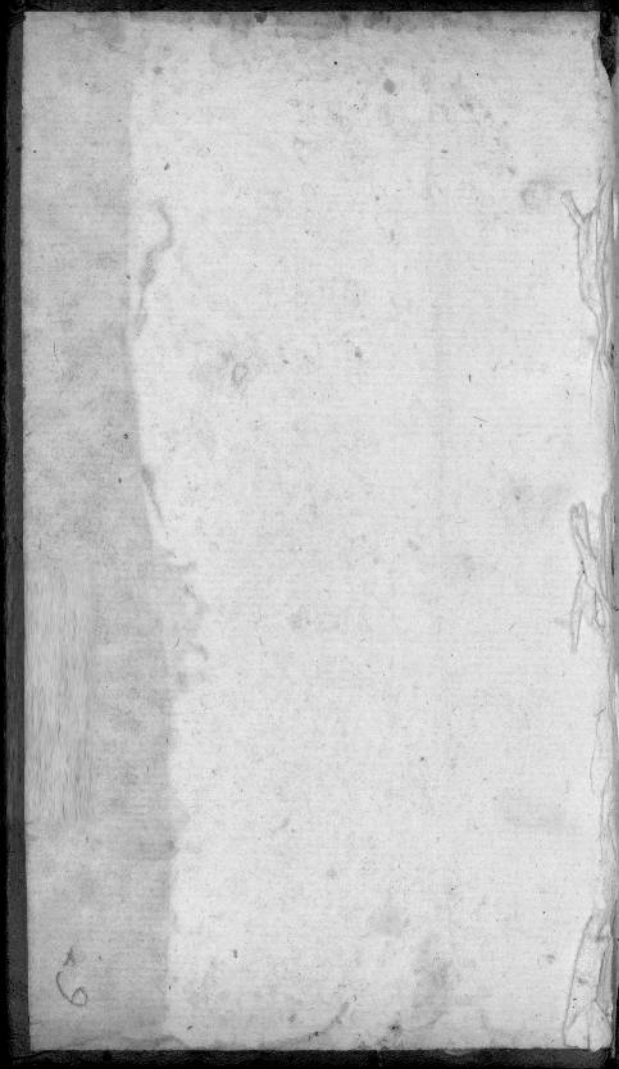




NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE.

Abbregez par des méthodes particulières en moins de cinquante propositions.

Dediés à Monseigneur le DAUPHIN.

Par le P. MICHEL MOURGUES de la
Compagnie de JESUS.



A TOLOSE,
Par JEAN PECH, Imprimeur des Estats
generaux de la Province de Foix, à l'En-
seigne du Nom de JESUS.

M D C. LXXX.



NOUVEAU
ELEMENTS
DE
GEOMETRIE

Par M. L. M. de
la Faculté des Sciences
de Paris.

Paris, chez M. de la Harpe,
Comptroller de l'Académie.



A TOI 125.
J'ai vu, j'ai vu, j'ai vu
la Faculté des Sciences
de Paris.

M. de la Harpe



A MONSEIGNEUR
LE DAUPHIN.



ONSEIGNEUR,

Toutes les belles Sciences se sont trop bien trouvées de Vôte esprit pendant les années de Vôte éducation, pour ne pas continuer à Vous faire leur Cour. La Géométrie est de ce nombre, & Vous l'y avez mise, MONSEIGNEUR, en luy donnant quelques uns de ces précieux momens, qui devoient former pour le premier Thrône du monde le Prince le plus accompli. Vous avez fait voir

E P I T R E.

dans cette étude ce qui se trouve rarement avec autant de vivacité & de feu que Vous en avez, je veux dire, beaucoup de ce phlegme patient & laborieux qui nourrit l'application, & dont il faut extrêmement, pour réüssir comme vous avez fait. Aussi, MONSIEUR, tout ce que l'on Vous présente desormais n'est pas pour Vous rien apprendre, mais pour avoir V^{otre} approbation ; & Vous allez faire dans la suite & le sort des Peuples, & la destinée des Auteurs. Une même main donnera des loix au monde & y dispensera la gloire : les Braves, & les Sçavans auront également les yeux arrêtés sur Vous, les premiers pour se former sur Vos qualitez héroïques, les seconds pour attendre de V^{otre} jugement leur bonne ou leur mauvaise fortune. On ne craint pas même que tout cét appareil d'un avenir éclatant dont nous voyons le presage

EPI T R E.

dans l'Hymen si souhaitté qui Vous donne la possession de la Princesse du monde la plus spirituelle & la plus accomplie ; On ne craint pas, MONSEIGNEUR , que ni tous les emplois de Vôte valeur, ni tous les succez que le Ciel Vous prépare, Vous fassent jamais perdre le souvenir de Vos premiers attachemens qui ont esté pour les belles lettres. Vous ne sçauriez Vous défédre de les aimer ; Vous Vous y estes rendu trop habile , & Vôte esprit leur répond de Vôte cœur. Ainsi l'ambition de Vous plaire fera faire des efforts extraordinaires , & Vous allez porter les Sciences à leur dernière perfection. l'Ouvrage que je prens la liberté de Vous offrir , MONSEIGNEUR , est petit : mais s'il n'étoit mauvais que par cét endroit , il ne le seroit pas extrêmement : en fait de Géométrie sur tout, le défaut de Volume n'est pas le plus grand défaut. Du re-

EPISTRE.

ste si c'est une temerité à moy de chercher pour un si petit sujet la protection d'un Nom si Auguste ; il faut aussi avoüer que cette extrême bonté qui seroit aimable dans un particulier, & qui est adorable dās la première qualité du monde , & dans un Prince fait comme Vous , est bien capable de faire faire des fautes semblables à la mienne. Après tout je souhaitte que le public ne puisse jamais me reprocher rien de plus fâcheux , que d'avoir voulu , même avec quelque sorte d'indiscretion, luy laisser des marques du profond respect , avec lequel je suis

MONSIEUR

Vôtre tres-humble & tres-
obeissant Serviteur

MICHEL MOURGUES de la Com.
pagnie de JESUS.



PREFACE.



ES Elemens de Géométrie en la forme, en laquelle Euclide nous les a laissés sont trop longs, & ne sont pas, ce semble, assez méthodiques.

Cét Autheur va aux propositions essentielles, qui sont en assez petit nombre, par des détours embarrassez de force petites démonstrations, dont il luy a plû de faire dépendre les plus importantes, qu'il auroit pû tirer plus immédiatement de leurs véritables principes, comme on a taché de faire dans ces Elemens. Il mêle par tout quantité de Problemes embarrassans, dont il donne la construction fort au long: quoyque pour l'ordinaire il ne soit besoin, tout-au-plus,

P R E F A C E

que de concevoir nettement, qu'ils peuvent estre construits par les propositions, qui les précédent, quand on veut s'en servir pour celles qui suivent. On pourra remarquer qu'on a eû égard à cet ordre dans ces Elemens, & que si l'on en a retranché les Problemes, ce n'a esté que parce qu'on a crû qu'ils seront mieux dans un Traité particulier de la Géométrie Prâctique. Enfin Euclide a trois livres des Nombres, qu'on ne peut pas douter qui ne soient là hors d'œuvre. Car le dessein des Elemens ne comprend que les maximes générales qui servent de règles pour mesurer toute sorte de Quantités; & ce n'est que par exemple qu'on les applique à la Quantité étendue en long, en large, & en profond, & parce qu'il est plus aisé d'en tracer des peintures & des représentations aux yeux & à l'imagination. Et quand on s'est une fois déterminé à une espece de Quantité comme à celle que nous venôs de dire, la considératiô de toute autre espece, par exemple des Nombres, n'entre pas plus dans le dessein des Elemens que celle des mouvemens des Astres, ou des Accords de la Musique: ce qui demande des traités separés, où par des suppositions plausibles on fasse entrer les démonstrations universelles dans son sujet particulier.

P R E F A C E.

Pour cette raison les Elemens du R. P. Pardies **J**esuite , tout abregez qu'ils sont , contiennent encore quelque chose de plus que ce qui est marqué par ce titre. Pour estre méthodiques ils le sont peut-estre plus qu'il ne falloit , ce qui est un beau défaut, si on peut l'appeller ainsi, & le seul sans doute dont pouvoit estre capable un esprit de cette neutreté , & de cette justesse. Comme il s'est attaché scrupuleusement à traiter premièrement des Angles, & puis des Triangles, en suite des figures plus composées séparément , il s'est privé du secours qu'il pouvoit tirer de la considération moins scrupuleuse de ces choses ensemble pour éclaircir les unes par les autres. Ainsi il se trouve obligé de laisser quelques propositions à la recherche de son lecteur , ou de les abandonner à l'évidance qu'elles portent avec elles. On a vû parêtre d'autres Elemens , dont le Public se seroit mieux accommodé , s'ils avoient esté plus courts, & si on n'y avoit pas mis tant d'Algèbre: ce qui desoriente un peu ceux qui ne s'étoient attendus dans la Géométrie qu'à des Triangles , & à des Cercles, & qui ne croient apprendre que la Chiffre quand on ne leur parle que d'Addition & de Multiplication. Pour moy je n'ay pas voulu m'éloigner de

P R E F A C E.

la Méthode des Anciens en ce point ; ayant reconnu par quelque expérience qu'elle est propre à fixer l'esprit par l'imagination , & que les jeunes gens qui comencent de s'addonner aux Mathématiques ont besoin de ce secours. Après cela dans le dessein d'abreger , & de n'avancer pourtant rien sans preuve, j'ay pris mes avantages par tout où je les ay trouvés. Ainsi après y avoir un peu médité , j'ay crû pouvoir enfermer toute la Théorie des Plans & des Solides , qui se trouve dans Euclide , & quelque chose de plus , en moins de 50. propositions : lesquelles étant bien pénétrées on pourra passer aussi scûrement , & avec autant de facilité aux autres parties de l'Objet des Mathématiques , que l'on pourroit faire après avoir parcouru les gros Volumes de la plus part des Commentateurs des Elements. Ce qui demande de la patience plus que raisonnablement. Mon dessein m'a engagé à chercher avec soin l'ordre le plus naturel de la dépendance que les propositions ont les unes des autres , en quoy les Anciens ne semblent pas avoir extrêmement raffiné sur le scrupule Géométrique ; & peut. estre trouvera-t-on qu'en quelques endroits je ne me suis pas beaucoup écarté de ce que je cherchois. Du reste ayant donné un or-

P R E F A C E.

dre nouveau à mes propositions, j'ay esté obligé d'en donner aussi des démonstrations toutes différentes de celles des autres Autheurs : & si la nouveauté estoit icy de quelque mérite , on trouvera peut-estre que ces Elemens sont d'une manière assez nouvelle. Je me fers volontiers de la *Superposition* par tout où je puis , parce que cette sorte de preuve à esté toujours receüe des Géometres , & qu'elle est fort à la portée de ceux qui commencent. C'est encore pour cette dernière considération , que j'employe en quelques endroits la méthode *des Indivisibles* ; on verra que je le fais fort sobrement , & en un seul sens où elle vient si naturellement , que je ne pense pas que personne s'avise d'y trouver à redire. On sçait qu'elle a acquis à son Autheur , l'illustre Cavalier , le nom d'Archimede de son siècle : tous les plus habiles l'ont depuis employée , & entre les autres Mr. Paschal , qui dit dans une de ses lettres , que quiconque la rejette , ne peut plus prétendre à la qualité de Géometre. Enfin en toutes choses on s'est attaché avec soin dans tous ces Elemens , à faire voir non seulement ce qu'elles sont en effet , mais encore pourquoy elles sont ainsi ; ce que l'on peut trouver un peu à

P R E F A C E.

dire dans les Méthodes communes, qui convainquent plus l'esprit qu'elles ne l'éclaircent, & qui font quelquefois avouer la verité sans la faire comprendre.



PERMISSION DU R. PERE *Provincial.*

JE souſ-signé Provincial de la Compagnie de JESUS en la Province de Tolose, par le pouvoir que j'en ay reçu de Nôtre R. Pere Général JEAN PAUL OLIVA, donne pouvoir au P. Michel Mourgues de nôtre Compagnie de faire imprimer un Livre qu'il a composé & intitulé, Nouveaux Elements de Géometrie abrégés, &c. A Tolose cét II. Mars 1680.

Signé MICHEL DELAGE.

FAUTES A CORRIGER.

Page 14. ligne 8. CB est plus courte que CD. Lisez CD est plus courte que CE. P. 80. l. 24. par, lisez pour. P. 132. l. 19. a b c, lisez a b e.

LIVRE I.



NOUVEAUX ELEMENS
DE
GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des Triangles égaux en toutes
choses.



E que l'on se propose dans
les Elemens, c'est de trou-
ver des règles infailibles
pour mesurer toute sorte
de Corps, soit Plans, soit
Ronds ou engendrez du
Cercle: & l'ordre qui veut que l'on passe
des choses aisées aux plus difficiles, & des

plus simples aux plus composées, demande qu'ayant à traiter des corps ronds & des solides Plans, nous commençons par ceux-cy : & comme on en fait dépendre la connoissance de celle des figures Planes, entre lesquelles la Triangulaire est la plus simple, & celle en laquelle toutes les autres peuvent se résoudre, comme on fera voir dans la suite, il a esté nécessaire de traiter d'abord des Triangles, & des signes par lesquels on en peut connoître l'égalité ou l'inegalité. Mais parceque deux Triangles peuvent estre égaux, cōme on verra encore, ou par rapport à l'espace qu'ils enferment seulement, n'y ayant d'ailleurs ny aucun costé, ny aucun Angle qui soit nécessairement égal dans l'un & dans l'autre ; ou bien par rapport & à l'espace, & aux côtez, & aux Angles, les prenant toutefois dans l'ordre, selon lequel ils se répondent, ceux d'un Triangle à ceux de l'autre ; nous traiterons dans ce premier Livre des marques de cette dernière égalité, que nous appelons Egalité en toutes choses, nous réservant à parler de la première en un autre endroit, parceque nous avons trouvé à propos d'y employer la Methode des Indivisibles, que nous avons mise à la teste du livre troisième.



MAXIMES

receuës de tout le
monde.

I.

LE tout est plus grand que la partie.

II.

DEux quantitez, qui sont égales à une troisième, sont égales entre-elles.

III.

LEs quantitez qui estant mises l'une sur l'autre, s'ajustent parfaitement, sont égales.

IV.

LEs quantitez égales, auxquelles on ajoute, ou desquelles on retranche des quantitez égales, demeurent égales. Et les quantitez inégales, auxquelles on ajoute, ou desquelles on retranche des choses égales, demeurent inégales, à sçavoir, celle qui estoit plus grande, plus grande, & celle qui estoit plus petite, plus petite.

A 2



DEFINITIONS.

I.

LE *Point* est ce qui n'a point de parties, ou plutôt, ce en quoy on n'a pas affaire d'en considerer. Comme lors qu'il s'agit par exemple de sçavoir la distance de deux lieux, quand ce seroient des villes aussi grandes que Paris & Constantinople, on a raison de les regarder comme des points pour ce que l'on prend alors.

II.

LA *Ligne*, est au même sens, ce qui a quelque longueur, & en quoy on n'a pas besoin de considerer aucune largeur. Comme dans l'exemple précédent, c'est de la longueur, & non de la largeur du chemin, que l'on se met en peine.

III.

ON appelle *Surface*, ce qui est étendu en longueur, & en largeur, & dont on ne considere point l'épaisseur, comme il arrive lors qu'on veut acheter un jardin, ou un champ. Cela estant ainsi expliqué, les Philosophes n'ont plus raison de se scandalizer des definitions des Geometres.

IV.

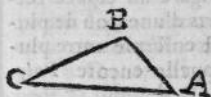
LA *Ligne droite*, est celle qui marque le plus court chemin d'un point à un



DE GEOMETRIE, LIV. I. 5

autre point, ou ce qui va au même, c'est la plus courte de celles qui peuvent estre tirées entre deux points.

1. Corollaire. Si un espace, comme $A B C$, est enfermé dans trois lignes



droites, je dis que la somme de deux côtes $A B$, $B C$ quels qu'ils soient, est toujours plus grande que le troisième

côté $A C$: Car la ligne $A C$ estant le plus court chemin du point A au point C , celui que l'on prend par les lignes $A B$, $B C$ est nécessairement plus long.

2. Corollaire. Deux lignes droites ne scauroient jamais suffire pour fermer un espace de toutes parts. Car supposé que $A C$ soit une ligne droite, si quelqu'un pretendoit que $A B C$, ne fait encore qu'une autre ligne droite, & que de cette sorte ces deux lignes droites ferment l'espace $A B C$; on le convaincroit en disant, que puisque $A C$ est le plus court chemin par lequel on puisse passer du point A au point C , le détour que l'on prend par le point B est nécessairement plus long; donc par cette quatrième définition, $A B C$ n'est pas une ligne droite.

V.

LA *Surface Plane* est la plus petite de toutes celles que l'on peut imaginer entre les lignes qui en déterminent les extremittez.

VI.

NOus appellons *Figure* un espace fermé de toutes parts d'une, ou de plusieurs lignes: & s'il est enfermé entre plusieurs lignes, on l'appelle encore *Polygone*.

VII.

LE *Cercle* est une figure plane décrite par une ligne droite A B, qui se meut autour de quelque'un de ses points A, que l'on nomme le *Centre*;



On appelle *Circonférence* la ligne courbe, dans laquelle le cercle est enfermé. L'on nomme *Diametre* du cercle la ligne droite, qui pas-

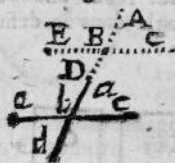
sant par le centre, partage le cercle en deux moitez. & les lignes égales tirées du centre aux divers points de la circonférence se nomment *Rayons*.

VIII.

T*riangle* est une figure enfermée entre trois lignes ou *Costez*: & si deux de ses costez sont égaux, le *Triangle* se nomme *Triangle Isoscele*.

I X.

Soient deux lignes droites EC , AD ,
 immobilement attachées l'une à
 l'autre par le point B , & concevons que
 AD , par exemple soit muë *Droit à elle-*
même de AD , en ad , (c'est à dire, en
 telle sorte que ABD , abd , ne soit
 qu'une ligne droite) & que dans son
 mouvement elle emporte avec soy la li-
 gne EC , en ec . Comparant mainte-
 nant la ligne EC dans sa premiere si-
 tuation avec elle-même dans sa dernière
 situation, je nomme les lignes EC , ec
Paralleles. Et quand nous trouverons que
 deux lignes auront l'une à l'égard de l'autre
 la même situation qu'elles pourroient
 avoir après un mouvement pareil à celui
 que nous venons de décrire, nous les ap-
 pelerons *lignes Paralleles*.



Cette sorte de defi-
 nition, qui expli-
 que la Generation
 de la chose que l'on
 definit (c'est le ter-
 me des Geometres)
 n'est pas d'Euclide,

mais elle est de la maniere d'Euclide, qui
 ne definit pas autrement la Sphere, le Cylin-
 dre, & le Cone. Archimede l'employe pour
 la Spiraie; les modernes s'en sont servis
 sans scrupule pour la Quadratrice, &

pour les diverses sortes de Roulettes. Enfin Monsieur Descartes en a étendu l'usage jusqu'à la Parabole, à l'Hyperbole, & aux figures encore plus composées, dont par cette methode il fait clairement comprendre les proprietéz. On verra l'usage de ma definition dans la quatrième proposition de ce livre premier, si on en fait comparaison avec les demonstrations d'Euclide sur ce sujet.

X.

ON nomme *Parallelogramme* une figure de quatre côtez, dont les deux opposez sont Paralleles. Si le *Parallelogramme* a tous ses angles droits, on le nomme *Rectangle*, & s'il a encore tous les costez égaux, on l'appelle *Quarré*. A, est un *Parallelogramme*, B un *Rectangle*, C un *Quarré*. Nous allons dire ce que c'est qu'Angle dans la definition suivante.



XI.

Angle *Rectiligne*, n'est pas autre chose que l'ouverture de deux lignes droites A B, A C, qui ont un point com-

DE GEOMETRIE L. I. 9

mun A, qui se nomme la *Pointe* de l'Angle. On a accoutumé de designer un Angle par trois lettres, dont la seconde est placée à la pointe de l'Angle.

Nous n'avons point de meilleure mesure pour determiner la quantité de cette ouverture que l'Arc ou la partie d'un cercle décrit de la pointe de l'angle, comme centre à telle ouverture de compas que l'on veut. Et pour la facilité du calcul, on s'est accordé à diviser tout le cercle en 360 parties qu'on nomme *Degrez*, & chaque degré en 60 *Minutes*, chaque minute en 60 *Secondes*, celles-cy en autant de *Tierces* chacune, & ainsi à l'infini.

On appelle Angle *Droit*, celuy qui comprend un quart du cercle, ou quatre-vingts dix degrez, Angle *Aigu*, celuy qui en comprend moins, comme B A C. Angle *Obtus*, celuy qui en comprend davantage, comme B A E.



1. Corollaire. Une ligne droite A B, tombant entre les extremitéz d'une autre ligne E C, fait avec elle deux Angles B A C, B A E, que l'on nomme *Angles de suite*: & je dis que la somme de ces deux Angles pris ensemble, fait la valeur de deux Angles droits. Car si on conçoit

un cercle qui ait son centre au point A où les deux lignes se touchent, il est clair par la 7. déf. que le Diamètre EC , partage ce cercle en deux moitiés, dont l'une est occupée par les deux Angles BAC , BAE , qui comprennent ainsi la valeur de deux quarts de tout le cercle, & c'est ce que nous appellons faire la valeur de deux Angles droits selon la définition de l'Angle droit cy-dessus.

Je ne veux pas dire que chacun de ces Angles soit un Angle droit. Mais si l'Angle BAC , occupe moins que le quart du cercle, l'Angle BAE , en occupe aussi une plus grande partie que le quart : ainsi le défaut d'une part est compensé par l'excès qui se trouve de l'autre. Il faut encore remarquer que si on prolongeait la ligne BA , vers D , les deux Angles CAB , CAD , feroient aussi la valeur de deux droits puis qu'ils occuperoient le demy-cercle BCD , & pour une semblable raison les deux Angles EAB , EAD , qui comprennent le demy-cercle BED , sont encore Angles de suite.

2. Corollaire. Outre ces Angles de suite, on en peut considérer d'autres que l'on nomme Angles opposés par la pointe, qui ne se trouvent jamais dans un même demy-cercle comme les précédens, & qui sont compris de part & d'autre entre deux

DE GEOMETRIE L. I. II

lignes droites qui se coupent. Tels sont les Angles BAC , EAD , comparez ensemble : tels sont encore les angles BAE , CAD , Or je dis que les angles opposés par la pointe, comme BAC , EAD , sont égaux. Car par le Coroll. precedent la somme des deux angles BAC , BAE , fait la valeur de deux angles droits, & par le même Coroll. la somme des deux Angles EAD , EAB , fait aussi la même valeur. Donc retranchant de ces deux sommes égales une même chose, à sçavoir, l'Angle BAE , les residus de part & d'autre qui sont les angles BAC , EAD , seront égaux par la 4. maxime. Ce qu'il falloit faire comprendre.

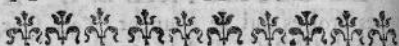
XII.

SI une ligne droite comme FA , tombant entre les extremittez de la ligne



EC , fait ses Angles de suite de part & d'autre égaux, & chacun droit par consequent;

cette ligne est dite estre *Perpendiculaire* sur EC .



PROPOSITION I.

Soit un Demy-cercle AME , & un Rayon AM , prolongé, si on veut, dans lequel on designe un point C à discretion, si on n'ayme mieux prendre M . Je dis que si on tire du point C des lignes droites sur les divers points de la Circonference du Demy-cercle, celle qui ira aboutir à un point de la circonference plus proche du point M , sera toujours plus petite que celle qui se terminera à un point plus éloigné du point M dans cette circonference : c'est à dire, que la ligne CB sera plus petite que la ligne CD , & celle-cy plus petite que la ligne CE , & ainsi de suite.

CONSTRUCTION.

Tirez les Rayons AB , AD , AE . Et re



marquez deux cas differens. Le 1. est quand la ligne CB , que vous voulez demontrer plus petite que

CD , se trouve aussi plus proche de la lig-

ne CM , & alors il faut prolonger le Rayon AB en H . Le 1. cas est quand la ligne CD par ex. Que vous voulez démontrer plus petite que la ligne CE se trouve plus écartée de la ligne CM ; & alors il n'est pas besoin d'autre préparation.

DEMONST. pour le 1. cas, où il s'agit de faire voir que CB est plus courte que CD . La ligne CB est plus courte que la somme des deux lignes CH , HB . (par le 1. Corollaire de la 4. définition) & cette somme est encore plus petite que la ligne CD . Donc à plus forte raison CB est plus courte que CD . Il reste à prouver seulement la 2. proposition de ce raisonnement, à sçavoir, que la somme des deux lignes CH , HB est plus petite que la ligne CD , & parceque la partie CH est commune, la preuve se réduit à faire voir que HB , est plus petite que

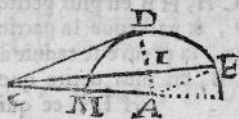
HD , ce qui est manifeste; puisque ajoutant à HB le rayon BA , & à HD un rayon égal DA ,



la ligne HA se trouve plus petite que les deux HD , DA prises ensemble par le même Corollaire que nous avons cité auparavant. La ligne CB est donc

plus courte que la ligne CD .

DEMONST. pour le 2. cas, où il s'agit de faire voir que CD est plus courte que CE . La ligne CD est plus courte que la somme des deux lignes CI , ID , par le même Corollaire; & cette somme est encore plus courte que la ligne CE . Donc à plus forte raison CB est plus courte que CD . Il nous reste à prouver seulement que la somme des deux lignes CI , ID est plus courte que la ligne CE , & parceque la partie CI est commune, la preuve se réduit à faire voir que ID est plus courte que IE , ce qui est manifeste; puisque ajoutant à DI la ligne IA , & à EI la même ligne IA , la ligne DA , c'est à di-



re, EA , qui luy est égale, se trouve plus courte que les deux EI , IA , prises ensemble par nôtre

Corollaire. La ligne CD , est donc plus courte que la ligne CE . Ce qu'il falloit demontrer.

La forme de la demonstration seroit la même, si on avoit pris le point M au lieu du point C , en sorte que le Triangle AMD fut Isocele. Du reste si cette premiere proposition paroît tant-soit-peu embarrassante pour les commençans, ceux qui sçauront, ou

qui pourront ſçavoir par les Corollaires ſuy-
vans qu'elle contient autant de Théorie
que les 26 premières d'Euclide enſemble, par-
my lesſquelles il y en a dont la démonſtration
eſt encore bien plus embroüillée ; trouveront
peut-eſtre qu'on a eſté aſſez heureux d'avoir
plu tant abrégé ſans ſe rendre encore moins
intelligible.

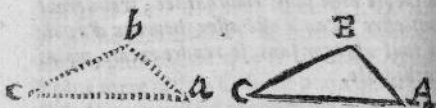


Corollaires.

DE cette propoſition univerſelle, il
ſ'enſuit, que ſi un Triangle com-
me ABC a deux côtez AB , AC égaux
à deux côtez ab , ac d'un autre Trian-
gle, comme eſt abc ; de ſorte qu'eſtant
appliquez l'un ſur l'autre par les côtez
égaux AC , ac , les extrémitez des deux
autres côtez égaux AB , ab , ſe rencon-
trent dans la circonſérence d'un même
Demy-cercle, comme il arrivera neces-
ſairement. Il ſ'enſuit, diſ-je, que.

1. Corollaire. Si un de ces Triangles,
comme abc , a l'angle cab , compris
entre les côtez égaux ac , ab , plus petit
que l'angle CAB , compris entre les
côtez égaux de l'autre Triangle, il aura

aussi sa base $c b$ plus petite que la base de l'autre $C B$. Car puisque l'angle $c a b$



est plus petit que l'angle $C A B$, le point b est donc plus proche du point M que le point B ; suivant ce que nous avons dit de la manière de mesurer les Angles dans l'onzième définition: donc la ligne $c b$ est plus courte que $C B$ par cette première proposition.

2. Corollaire. Si ces Triangles ont les angles compris égaux, à sçavoir, l'angle $c a b$ à l'angle $C A B$; c'est à dire, si le point b tombe précisément sur le point B , leurs

DE GEOMETRIE L. I. 17

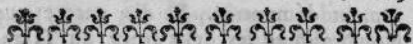
bases $b c$, BC seront les mêmes ; puis-
que d'un point à un point, on ne peut ti-
rer qu'une ligne droite : autrement deux
lignes droites fermeroient un espace con-
tre le 2. Corollaire de la quatrième defi-
nition. Et ainsi ces deux Triangles s'a-
justeront parfaitement, & seront consé-
quemment égaux (3. max.) & voy-là la
1. marque de l'égalité de deux Triangles
en toutes choses, à sçavoir, quand deux
côtés AB , AC de l'un sont égaux à
deux côtés $a b$, $a c$ de l'autre, & de plus
l'Angle compris entre les côtés AB , AC
égal à l'Angle compris entre les côtés, $a b$,
 $a c$. Car alors ces Triangles sont égaux,
non seulement pour le regard de l'espace
qu'ils enferment, mais encore pour le
regard des côtés & des Angles qui se
répondent. Puisque le côté CB s'ajuste
avec le côté cb , &c. Et l'angle A avec
l'angle a , l'angle B avec l'angle b ,
& l'angle C avec l'angle c . & générale-
ment l'égalité est entière, quand on
la démontre par la *Superposition*.

Il s'ensuit réciproquement, la suppo-
sition demeurant la même, que....

3. Corollaire. Celuy de nos deux Tri-
angles qui aura la plus petite base, c'est
à dire encore celuy dont le point b tom-
bera plus proche du point M . après la su-
perposition, aura aussi l'angle compris

$c a b$ plus petit que l'angle compris $C A B$. Car nous avons fait voir que la ligne $c b$ étant plus courte que $C B$, elle doit aboutir dans la circonférence à un point plus proche du point M . De sorte que l'arc $M b$ étant plus petit que l'arc $M B$, l'angle $c a b$ est aussi nécessairement plus petit que l'angle $C A B$, par l'onzième définition.

4. Corollaire. Enfin si les bases $C B$, $c b$ sont égales, le point b ne sçauroit tomber ailleurs que sur le point B ; & ainsi la ligne $c b$, s'ajustera avec la ligne $C B$, & la ligne $a b$ avec la ligne $A B$; & par conséquent non seulement les angles compris $c a b$, $C A B$ seront égaux, mais encore l'angle B , à $b \& C$ à c : & en un mot, c'est une seconde marque de l'égalité en toutes choses, lors que les deux côtes & la base, c'est à dire, lorsque les trois côtes d'un Triangle sont égaux aux trois côtes d'un autre Triangle chacun à chacun.



PROPOSITION II.

S*I le Triangle ABC est Ifofcele , c'est à dire, si le costé A B est égal au costé C B , les angles A & C sur la base A C sont égaux. Les angles sous la base le sont aussi quand on prolonge les côtez du Triangle.*



Demonstration. Concevez la ligne AC coupée en deux parties égales par la ligne BF, qui formera ainsi deux Triangles ABF, CBF égaux en toutes choses (4. cor. 1. pro.) car le costé BA est égal au côté BC, par l'hypothese, & AF à FC par la const. & le troisième côté BF est commun aux deux Triangles, & ainsi tous les côtez de l'un sont égaux à tous les côtez de l'autre. Donc l'angle A sur la base est égal à l'angle C sur la base avec lequel il s'ajusteroit si on faisoit la superposition. Ce qu'il falloit premiè-

rement démontrer. Je dis encore que si on prolonge les deux côtez du Triangle en D & en E les angles sous la base seront aussi égaux. Car la somme des deux angles qui se font de part & d'autre au point A fait la valeur de deux angles droits, parceque ce sont des angles de suite (Cor. 1. def. 11.) & pour la même raison la somme des deux angles qui se font au point C, fait aussi la valeur de deux angles droits. Donc si de ces deux sommes égales on retranche des parties égales, à sçavoir, les angles sur la base, les residus de part & d'autre, à sçavoir, les angles sous la base, seront égaux par la 4. maxime. Ce qui restoit à démontrer.



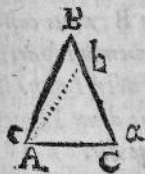
PROPOSITION III.

Si les Angles BAC, BCA sur la base d'un Triangle sont égaux, je dis que le Triangle est Isoscele, c'est à dire, que les côtez BA, BC sont égaux.

Démonstration. Car si BC est plus

DE GEOMETRIE. L. I. 21

grand que BA , supposons que bC soit égal à BA , & tirons la ligne Ab . Ayant mis en suite du petit caractère là, où vous en voyez dans la figure, pour une plus grande intelligence, on fera voir que les deux Triangles ABC , abc sont égaux par le 2. Corol. de la 1. prop. Car par l'hypothese, & par la construction,

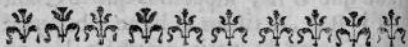


les deux côtés AB , AC sont égaux aux deux côtés ab , ac , & l'angle compris entre les deux côtés AB , AC , égal à l'angle compris entre les deux côtés ab , ac : le Triangle

ABC est donc égal au

Triangle abc , le tout à sa partie. Ce qui est absurde.

Cette proposition est appelée la **Converse** de la précédente, parce qu'on met icy dans la conclusion, ce qui estoit là dans l'hypothese, & on prend maintenant pour l'hypothese, ce qui estoit auparavant dans la conclusion.



PROPOSITION IV.

Si deux lignes droites quelconques
 Etant immobilement attachées l'u-
 ne à l'autre par le point B, nous con-
 cevons que par un mouvement partiel
 à celui que nous avons décrit dans la
 définition 9. on ait fait deux Lignes
 Paralleles E C, e c, je dis.

En premier lieu, que l'angle *Exte-
 rieur* A B C est égal à l'*Interieur*, opposé
 vers le même côté, à sçavoir, à l'angle
 a b c. ce qui est visible, puis qu'on sup-



pose que la ligne
 D A, n'a pû tour-
 ner en nulle ma-
 nière autour du
 point B, pour
 changer les an-
 gles qu'elle fai-

soit avec la ligne C E avant le mouve-
 ment. Dites le même des angles A B E,
 a b e.

DE GEOMETRIE L. I. 23

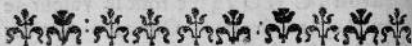
En second lieu les *Angles Alternes*, comme $E B D$, $a b c$ sont égaux. Car $a b c$ a esté démontré égal à $A B C$, & celuy-cy est égal à $E B D$, parce qu'il luy est opposé par la pointe. [2. Corol. 11. déf.] Donc, &c. dites le même des Angles Alternes $C B D$, $a b c$.

En troisiéme lieu les *Angles Intérieurs* vers le même costé pris ensemble, à sçavoir, $C B D$, $a b c$ font la valeur de deux Angles droits. Car les *Alternes* $C B D$, $a b c$ étant égaux, il s'ensuit que la somme des deux Angles $C B D$, $a b c$ est égale à la somme des Angles de suite $a b c$, $a b c$; & par consequent à deux Angles droits.

En quatriéme lieu quand ces lignes seroient prolongées à l'infini de part & d'autre elles ne sçauroient jamais se toucher. Car cela ne veut dire autre chose, suivant cette Méthode, si ce n'est, que quand la ligne $E C$ seroit infiniment longue, elle auroit changé de place toute entière, & qu'aucun de ses points, apres le mouvement que nous avons dit, ne se trouveroit encore dans le vestige qu'elle auroit laissé. Ce qui se comprend assez. Et ce sont les propriétés des Paralleles, qu'il nous falloit démontrer.

Corollaire. Nous pouvons réciproquement avancer que quand une ligne $A d$

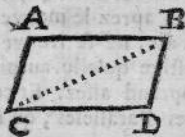
coupant deux autres lignes EC , &c fait l'Angle Extérieur égal à l'Intérieur opposé d'un même costé, ou les Alternes égaux, ou les deux Intérieurs d'un même costé égaux à deux droits; ces deux lignes sont Parallèles; puis qu'elles représentent parfaitement les deux situations d'une même ligne, qui auroit esté mûë en la manière que nous avons dit.



V. PROPOSITION.

Si les extrémités de deux lignes égales & parallèles AB , CD , sont jointes par deux droites AC , BD , celles-cy seront encore égales & parallèles.

Demonstration.



Tirez la ligne BC . Dans les deux Triangles ABC , BCD , le costé AB est égal au costé CD , le costé BC commun, les angles compris ABC , DCB égaux, puis qu'ils sont Alternes à l'égard des deux Parallèles

ralleles AB, CD . Ces Triangles sont donc égaux en toutes choses, (1. Cor. 1. Pr.) leurs bases AC, BD sont donc égales, & l'Angle ACB est égal à celui qui luy répond dans l'autre Triangle, scavoir, CBD . Puis donc qu'une ligne BC tombant sur deux lignes AC, BD , fait les Angles Alternes ACB, CBD égaux, ces deux lignes sont Paralleles par le Corollaire de la précédente. Ce qu'il falloit demontrer.

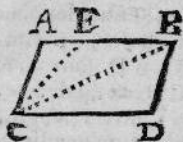


PROPOSITION VI.

EN tout Parallelogramme les côtés opposés AB, CD & AC, BD sont égaux. Les Angles opposés A, D , comme aussi B, C sont encore égaux, & BC , qui se nomme la Diagonale, partage le Parallelogramme en deux Triangles égaux.

Demonstration. Si le costé AB par exemple est plus grand que CD , faites que EB luy soit égal, & tirez la ligne CE . Maintenant CE est Parallele à BD





par la précédante,
 Donc la somme des
 angles BDC , ECD
 vaut deux droits [4.
Prop.] Et cependant
 puisque AC est enco-
 re parallele à BD , la somme des deux
 angles BDC , ACD ne vaut que deux
 droits [4. *Prop.*] ainsi l'angle ACD se-
 roit égal à l'angle ECD , le tout à la
 partie, ce qui est absurde.

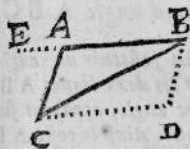
Quant aux angles opposés il est clair
 que, puisque l'angle A ajouté à l'angle
 ABD vaut deux droits, par la 3. partie
 de la 4. *Prop.* & que l'angle D ajouté au
 même fait aussi la valeur de deux droits,
 pour la même raison, il est clair, dis-je,
 que A & D sont égaux. Enfin la Dia-
 gonale formant deux Triangles, qui
 ont & tous les costez & tous les angles
 égaux, ceux de l'un à ceux de l'autre; la
 troisième chose que nous nous étions pro-
 posée en reste démontrée.



PROPOSITION VII.

L A somme de tous les angles d'un Triangle quelconque $A B C$, fait précisément la valeur de deux droits. Et si l'on prolonge un costé comme $B A$ en E , l'angle Extérieur $C A E$ est égal à la somme des deux Intérieurs Opposez $A B C$; $A C B$.

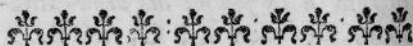
Demonstration I. Le Triangle $A B C$ est la moitié d'un Parallelogramme $A B C D$, que l'on peut concevoir en imaginant une ligne $B D$ tirée du point B , paral-



lele & égale au costé $A C$, auquel elle soit jointe par la ligne $C D$. D'ailleurs la somme des quatre angles de tout Parallelogramme vaut quatre an-

gles droits, puis qu'on a démontré que les joignant deux à deux, à sçavoir, les deux Intérieurs opposés d'un même costé, cha-

cune de ces sommes vaut deux angles droits. Enfin par la précédante, les deux Triangles $A B C$, $D C B$ partagent également les angles du Parallelogramme; Il en revient donc précisément la valeur de deux droits pour le Triangle $A B C$, 2. Et d'autant que les angles de suite $E A C$, $C A B$ valent aussi deux droits, il s'ensuit que l'exterieur $E A C$ est égal à la somme des deux interieurs opposez B & C du Triangle $A B C$. Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION VIII.

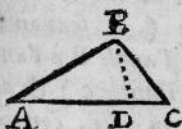
DANS tout Triangle comme $A B C$, le plus grand costé $A C$, soutient le plus grand angle $A B C$.

Un costé $A C$ est dit soutenir un angle comme $A B C$, lors que les deux lignes $A B$, $C B$, qui forment cet angle, appuyent sur les extremités dudit costé. Ainsi le costé $A B$ soutient l'angle C , & le costé $B C$ l'angle A dans le Triangle $A B C$.

Construction. Il faut faire voir que si

AC est plus grand que AB , l'angle B est plus grand que l'angle C . Coupez AD égale à AB , & tirez la ligne BD , qui formera un Triangle Ifofcele ABD .

Demonstration. Les angles ABD , ADB sur la base du Triangle Ifofcele sont



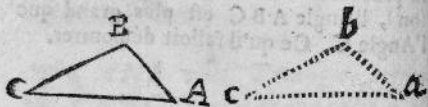
égaux: [2. prop.] donc l'angle ABC est plus grand que l'angle ADB , & celui-cy étant Extérieur à l'égard du Triangle

DBC est encore plus grand qu'un seul des Intérieurs Opposés, comme C , par la précédente. Donc, & à plus forte raison, l'Angle ABC est plus grand que l'Angle C . Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IX.

Deux Triangles sont égaux en toutes choses, s'ils ont & tous les Angles égaux (à sçavoir, l'angle A à l'angle a, l'angle B à l'angle b, l'angle C à l'angle c) & de plus un costé égal à un costé, comme BC, à bc. Pourvû toutefois que ces



costés soient ceux qui se répondent dans les deux Triangles, c'est à dire, qui y soutiennent des angles égaux, comme font ceux-cy.

Quelques-uns ne mettent pas cette limitation, & font une proposition fausse.

Demonstration. Appliquez ces Triangles

DE GEOMETRIE L. I. 31

gles l'un sur l'autre par les côtés égaux $B C, b c$. Puisquel'angle B est égal à l'angle b , il est évident que le costé b a tombera sur le costé $B A$, & par conséquent le point a se trouvera sur quelque point de la ligne $B A$ prolongée, si l'on veut, à l'infini. D'autre part puisque l'angle C est égal à l'angle c , le costé c a s'appliquera nécessairement sur le costé $C A$, c'est à dire, que le point a , qui doit déjà tomber sur quelque point du costé $B A$, tombera aussi en quelque endroit du costé $C A$. Ce sera donc sur le seul point que ces deux costés ont de commun, à sçavoir, sur le point A . Ainsi les Triangles s'ajusteront & se correspondront parfaitement. Donc ils seront égaux en toutes choses. Ce qu'il falloit démontrer.

Et c'est la 3. marque de l'égalité des Triangles en toutes choses, je veux dire, lors qu'ils ont & tous les angles égaux, & encore un costé, au sens que nous avons dit.

FIN DU LIVRE I.



LIVRE II.

DES PROPORTIONS.



NOUS ne pouvons point passer plus avant sans donner quelque connoissance des Proportions. Les Géometres n'ont jamais été entièrement satisfaits d'Euclide sur ce point. Car il y suppose une chose qui a autant besoin de preuve que tout ce qu'il y démontre, & il y en démontre aussi d'autres, qu'il auroit bien pû, ce semble, supposer sans scrupule. Ceux qui ont posé comme un Principe, que l'Aliquote d'une grandeur est à l'Aliquote Pareille de quelqu'autre grandeur que ce soit, comme la premiere des grandeurs est à la seconde, ont fait une supposition qui a encore été trouvé un peu hardie en une matière, où tout ce qu'on veut démontrer ne paroît d'abord guère moins

clair que cét Axiome. Et c'est peut-être pour cette considération que le P. Pardies a pris le parti de proposer tout simplement & sans démonstration toutes ces choses, qu'il voyoit bien que de semblables suppositions ne pouvoient rendre ni plus sûres ni plus intelligibles. Il y a des Modernes qui ont mis en Principe quelques propriétés des grandeurs Proportionnelles : mais ces propriétés ne sont évidemment connues qu'à l'égard des Quantités Commensurables tout au plus, & l'usage n'en peut être étendu plus loin, sans supposer toute la doctrine des Proportions, comme l'on découvre aisément quand on veut pénétrer jusques au fond ces suppositions. Cependant la Géométrie seroit trop défectueuse si elle ne traittoit des Incommensurables : & comme nous ne pouvons pas avoir d'idée expresse du rapport qui se trouve entre les quantités de cette nature, c'est à dire, de la manière en laquelle l'une est contenuë dans l'autre [d'où vient aussi que nous n'avons pas des noms pour exprimer les rapports de cette sorte, ainsi que nous en avons de propres & d'affectés pour tous les rapports des quantités Commensurables] je suis persuadé que, quand il s'agit des quantités de cette première espece, il n'est pas possible d'y rien déterminer autrement, qu'en prenant des termes Commensurables approchans de plus

en plus à l'infini des grandeurs Incommensurables proposées. De même qu'on ne sauroit rien déterminer bien précisément pour le regard d'une ligne Courbe, autrement qu'en y désignant autant de points que l'on veut, & les joignant en suite par des lignes droites, dont la somme peut approcher de plus en plus à l'infini de la Courbe donnée. Car il y a des choses dont l'idée est essentiellement vague & indéterminée, & il y auroit une contradiction assez visible, à prétendre d'y faire des règles, en ne consultant que leurs idées, ou sans les rapporter par quelque artifice aux choses, dont on a des idées expresses & déterminées. On ne peut donc s'y prendre solidement que par la voye de la Réduction à l'impossible, & ceux qui ne veulent pas s'en contenter ne savent pas trop bien ce qu'ils veulent : & on pourroit faire voir qu'ils ne sont pas, en ce point, meilleurs Philosophes que Mathematiciens. Je croy être le premier qui l'ait employée dans le traité des Proportions, & j'ose dire que c'est le bon de ma Méthode, s'il y a rien de bon. Je me flâte aussi, non seulement d'avoir notablement abrégé cette matiere en cinq ou six propositions, mais encore d'avoir trouvé à peu près, si je ne me trompe, l'ordre le plus naturel de leur dépendence, comme on pourra voir pour peu qu'on prenne de peine à y

méditer. On verra que l'Alternation ou l'Echange Alternatif est une suite de la proposition que nous avons mise la première, & plus clairement encore, que tout le reste dépend de l'Echange Alternatif. On sera peut-être bien-aise de remarquer par quel artifice nous avons rapporté la Composition, la Division, & la Conversion du Rapport à une proposition générale, de laquelle on tire naturellement ces trois Corollaires. Enfin je démontre généralement pour le regard de toutes sortes de quantités tant Commensurables qu'Incommensurables, que le Rapport des Extrêmes est composé de tous les rapports moyens, ce que l'on ne trouve pas dans les Commentateurs d'Euclide. Après tout, quoy qu'on ne pense pas avoir trouvé ailleurs rien de plus intelligible; toutefois par la condition du sujet on ne se flâte pas d'avoir ôté toute la difficulté pour ceux qui n'ont aucune teinture des Mathématiques. Tout ce que l'on veut démontrer icy, est ordinairement fort clair pour le regard des quantités Commensurables, & on s'en est fait comme une science expérimentale par l'usage familier des nombres, qui ne peuvent être employés que dans cette espèce de quantités. De sorte que les démonstrations exactes que l'on entreprend de donner sur cette matière sont en quelque façon plus

obscures que les propositions mêmes en la manière que les conçoivent pour l'ordinaire ceux qui commencent, c'est à dire, par rapport aux seules grandeurs Commensurables. Ainsi nous sommes dans la même peine que les Physiciens, lors qu'ils entreprennent de définir nos sentimens; car comme nous n'avons point de pensées plus vives & plus expresses que celles-là, la définition semble toujours un peu moins claire, quand ce ne seroit que parce qu'elle est nécessairement plus composée, par le petit détour qu'il faut prendre pour la rendre régulière. D'ailleurs on n'est pas d'abord bien capable d'une abstraction aussi forte que celle qui s'étend jusques aux Incommensurables: & de quelque manière qu'on s'y prenne, c'est toujours une suite de raisonnemens & de conséquences en chaque proposition, à quoy l'esprit ne se fait qu'avec le temps. Pour toutes ces raisons je conseille à ceux, qui voudront s'instruire par cette Méthode, de ne pas commencer sans avoir un Mathématicien, qui les montre; ou même de se contenter pour la première fois de bien pénétrer le sens des propositions sans en chercher d'autre preuve que celle qu'ils pourront tirer de l'intelligence des termes, se réservant à approfondir cette matière lors que par quelque usage de la Géométrie ils en seront plus capables. Je me
serviray

DE GEOMETRIE L. II. 37

Serviray des lettres de l'Alphabet pour désigner les quantités que je mettray dans mes Hypotheses , parce que comme ces caractères n'entrent point dans l'objet de la Géométrie , on trouve cét avantage à les employer que l'esprit s'y accoutume à prendre les Propositions dans toute leur universalité : ce qui ne se fait pas sans quelque réflexion , lorsque l'on fait ses démonstrations sur quelque partie de l'objet de la Géométrie , comme sur les Lignes ou sur les Nombres. Outre que cela tient quelque chose de la manière Algébrique , à quoy il est bon de se faire un peu dès le commencement.



DEFINITIONS.

I.

QUoy que dans le fond toute grandeur soit respectueuse , & que cette idée enferme nécessairement quelque comparaison ; toutefois quand on compare des quantités avec certaines mesures communes que les hommes ont éta-

D

bliques, ce que l'on trouve qu'elles ont de grandeur à ce regard, comme deux ou quatre Lignes, Pouces, Pieds, Pieds-quarrés, Pieds-cubes, &c. se peut appeler la *grandeur Absoluë* de ces quantités,

I I.

MAis quand on compare deux, ou plusieurs quantités, non plus avec ces mesures communes chacune à part, mais entre elles mêmes, les faisant servir comme de mesure l'une à l'égard de l'autre, afin de déterminer de quelle manière la plus petite est contenue dans la plus grande; ce que l'on trouve que l'une a de grandeur en ce sens à l'égard de l'autre, se nomme *Rapport*, ou *Raison*, ou *grandeur Respective*.

I I I.

LEs quantités que l'on compare de cette sorte, s'appellent les *Termes du Rapport*, celle que l'on compare se nomme *l'Antecedant*, celle avec quoy on la compare se nomme *le Consequant*

I V.

LOrs que deux quantités $A\ B$ comme $B\ \&\ D$, sont $C\ D$ contenues d'une même $A. B :: C. D$ sorte dans deux autres quantités, à sçavoir, B en A , & D en C ; Il est évidant par la 2. définition qu'il y a égalité de rapport entre $A\ \&\ B$

d'une part, & C & D de l'autre. Ce que l'on exprime ainsi A est à B comme C à D, ou pour abrégér $A. B :: C. D.$ Cette égalité ou cette même-té de Rapport s'appelle proprement *Proportion*, & ces quatre quantités prises en cet ordre sont dites être *Proportionnelles*.

V.

Lors qu'une quantité est divisée en parties égales, ces parties sont appelées *Aliquotes* de cette quantité : & lorsque deux quantités sont divisées en un nombre égal de parties égales, je nommeray ces parties, *Aliquotes Pareilles* les unes de la première, les autres de la seconde quantité. Or on conçoit clairement qu'une quantité A, A B quelle qu'elle soit, est divisible en autant de parties égales que l'on voudra, par ex. en un million ou en cent millions, & chacune de ces dernières en autant d'autres encore, sans que l'esprit découvre aucun terme de petitesse, au dessous de laquelle on ne puisse faire descendre les Aliquotes, en multipliant les divisions. C'est pourquoy si l'on me propose une autre quantité déterminée B quelque petite qu'elle puisse être, je ne feray pas difficulté de supposer que l'on peut prendre en A, ou y désigner au-moins par la pensée [ce

qui suffit pour la démonstration] des Aliquotés encore plus petites que B. Ce qui n'a pas besoin d'un plus grand éclaircissement.

V I.

LEs quantités qui ont quelque Aliquote commune, sont appellées quantités *Commensurables*, parce que cette Aliquote, prise un certain nombre de fois peut égaler précisément ces quantités, & leur servir comme de mesure commune. Ainsi tous les nombres sont *Commensurables*, parce qu'ils ont au-moins l'unité qui leur sert de mesure commune. Ce qui fait que quelques-uns définissent le quantités *Commensurables*, *celles qui sont les unes aux autres cōme nombre à nombre.*

Mais si on fait voir que de toutes les Aliquotés qu'on peut désigner en A, il n'y en a pas une seule qui mesure précisément B, c'est à dire, qui soit Aliquote de B; Alors A & B sont des quantités que l'on nomme *Incommensurables*. On fait voir dans la Géométrie qu'il y a des quantités de cette sorte, & il importe extrêmement que tout ce que l'on démontre dans le traité des proportions puisse s'appliquer indifféremment aux grandeurs de l'une & de l'autre espece.

DE GEOMETRIE L. II. 41

VII.

IL peut arriver quelque fois que l'on ne connoit pas immédiatement le rapport qui est entre deux quantités proposées, comme entre une Toise & un Pouce; & que l'on sçait pourtant quel rapport chacune de ces quantités prise séparément a avec une troisième quantité, comme avec un Pied, par où l'on vient aisément à connoître le rapport que l'on ne connoissoit pas d'abord. Par exemple supposé que je sçache que la Toise comprend six pieds, & que chaque Pied contient douze Pouces, il sera aisé de conclure que la Toise comprend six fois douze Pouces, c'est-à-dire, ce qui proviét de douze multiplié par six, c'est à dire, soixante-douze Pouces. On connoit donc en cette manière que la Toise est au Pouce comme soixante-douze à un. Et si l'on sçait encore que le Pouce à douze Lignes, on aura à la faveur des deux termes moyens, à sçavoir du Pied, & du Pouce, le rapport de la Toise à la Ligne, qui en contiendra ainsi soixante-douze fois douze, c'est à dire, huit cens soixante-quatre. C'est-ce que les Géometres, appellent *Composition de Rapports*: Et ils prennent avec raison pour un Principe, quoy qu'ils en étendent trop loin l'usage sans aucune preuve, *Que quelque*

nombre de quantités que l'on propose, & comment que ce soit qu'on les range, le rapport de la 1. à la dernière est toujours le même que celui qui est composé des rapports de la première à la seconde, de la seconde à la troisième, &c. & de la pénultième à la dernière. Ainsi suivant l'ordre du 1. exemple ils di-

ront que le rapport de la Toise à la Ligne est Composé des rapports particuliers de la Toise au Pied, & du Pied au Pouce, & du Pouce à la Ligne.

Et suivant la construction du 2. exemp. ils diront que le rapport du Pouce à la Ligne

est composé des rapports moyens du Pouce à la Toise, de la Toise au Pied, & du Pied à la Ligne. Ce qui ne signifie autre chose si ce n'est que l'on peut connoître le rapport des termes Extrêmes, en rapportant dans notre dernier exemple, le Pouce à la Toise, & puis la Toise au Pied, & enfin le Pied à la Ligne. Or pour comprendre que l'on ne sçauroit se méconter en s'y prenant de cette sorte, il ne faut que considérer que rapporter le Pouce à la Toise, c'est seulement désigner

1. Exemple

Toi. Pi. Pou. Lig.

2. Exemple.

Pou. Toi. Pi. Lig.

DE GEOMETRIE L. II. 43

un Pouce par le nom qui luy convient étant comparé avec la Toise, à sçavoir, une soixante-douzième, ce qui ne change point sa véritable valeur, non plus que quand on exprime une livre par la dixième partie d'une Pistole : & rapporter en suite la Toise au Pied n'est rien que luy faire prendre un nom différent en la nommant six pieds, de sorte que le Pouce s'appelle maintenant une soixante-douzième partie de six Pieds. Enfin rapporter le Pied à la Ligne, n'est qu'un nouveau changement de nom, mettant au lieu d'un Pied cent quarante-quatre Lignes, qui est en effet sa véritable valeur par rapport à la Ligne. Ainsi au lieu que l'on nommoit auparavant le Pouce une soixante-douzième partie de six Pieds, il faut dire maintenant une soixante-douzième partie de six fois cent-quarante-quatre Lignes, c'est à dire de huit-cens-soixante-quatre Lignes : Et suivant cette explication il est bien visible qu'un Pouce est à une Ligne comme une soixante-douzième partie de huit-cens-soixante-quatre Lignes est à une Ligne; puisque le consequent est le même, & les Antecedens sont encore une même chose exprimée par deux noms différens. Du reste si on prend dans le 1. exemple, le nombre qui exprime la

Toise par rapport au Pied , à sçavoir 6 ,
& puis le nombre qui exprime le Pied
par rapport au Pouce , à sçavoir 12 , enfin
le nombre qui exprime le Pouce par rap-
port à la Ligne , je veux dire 12 ; multi-
pliant ces trois nombres

6. 12. 12. ensemble , on fe- 6. 12. 12.
ra la somme de 864 qui ex- 864.

prime la Toise par rap-
port à la Ligne : Et si pren-
nant les nombres qui ex-
priment chaque terme du
2. exemple par rapport au
terme suivant , on multi-
plie ces nombres ensemble ,

à sçavoir, $\frac{1}{72}$ 6. 144. cette
multiplication donnera une $\frac{1}{72}$ 6. 144.

Fraction , à sçavoir, $\frac{864}{72}$ qui
fait précisément la valeur
de 12 , & qui est la vérita-
ble expression du Pouce par
rapport à la Ligne. Ces
nombres qui expriment ain-
si un terme à l'égard d'un
autre sont appelés Dénomi-
nateurs du Rapport ou
de la Raison : & maintenât
vous comprendrez la défi-
nition d'Euclide , qui dit ,

$$\frac{864}{72} = 12$$

DE GEOMETRIE L. II. 45

Qu'une Raison est composée de Raisons, lors que le Dénominateur de cette Raison est produit par la multiplication des Dénominateurs de quelques autres Raisons. Il faut pourtant reconnoître de bonne foy que tout ce que j'ay dit ne conclut exactement que pour les quantités Commensurables, & le scrupule Géométrique ne permet pas bien que l'on en tire des conséquences, comme on fait d'ordinaire, pour le regard de toutes sortes de quantités. Ainsi, quoy que les Auteurs anciens, comme Théon d'Alexandrie, donnent cette explication pour une démonstration rigoureuse, bien qu'ils n'en disent pas même autant que nous; j'ay jugé nécessaire de démontrer universellement ce principe pour le regard des Incommensurables, comme je fais dans la dernière proposition de ce livre, en supposant que la chose est suffisamment éclaircie pour le regard des Commensurables.

VIII.

ON me verra employer ces Signes $+$, $-$, $\propto$; dont $+$ $-$ $\propto$ le premier est le signe d'Addition, le deuxième le signe de Soustraction, le troisième le signe d'Egalité, ou d'Equation. Ainsi $A + B$ veut dire, A & B ajoutés ensemble, & dont on a fait

une somme , ou A plus B. $A - B$

$A - B$ veut dire , A d'où

l'on a retranché B , ou A $A \propto B$

moins B. Enfin , $A \propto B$

veut dire A est égal à B. $A . B \propto C . D .$

Et parce que j'exprime

souvent un rapport , en mettant les deux termes ainsi A . B , sans autre chose ; quand vous trouverez $A . B \propto C . D$ Cela veut dire que le rapport d'A à B est égal au rapport de C à D. Il est important d'avoir ceci fort présent. IX.

IL faut encore que je fasse connoître ce que j'entends par *surpasser* ou *être surpassé Précisémēt*. Quand je dis en quelques endroits que l'on prenne une petite

quantité , comme r , autant de fois A r qu'il est nécessaire pour surpasser

Précisément une plus grande quantité

A , je veux dire qu'il faut multiplier r jusqu'à ce qu'on ait une somme qui surpassé A d'une quantité ou égale à r ou plus petite que r. Au contraire si la somme faite par la multiplication de r , étoit surpassée par la quantité A , mais d'un excés ou égal à r ou même plus petit , on diroit que l'on a fait par la multiplication de r une somme qui est Précisément surpassée par la quantité A. De sorte que par cette construction la somme que l'on fera , ne surpassera jamais A , ou n'en

DE GEOMETRIE. L. II. 47

sera jamais surpassée , que d'une fois r
tout au plus.

X.

VOicy qui n'est encore qu'une expli-
cation des termes. Si je veus
dire que quatre quantitez $A. B :: A \ B$
 $C. D$ sont Proportionnelles , je $C \ D$
puis m'expliquer suivant la 4.

définition en ces deux manières , à sça-
voir , *A contient B comme C contient D*,
mettant ainsi les plus grandes quantités
dans les Antecedans , si les termes sont
inégaux ; ou bien y mettant les plus pe-
tites quantités en cette sorte , *B est con-
tenu en A comme D en C* : ce qui signifie
entiérement la même chose , sans qu'il y
ait tout-au-plus que les Grammairiens
qui puissent y trouver quelque différen-
ce dans le tour seulement. C'est pour-
quoy je croirois que c'est perdre le temps
que de m'amuser à démontrer , comme
font quelques uns , que toutes les fois
que l'on peut se servir de la première de
ces expressions , on peut aussi , si l'on veut ,
se servir de la seconde , & à faire voir que
si A est à B comme C à D , on peut con-
clure qu'en *Renversant* B est à A com-
me D à C ,



MAXIMES

OU

PROPOSITIONS

NATURELLEMENT

CONNUES.

I.

LES rapports égaux à un même rapport sont égaux entre eux, cela s'exprime ainsi. Si

$A.B :: C.D$, & de plus $C.D :: E.F$. Donc $A.B :: E.F$, ou bien encore ainsi. Si $A.B \propto C.D$, & de plus $C.D \propto E.F$. Donc $A.B \propto E.F$. On peut dire aussi que si $A.B \propto C.D$, tout rapport plus grand que $A.B$ sera aussi plus grand que $C.D$.

On ne voit point de raison pour faire à ce regard une exception à la maxime générale,

DE GEOMETRIE L. II. 49

générale, Que les quantités égales à une même quantité sont égales entre elles : puisque par le nom de quantité on entend toutes les choses qui peuvent estre comparées ensemble selon le plus ou le moins : & cette comparaison a lieu également & dans la quantité Absoluë, & dans la quantité Relative.

II.

QUand deux quantités sont égales, elles contiennent d'une même manière une même quantité : Et réciproquement quand deux quantités contiennent d'une même manière une même quantité, elles sont égales. Cela s'exprime autrement en cette sorte. Les quantitez qui sont égales ont même rapport à la même quantité ; & les quantitez qui ont même rapport à la même quantité, sont égales.

III.

QUand deux quantitez sont inégales, elles contiennent d'une différente manière une même quantité ; & la plus grande des deux a aussi un plus grand rapport à cette quantité, c'est-à-dire, a plus de grandeur à son égard, que la plus petite. Et réciproquement quand deux quantités contiennent d'une différente manière une même quantité, elles sont inégales ; & celle qui a le plus grand

rapport à cette quantité, est la plus grande des deux.

IV.

UNE même quantité contient d'une différente manière deux quantités inégales ; & celle à laquelle elle a un plus grand rapport, est la plus petite des deux.

1. Corollaire. Soit une rangée de quatre Proportionnelles $A. B :: C. D.$ Je dis que si le 1. Antecedant A est plus grand que le 2. Antecedant C , le 1. consequant B sera aussi plus grand que le 2. consequant D . $A. B :: C. D$

Car soit 1. s'il est possible, $B \propto D$. Donc en mettant B à la place de D , on ne changera pas le rapport $C. D.$ & il sera vrai de dire que $A. B \propto C. B$. Donc par la 1. max. $A \propto C$. contre l'hypothese. Soit en 2. lieu, s'il est possible, B plus petit que D . Donc (4. max.) le rapport $A. B$ est plus grand que le rapport $A. D$. Et par l'hypothese le rapport $C. D$ est égal au rapport $A. B$. Donc (1. max.) $C. D$ sera aussi plus grand que $A. D$. Donc (3. max.) C est plus grand que A , contre l'hypothese. Ce qui est absurde.

2. Coroll. Soient deux rangées de quatre Proportionnelles chacune, où les consequans soient les mêmes dans l'une &

DE GEOMETRIE L. II. 51

dans l'autre en cette for-

te $A. B :: C. D$, & $E. A. B \propto C. D$

$B :: F. D$. Je dis que si le $E. B \propto F. D$

1. Antecedant de la 1. ran-

gée est plus grand que le 1. Antecedant

de la 2. rangée, le 2. Antecedant de la

1. rangée sera aussi plus grand que le 2.

Antecedant de la 2. rangée ; si A est plus

grand que E, C sera aussi plus grand

que F.

Car soit 1. s'il est possible $F \propto C$. Donc

par la 2. max. $C. D \propto F. D$. C'est à dire,

$A. B \propto E. B$ par la 1. max. & deréchef

par la 2. max. $A \propto E$, contre l'hypo-

these.

Soit en 2. lieu, s'il est possible, F plus

grand que C. Donc par la 3. max. F. D

est plus grand que C. D. C'est-à-dire E. B

plus grand que A. B. Donc deréchef

par la 3. max. E est plus grand que A.

contre l'hypothese. Ce qui est absurde.

Il est nécessaire de bien retenir ce Corol-

laire, pour entendre la 1. & la 2. Propo-

sition, d'où toutes les autres dépendent.

V.

Les rapports composés de mêmes rap-

ports sont égaux ; Et entre ceux qui

sont composés de différens rapports, le plus

grand est celui qui est composé de plus

grands rapports.

UNE somme A est à son Aliquote quelconque r, comme toute autre somme C à son Aliquote Pareille s [voyez la 5. def.] Car $A.r::C.s$ r, & s ne sont Aliquotes Pareilles d'A & C, que parce que r & s prises autant de fois précisément l'une que l'autre, produisent A & C. D'où s'ensuit bien clairement que A contient r comme C contient s. Donc par la 4. déf. $A.r::C.s$.

Voicy présentement le Principe sur quoy roule toute ma Méthode, & qui est assurément aussi clair que le précédant. Il faut se souvenir que pour expliquer l'Egalité des rapports nous avons employé la notion ordinaire dans la 5. déf.

disant que lorsque A contient B ou est contenu en B, comme C contient D ou est contenu en D, le rap-

port A. B est égal au rapp. C. D. Or nous avons des termes pour expliquer toutes les façons dont les quantités Commensurables peuvent se contenir l'une l'autre. De sorte que supposé que A & B soient Commensurables, & C & D Commensurables encore; On peut expliquer ce que c'est que A contenir B, ou estre contenu en B comme C contient D, ou est contenu en D, en disant que si A est par ex. une dixième partie, ou

DE GEOMETRIE L. II. 53

une centième de B, C est aussi une dixième ou une centième de D; si A est dix ou cent dixièmes de B, C est encore dix ou cent dixièmes de D &c. Et en un mot toutes les fois que nous concevons que nous pouvons donner un même nom & à l'Antecedant A par rapport à B, & à l'Antecedant C par rapport à D, nous concevons que A contient B ou est contenu en B, de la même manière que C contient D ou est contenu en D. Car nos paroles ne sont que les expressions de nos pensées. Enfin personne n'a jamais voulu qu'on prouvât que cent dixièmes de B sont à B, comme cent dixièmes de D sont à D; ni, ce qui est la même chose, que la dixième partie de B prise cent fois est à B, comme la dixième partie de D prise cent fois est à D. Car cette mémeté de nom, pour m'expliquer ainsi, n'est employée que pour exprimer la mémeté de Rapport. Et ce que je dis de la dixième partie de B & D, & du nombre de cent fois n'est mis icy que pour exemple, & on peut dire le même de quelques autres Aliquotes Pareilles que l'on voudra prendre en B & D, pourvu qu'on en joigne ensemble autant d'un côté que de l'autre. Conformément à cela voici mon Axiome.

VII.

SI ayant désigné dans deux quantités B & D des Aliquotes Pareilles quel-

conques r & s (de sorte que $100 r$ $10 r$
 r soit par ex. la dixiè- $A r B$
 me partie de B , s la dixième $C s D$
 partie de D) on prend châ- $100 s$ $10 s$
 cune de ces Aliquotes un
 même nombre de fois, cent fois châcune
 par ex. pour faire deux sommes A & C .
 Je dis que A sera à B comme C à D ;
 C'est-à-dire, cent dixièmes de B seront
 à B , comme cent dixièmes de D sont
 à D .

Cor. Si laissant B en sa place, je

$$\begin{array}{rcccl}
 100 r & & 10 r & & \\
 A & r & B & & \\
 A + C & r + s & B + D & & \\
 100 r + 100 s & & 10 r + 10 s & &
 \end{array}$$

mets $B + D$ au lieu de D , & qu'ayant
 désigné dans l'une & dans l'autre de ces
 quantités des Aliquotes Pareilles, com-
 sont r d'une part, & $r + s$ de l'autre, je
 prenne châcune de ces Aliquotes un mê-
 me nombre de fois, pour faire deux som-
 mes, à sçavoir, A , & $A + C$; il est évi-
 dent que je pourray assurer, suivant cer-
 te 7. max. tout de même qu'auparavât, que
 A est à B comme $A + C$ à $B + D$. De
 sorte qu'en toutes les hypotheses sembla-
 bles à ces deux-cy, & où il ne s'agira que
 d'Aliquotes Pareilles, on pourra dire non
 seulement que $A. B :: C. D$, mais enco-

DE GEOMETRIE L. II. 55

re que la somme des Antecedans $A + C$ est à la somme des Consequans $B + D$ comme quelqu'un des Antecedans A est au consequant B auquel il se rapporte.

Nous avons encore besoin du Lemme suivant.

LEMME.

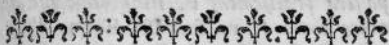
Soit $E. B :: F. D.$ soient désignées dans les deux consequans les Aliquotes Pareilles $r \& 100r$ 99 r s. Soit faite par la multipli- $A \quad 10r$ cation de la première r une $E \quad r \quad B$ somme qui Surpasse précisé- $- F \quad s \quad D$ ment E , & soit cette somme $C \quad 10s$ $A \propto 100r$. Je dis que si on 100 s 99 s prend autant de fois s, cette somme, que nous nommerons $C \propto 100s$, surpassera précisément F . Je dis 1. qu'elle surpassera F . Car $E. B :: F. D.$ par l'hyp. & $A. B :: C. D$ par la 7. max. & A est supposé plus grand qu' E . Donc C est aussi plus grand que F , par le second Coroll. mis après la 4. maxime. Je dis en 2. lieu que C surpassera Précisément F , c'est-à-dire, d'une fois s tout au plus (voyez la 9. def) autrement ôtant une fois s, le résidu de C , à sçavoir, 99 s seroit encore plus grand que F ; & ayant aussi rétranché une fois r de la somme A , 99 s seroit à D comme 99 r à B . (4.

max.) & par l'hyp. $F. D :: E B$; & 99 s
surpasse C , ainsi qu'on prétend; donc
par le 2. Cor. de la 4. max. 99 r sur-
passeroit encore E . Donc 100 r ne sur-
passoit pas précisément E , contre l'hy-
pothèse.

Quand je veux faire voir qu'il suit
quelque contradiction de ce qu'on veut sup-
poser qu' A par exemp. n'est pas à B com-
me C à D , je me contente, pour abréger,
de le faire voir en un seul cas, auquel A

$$\begin{array}{l} A. \quad B :: C. \quad D \\ 1. \text{ Cas } A + E. B :: C. \quad D \\ 2. \text{ Cas } A. \quad B :: C + E. D \end{array}$$

seroit plus petit qu'il ne faut, de sorte
qu'il seroit nécessaire d'y ajoûter E , afin
que $A + E$ fût à B comme C à D . Pour
le second cas auquel A seroit plus petit
qu'il ne faut, il n'y a qu'à faire l'addi-
tion du côté de C , sans toucher à A , &
sans mettre $A - E$, ce qui troubleroit un
peu l'uniformité de nos démonstrations; &
on procédera en suite comme dans le 1.
cas.



PROPOSITION I.

Si E est à B comme F à D, quelques quantités que ce puissent estre; je dis que la somme des Antecedans est à la somme des consequans, comme un des Antecedans est au consequant auquel il se rapporte. Ce qui s'exprime en cette manière.

Si E. B :: F. D.

Donc E. B :: E + F. B + D.

Construction. Car soit s'il est possible

E. B :: E + F + G. B + D.

Désignons maintenant des Aliquotes Pareilles r & s en B, & en D, en telle sorte que la plus grande de ces Aliquotes, soit plus petite que la moitié de G [voyez la 5. def.] faisons en suite par la multiplication de l'Aliquote r une somme A qui surpasse précisément E; ajoûtons enfin autant de fois s ensemble pour avoir une autre somme C, laquelle par le Lemme précédant sur-

100 r 10 s

A r B

C s D

100 s 10 s

passera précisément F. Puis donc que de cette sorte A ne surpasse E que d'une fois r, & C ne surpasse F que d'une fois s, tout au plus; (9. déf.) r & s ayant esté prises d'ailleurs chacune plus petite que la moitié de G, il s'ensuit que la somme $A + C$ est plus petite que la somme $E + F + G$, dequoy il faut bien se souvenir.

Démonst. Par le Coroll. de la 7. max.

$$A. B :: A + C. B + D;$$

Et on prétend icy que

$$E. B :: E + F + G. B + D;$$

Et par cette construction A est plus grand que E. Donc $A + C$ est aussi plus grand que $E + F + G$; par le 2. Corollaire de la 4. maxime. Cependant nous avons déjà fait voir que la somme $A + C$ est plus petite que la somme $E + F + G$. Ce qui se choque.

1. Corollaire. On voit au reste que quelque grand nombre de Proportionnelles qu'on pût proposer, il seroit toujours vray que la somme des Antecedans est à la somme des Consequans, côme un Antecedant à un Consequant. Car après l'avoir d'abord démontré dans les quatre premiers termes, on n'auroit qu'à prendre la somme des deux premiers Antecedans pour le 1. terme, la somme des deux premiers Consequans pour le 2. terme,

DE GEOMETRIE L. II. 59

la 5. Proportionnelle proposée feroit le troisieme terme , & la suivante le quatrieme. Et ainsi on procederoit à la démonstration de même qu'auparavant.

2. Corollaire. Si une somme $A + C$ est à une somme $B + D$, cōme une partie A de la 1. somme est à une partie B de

$$\text{Si } A. + C. B + D :: A. B$$

$$\text{Donc } C. D :: A. B$$

la 2. somme ; je dis que le résidu C de la 1. somme sera encore au résidu D de la 2. somme, comme la somme est à la somme, ou ce qui est le même, comme A est à B . Car si C n'est pas à D comme A est à B , soit s'il est possible

$$A. B :: C + E. D.$$

Donc par cette proposition.

$$A. B :: A + C + E. B + D.$$

Or est-il que par l'hypothese

$$A. B :: A + C. B + D.$$

Donc par la 1. maxime,

$$A + C. B + D :: A + C + E. B + D.$$

Et par la 2. max. $A + C \propto A + C + E$, la partie au tout. Ce qui est absurde.

3. Corollaire. Si à des quantités qui ont quelque rapport , on ajoûte des quantités qui ayent ce même rapport, ou bien si on les en rétranche ; je dis que les sommes , ou les résidus des sommes ,

auront encore ce même rapport.

Car cela ne veut dire autre chose, si ce n'est, que si $A. B :: C. D$; On pourra conclure, donc $A + C. B + D :: A. B$. Et c'est ce que cette proposition démontre: ou bien, que si $A + C. B + D :: A. B$, on pourra conclure, Donc $A. B :: C. D$. Et c'est ce qu'on a fait voir dans le Corollaire précédant.

4. Corollaire. Soient r & s Aliquotes Pareilles quelconques de A & B , je dis que $A. B :: r. s$. Car par la définition des Aliquotes Pareilles r est autant de fois en A que s en B . Et par la 2. max. la première r est à la première s comme la seconde r à la seconde s , & ainsi de suite. Donc la somme de tous les Antecedans, à sçavoir, A , est à la somme de tous les Consequans, c'est à dire, à D , comme un Antecedant à un Consequant, c'est à dire, comme r à s .

On a donc démontré généralement que des quantités quelconques A & B sont toujours entre elles comme leurs Aliquotes Pareilles quelconques. Ce qu'on n'a pas, ce semble, eu raison de supposer sans quelque preuve, cōme l'on a fait dās de Nouveaux Elemens qui ont esté mis en lumière, & où on a prétendu démontrer les Proportions.

5. Cor.

DE GEOMETRIE L. II. 61

5. Corollaire. De là on tire cette autre
consequence tres - importante , à sça-
voir , si les Aliquotes Pareilles de
deux quantités A & B,
sont encore Aliquotes
Pareilles de C & D, on
pourra estre assuré que
A. B :: C. D. Puis-
que chacun de ces rap-
ports étant égal au rapport des mêmes
Aliquotes Pareilles par le Coroll. préce-
dant , ils ne peuvent manquer d'être
égaux entre eux , par la 1. maxime.



PROPOSITION II.

SI E est à F comme C à D, je dis
que faisant un E'change Alter-
natif des termes , c'est-à-dire , com-
parant E avec C d'une part , & F
avec D de l'autre, on trouvera enco-
re en ce sens égali-

té de rapport , ce Si E.F::C.D
qui s'exprime ainsi Dōc E.C::F.D

Nous supposons qu'E, F, C, D sont d'une

E

même genre de quantités : car si E, F étoient des Lignes par ex. & C, D des Surfaces, l'Echange ne feroit aucun sens raisonnable.

Nous supposons aussi que l'un des Antecedans E est plus grand que l'autre C. Car s'ils estoient égaux, F & D seroient aussi égaux par la 2. max. & par la même maxime E seroit à C comme F à D. Et c'est ce que l'on prétend. Mais si les Antecedans étant inégaux, & E étant à F comme C à D, on ne veut pas accorder que $E.C :: F.D$; soit donc s'il est possible.

$$E + G . C :: F . D.$$

Construction. Désignons maintenant en C une Aliquote r plus petite que G, & faisons une somme A qui surpasse précisément E. Ayant en sui-

te désigné en D l'Aliquo-	100 r	100
te Pareille s, prenons-la	A	r C
autant de fois que nous	B	s D
avons pris r, & nommons	100 s	100

cette somme B. Ainsi par

le 5. Corollaire de la précédente $A.B :: C.D$. Et puisque par l'hypothese $C.D :: E.F$, Donc par la 1. max. $A.B :: E.F$. Et puisque A est plus grand que E par la construction B sera aussi plus grand que F. par le 1. Corollaire de la 4. max. Ce qu'il faut bien retenir.

DE GEOMETRIE L. II. 63

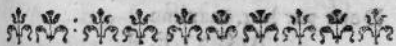
Démonstration. Par la 7. maxime

$$A. C :: B. D$$

Et on prétend que

$$E + G. C :: F. D.$$

Et par la construction A (ne surpassant E tout au plus que d'une fois r , c'est-à-dire , d'une quantité plus petite que G. déf. 9.) A, dis-je, est plus petit que E + G. Donc par le 2. Cor. de la 4. déf. B est plus petit que F. Et nous avons fait voir auparavant qu'il estoit plus grand. Ce qui se choque.



PROPOSITION III.

SOient deux rangées de quantités
A. B. E. d'une part, & C. D. F.
de l'autre. Je dis que si $A. B :: C. D$,
& si de plus $B. E :: D. F$; on peut
conclure par Egalité, ex æquo,
comme parlent les Géomètres, que la première
quantité d'une rangée est
à la dernière quantité de
la même rangée, comme la première
quantité de l'autre rangée est à la

dernière quantité de la même rangée. C'est à dire, que.

$$A. E :: C. F.$$

Démonstration. Par l'hypothese

$$A. B :: C. D.$$

Donc par la précédante

$$A. C :: B. D.$$

On montrera de même par l'hypothese, & par la précédante, que

$$B. D :: E. F.$$

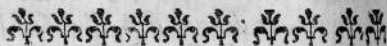
Donc par la 1. maxime

$$A. C :: E. F.$$

Donc deréchef par la précéd.

$$A. E :: C. F.$$

Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IV.

Si on a deux rangées d'Antecedans, à sçavoir, A. E. G. d'une part, les rapportant à un même Consequant B, & de l'autre C. F. H. les rapportant encore à un même

DE GEOMETRIE L. II. 65

Consequant D en cette manière
 $A.B::C.D$, Et $E.B::F.D$, &
 enfin $G.B::H.D$. je dis
 que la somme des Antece- G
 dans de la première rangée E
 est au Consequant commun A B
 B; comme la somme des An-
 tecedans de la seconde ran- C D
 gée à leur commun Conse- F
 quant D. C'est à dire. H

$$A + E + G.B::C + F + H.D.$$

Démonstration. Par l'hypothese

$$A.B::C.D.$$

Donc par la 2. prop.

$$A.C::B.D.$$

On démontrera de la même manière
 que $E.F::B.D$, & enfin que $G.H::B.D$.
 Tous ces rapports A. C, E. F, G. H sont
 donc égaux par la 1. maxime, puisque
 chacun est égal à B. D. Donc par la 1.
 prop. la somme des Ant. $A + E + G$ est
 à la somme des Conseq. $C + F + H$,
 comme A à C, ou ce qui est le même,
 comme B à D. & deréchef par la 2. prop.
 $A + E + G.B::C + F + H.D$. Ce
 qu'il falloit démontrer.

1. Coroll. Si A est à B comme C à D, je
 dis que A plus B sera à B, comme C plus

D à D. Pour le concevoir clairement on n'a qu'à répliquer B du costé d'A, & D du costé de C, comme on voit qu'on a fait dans la construction de ce Corollaire important. Puis donc que $A. B :: C. D$, & que B ne peut manquer d'estre à B comme D à D par la 4. déf. il s'ensuit par la précédante que $A + B. B :: C + D. D$. Ce qu'il falloit démontrer. Les Géometres nomment cette conclusion *Composition du Rapport*.

2. Corollaire. Si une somme $A + E$ est à B, comme une autre somme $C + F$

$$A + E. B :: C + F. D$$

$$A. B :: C. D$$

à D, & que l'on sçache d'ailleurs qu'une partie A de la 1. somme est à B, comme une partie C de la 2. somme est à D, je dis que le résidu E de la 1. somme est encore à B, comme le résidu F de la 2. somme est à D.

Car si E n'est pas à B, comme F à D: soit s'il est possible $G. B :: F. D$ ayant pris G plus grand ou plus petit que E. Alors on prouveroit par cette 4.

$$\text{prop. que } A + G. B :: C + F. D.$$

$$\text{Or est-il que par l'hypothese } A. B :: C. D$$

$$A + E. B :: C + F. D. \text{ Donc par la 1. max. } A + G. B :: A + E. B.$$

$$\text{Donc par la 2. max. } A + G \propto F$$

DE GEOMETRIE L. II. 67

A + E; & rétranchant A de part & d'autre resteroit $G \propto E$ contre l'hypothese. Ce qui se choque.

3. Corollaire. Si $A. B :: C. D$: Donc

Si $A. B :: C. D$

Donc $A - B :: C - D$

A moins B est à B, comme C moins D est à D.

Les Géometres nomment cette conclusion Division du Rapport, & il semble qu'il ne la font pas dépendre non plus que la Composition du Rapport, ni la Conversion du Rapport, de leur véritable principe qui est sans doute cette 4. prop. Pour faire voir nettement que cecy n'en est qu'une suite, j'ay imaginé cette construction.

Construction. J'exprime A par $B + E$, & C par $D + F$, faisant
 que E soit l'excez d'A sur $A \propto B + E$
 B, & F l'excez de C sur D. $C \propto D + F$
 Ainsi il est évidant qu'E est $A - B \propto E$
 la même chose que $A - B$ $C - D \propto F$
 B, & F la même chose que
 $C - D$. De sorte que pour démontrer que
 si $A. B :: C. D$, $A - B$ sera à B, comme
 $C - D$ à D, il ne faut que faire voir que
 si la somme $B + E$ est à B, comme la
 somme $D + F$ à D [une partie B de la
 1. somme estant d'ailleurs à B, comme
 une partie D de la 2. somme est à D par
 la 4. déf.] le résidu E sera encore à B

comme le résidu F à D . Et c'est ce qui a esté démontré dans le Corollaire précédant.

4. Corollaire. Si $A. B :: C. D$. Donc

Si $A. B :: C. D$.

Donc $A.A - B :: C.C - D$

$A. A - B :: C. C - D$.

C'est une troisième conclusion à quoy les Géometres ont donné le nom de Conversion du Rapport. Pour la démontrer dans une plus grande universalité que ne font pour l'ordinaire les Commentateurs d'Euclide j'employe les mêmes Equations que dans le Corollaire précédant; après quoy je procede en cette sorte.

Par l'hypothese $B + E. B :: D + F. D$.

Donc par le Corollaire

précéd. $E. B :: F. D$. Et $A \propto B + E$

en Renversant $B.E :: D.F.$ $C \propto D + F$

Donc par le 1. Coroll. $A - B \propto E$

$B + E. E :: D + F. F.$ $C - D \propto F$

C'est à dire en reprenant les quantités de l'hypothese au lieu de leurs Equations, $A.A - B :: C.C - D$.
Ce qu'il falloit démontrer.

L E M M E.

Soit un Rapport $A + G. C$. Si on conçoit G divisé en deux parties r & s qui ayent le même rapport, & que l'on

DE GEOMETRIE L. II. 69

Soit r de l'Antecedant, & s du Consequent, il est certain par le 3. Cor. de la 1.

$$A + G. C$$

$$G \propto r + s$$

$$A + G \propto r \propto A + s$$

$$A + s. C - s \quad 5. \quad 2.$$

$$E. \quad F \quad 4 \quad 3.$$

prop. que les résidus $A + G - r$, ou ce qui est la même chose, $A + s$, & $C - s$ auront encore ce même rapport. Il est encore évident que si je prénois une quantité E plus petite que $A + s$, & une quantité F plus grande que $C - s$, le rapport $E. F$ seroit plus petit que le rapport $A + s. C - s$. Ainsi ce nombre 4 par ex. a moins de grandeur par rapport à 3 que 5 par rapport à 2. Cela est suffisamment démontré par les maximes 2. & 3.



PROPOSITION V.

Soit proposée une rangée de trois quantités quelconques A. B. C. Je dis que le rapport de la première à la dernière est composé du rapport de la première à la seconde & du

*rapport de la seconde à la troisième ,
Ce que j'exprime ainsi $A.C \propto A.B + B.C$.*

$$A. B. C.$$

$$A. C. \propto A. B + B. C.$$

Construction. Si on le nie, soit le rapport $A + D. C$ composé de ces deux rapports, s'il est possible; c'est à dire, soit $A + D. C. \propto A. B + B. C$. Pren-

$$A + D. C. \propto A. B + B. C$$

$$A + G, C. \propto A + s, C - s$$

$$E \quad B \quad F$$

$$A \quad B \quad C$$

$$E \quad \propto \quad 100 m$$

$$B \quad \propto \quad 50 m$$

$$F \quad \propto \quad 10 m$$

nous G comme auparavant pour avoir un nouveau rapport $A + s, C - s$ égal au rapport $A + G. C$. par le Lemme précéd. Ayant enfin désigné en B une Aliquote m plus petite que s , faisons-en une somme E qui *surpasse précisément* A , & une autre somme F qui *soit surpassée précisément* par C : & remarquez bien que de cette sorte E estant plus grand qu' A , & F plus petit que C , le rapport $E. B$ est plus grand que le rapport $A. B$, & le rapport $B. F$ plus grand que le rapport $B. C$. (3. max.) Rémarquez bien encore que

DE GEOMETRIE. L. II. 71

m'ayant esté pris plus petit que s , E est plus petit que $A + s$, & F au contraire plus grand que $C - s$ suivant la 9. déf. Donc par la 2. partie du Lemme précéd. le rapport $E. F$ est plus petit que le rapport $A + s. C - s$, c'est à dire, que le rapport $A + G. C$ égal au précédant, & à plus forte raison plus petit que le rapport $A + D. C$, qui est plus grand que les deux que je viens de dire. Maintenant la démonstration est fort facile.

Démonstration. Par la construction les quantités E, B, F sont commensurables ayant m pour mesure commune. Donc par la 7. déf. le rapport $E. F$ est composé des rapports $E. B, B. F$ plus grands, comme nous avons fait remarquer, que les rapports $A. B, B. C$, desquels on prétend que le rapport $A + D. C$ est composé. Donc le rapport $E. F$ est plus grand que le rapport $A + D. C$ (5. max.) Cependant nous venons de faire voir le contraire dans la construction. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

1. Coroll. Si on nous avoit proposé plus de trois quantités, on passeroit à la 4. D. en prenant A pour le 1. terme, C pour le 2., & D pour le 3., laissant B ; & on feroit voir comme au- $A B C D$ paravant que le rapport $A.$

Donc $A. C + C. D$: & parce qu'on a

déjà démontré que le rapport $A.C$ en comprend deux, à sçavoir, $A.B$ & $B.C$, il seroit vray de dire que $A.D \propto A.B + B.C + C.D$. Et ainsi de suite on reduiroit toujours les démonstrations à trois termes, prenant la 1. la pénultième, & la dernière des quantités proposées, & laissant les moyennes.

2. Coroll. Une rangée de quantités en tel nombre que l'on voudra ABA estant proposée dans ABA laquelle la première & la dernière quantité soient égales, & un rapport $C.D$ estant aussi proposé; je dis que si on peut démontrer que ce rapport est composé des deux rapports $A.B$, & $B.A$ on pourra conclure que C est égal à D . Car par cette 5, prop. $A.A \propto A.B + B.A$. Et par l'hypothese $C.D \propto A.B + B.A$. Donc $A.A \propto C.D$ (5. max.) Donc comme A est égal à A , C est égal à D . Ce qu'il falloit démontrer. *Cecy sera de quelque usage dans le Livre suivant.*

FIN DU LIV. II.

LIV. III



LIVRE III.

DES FIGURES PLANES

RECTILIGNES,

ET

DES SOLIDES PLANS.



I dans le dessein de traiter exactement la matière des Proportions nous n'avons pu estre aussi clairs & aussi précis que ceux qui se contentent de proposer simplement ce que nous avons taché de démontrer dans le Livre précédant : on ose bien se flâter en revanche d'avoir abrégé considérablement, & peut-estre un peu éclairci le sujet de celui-ci. On y traite des Figures Rectilignes, & des Solides Plans tout à la fois, & quel-

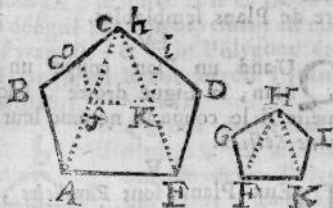
que vaste que soit cette matière, on a trouvé le moyen de renfermer tout en moins de 20. propositions. Je sçay que ces sujets se traittent pour l'ordinaire séparément, mais on verra qu'il s'en faut bien que l'ordre contraire, que nous avons suivi, n'y apporte de la confusion. On verra ainsi beaucoup mieux, si je ne me trompe, la suite naturelle avec laquelle la connoissance des Solides dépend de la connoissance des Plans, & comment on passe des uns aux autres. On verra de quel usage est pour cela la Méthode des Indivisibles, & on en verra quelques usages, que l'on ne trouve pas dans l'Authheur de cette Méthode; comme, entre autres, pour le regard des Pyramides, où Euclide employe des constructions si embarrassantes, & où Cavalier n'a pas voulu éprouver ses Indivisibles, quoy qu'il ne semble pas que ce soit pour avoir jugé la chose trop aisée, puis qu'il s'arreste à des choses qui le sont incomparablement davantage.



DEFINITIONS.

I.

LES Figures Rectilignes *Semblables* sont celles qui ont & tous leurs angles égaux, ceux de l'une à ceux de l'autre, & les costés qui comprennent les angles qui se répondent, Proportionnels. Ces deux Figures sont semblables



si l'angle A est égal à l'angle F, l'angle B à l'angle G & ainsi de suite; & si de plus comme E A est à A B, ainsi est K F à F G; & comme A B à B C, ainsi F G à G H, & ainsi de suite. Il est vi-

ble suivant cette définition que tous *Quarrés* sont figures semblables.

II.

UN *Corps*, ou un *Solide* est ce qui est étendu en longueur, en largeur, & en profondeur, quand on le considère selon toutes ces trois dimensions. Quand la Surface en est composée de Surfaces planes on le nomme un *Solide Plan*.

Je représenteray dans mes Figures les Solides par des Plans, & les Plans par des Lignes, comme on fait dans la platte peinture; parce que cette manière soulage les yeux & l'imagination que tant de traits embarrassent.

III.

LEs Solides *Semblables* sont ceux qui sont compris entre pareil nombre de Plans semblables.

IV.

QUand un Plan coupe un autre Plan, la Ligne droite, selon laquelle il le coupe, se nomme leur *Commune Section*.

V.

DEux Plans sont *Paralleles*, lors qu'en quelque sens qu'ils soient coupez par quelque autre Plan, les communes sections sont paralleles. Je dis, en quelque sens qu'ils soient coupez; car, par exemple, si on coupoit par un Plan

DE GEOMETRIE L. III. 77

Vertical les murailles qui font coin dans une chambre, les communes sections, en ce sens-là, seroient bien paralleles; mais si on coupoit aussi ces murailles par un plan Horizontal, les communes sections se rencontreroient au coin de la chambre.

VI.

SI ayant décrit sur un plan un Polygone $A B C$ vous prenez un point D hors de ce plan, d'où ayant étendu une droite indéfinie $D B$ vers le plan; vous supposez qu'elle soit mûe tout au tour du Polygone, jusques à ce qu'elle revienne au point B , d'où elle avoit commencé de se mouvoir, le solide $A B C D$ qu'elle aura désigné par ce mouvement est nommé *Pyramide*: & si le Polygone étoit un Triangle on le nommeroit *Pyramide Triangulaire*.

VII.



SI une droite indéfinie $b B$ est mûe autour de deux Polygones égaux, semblables, & Paralleles $A B C$, $a b c$, le solide qu'elle désignera est appelé *Prisme*, & si les Polygones étoient des Triangles

VIII.

ON appelle *Parallelepipède* un solide compris entre six Parallelogrammes, dont les deux opposés sont toujours égaux, & paralleles. Si c'étoient six Quarrés, on le nommeroit un *Cube*.

IX.

LEs Figures comprises entre les mêmes paralleles sont d'une égale hauteur; ainsi que les solides compris entre les mêmes Plans paralleles.



PRINCIPE.

Quelques anciens Géometres ont défini la Superficie ou Surface en disant que c'est le *Vestige d'une Ligne qui se meut en travers*. Suivant cette pensée soit un Parallelogramme $ACac$. Et considérons dans la Ligne ac une sorte de mouvement, que nous nommerons *Mouvement de Parallelisme*, par lequel elle glisseroit sur le plan du Parallelogramme, avec une vitesse uniforme &

DE GEOMETRIE L. III. 79

égale dans tous les points , depuis $a c$ jusques en $A C$, ayant toujours une de ses extrémités dans la Ligne $a A$, &



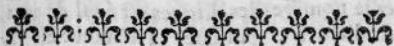
l'autre dans la Ligne $c C$. Il est clair qu'elle parcoureroit ainsi , & mesureroit par ses différentes applications

toute cette Figure ; de sorte que la somme de tous les espaces , que cette Ligne auroit successivement occupés , ne seroit pas différente du Parallelogramme. Si donc on conçoit entre $a c$ & $A C$ un nombre indéfini de lignes qui leur soient parallèles , & qu'on les prenne pour les espaces qu'elles désignent , on pourra dire que la Figure est égale à la somme de ses Lignes , en ce sens ; comme on dit que le tout est égal à la somme des parties qui le composent.

Et si $A C a c$ nous représente un solide Parallelepipedé , & $a c$ un Parallelogramme ; nous y pouvons concevoir un mouvement de Parallelisme , qui s'entend suffisamment par ce que nous venons de dire , & par lequel ce Plan tombant de $a c$ en $A C$ s'appliquera sur toutes les parties du Parallelepipedé , & le mesurera par ses différentes applications. De sorte que représentant les espaces parcourus , par un

nombre indéfini de Plans Paralleles à *a c* ou *A C*, on pourra dire en ce sens que le solide est égal à la somme de ses Plans : comme un volume de Livre n'est pas autre chose, que la somme de ses feüillers.

C'est le fondement de la Méthode des Indivisibles, sur quoy il y auroit bien des réflexions à faire, & ces deux-cy entre les autres. La 1. que quoy que la Ligne ne soit qu'une longueur, & le Plan une largeur, l'une & l'autre incapable par consequant de mesurer l'espace en tout autre sens; le mouvement toutefois y supplée, & rend la Ligne capable de mesurer une largeur, & le Plan de mesurer une profondeur. La 2. qu'il n'y a que ce mouvement, tel que nous l'avons représenté, qui soit propre à cet effet, par ce qu'il est le seul qui ne se retourne & ne se réplique point sur luy même; d'où vient la maxime que la Méthode des Indivisibles n'est jamais sûre que lors que les Indivisibles gardent un même Parallelisme. Mais ce que j'ay dit suffit pour les usages que nous en devons faire, & sur lesquels on ne nous conteste rien.



PROPOSITION I.

Les Parallelogrammes quelconques Ab , Cd ayant même hauteur, c'est à dire, étant compris entre les mêmes paralleles AD , ad , sont entre eux comme leurs bases AB , CD .

Démonstration. Entre les Paralleles AD , ad tirez encore un nombre indéfini de Lignes paralleles qui couperont necessairement les deux Parallelogram-



mes, & chaque Ligne ab sera égale à AB , ainsi que chaque Ligne cd à CD . Donc comme AB est à CD , ainsi cha-

que $a b$ est à chaque $c d$ [2. déf. 1. 2.]
 & le nombre des Lignes est égal de part
 & d'autre , puisque la hauteur est la
 même dans les deux Figures. Donc la
 somme des Antecedans, c'est dire, le Pa-
 rallelogramme $A b$, est à la somme des
 Consequans , c'est à dire, au Parallelo-
 gramme $C d$, comme un des Antece-
 dans , par exemple, la base $A B$, à un des
 Consequans, par exemple, à la base $C D$.
 [1. prop. 1. 2.] c'est à dire, que si les ba-
 ses sont égales, les Parallelogrammes sont
 égaux, si une base est double de l'autre, le
 Parallelogramme sera double du Parallelo-
 gramme , &c. Ce qu'il falloit démon-
 trer.

Corollaire. Les Triangles $A a B$,
 $C d D$, qui ont même hauteur, sont en-
 tre eux, comme leurs bases , puis qu'ils
 sont la moitié de deux Parallelogram-
 mes , qui ont même hauteur que ces
 Triangles [prop. 6 l. 1.]

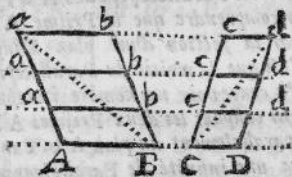
On a suffisamment démontré dans la derniè-
 re max. du l. 2. que comme les quantités
 sont ensemble , ainsi sont leurs moitiés,
 leurs tiers, &c.



PROPOSITION II.

LES Parallelepipèdes quelconques $A b$, $C d$ ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases $A B$, $C D$, qui représentent icy des Parallelogrammes.

Démonstration. Car ayant assis les bases de ces Parallelepipèdes sur un même plan $A B C D$, & les ayant coupez par un nombre indéfini de plans parallèles à celui-cy, il est clair que les par-



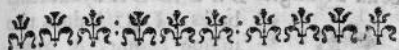
ties de ces plans comprises dans l'un & l'autre solide, seront des Parallelogrammes, puis qu'ils sont enfermés entre qua-

tre Lignes, dont les deux opposées sont Paralleles [10. déf. l. 1. & 5. déf. l. 3.] & tous les Paralelogr. AB , ab sont égaux par la précéd. ayant & une même hauteur, & leurs bases égales : comme il est aisé de comprendre, quoy que l'on ne l'ait pas représenté dans la Figure. Tous les CD , cd de même sont égaux, & en même nombre que les AB , ab . Donc la somme de ceux-cy, c'est à dire, le Parallelepiped Ab , est à la somme de ceux-là, c'est à dire, au Parallelepiped Cd , comme un Paralelogr. AB à un Paralelogr. CD . Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire. Les Prismes Triangulaires bâtis sur AaB , DdC , ayant même hauteur, sont entre eux, comme leurs bases, qui sont des Parallelogrâmes AB , CD . Car ces Prismes sont la moitié des deux Parallelepipedes Ab , Cd .

Pour comprendre que le Prisme AaB , fait par la section d'un plan Diagonal aB , n'est que la moitié du Parallelepiped. on n'a qu'à concevoir un nombre indéfini de plans qui coupent les deux Prismes ABa , Bba parallelement au plan Ab . Car ainsi on aura une infinité de Parallotogrammes Ab , qui seront tous coupez en deux Triangles égaux par le plan Diagonal [6. prop. l. 1.] Or la somme des Paralelogr.
faite

fait le Parallelep. Et les deux sommes des Triangles font les deux Prismes.



PROPOSITION III.

SI dans un Triangle quelconque
 ABC , *on tire une Ligne* DE
Parallele à quelqu'un des costez,
comme à AC ; *les deux autres cô-*
tez en sont coupez Proportionnel-
lement, c'est à dire, que BD *est à*
 DA *comme* BE *à* EC . *Et si les*
deux costez d'un Triangle sont cou-
pez Proportionnellement par une
Ligne DE , *elle sera Parallelle au*
troisième costé AC

Construction. Tirez les Lignes DC ,
 EA , & remarquez deux choses. 1. Que
 les deux Triangles EAD , DCE ayant
 une même base DE , & une même hau-
 teur, puis qu'ils sont compris entre mê-
 mes Paralleles, sont égaux [1. prop.
 1. 3.] & qu'ainsi le rapport du Triangle
 BDE au Triangle DAE est égal au

H

rapport du même Triangle BDE au Triangle EDC . [2. max, l. 2.] 2. Que les deux Triangles BED , DEA ayant leurs



bases BD , DA dans une même Ligne, & allant aboutir à un même point E , sont de même hauteur, parce que si par le point E on imagine une Parallele à AC , ces Triangles seroient compris entre ces deux Lignes; Donc ces

Triangles sont entre eux comme leurs bases BD , DA [1. prop. l. 3.] Pour la même raison les Triangles BDE , EDC sont entre eux comme leurs bases BE , EC .

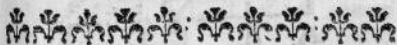
Démonstr. 1. Le rapport des Lignes BD , DA est égal au rapport des Triangles BED , DEA ; c'est à dire, au rapport des Triangles BDE , EDC ; c'est à dire, au rapport des Lignes BE , EC . Ce qu'il falloit premièrement démontrer.

2. Soit BD à DA , comme BE à EC , & si on prétend que DE n'est pas parallele à AC , supposons que D e le soit. Donc B e sera à e C , comme BD à DA , c'est à dire, comme BE à EC . Et puisque l'Antecedant B e est plus petit que l'Antecedant BE , le consequant

DE GEOMETRIE L. III. 87

e C sera aussi plus petit que le consequant E C [1. Cor. 4. max. 1. 2.] Ce qui est absurde. Que si le point e se trouvoit entre E & C, alors l'Antecedant B e estant plus grand que l'Antecedant B E, le Consequant e C seroit plus grand que le Consequant E C. Ce qui seroit pareillement absurde.

Puisque B D. D A :: B E. E C. Donc en renversant A D. D B : C E. E B. Donc faisant la Composition du rapport, A B. D B :: C B. E B. Cette consequence est démontrée dans le 2. Livre [prop. 4. Cor. 1.] & nous en avons besoin dans la prop. suivante.

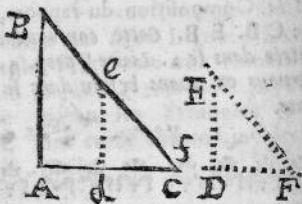


PROPOSITION IV.

LES Triangles Equiangles
A B C, D E F sont aussi semblables.

Démonstration. Soit l'angle A égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F. Car c'est ce qui fait que ces Triangles sont *Equiangles*. Faites la superposition par les angles égaux.

F, C en sorte que le point E tombe en e,
 & le point D en d ; les Triangles D E F,
 d e f seront égaux en toutes choses [2.
 Cor. prop. 1. l. 1.] & l'angle e d f sera égal
 à l'angle E D F, c'est à dire, à l'angle
 B A C. d e est donc parallele à A B
 [pr. 4. liv. 1.] Donc par la précédante
 B C est à e f, c'est à dire, à E F, comme



A C à d f, c'est à dire, à D F : & en
 faisant un Echange, B C est à C A,
 comme E F à F D. Vous prouverez par
 le même raisonnement qu'A B est à
 B C, comme D E à E F en ajustant les
 Triangles par les angles B, E ; & que
 B A est à A C comme E D à D F, en
 les ajustant par les angles A, D. Ces
 Triangles sont donc Semblables par la
 première définition de ce Livre. Ce
 qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION V.

LES Triangles ABC , DEF ,
 qui ont les costez, qui se ré-
 pondent, proportionnels, sont
 Equiangles, & par consequant
 semblables.

Nous supposons que CA est à AB , com-
 me FD à DE ; & AB à BC comme DE
 à EF . Enfin BC à CA comme
 EF à FD .

Démonstration. Coupez df égale à
 DF , & tirez de parallele à AB , les
 Triangles ABC , def sont équiangles
 [4. p. liv. 1.] & consequemment sem-
 blables par la précédante. Donc fd est
 à de comme CA à AB , c'est à dire,
 comme FD à DE ; & les antecédans df ,
 DF sont supposés égaux, les conse-
 quâs de , DE le sont d'oc aussi. On prou-
 vera de même que ef est égal à EF .
 Donc le Triangle DEF est égal en tout
 au Triangle def [2. Cor. 1. prop. 1. 1.] & ce-
 luy-cy étant Equiangle à ABC , DEF

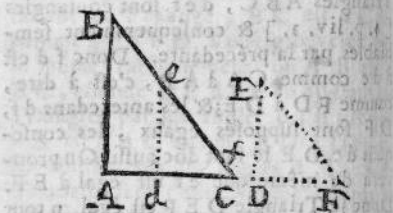
le sera de même. Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION VI.

Les Triangles qui ont un angle égal à un angle, comme C à F , & les costés au tour de cét angle proportionnels, sont Equiangles, & par consequant semblables.

Démonstration. Coupez df égale à DF , & tirez de parallele à AB : les Triangles $d e f$, $A B C$ sont Equiangles. De plus $d f$ est à $f e$ comme



AC à CB , c'est à dire, comme DF

DE GEOMETRIE L. III. 91

à FE ; & fd est égale à FD : fe est donc égale à FE ; & les angles compris f, F sont égaux par l'hypothese. Donc le Triangle DEF est égal en tout au Triangle def , d'où s'ensuit ce qu'il falloit démontrer.

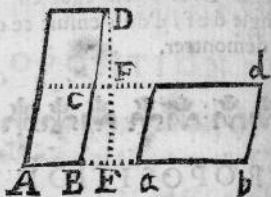


PROPOSITION VII.

Les Parallelogrammes quelconques AD , ad sont entre eux en Raison Composée des Raisons de leurs hauteurs DE , FE , & de leurs bases AB , ab .

Construction. Soient mises les deux Figures en un même plan, & leurs bases sur une même Ligne, à laquelle dC soit Parallele, & prolongée jusques à ce qu'elle coupe le Parallelogr. AD . Soient enfin déterminées les hauteurs de chaque Figure dans la Perpendiculaire DE . Rémarquez que nous avons maintenant trois Parallelogrammes AD , AC , ad , & que par cet artifice le second se trouve en même hauteur avec chacun des deux

autres, suivant la déf. 9. de sorte que les deux premiers sont en Raison des



Lignes DB , CB ; & les deux derniers en Raison des Lignes AB , ab [1. prop. 1.3.] Rémarquez aussi que la Raison des Lignes DB , CB est la même que celle des lignes DE , FE [3. prop. 1.3.]

Démonstration. Par la 5. du l. 2. la Raison du premier Parallelogr. au troisième, est composée des Raisons du premier au second, & du second au troisième, c'est à dire, de la Raison de DB à CB , ou ce qui est le même, de celle des hauteurs DE , FE , & de celle des bases AB , ab . Ce qu'il falloit démontrer

Coroll. Dites le même des Triangles, quels qu'ils soient, puis qu'ils sont la moitié des Parallelogr. qui sont en la Raison que nous venons de dire.



PROPOSITION VIII.

Les Parallelepipèdes quelconques
 A D, a d sont entre eux en Rai-
 son de leurs bases A B, a b plans,
 & de leurs hauteurs D E, F E.

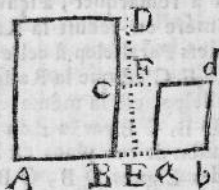
Démonstration. La forme en est la même que celle de la précédente. On n'a qu'à substituer des Parallelepipèdes aux Parallelogr. & des plans aux Lignes ; se souvenant que les Parallelepip. qui ont même hauteur sont entre eux cōme leurs bases [2.pr.1.3.] Il y a seulement cecy de particulier à remarquer, à sçavoir, de quelle manière on réduit la Raison des deux premiers Parallelepip. à celle des hauteurs D E, F E. C'est que la Raison de ces deux Parallelepip. est la même que celle des Plans D B, C B par la 2. du 1.3. & par la 1. la Raison de ces plans est le même que celle des Lignes D B, C B. Et par la 3. la Raison de ces Lignes est la même que celle des hauteurs D E, F E. Donc. &c. Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IX.

Les Parallelogrammes Semblables AD , ad sont entre eux en Raison doublée des costés Homologues, ou qui se répondent, comme par exemple, des costés AB , ab .

Ayant fait la construction à peu près comme dans les précédantes, il faut faire réflexion que les angles B , b étant supposés égaux, les Lignes DB , db sont Paralleles [4. prop. 1. 1.] ainsi Bd est un Parallelogr. & CB est égale à db



[6. p. 1. 1.] D'ailleurs on suppose que $AB. BD :: ab. bd$. Donc, en faisant un Echange, le rapport $AB. ab$ est égal

DE GEOMETRIE L. III. 95

au rapport D B. d b, c'est à dire, au rapport D B, C B, c'est à dire, au rapport des hauteurs D E. F E. [3. prop. l. 3.] Il faut donc bien retenir que le rapport des bases est le même que celui des hauteurs.

Démonstration. Le Rapport de nos deux Parallelogr. est composé du rapport des bases, & de celui des hauteurs. [7. prop. l. 3.] & ce dernier est le même que celui des bases, comme nous avons remarqué. Leur Raison est donc *Doublée de la Raison des bases* : car c'est ainsi qu'on l'entend. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire. Les Triangles semblables sont en Raison doublée des costés Homologues, puis qu'ils sont la moitié des Parallelogrammes Semblables.



PROPOSITION X.

Les Parallelepipedes semblables L A D, a d sont en Raison Triplée des costés Homologues, c'est à dire, des Lignes qui servent de base, ou de hauteur aux plans qui se

*répondent , par ex. des Lignes A B ,
a b.*

Démonstration. Par la 8. proposition leur Raison est composée de la Raison des bases A B , a b plans , [c'est à dire , par la préc. de la Raison doublée de la Ligne A B à la Ligne a b , puisque ces deux plans sont supposés semblables] & de la raison des hauteurs D E , F E , qui est encore la même , que celle d'A B à a b comme nous avons encore fait voir dans la précédante. D'où s'ensuit ce que nous avions à démontrer.

Corollaire. Les Prismes Triangulaires semblables sont en Raison triplée de leurs costés Homologues.



PROPOSITION XI.

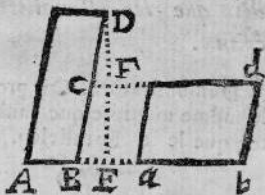
S*I deux Parallelogrammes A D ,
a d estant proposés , on trouve que
comme la hauteur D E du premier
est à la hauteur F E du second, ainsi
Réciproquement la base b a du se-
cond est à la base B A du premier ,*
je dis

*je dis que les deux Parallelogrammes
sont égaux.*

Construction. Prennez la base du 1.
Parallelogr. deux fois , & placez entre-
deux la base du second.

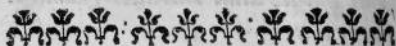
A B a b A B

Démonstration. Le Rapport du Pa-
rallelogr. A D au Parallelogr. a d est
composé du rapport des bases A B , a b
[7. prop. 1. 3.] & de celui des hauteurs
D E , F E , c'est à dire , de a b à A B par



l'hyp. Donc le rapport du 1. Parallelogr.
au second est le même que celui d'A B
à A B dans la disposition que nous avons
donnée à ces deux Lignes cy-dessus. Donc
ils sont égaux [2. Coroll. de la 5. prop. du
liv. 2.] Ce qu'il falloit démontrer.

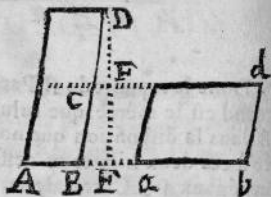
Corollaire. Les Triangles , où les
hauteurs sont Réciproques des bases, sont
égaux.



PROPOSITION XII.

SI deux Parallelepipèdes A D, a d
 estant proposés, on trouve que
 comme la hauteur D E du premier est
 à la hauteur F E du second, ainsi
 Réciproquement la base a b du se-
 cond est la base A B du premier; je
 dis que les Parallelepipèdes sont
 égaux.

Démonstration. On prouvera tout de
 la même manière que dans la précédan-
 te, que le 1. Parallelepip. est au second

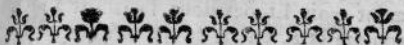


comme A B à A B qui représentent icy
 des plans, consultant toutefois la 8. prop.

DE GEOMETRIE. L. III. 99

du 1. 3. au lieu de la 7. Donc , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Coroll. Dites le même des Prismes Triangulaires dans lesquels les bases se trouveroient Réciproques des hauteurs.



PROPOSITION XIII.

SOient 4. Lignes proportionnelles
 Quelconques AB, ab, FE, DE .
 Le Parallelogramme décrit sur la
 première AB comme base, ayant la
 dernière DE pour hauteur, sera égal
 au Parallelogramme décrit sur la
 seconde ab comme base ayant pour
 hauteur la troisième FE .

Démonstration. Car par la constru-
 ction comme la base du premier de ces

$AB \quad ab \quad FE \quad DE$

Parallelogrammes est à la base du se-
 cond , ainsi Réciproquement la hauteur
 du second sera à la hauteur du premier.
 Donc ils seront égaux [II. prop. liv. 3.]

1 2



Ce qu'il falloit démontrer.

1. Corollaire. Dites le même des Triangles que l'on pourroit décrire en la même manière sur ces quatre Proportionnelles.

2. Corollaire. Si on prennoit seulement trois Lignes dont la 1. fût à la 2. comme la 2. à la 3. ce qui se nomme par les Géometres *Proportion Continuë*, on voit clairement que le Rectangle décrit sur les deux extrêmes seroit égal au Quarré de la moyenne ; les bases & les hauteurs y étant Réciproques.

3. Corollaire. Si un Parallelogramme A B étoit à un Parallelogramme a b comme une Ligne F E à une Ligne D E ; le Parallelepipedé bâti sur le premier des Parallelogrammes comme base, ayant la dernière des Lignes pour hauteur, seroit égal au Parallelepipedé bâti sur le second Parallelogramme comme base, ayant la première Ligne pour hauteur [12. prop. 1. 3.] Dites à proportion la même chose des Prismes Triangulaires.

4. Corollaire. Si on avoit trois Lignes *Continûment* Proportionnelles, le Cube de la moyenne seroit égal au Parallelepipedé *Droit*, [c'est à dire compris entre six Parallelogrammes Rectangles] dont la base seroit faite des deux extrêmes, & qui auroit la moyenne propor-

DE GEOMETRIE L. III. 101
tionnelle pour hauteur. Car par le second Corollaire le Rectangle qui serviroit de base au Parallelepiped. seroit égal au Quarré qui serviroit de base au Cube: & le Parallelepiped & le Cube ayant d'ailleurs une même hauteur, ils seroient entre eux comme leurs bases [2. prop. l. 3.] c'est à dire, égaux.

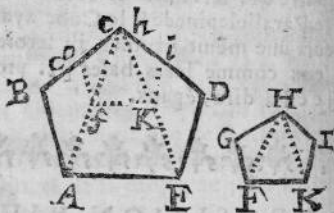


PROPOSITION XIV.

Les Polygones Semblables $ABLCDE$, $FGHIK$ peuvent être divisez en pareil nombre de Triangles Semblables, prennant ceux qui se répondent ABC , FGH , &c.

Démonstration. Soient tirées des Lignes CA , CE dans le plus grand Polygone. Et soit prise Cg , ou hg égale à HG : & soient enfin tirées les Lignes gf , fk , ki paralleles à BA , AE , ED . Par la 1. déf. & la 4. prop. de ce livre, le petit Polygone $fg h i k$ est divisé en pareil nombre de Triangles semblables aux Triangles du Polygo-

ne A B C D E , & luy est entièrement Semblable ; il est donc aussi semblable



au Polygone F G H I K. Donc g h est à h i comme G H à H I ; & les antecédans g h , G H ont esté pris égaux , les conséquens h i , H I son donc aussi égaux. Ainsi on montrera i k égale à I K , k f égale à K F , &c. Et les angles i , I étant égaux , les Tri. h i k , H I K le sont encore ; & ainsi des autres [1. C. p. 1 l. 1.] Donc , &c. Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XV.

Tous Polygones Semblables ;
comme les précédans , sont en

DE GEOMETRIE L. III. 103

Raison doublée des côtez Homologues, comme A E, F K.

Constr. Divisez les Polyg. en pareil nombre de Triangles Semblables, & les appliquez l'un à l'autre, comme la figure représente. Rémarquez 1. que chaque grand Triangle est à celui qu'il enferme en Raison doublée des côtez Homologues, tels que sont les côtez A E, f k dans les Triangles A C E, f h k. [Cor. pr. 9.1.3.] 2. Que puisque A E est à E D comme f k à k i par la 1. déf. Donc en faisant un Echange A E, f k :: E D, k i. Donc la Raison doublée d'A E à f k est la même que la Raison doublée de E D à k i: & on montreroit de la même manière qu'elle est encore égale à la Raison doublée d'A B à f g.

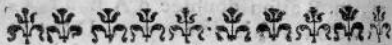
Démonstr. Chacun des grands Triangles est à celui qu'il enferme en Raison doublée des côtez qui se trouvent Paralleles après la superposition, c'est à dire, en Raison doublée d'A E à f k, ainsi qu'on a fait remarquer. Donc la somme des grands Triangles, c'est à dire, le grand Polyg. est à la somme des petits Triangles, c'est à dire, au petit Polygone, en Raison doublée d'A E à f k ou F K. Ce qu'il falloit démontrer.

1. Corollaire. Tous Quarrés étant figures Semblables [1. déf. 1. 3.] ils sont en raison doublée de leurs côtés. Et ainsi on peut dire généralement que quelque sorte de Polygones semblables que l'on veuille bâtir sur deux Lignes comme AE , EK , ils seront toujours entre eux comme les Quarrés des mêmes Lignes: & en un mot comme quelques autres Polygones semblables que ce soient, dont elles feroient deux côtés Homologues.

2. Corollaire. Si on a trois Lignes Continûment proportionnelles, tous les Polygones bâtis sur la première seront aux Polygones semblables bâtis sur la seconde, comme la première Ligne AE est à la troisième LM , c'est à dire,

$A \quad E \quad F \quad K \quad L \quad M$
 ————— ————— —————

en la raison d' AE à EK doublée, ou prise deux fois.



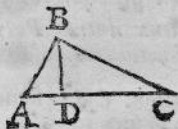
PROPOSITION XVI.

TOut Triangle Rectangle ABC est divisé par la Perpendiculai-

DE GEOMETRIE L. III. 10

re, qui tombe de l'angle droit sur la base, en deux Triangles semblables à celui qu'ils divisent, & semblables entre eux.

Démonstration. Car comparant premièrement les Triangles ABC , DBC , l'angle C est commun, les angles ABC , DBC égaux par la construction : Le 3. angle de l'un est donc encore égal au 3.



angle de l'autre [prop. 7. liv. 1.] Comparant en suite les Triangles ABC , ADB , l'angle A est commun, & l'angle ABC égal à l'angle ADB , & par conséquent le 3. est égal au 3. Ces trois Triangles sont donc équiangles, & par cette raison semblables entre eux [prop. 4. l. 3.] Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XVII.

Quelque sorte de Polygones semblables que l'on bâtitse sur les trois côtés d'un Triangle Rectangle, toujours le Polygone qui sera bâti sur le côté qui soutient l'angle droit sera précisément égal à la somme des deux autres Polygones.

Fig. préc.

Démonstration. Car la somme de ces deux Polygones sera toujours au Polygone bâti sur AC , comme la somme des deux Triangles semblables ABD , BCD qui ont pour côtés Homologues AB , BC , est au Triangle semblable bâti sur le 3. côté AC , à sçavoir au Triangle ABC [1. Cor. pr. 15. l. 3.] Or les deux Triangles ABD , BCD pris ensemble sont égaux au Triangle ABC . Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

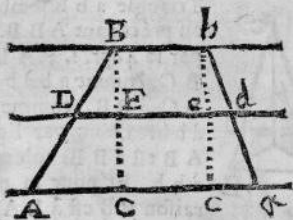
Corollaire. Tous Quarrés étant figures semblables, il s'ensuit, qu'en tout Triangle Rectangle le Quarré du

côté qui soutient l'angle droit est égal à la somme des Quarrés des deux autres côtés.



LEMME I.

SI deux plans paralleles Aa , Bb sont joints par deux Lignes droites quelconques AB , ab ; & qu'on imagine un troisième plan Dd parallele aux deux premiers; je dis que les deux Lignes en sont coupées proportionnellement, Car



on n'a qu'à imaginer les perpendiculaires BC , bc , & joindre les points AC , ac . Après quoy il est visible que AD est à DB comme CE à EB , c'est à dire, comme ce à cb , c'est à dire, comme a à d

à d b [3. prop. 1. 3.] Et cela arrivera soit que les Triangles A B C , a b c se trouvent en un même plan , ou en des plans différens ; cela ne changeant rien dans l'égalité des perpendiculaires & de leurs segmens. Donc , &c. Ce qu'il falloit faire comprendre.



LEMME II.

SI une Pyramide Triangulaire A C B est coupée par un plan Parallele à la base A B B , la commune section sera un



Triangle a b b semblable au précédant A B B. Car par la 4. pr. 1. 3. A B est à B C , comme a b à b C ; & B C à B B , comme b C à b b. Donc par Égalité A B est à B B , comme a b à b b. Et pour la même raison B B est à B A com-

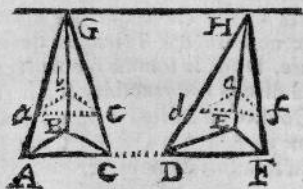
me b b à b a. [prop. 3. l. 2.] Donc les Triangles A B E , a b b sont semblables [5. p. 1. 3.] Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XVIII.

Les Pyramides Triangulaires $LAGC$, DHF comprises entre deux plans paralleles AF , GH , c'est à dire , ayant une même hauteur , sont entre elles , comme les Triangles qui leur servent de bases, ABC , DEF .

Construction. Concevez les Pyramides coupées par un nombre indéfini de plans paralleles aux deux premiers: quoy-que pour ne point embarrasser la figure ,

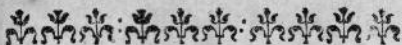


nous n'en ayons représenté qu'un seul ;

K

& remarquez 1. Que les rapports $A C$, $a c$, $D F$, $d f$ sont égaux : puisque le premier est égal à celui de $C G$ à $c G$, & le second à celui de $D H$ à $d H$ [3. pr. 1. 3.] & que par le 1. Lemme, ces deux derniers, à sçavoir, $C G$. $c G$, & $D H$. $d H$ sont égaux. Remarquez en second lieu que par le 2. Lem. tous les Triangles faits dans la 1. Pyramide, sont semblables à celui de la base $A B C$, & tous ceux qui sont faits dans la seconde, semblables à celui de la base $D E F$.

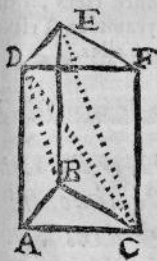
Démonstration. Les Triangles $A B C$, $a b c$ sont en raison doublée des côtez $A C$, $a c$ [Cor. de la 9. pr. 1. 3.] c'est à dire, des Lignes $D F$, $d f$, comme nous avons fait remarquer; c'est à dire, en même raison que les Triangles $D E F$, $d e f$. Donc en faisant un Echange le Tri. $A B C$ est au Tri. $D E F$, comme le Tri. $a b c$ au Tri. $d e f$; & on feroit voir la même chose quelque grand que fût le nombre des Triangles de part & d'autre. Donc la somme des Antecedans, c'est à dire, la 1. Pyramide, est à la somme des Cons. c'est à dire, à la 2. Pyramide, comme un Ant. $A B C$ à son Cons. $D E F$. Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION XIX.

L *E Prisme Triangulaire quelconque* $ABCDEF$ *est triple de la Pyramide* $ABCD$ *bâtie sur la même base* ABC *& entre les mêmes plans paralleles* ABC, DEF .

Démonstration. Soient tirées les Diagonales BD, DC, CE dans les trois Parallelogrammes du Prisme. Mainte-



nant les deux Pyramides $ABDC, EDBC$ ayant pour bases des Triangles égaux ABD, EDB . [6. p. l. 1.] & aboutissant à un même point C , sont égales, par la précédâte. Et la Pyramide $EDBC$ est égale à la Pyramide $FECD$: parce que

si nous les considérons comme assises sur les Triangles égaux CBE, EFC côme bases, nous trouverôs qu'elles ont encore une même hauteur, puis qu'elles vont aboutir à un même point. Ce Prisme

est donc divisé en trois Pyramides égales, dont la Pyramide $ABDC$, ou $ABCD$, qui a même base, & même hauteur, que le Prisme, en est une. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Cette proposition n'a rien de difficile que la Construction de la Figure. Il faut faire un Prisme Triangulaire avec de la cire ramollie, ou avec du carton; & y faire en suite les incisions qui sont marquées par les Diagonales que nous avons fait tirer.

Corollaire. Tout ce que nous avons démontré jusques icy touchant les Prismes Triangulaires comparés entre eux aura lieu à l'égard de leurs tiers, c'est à dire, à l'égard des Pyramides Triangulaires comparées entre elles.



COROLLAIRE UNIVERSEL

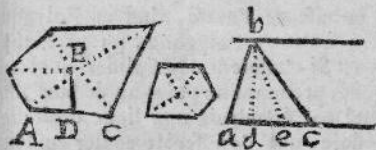
de tout ce qui a esté démontré dans ce Livre, & dans les deux précédans.

ON peut connoître le rapport de tout plan rectiligne à tout autre plan rectiligne, & de tout solide plan

DE GEOMETRIE L. III. 113

à tout autre solide plan, en reduisant leur rapport à celui d'une ligne donnée à une ligne donnée, après quoy les Géometres ne passent pas plus avant.

Soient 1. donnez deux plans rectilignes quelconques. Je tire deux paralleles à telle distance l'une de l'autre, qu'il me plaît; Et ayant pris un point B à discretion dans l'un des Polygones, que



je divise en plusieurs Triangles par des lignes tirées du point B à tous les angles du Polygone, je transporte en suite la base A C de l'un des Triangles sur une des paralleles, & je décris un Triangle sur cette base entre les mêmes paralleles: puis je prens la hauteur des deux Triangles par les perpendiculaires B D b d. Si elles sont égales, les Triangles sont égaux [C. pr. 1. l. 3.] si la perpendiculaire tirée entre les deux paralleles est plus grande d'un tiers par ex. Il faut retrancher réciproquement un tiers de la base de ce dernier Triangle

pour en faire un autre , qui soit précisément égal au premier [C. pr. II. 1.3.] Et transportant par la même méthode tous les Triangles du Polygone sur la ligne ac , on aura un Triangle total abc égal au Polygone. Après quoy on pourra pareillement reduire l'autre Polygone en un Triangle compris entre les mêmes paralleles que le premier : & alors comme le base de l'un se trouvera être à la base de l'autre , ainsi un Polygone fera à l'autre Polygone , [1. pr. 1. 3.]

2. Si c'estoient des Solides quelconques , prennant un point au dedans , duquel on étendrait une ligne droite indéfinie , que l'on feroit couler en suite au tour de tous les Triangles , auxquels on auroit auparavant divisé chacun des Polygones , qui enferment le solide ; nous l'aurions ainsi partagé en plusieurs Pyramides Triangulaires , que nous transporterions entre deux plans paralleles , diminuant ou augmentant les bases réciproquement à l'excez , ou au défaut des hauteurs. Après quoy nous reduirions par la première partie de ce Corollaire , nous reduirions , dis-je , en un seul Triangle tous les Triangles qui forment les bases des petites Pyramides , & en bâtissant une sur ce Triangle total , & entre les mêmes plans paralleles , nous

DE GEOMETRIE. L. III. 115

aurions une seule Pyramide Triangulaire égale à tout le solide. Et par la même méthode nous ferions une Pyramide égale à l'autre solide assise entre les mêmes plans paralleles que la première. Et ainsi elles seroient entre elles, comme les Triangles de leurs bases [18. pr. 1.3.] Et par la première partie de ce Corollaire nous pouvons réduire le rapport de ces deux Triangles au rapport d'une ligne à une ligne. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer: E c'est le précis de ce que les Géometres se proposent, en traitant des plans & des solides. Il ne nous reste qu'à dire quelque chose touchant les figures Rondes, & les corps Ronds dans le Livre suivant.

FIN DU LIVRE III.



LIVRE IV.

DES FIGURES RONDES

ET

DES CORPS RONDS.



Ne Ligne droite se peut mou-
voir en rond en une de ces
trois manières, ou sur un plan
autour de quelqu'un de ses
poins, & elle fait le Cercle;
ou bien autour d'un Cercle & à même
temps autour de quelqu'un de ses poins qui
n'est pas dans le plan du Cercle, & elle
fait le Cone; ou enfin autour de deux Cer-
cles égaux & paralleles, & elle Engendre
ainsi le Cylindre. Pour la Sphère personne
n'ignore de quelle manière elle est Engen-
drée du Cercle. Et comme il n'y a point
d'autre Figure, ni d'autre Solide, qui se

DE GEOMETRIE L. IV. 117

produise par un simple mouvement en rond, nous nous y bornerons dans nos Elemens, comme les Géometres l'ont toujours pratiqué; soit pour ne pas embarrasser l'esprit des Commencans par l'idée du mouvement Circulaire composé en une infinité de différencantes manières, d'où sont Engendrées des Courbes de tout autant d'especes; soit qu'ils ayent jugé que la connoissance n'en étoit pas d'un usage assez étendu pour pouvoir entrer dans les Elemens. C'est pour cette même raison que nous avons omis à dessein quelques proprieté du Cercle, qui servent plus pour résoudre quelques Problemes de l'Algebre, que pour déterminer immédiatement quoi que ce soit touchant la mesure des Plans, ou des Solides, qui est ce que je me suis proposé. Ces proprieté ont leur place naturelle dans les Elemens particuliers des Sections Coniques, dont le Cercle en est une, & la principale. On pourra les ajoûter dans une seconde édition, si celle-cy a quelque succès. Et cependant pour ce qui regarde plus proprement nôtre dessein, on trouvera icy quelque chose de plus, que ce que nous avons d'Euclide.



DEFINITIONS.

I.

SI un Demy-cercle tourne au tour de son Diametre , jusques à ce qu'il soit revenu au même lieu , d'où il avoit commencé à se mouvoir , il décrit par ce mouvement une Boule , ou une *Sphère*.

II.

SI une Ligne indéfinie est mûe au tour de deux Cercles égaux & parallèles , elle décrit par ce mouvement une colonne ronde , ou un *Cylindre*.

III.

SI ayant décrit un Cercle dans quelque plan , & pris à discretion un point hors du même plan , d'où l'on ait étendu une Ligne droite indéfinie vers ledit plan ; on suppose que cette Ligne, étant immobilement attachée au point que l'on aura voulu choisir , soit mûe au tour de la circonférence du Cercle ; elle décrira par ce mouvement une Pyramide ronde , ou un *Cone*.

IV.

Lors qu'une Ligne droite appuie sur la Circonférence d'un Cercle, sans le couper vers quelque côté qu'on la prolonge, elle est nommée *Touchante*, ou *Tangente au Cercle*. Et lors qu'un plan appuie sur la surface d'une Sphère sans entrer dedans, en quelque sens qu'il s'étende, c'est un plan *Touchant à la Sphère*.

V.

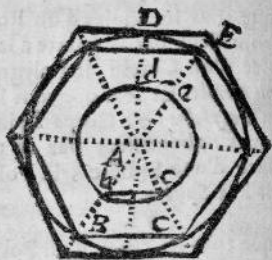
Lors que tous les angles d'un Polygone aboutissent par la pointe à la Circonférence d'un Cercle, le Polygone est *Inscrit au Cercle*. Et lors que tous les angles d'un Polyédre, ou Corps à plusieurs faces planes, aboutissent par la pointe à la surface d'une Sphère, le Polyédre est *Inscrit à la Sphère*.

VI.

Lors que tous les côtes d'un Polygone touchent un Cercle, & que toutes les faces d'un Polyédre touchent une Sphère, le Polygone est *Circonscrit au Cercle*, & le Polyédre est *Circonscrit à la Sphère*.

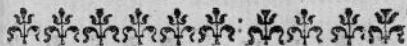
Châcun comprend sans peine que l'espace compris entre le Cercle & le Polygone soit *Inscrit*, soit *Circonscrit*, peut estre diminué de plus en plus à l'infini en augmentant seulement le nombre des côtes du Polygone. C'est pourquoi si l'on me pro-

pose un espace déterminé , quelque petit qu'il puisse être , je ne feray pas difficulté de supposer , que l'on peut désigner & dans le Cercle & autour du Cercle , au moins par la pensée [ce qui suffit pour nos démonstrations] que l'on peut , dis-je , y désigner quelque Polygone , qui laissera entre luy & la Circonférence du Cercle un espace encore plus petit que celui qu'on



aura déterminé. Je feray la même supposition pour le regard des Polyèdres Inscrits ou Circonscrits à la Sphère ; aussi bien que pour le regard des Prismes , que l'on peut Inscrive ou Circoncrire au Cylindre , en faisant mouvoir une Ligne droite au tour des Polygones Semblables que l'on aura Inscrits ou Circonscrits aux deux Cercles qui terminent le Cylindre , & enfin

Et enfin pour le regard des Pyramides que l'on peut imaginer Inscrites ou Circonscrites au Cone par le mouvement d'une Ligne droite autour du Polygone Inscrit, ou Circonscrit à la base du Cone, à la pointe duquel cette Ligne seroit arrestée.



PROPOSITION I.

L A Perpendiculaire, comme BC , élevée à l'extrémité d'un rayon de Cercle AB , Touche le Cercle. Et toute autre Ligne droite DE tirée par ce point, entre nécessairement dans le Cercle.

Démonstration. 1. Quelque point que l'on prenne dans la Ligne BC il se trouvera toujours hors du Cercle. Car le Tri. ABC étant Rectangle, le côté AC , qui soutient l'angle droit sera plus grand que le côté AB ; c'est à dire, que le point C sera hors du Cercle.



L

2. AB n'étant pas perpendiculaire à DE , on en pourra concevoir une tirée du point A , & le côté AB soutiendra toujours l'angle droit, & sera par conséquent plus grand que le côté AE : ainsi le point E se trouvera dans le cercle. Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION II.

Les perpendiculaires CD, cd , tirées du centre C sur les Cordes AB, ab , les coupent par le milieu: Et si les Cordes sont égales, les perpendiculaires le sont aussi.

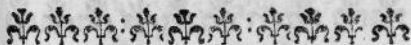
Démonstration. 1. Ayant achevé le Diamètre DC , si l'on imagine les deux



Demy-cercles répliés l'un sur l'autre selon ce Diamètre, ils s'ajusteront parfaitement, & les Lignes DA, DB s'ajusteront aussi; puisque, si le point B ne tombe précisément sur le point A , l'an-

gle CDB ne seroit pas égal à l'angle CDA contre l'hypothese. Dites le même de da, db .

2. Si on tire les Lignes CA, CB, ca, cb , les Triangles CAB, cab ont tous les costés égaux, comme ils se répondent; & par conséquent l'angle A est égal à l'angle a ; [Cor. 4. pr. 1. l. 1.] & nous venons de démontrer AD, ad égales, puis qu'elles sont la moitié de deux Cordes égales: comparant donc les Triangles CAD, cad ensemble, on trouve les côtez CA, AD égaux à ca, ad , & les angles compris A, a égaux: Donc [Cor. 2. pr. 1. l. 1.] les bases CD, cd , sont aussi égales. Ce qui restoit à démontrer.

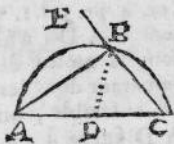


PROPOSITION III.

SI des deux extremittez du Diametre d'un Demy-cercle on tire deux Lignes qui se rencontrent en quelque point que ce soit de la Circonférence comme en B, l'angle
L 2

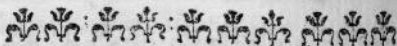
ABC , qui s'appelle l'angle dans
le Demy-cercle, est toujours droit.

Démonstr. Car ayant tiré DB & prolongé CB en E , on a d'abord deux Triangles Isosceles ABD , DBC , & par



consequant l'angle A égal à DBA , & C à DBC . Donc l'angle ABC est égal à la somme des deux A , C ; auxquels l'exterieur EBA étant aussi égal

[7. pr. l. 1.] il s'ensuit que les angles de suite ABE , ABC sont égaux, & chacun droit par consequant. Ce qu'il falloit démontrer.



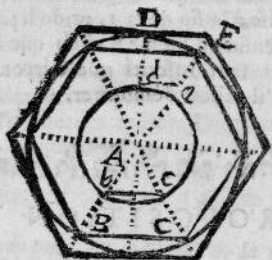
PROPOSITION IV.

Les Polygones semblables tant Inscrits, que Circonscrits à des Cercles différens $ABCD$, $abcd$ sont entre eux, comme les Quarrez des Diametres.

Constr. Il est aisé de concevoir ces

DE GEOMETRIE L. IV. 125

Cercles avec leurs figures, soit Inscrites, soit Circonscrites, mis l'un dans l'autre au tour du même centre **A**: d'où concevant des Lignes droites tirées aux angles des Polygones, & aux points où les Touchantes appuyét sur les Cercles; les Polyg. qui se répondent dans les deux Cercles seront divisés en pareil nombre de Triangles semblables [10. pr. l. 3.] & les Polygones Inscrits serót en Raison dou-



blée des côtez Homologues **B C**, **b c** par ex. & les Circonscrits en Raison doublée des côtez Homologues **D E**, **d e**. [11. pr. l. 3.] D'ailleurs les Triangles **A B C**, **A b c** étant semblables, ainsi que les Triangles **A D E**, **A d e**, il s'ensuit que le rapport des Cordes **B C**, **b c** est égal à celui des Rayons **A B**, **A b**, &

le rapport des Touchantes DE , $d e$ égal à celui des Rayons AD , $A d$. Donc on peut dire que les Polyg. Inscrits sont en Raison doublée des Rayons AB , Ab , & les Circonscrits pareillement en Raison doublée des Rayons AD , $A d$.

Démonstration. Les Quarrez des Diametres sont en Raison doublée des mêmes Diametres [1. Cor. 11. pr. 1.3.] c'est à dire, en Raison doublée des Rayons AB , Ab , ou AD , $A d$ qui sont la moitié des Diametres [suivant la remarque mise à la fin de la 1. pr. du 1.3.] C'est à dire enfin en même Raison que les Polygones tant Inscrits que Circonscrits. Ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION V.

Les Polyédres semblables tant Inscrits que Circonscrits à des Sphères différentes, sont entre eux, comme les Cubes des Diametres.

Fig. précéd.

Démonstration. Car dans la même figure prenant maintenant les Cercles

DE GEOMETRIE L. IV. 127

pour des Sphères, & les Polygones pour des Polyédres, il est aisé de les concevoir divisés en pareil nombre de Pyramides semblables par des Lignes tirées du Centre commun A à tous les angles de la base de chaque Polyédre; & toutes les Pyramides qui se répondront auront pour côtez homologues les Rayons de leurs Sphères. Donc prises deux à deux elles seront en Raison triplée des mêmes Rayons [II. pr. & Cor. 19. pr. 1. 3.] Donc leurs sommes, c'est à dire, les Polyédres auront cette même Raison [I. pr. 1. 2.] laquelle étant encore la même que celle des Cubes des Diametres des deux Sphères qui sont en Raison Triplée des mêmes Diametres [II. pr. 1. 3.] & par conséquent en Raison Triplée des Rayons comme les Polyédres; il s'ensuit, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Quoy que dans le Coroll. de la 19. prop. que nous venons de citer nous n'ayons parlé que des Pyramides Triangulaires Semblables, nous ne laissons pas d'en tirer une conclusion générale pour toute sorte de Pyramides Semblables, étant tres-aisé de concevoir qu'elles peuvent être divisées en pareil nombre de Pyram. Triangulaires, & tout le reste à proportion de ce que nous avons démontré pour le regard des

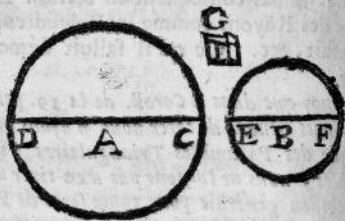
Polyg. Semblables dans la 10. prop. du Livre 3.



PROPOSITION VI.

Les Cercles A, B sont entre eux comme les Quarrez de leurs Diametres DC, EF. Et les Sphères sont entre elles comme les Cubes de leurs Diametres.

Constr. Car si on prétend que le Cer-



cle A est trop petit pour cela, ajoutez y l'espace G en sorte que le Cercle A+G soit au Cercle B comme les Quarrez

DE GEOMETRIE L. IV. 129

des Diametres. Concevez au tour du Cercle A un Polygone Circonscrit qui surpasse le Cercle d'un espace moindre que G, & soit par consequant plus petit que $A + G$. Concevez aussi un Polygone semblable Circonscrit au tour du Cercle B.

Démonstratiō. Par la 4. pr. de ce Livre le rapport des Polygones est le même que celui des Quarrez des Diametres; & on prétend que celui-cy est le même que le rapport d' $A + G$ à B. Donc [1. max. l. 2.] le Polygone Circonscrit au tour du Cercle A est au Polygone Circonscrit au tour du Cercle B cōme le Cercle $A + G$ à B. Et par ce que le 1. Antecedāt, je veus dire, le Polygone, est plus petit que le second Antecedant $A + G$, le 1. Consequant, à sçavoir, le Polyg. Circonscrit au Cercle B, sera aussi plus petit que le 2. Consequant, qui est le Cercle B, [1. Cor. max. 4. l. 2.] le tout que sa partie. Ce qui est absurde.

Si on prétendoit que le cercle A est plus grand qu'il ne faut, on n'auroit qu'à faire l'addition du costé du cercle B, & tout le reste seroit le même à proportion. Voyez ce qu'on a fait remarquer avant la 1. prop. du l. 2.

Pour les Sphères, après avoir ajoûté quelque chose comme G, à celle qu'on prétendroit être plus petite qu'il

ne faut, & avoir Circonscrit un Polyédre qui la surpassât d'une quantité moindre que G , & un autre Polyédre tout semblable autour de l'autre Sphère ; on prouveroit par la 5. pr. de ce Livre, & par le même raisonnement de la précédente qu'un Polyédre Circonscrit est plus petit que la Sphère à laquelle il est Circonscrit. Ce qui est absurde.

On démontre d'ordinaire avec un double embarras le premier cas de cette proposition par la Circonscription, & le second par l'Inscription, ce que nous avons évité : Et comme on n'employe que des Polygones Equilatéraux, cela augmente un peu la difficulté qu'il y a à concevoir que l'espace qui est entre le Polyg. & le Cercle puisse être fait plus petit que tout autre espace par cette voye particulière : C'est pourquoy nous n'avons borné nôtre preuve qu'à la seule similitude des Polygones quelques irréguliers qu'ils soient.



PROPOSITION VII.

SOIT un Polygone quelconque
 $SABCD$ divisé en Triangles. Je

dis que tout Triangle qui aura plus de hauteur que le Polygone sur une égale base, ou plus de base sous une égale hauteur, sera plus grand que le Polygone.

J'entens par la base du Polygone la somme de ses côtez, & par sa hauteur la plus grande perpendiculaire qui peut être tirée sur quelqu'un de ses côtez du point E, où se joignent les lignes qui divisent le Polygone en Triangles: comme est icy par ex. la perpendiculaire EF.

Constr. Soit a g a un Triangle Rectangle par ex. dont la base a b c d a



soit égale à la somme des côtez du Po-

lygone $ABCD A$, & la hauteur $g a$ plus grande que $E F$. Marquez au dessous de g la hauteur de chaque Triangle du Polygone depuis a dans la Ligne $a g$, & désignez dans la base du Triangle $a g a$ les bases de chaque Triangle du Polygone suivant l'ordre de leurs hauteurs, commençant par ceux qui ont la plus petite hauteur, de sorte que $a b$ soit égale à AB , $b c$ à BC , $c d$ à CD , & $d a$ à DA . Enfin des extremités de chaque base tirez deux lignes au point, où se termine la hauteur de chaque Triangle.

Démonstration. Par le Corollaire de la 1. prop. du l. 3. les Triangles $A E B$ & $a e b$ ayant même base & même hauteur sont égaux, ainsi que $B E C$, $b e c$; $C E D$, $c e d$; $D E A$, $d e a$. Donc la somme des Triangles $a b c$, $b e c$, $c e d$, $d e a$ est égale au Polygone. Or est-il que le Triangle $a g a$ est plus grand que cette somme, donc il est plus grand que le Polygone. Il est évident aussi que le Triangle $a e f$, qui a une plus grande base que le Polygone sous une même hauteur, est plus grand que la même somme, il est donc encore plus grand que le Polygone: qui sont les deux choses qu'il falloit démontrer.

1. Coroll. Parce que tous les côtes du Polygone Circonscrit à un Cercle,

Touchent

DE GEOMETRIE. L. IV. 133

Touche le Cercle [6. déf.] & que le Rayon du Cercle est toujours perpendiculaire à la Touchante [1. prop. 1. 4] il s'ensuit que les Triangles, que l'on peut faire dans le Polyg. Circonscrit en tirant des Lignes du centre à tous les angles, ont une même hauteur, qui est le Rayon

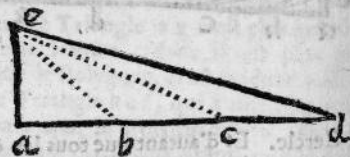
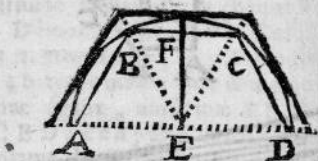


du Cercle. Et d'autant que tous les côtez d'un Polygone Inscrit sont dans le Cercle, il s'ensuit que quelques inégales que soient les perpendiculaires que l'on peut tirer du Centre sur les côtez du Polygone quand il n'est pas Régulier, elles sont pourtant toujours plus petites que

M

le Rayon; car si quelqu'une luy étoit égale, le côté du Polyg. seroit hors du Cercle [1. prop. 1. 4.] Ainsi la hauteur de tout Polygone Circonscrit est égale au Rayon, & celle de tout Polygone Inscrit plus petite. Ce qu'il faut bien remarquer pour la prop. 9. cy-après.

2. Coroll. Parce que quand les Cordes sont égales, les perpendiculaires ou hauteurs tirées du Centre sont égales [1.



prop. 1. 4.] il s'en suit que tout Polygone Régulier, c'est à dire, Equilateral $ABCD$, &c. Inscrit au Cercle, & dont la figure ne représente que la moitié, il s'en suit, dis-je, que ce Polyg. est égal au

DE GEOMETRIE L. IV. 135

Triangle Réctangle $a e d$, dont la base $a d$ est égale à celle du Polyg. & la hauteur $e a$ égale à la perpendiculaire $E F$ tirée du Centre sur un des côtez du Polygone. Car & le Polyg. & le Triangle $a e d$ peuvent être divisés en même nombre de Triangles égaux $A E B$, $a e b$; $B E C$, $b e c$, &c. puisque tous ces Triangles auront & les bases & les hauteurs égales. Et pour la même raison tout Polygone Régulier Circonscrit est égal au Triangle Réctangle, qui auroit une base égale, & le Rayon par hauteur.

Archimède a besoin de ce 2. Corollaire pour la 1. partie de nôtre prop. 9. cy-après, parce qu'il n'y employe que des Polyg. Réguliers. Mais comme cela rend un peu plus difficile à comprendre la Circonscription & l'Inscription, qui y sont nécessaires, nous avons jugé plus à propos de ne nous borner à aucune espece de Polygones en particulier.

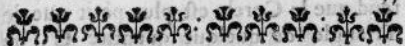


PROPOSITION VIII.

SOIT un Polyédre quelconque *SABCD* divisé en Pyramides Triangulaires. Je dis que toute Pyramide qui aura plus de hauteur que le Polyédre sur une égale base, ou plus de base sur une égale hauteur sera plus grande que le Polyédre.

Voyez la Fig. de la 7. prop.

Démonstration. Elle est la même que celle de la prop. précédante, en changeant seulement les termes de Polygone & de Triangle en ceux de Polyédre & de Pyramides Triangulaires, & la citation du Coroll. de la 1. prop. du livre 3. en celle de la 13. prop. du même livre. Il faut remarquer aussi que la hauteur de tout Polyédre Circonscrit à la Sphère est précisément égale au Rayon, & celle de tout Polyédre Inscrit plus petite.

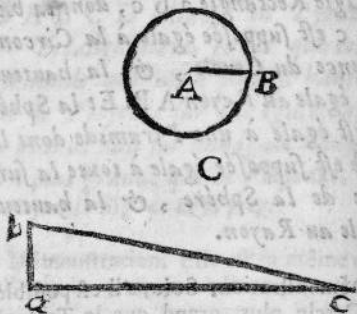


PROPOSITION IX.

LE Cercle A est égal au Triangle Rectangle abc , dont la base $a c$ est supposée égale à la Circonférence du Cercle, & la hauteur ab égale au Rayon AB . Et la Sphère est égale à une Pyramide dont la base est supposée égale à toute la surface de la Sphère, & la hauteur égale au Rayon.

Démonstration. Soit, s'il est possible, le Cercle plus grand que le Triangle d'une quantité quelconque C . On peut concevoir un Polygone Inscrit au Cercle, qui laissera entre luy & la circonférence du Cercle un espace encore plus petit que C , & qui par consequant sera plus grand que le Triangle abc . Cependant ce Triangle a plus de base [déf. 4. l. 1.] & plus de hauteur que le Polygone [Cor. prop. 7. l. 3.] Donc par la 7. Prop. il est plus grand que le Polygone. Ce qui se choque. Que si on pré-

tend que le Cercle est plus petit que le Triangle de quelque quantité C , on pourra concevoir un Polygone Circonscrit, qui ajoutera au Cercle un espace moindre que C , & qui par consequant



sera plus petit que le Triangle $a b c$. Cependant ce Triangle est plus petit que le Polygone, puis qu'il a moins de base sous une égale hauteur [7.pr. & 1.Cor.] Il faut donc dire que le Cercle n'est ni plus grand, ni plus petit que le Triangle. Ce qu'il falloit démontrer.

La seconde chose se prouve de la même manière par la précédente.



PROPOSITION X.

LE Cone ABC est précisément le tiers du Cylindre $ACED$, qui a même base & même hauteur que le Cone.

Démonstration. Soit x . s'il est possible, le Cone moindre que le tiers du Cylindre d'une quantité quelconque F ; on peut concevoir au tour du Cone une Pyramide Circonscrite qui le surpasse d'une quantité encore



moindre que F . Donc cette Pyram. sera encore plus petite que le tiers du Cylindre. Cependant elle est le tiers d'une quantité plus grande que le Cylind. sçavoir, du Pris. Circonscrit au Cylindre ayant même base que

la Pyramide. Car nous avons fait voir dans la prop. 19. du l. 2. que le Prisme contient trois fois la Pyramide qui a mê-

me base & même hauteur.

Quoique nous ne parlions là que des Pyramides Triangulaires, toutefois comme il est aisé de diviser les Prismes & les Pyramides à plus de trois faces en Prismes & en Pyramides Triangulaires, après avoir divisé le Polygone de la base commune en Triangles; nous ne faisons pas difficulté d'en tirer une conclusion universelle.

Soit en 2. lieu le Cone, si cela est possible, plus grand que le tiers du Cylindre d'une quantité quelconque F. On peut concevoir une Pyramide Inscrite au Cone, laquelle soit surpassée par le Cone d'un excez moindre que F, & soit par consequant plus grande que le tiers du Cylindre. Cependant elle n'est que le tiers d'une quantité moindre que le Cylindre, je veus dire, du Prisme que l'on peut concevoir Inscrit au Cylindre ayant même base que la Pyramide [prop. 19. 1. 3.] Ce qui se choque.





PROPOSITION XI.

Si on avoit un Triangle égal à un Cercle, & que sur le Triangle on bâtit un Prisme & une Pyramide, & sur le Cercle un Cylindre & un Cone : je dis que le Prisme seroit égal au Cylindre, & la Pyramide égale au Cone.

Démonstration. Car tout Prisme Inscrit au Cylindre seroit plus petit, & tout Prisme Circonscrit au tour du Cylindre seroit plus grand que le Prisme dont nous parlons ; puis qu'on a déjà démontré dans le 3. livre que les Prismes qui ont même hauteur sont entre eux, comme leurs bases : Or la base du Prisme Inscrit seroit un Polygone Inscrit au Cercle, par conséquent plus petit que le Cercle, & la base du Prisme Circonscrit seroit un Polygone Circonscrit, par conséquent aussi plus grand que le Cercle, auquel pourtant la base du Prisme dont nous parlons est supposée égale :

Donc pour éviter la contradiction que nous avons fait voir dans les propositions précédentes, il faut accorder que le Prisme est égal au Cylindre. Or par la précédente le Cone est le tiers du Cylindre, & par la dernière du 3. livre la Pyramide est le tiers du Prisme. Donc le Cone est encore égal à la Pyramide, puisque les tiers de choses égales sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

F I N.



