qu'on aura calculé les logarithmes naturels, en les multipliant (*Alg.* 297) par le module m qui convient aux tables ordinaires, on aura ceux de ces tables : ainsi puisque le logarithme tabulaire de 10 est $= 1$, on aura $m(2,3025851) = 1$; par conséquent $m = \frac{1}{2,3025851} = 0,43429448$, ou bien $m = 0,4342945$.

Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail sur les règles du calcul intégral, il nous suffira de faire quelque application de la règle précédente pour la quadrature des sections coniques.

485. Soit S M un arc de courbe quelconque : M m sa différence : M P, $m\,p$, deux ordonnées perpendiculaires à l'axe S N. Il est évident que M $m\,p$ P est la différentielle de l'espace S M P. Or, 140

FIG. 140. (167) $MmpP = \frac{PM + mp}{2} \times Pp$, où à cause de $pm = PM + mr = PM$ (436), $MmpP = \frac{2PM}{2} \times Pp = PM \times Pp$. Donc en faisant $PM = y$, $Pp = dx$, on aura cette différence $= y\,dx$. On substituera donc la valeur de y en x prise dans l'équation de la courbe; alors l'expression ne contiendra plus qu'une variable x: on intégrera, si on le peut, ou bien on réduira en série la valeur de y, pour n'avoir après la substitution qu'une suite de différences monomes à intégrer.

486. Exemple I. Dans la parabole $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$. Donc $y\,dx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$. Par conséquent $\int y\,dx$ ou

$$SMP = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{px^3} = \frac{2}{3}x\sqrt{px}$$

$= \frac{2}{3}xy =$ les $\frac{2}{3}$ *du rectangle des coordonnées*. On voit qu'il n'y a point là de constante, parce qu'en faisant $x = 0$ le tout de-
125. vient 0; & cette courbe est la seule des sections coniques dont on ait pû trouver jusqu'ici la quadrature.

487. Exemple II. Dans l'Ellipse faisant $Cp = x$, $Pp = dx$, il est clair que $PMmp = y\,dx$ est l'incrément de l'espace $CBmp$ correspondant à l'incrément dx de l'abscisse Cp; or, alors (*Alg.* 170) $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}\left(a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \&c.\right)$. Substituant & intégrant on a $\int y\,dx$, ou $CBMP = \frac{b}{a}\int\left(a\,dx - \frac{x^2\,dx}{2a} - \frac{x^4\,dx}{8a^3} - \&c.\right) = \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^3}{3.2a} - \frac{x^5}{5.8a^3} - \&c.\right) + C$. Or, si on fait $x = 0$, les deux membres se réduisent à $0 = 0 + C = C$. Si on fait $x = a$, on aura

$CBA = \frac{b}{a}(a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \&c)$. Enfin si $b = a$, CBA FIG. 125.
devient un quart de cercle dont le rayon $= a$, & dont la surface $= a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \&c.$

488. Exemple III. Dans l'Hyperbole $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (l'origine des abscisses étant au centre). Substituant, il vient

$\int y\,dx$ ou $Apm = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\int(x\,dx - \frac{a^2\,dx}{2x}$ 127.
$- \frac{a^4\,dx}{8x^3} - \&c.) = \frac{b}{a}\int(x\,dx - \frac{a^2}{2}x^{-1}\,dx - \frac{a^4}{8}x^{-3}\,dx$
$- \&c)$. Or, $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$: $\int(-\frac{a^2}{2}x^{-1}\,dx) = -\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{x}$
$= -\frac{a^2}{2}\,l.\,x$ (463) : $\int(-\frac{a^4}{8}x^{-3}\,dx) = \frac{a^4}{8.\,2}x^{-2} = \frac{a^4}{16x^2}$;
donc $Apm = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\,l\,x + \frac{a^4}{16x^2} + \&c.\right)$, sans constante.

FIN.

TABLE.

PREMIERE PARTIE,

De l'Arithmétique.

SECTION PREMIÈRE,

Des principes de la numération & des différentes méthodes de composition & de résolution sur les nombres entiers.

Chapitre Premier. DÉFINITIONS *& notions préliminaires, page.* 1
Chap. II. de l'Addition. 4
Chap. III. De la Soustraction. 6
Chap. IV. De la Multiplication. 10
Chap. V. De la Division. 16

SECTION SECONDE.

Du calcul des Fractions.

Chapitre premier. De la nature & des principales propriétés des Fractions. 23
Chap. II. Des quatre opérations de l'Arithmétique sur les Fractions. 26
Chap. III. De l'origine & des propriétés des Fractions décimales. 27
Chap. IV. Des opérations de l'Arithmétique sur les Fractions décimales. 29

SECTION TROISIÈME.

Des nombres abſtraits, conſidérés par rapport à leurs facteurs.

Chapitre premier. Des Nombres ſimples & des Nombres composés. 32
Chap. II. Des Puiſſances & de leurs principales propriétés. 36
Chap. III. Des Racines & des Nombres irrationnels & imaginaires qui en réſultent. 39

SECONDE PARTIE.

De l'Algèbre.

SECTION PREMIÈRE.

Des notions générales & des principales opérations de l'Algèbre.

Chapitre Premier. DÉfinitions, *Notions préliminaires, & principes de convention.* 43
Chap. II. De la réduction, de l'Addition & de la Souſtraction des quantités Algébriques. 46
Chap. III. De la Multiplication. 48
Chap. IV. De la Diviſion. 51
Chap. V. Où l'on enſeigne à trouver tous les diviſeurs exacts d'une quantité Algébrique, & où l'on démontre la méthode déjà donnée pour déterminer la plus grande meſure commune de deux nombres. 55

SECTION SECONDE.

Des Puiſſances & des Racines.

Chapitre premier. De la formation des Puiſſances. 58
Chap. II. De l'extraction des Racines. 65

Chap. III. De l'extraction des Racines des Nombres. 70
Chap. IV. Où l'on expose différentes méthodes d'approximation. 77
Chap. V. Du calcul des Radicaux. 80
Chap. VI. De quelques propriétés des Imaginaires & de leur réduction à la forme $m \pm n\sqrt{-1}$.

SECTION TROISIÈME.

Des Raisons, Proportions, Progressions, Logarithmes & Permutations.

Chapitre premier. Propriétés générales des Raisons. 90
Chap. II. Qui contient les méthodes de Composition & de Résolution des raisons, avec la maniere de les mesurer. 93
Chap. III. Des Proportions. 97
Chap. IV. De la Règle de trois & de ses différentes applications. 101
Chap. V. Des progressions Géométriques. 104
Chap. VI. Des raisons, proportions & progressions Arithmétiques. 109
Chap. VII. De la sommation des différentes puissances des termes d'une progression Arithmétique. 113
Chap. VIII. De l'origine & des principales propriétés des Logarithmes. 115
Chap. IX. Des Différens systêmes de logarithmes, de l'origine des Tables, & de la manière de s'en servir. 119
Chap. X. Des Permutations, des Combinaisons & de leurs différens usages. 123

SECTION QUATRIÈME.

De l'Analyse.

Chap. premier. Des propriétés générales des Équations. 132
Chap. II. Des Équations du premier degré à une seule inconnue. 136
Chap. III. Des Équations du premier degré à plusieurs inconnues. 140

Chap. IV. De quelques propriétés générales des Équations composées. 149
Chap. V. Des Équations pures de tous les degrés & de celles du second en particulier. 158
Chap. VI. Des Equations du troisième degré. 167
Chap. VII. De la résolution des Equations du quatrième degré 177

TROISIÉME PARTIE.

De la Géométrie.

SECTION PREMIÈRE.

Des propriétés des Lignes droites & du Cercle.

Chapitre Premier. Definitions & notions préliminaires. 183
Chap. II. Des propriétés qui résultent de la comparaison de deux Lignes droites. 186
Chap. III. Des Parallèles, des Perpendiculaires & des Obliques. 190
Chap. IV. De quelques propriétés des Lignes droites, considérées dans le Cercle. 195
Chap. V. De la mesure des Angles, considérés dans le Cercle. 199
Chap. VI. Des différentes espèces de Polygones en général, & du Triangle en particulier. 201
Chap. VII. Qui traite de l'égalité & de quelques autres rapports, tant des Triangles que des Parallélogrammes. 204
Chap. VIII. Des Lignes proportionnelles. 210
Chap. IX. De quelques notions générales sur la similitude des figures, & de leur application aux Triangles. 214
Chap. X. De quelques propriétés générales des Polygones. 218
Chap. XI. Dans lequel on expose quelques propriétés du Cercle & des Lignes droites qui s'y rapportent. 224

SECTION SECONDE.

Des Surfaces.

Chap. I. Des rapports & de la mesure des Surfaces planes. 231
Chap. II. Des Surfaces Planes, considérées par rapport à leurs positions respectives. 239

SECTION TROISIÈME.

Des Solides.

Chap. I. Notions générales sur les Solides, & propriétés particulières du Prisme. 245
Chap. II. De la Pyramide. 254
Chap. III. De la Sphère. 262

SECTION QUATRIÈME.

De la Trigonométrie Plane.

Chap. I. Notions générales & propriétés des Sinus, Tangentes & Sécantes. 266
Chap. II. De la résolution de toute sorte de Triangles Rectilignes. 275

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES.

Sur les Sections Coniques.

Chap. I. De la théorie des Lignes Courbes en général. 281
Chap. II. De l'Ellipse. 289
Chap. III. De l'Hyperbole. 294
Chap. IV. De la Parabole. 309
Chap. V. De la Cycloïde. 314

Principes de calcul Infinitismal.

Chap. I. Servant d'introduction à ce calcul. 317
Chap. II. Contenant les principes du calcul Différentiel. 331
Chap. III. Contenant quelques notions de calcul Intégral. 247

Fin de la Table.

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE

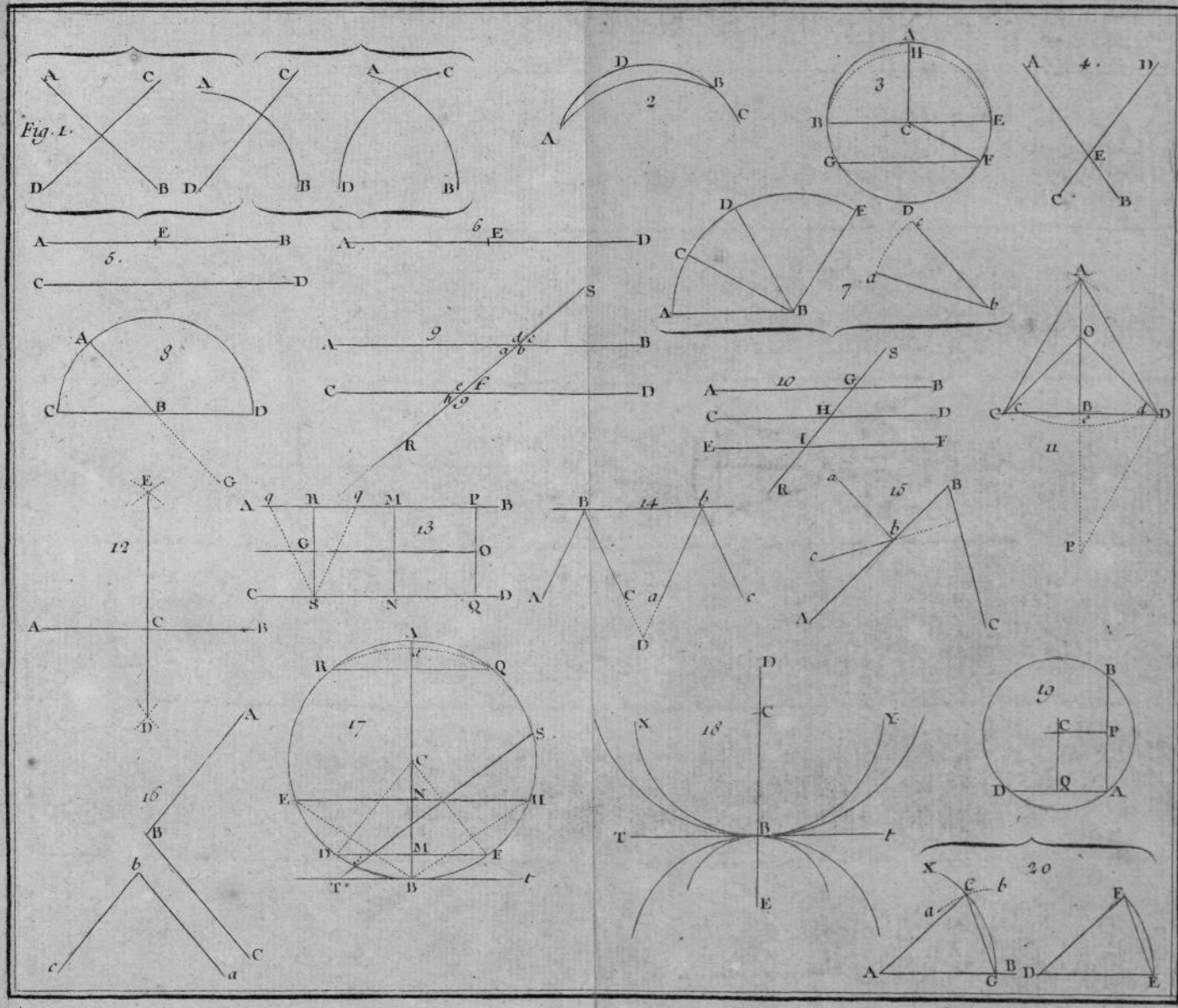
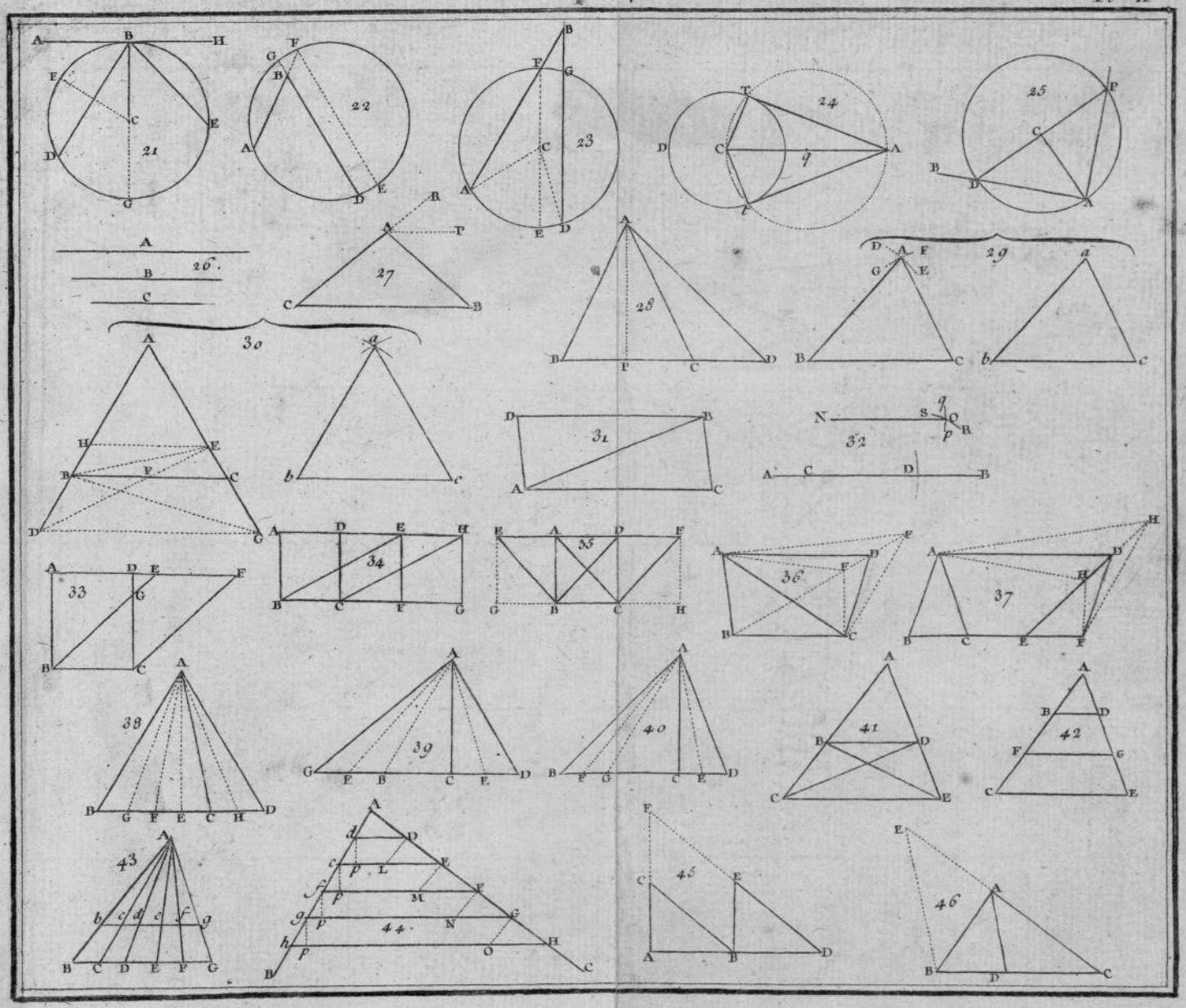
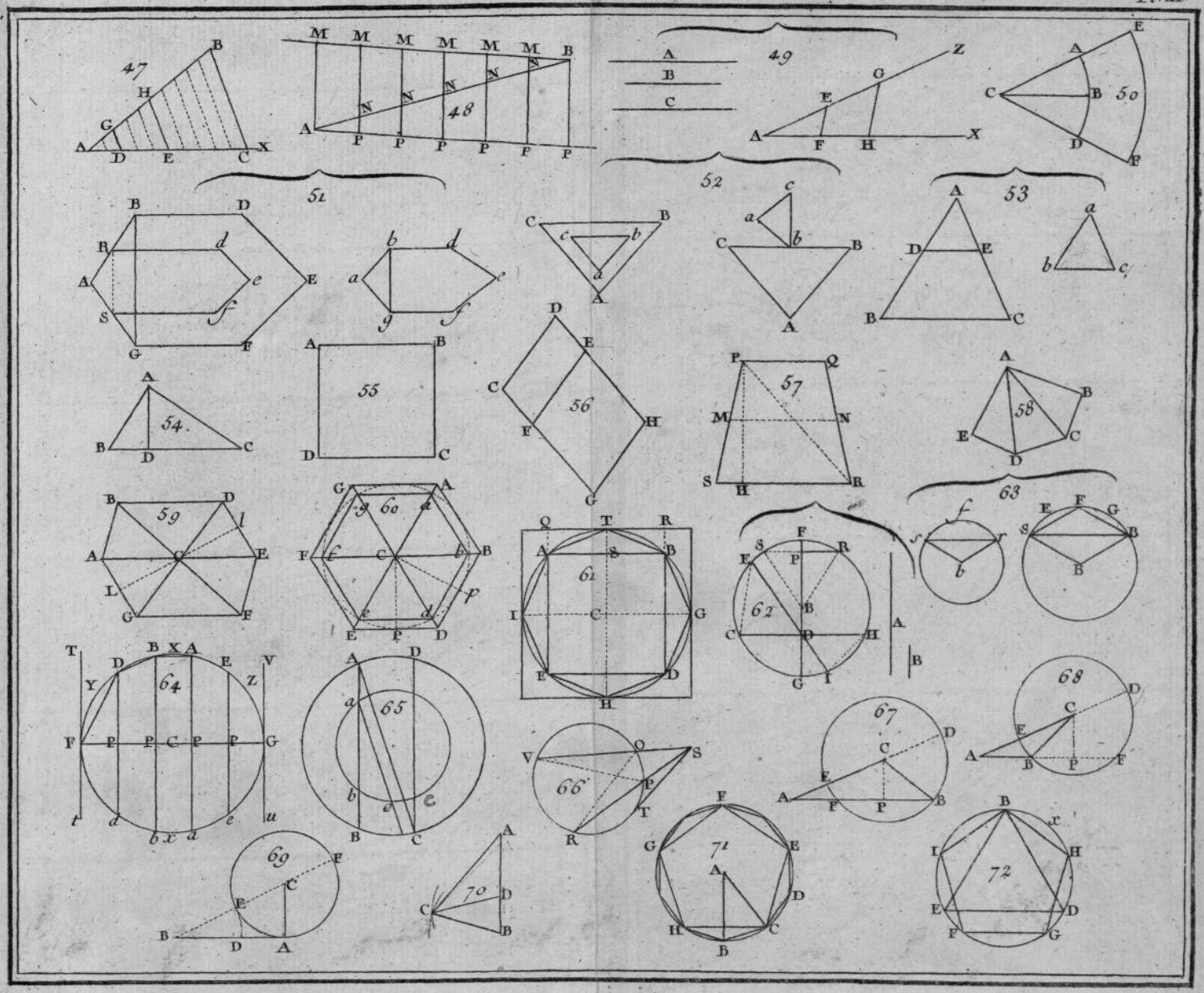


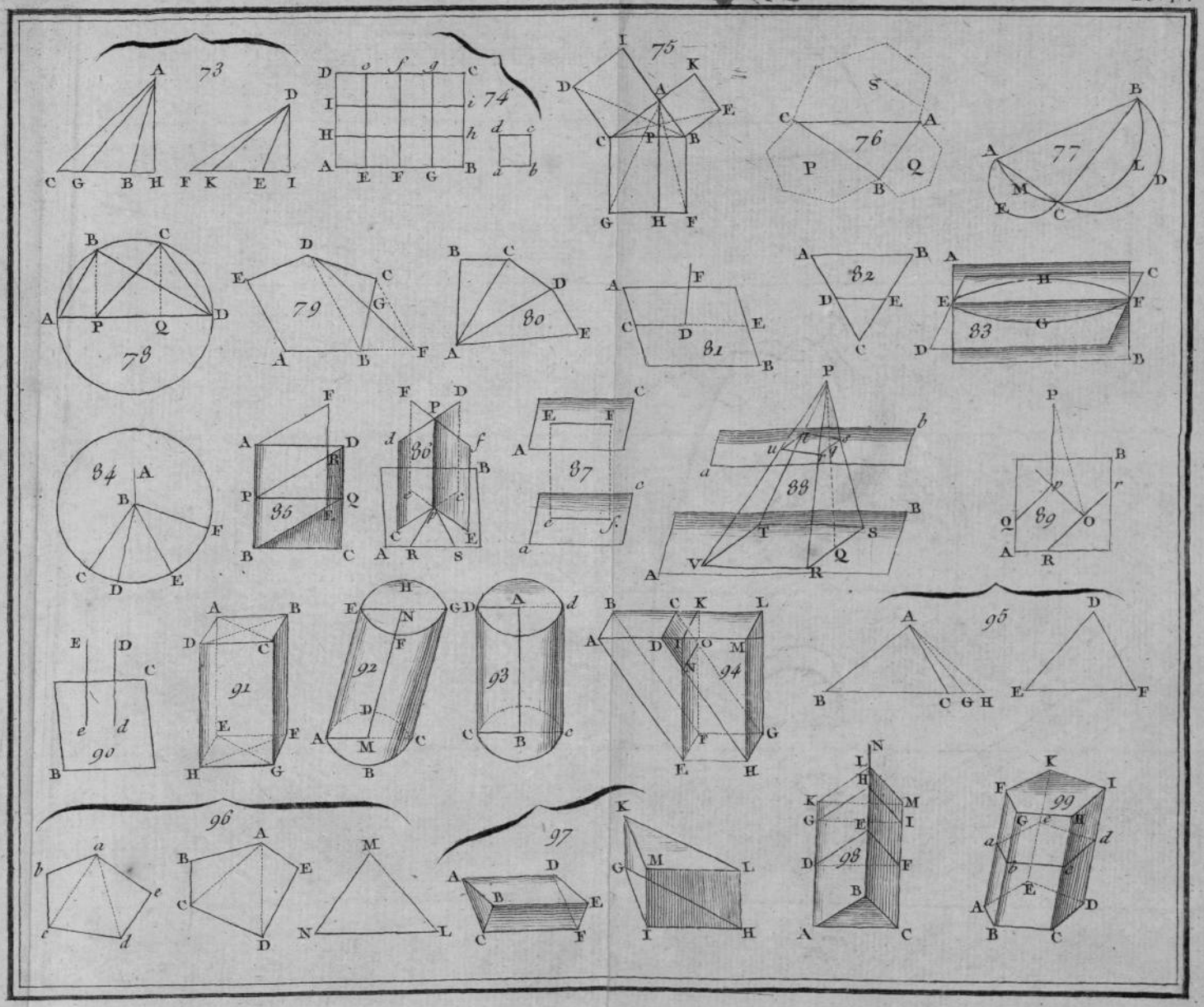
Fig. 1.
2
3
4.
5.
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20


21
22
23
24
25
26.
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46

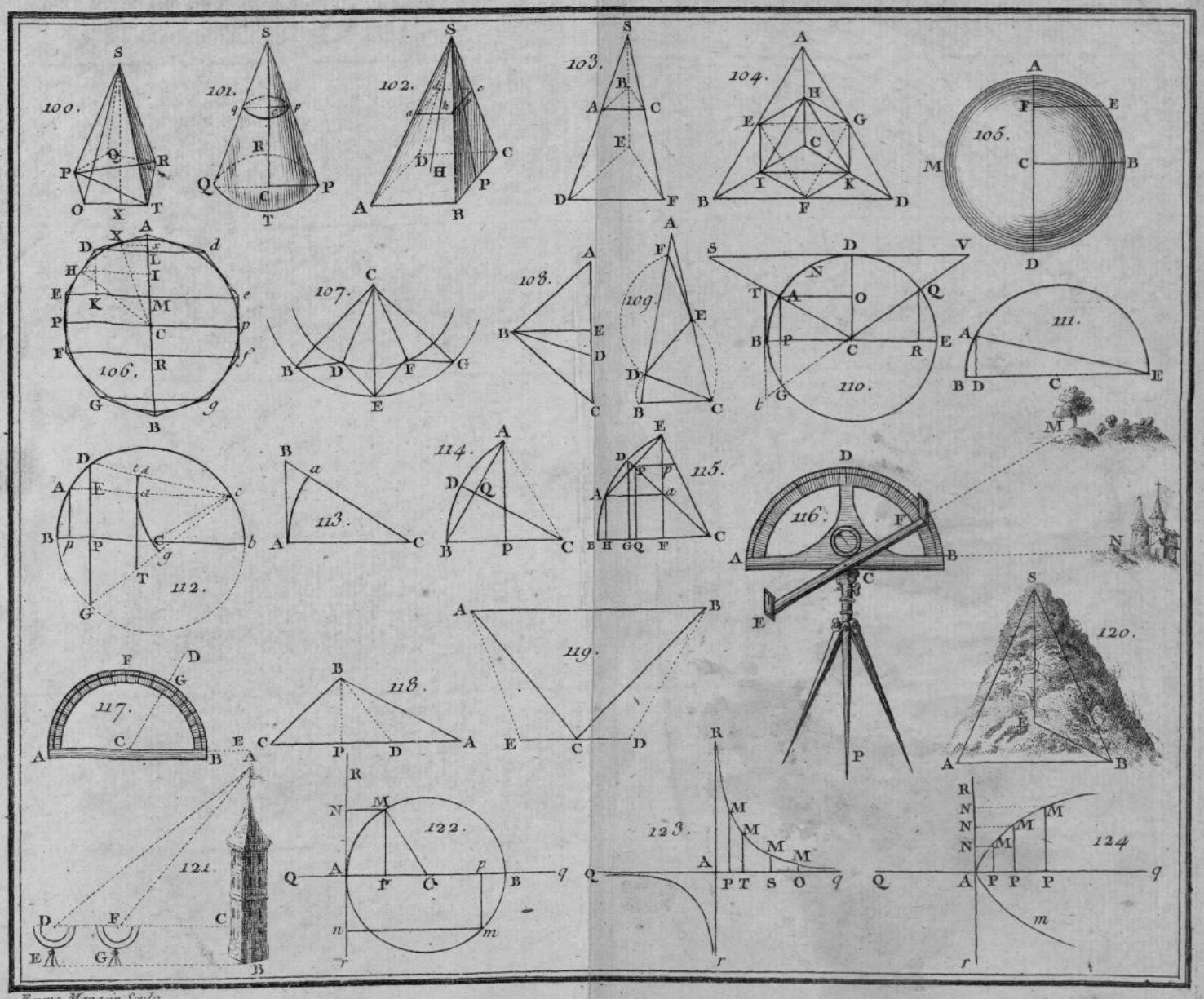
BIBLIOTHÈQUE NATIONALE RF


47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72

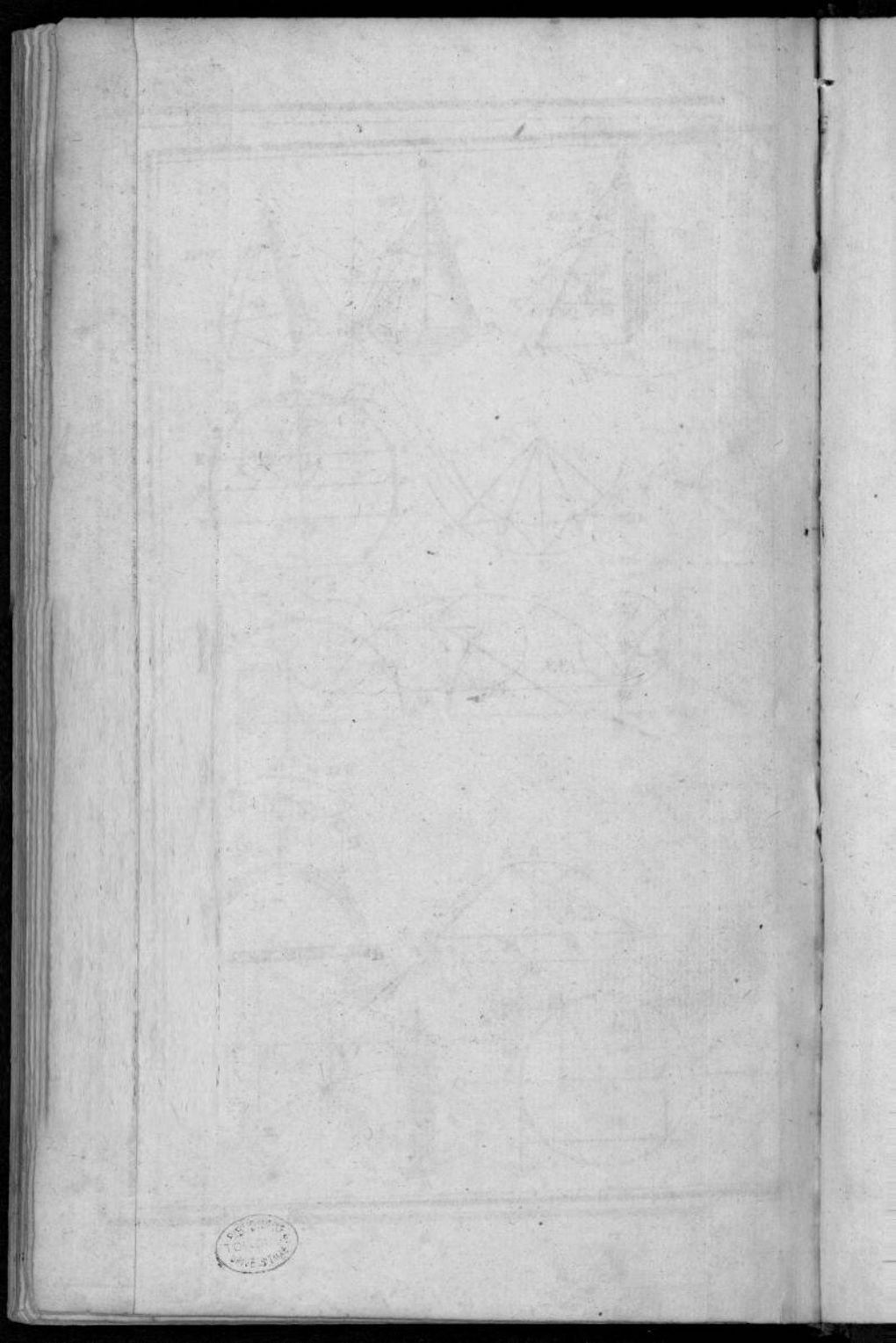
BIBLIOTHÈQUE NATIONALE RF

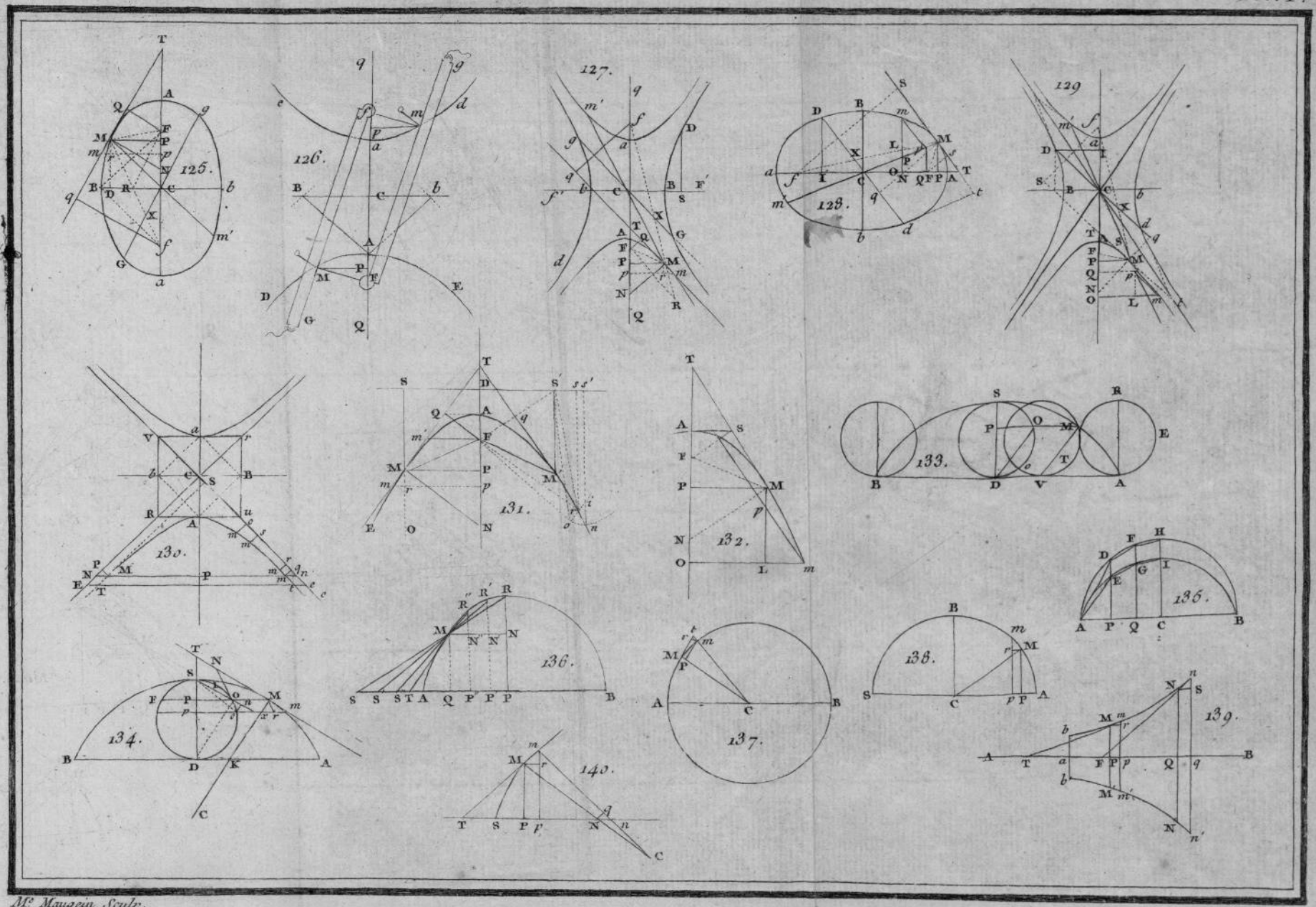

73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE

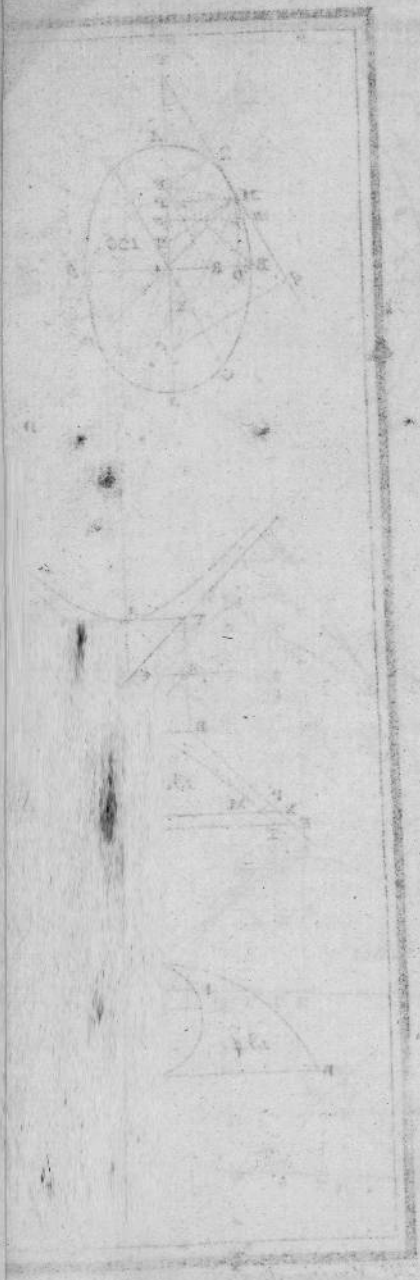


Remme Mangein Sculp.





Mr. Maugein Sculp.



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE NORMALE