Resp. Pf. A 228-1

MÉMOIRE

SUR DES THÉORIES NOUVELLES DES NOMBRES OPPOSÉS, DES IMAGINAIRES ET DES ÉQUATIONS DU TROISIEME DEGRÉ,

PAR GRATIEN OLLÉAC, Professeur de Mathématiques au College national de Toulouse.

DÉDIÉ aux Autorités constituées & à la Société populaire de Toulouse, & imprimé le 3 du premier mois de l'an second de la République française une & indivisible.

A TOULOUSE,

Chez la veuve DESCLASSAN, Imprimeur du District & de la Municipalité.

ET SE TROUVE,

Chez la veuve LECLERC, près la place de la Liberté.

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE UNIVERSITAIRE

RÉPUBLICAINS,

TOUT citoyen doit à ſa patrie le ſacrifice de ſes lumieres, de ſes talens, de ſa fortune, de ſa vie : G. Olléac lui fait hommage du fruit de ſes découvertes ; il eſpere que vous daignerez l'accueillir.

Salut & fraternité,

G. OLLÉAC.

PROSPECTUS.

ÉCLAIRER, convaincre, perſuader la raiſon, tel eſt le but que l'homme devroit néceſſairement atteindre dans la recherche des vérités mathématiques, puiſqu'à chaque pas qu'il fait, il a toujours devant lui l'évidence qui l'éclaire & le dirige. Mais l'homme, jouet conſtant de ſon aveuglement, tombe toujours dans les extrêmes. Tantôt follement orgueilleux, dédaignant de marcher dans des routes connues, il s'évertue à s'en frayer de nouvelles ; tantôt, ſéduit par le préjugé, s'obſtinant à les ſuivre ſervillement, il ſe déchaîne ſans nul examen contre toute innovation qui en démontre la fauſſeté : de là, ces bruſques écarts ou la pérennité de ces paralogiſme ridicules, écueils inévitables du moment, qu'il ne prend plus l'évidence pour guide.

Eh ! où ſont ces écarts & ces paralogiſmes, me demandera ſans doute celui qui croit ſans penſer, qui adopte ſans réfléchir, celui, en un mot, qui jure aveuglément ſur la foi d'autrui ?

Dans la théorie des nombres oppoſés du calcul des imaginaires & des équations du troiſieme degré, lui répondrai-je, moi, qui ne jure ſur la foi de perſonne, & qui ne crois les choſes qu'on me propoſe de croire, qu'après les avoir murement examinées.

C'eſt d'après un tel examen de ces trois théories que j'ai cherché à démontrer, non-ſeulement qu'il exiſte un écart dans la premiere, & des paralogiſmes dans les deux autres, mais encore la maniere de les éviter ; pour cet effet, j'ai diviſé ce mémoire en trois ſections ; dans la premiere, j'ai pour but de réfuter la théorie actuelle des nombres oppoſés, comme incohérente dans ces principes, & d'en propoſer une nouvelle que je crois à l'abri de ce défaut ; dans la ſeconde, de faire voir que le procédé du calcul des imaginaires eſt obſcur & erroné, & d'en ſubſtituer un autre à ſa place auſſi clair que rigoureux ; dans la troiſieme enfin, de reculer les limites de la théorie des équations du troiſieme degré, comme incomplete, & tiſſue de fauſſes conſéquences ; & le point de vue ſous lequel je la conſidere, a, je penſe, non-ſeulement l'avantage de la rendre plus complete que toutes celles qu'on a données juſqu'ici, & d'avoir contribué à réſoudre, ſinon rigoureuſement, du moins d'avoir fait faire un pas vers la ſolution du fameux problême du *cas irréductible*, mais encore celui de préſenter une nouvelle méthode pour réſoudre une claſſe très-étendue d'équations du troiſieme degré, dans le *cas irréductible*, dont perſonne juſqu'ici n'avoit pu trouver la ſolution.

Tel eſt mon plan ; c'eſt aux connoiſſeurs de juger s'il eſt bien ou mal exécuté : je ſolicite, non leurs ſuffrages, mais leurs objections.

MÉMOIRE

SUR des théories nouvelles des nombres opposés, des imaginaires & des équations du troisieme degré.

SECTION PREMIERE.

De la théorie des nombres opposés.

CHAPITRE PREMIER.

Réfutation de la théorie actuelle des nombres opposés.

UNE des plus importantes notions, & sans contredit une des plus aisées de l'arithmétique, si elle avoit été bien présentée, est celle des nombres opposés; mais, me dira-t-on, il y a tant d'auteurs qui ont écrit sur cette matiere, que la notion qu'ils en ont donnée ne peut être que bien claire? Non, elle est au contraire fort obscure. Elle étoit donc bien obscure dans le principe, répliquera-t-on? Non, elle étoit au contraire fort claire, répondrai-je; & ce n'est qu'à force de

multiplier les commentaires que les commentateurs ſont parvenus à l'embrouiller.

On a dit : (c'eſt la définition) *deux nombres ſont d'eſpeces oppoſées ou ſimplement oppoſés, quand l'addition de l'un diminue l'autre, & que la ſouſtraction l'augmente.* Cette ſinguliere propriété qu'ont réellement ces ſortes de nombres dans ces deux opérations contraires, a été priſe pour l'attribut eſſentiel par lequel on a prétendu les définir ; or cette définition implique manifeſtement contradiction : en effet, d'un côté l'on dit que ces nombres ſont d'eſpeces oppoſées, ou hétérogenes, & de l'autre on ſuppoſe que des nombres hétérogenes peuvent être ajoutés & ſouſtraits ; on ſuppoſe donc qu'il eſt poſſible de convertir en une ſomme, & de concevoir une différence de grandeur entre des quantités hétérogenes ; ce qui eſt évidemment abſurde, puiſque la ſomme de deux quantités, n'eſt qu'une autre quantité réſultante de celles-là, comme un tout réſulte de ſes parties, & qu'une différence entre deux quantités, ſuppoſe une eſpece de ſuperpoſition ou de meſure l'une par l'autre : donc ſi ces nombres ſont hétérogenes, il eſt abſurde de dire qu'on puiſſe les ajouter & les ſouſtraire ; ou ſi on peut les ajouter & les ſouſtraire, il eſt abſurde de dire qu'ils ſoient hétérogenes. Cette définition réunit donc deux choſes contradictoires, ou ce qui revient au même, elle implique

contradiction : c'eſt donc ſans fondement, & contre des principes évidens, que la propriété ſiguliere qu'ont ces ſortes de nombres dans ces deux opérations, a été priſe pour l'attribut eſſentiel par lequel on a prétendu les définir, puiſque, d'après ces mêmes principes, ces deux opérations ne peuvent jamais s'effectuer ſur des nombres hétérogenes.

Telle eſt l'objection qu'on a faite contre la définition des nombres oppoſés, & à laquelle Wolf n'a répondu que par une *pétition de principe*; ſavoir, que l'addition *de ces ſortes de nombres n'eſt qu'une ſouſtraction, & réciproquement, & que l'eſpece d'hétérogénéité qui ſe trouve entr'eux, exige que ces opérations ſoient faites de cette maniere.* C'eſt-à-dire, ſelon ce célebre géometre, que ces nombres, quoique hétérogenes, ont néanmoins le privilege d'être ajoutés & ſouſtraits l'un de l'autre : n'eſt-ce pas là une étrange façon de raiſonner ? Donc ſi ces nombres là ſont hétérogenes, il eſt abſurde de tirer leur définition de ces deux opérations, puiſque hétérogénéité & addition, ou ſouſtraction, ſont deux choſes contradictoires.

D'ailleurs, pour que la définition d'une choſe ſoit exacte, il faut qu'elle ſoit priſe de quelqu'un ou de quelques-uns des attributs eſſentiels qui entrent dans ſa conſtitution, & non de la propriété qu'elle a de produire tel ou tel effet dans telle ou

telle circonſtance, ſans quoi ce n'eſt pas la définir, & ſa nature reſte inconnue.

L'idée de l'hétérogénéité des nombres oppoſés, n'a pu, ce me ſemble, être conçue que de ce qu'ils paroiſſent s'arranger à la définition d'Euclide, touchant les nombres hétérogenes, ou de ce qu'ils produiſent dans l'addition & dans la ſouſtraction des effets contraires aux autres nombres, ou bien enfin de ce que pour les déſigner, il a néceſſairement fallu employer des ſignes différens : or, ces trois raiſons ſont évidemment fauſſes & purement illuſoires ; la premiere, parce que ces nombres ſe rangent parfaitement bien dans la claſſe des homogenes ; la ſeconde, parce que ces effets contraires, bien loin de prouver leur hétérogénéité, prouvent au contraire leur homogénéité ; & la troiſieme, parce que ces ſignes ne ſont que des ſymboles, qui originairement & dans le ſens des inventeurs, ne déſignoient le ſigne + que l'addition, & le ſigne — la ſouſtraction, c'eſt-à-dire, un changement à faire ſur les quantités qui en ſeroient affectées ; & ſi, dans la ſuite, on en a étendu l'emploi, c'eſt pour marquer que les quantités ou les nombres qui en ſont les expreſſions, ont été enviſagés ſous des points de vue contraires, & non des eſpeces réellement différentes.

Mais dire ce que ces nombres ne ſont pas, n'eſt pas donner une idée fort claire de leur nature ; il faut dire ce qu'ils ſont, le voici.

CHAPITRE II.

Où j'expose une théorie nouvelle des nombres opposés, c'est-à-dire, une théorie dans laquelle j'allie l'homogénéité à l'opposition.

1. Pour faire voir, sans réplique, la compatibilité de l'homogénéité des nombres avec leur opposition, il suffiroit d'avoir démontré, comme je l'ai fait dans le chapitre précédent, que l'hétérogénéité y répugne; mais une démonstration à l'absurde ne doit être employée qu'au défaut d'une démonstration directe; elle ne sert qu'à fermer la bouche à la chicane, sans l'éclairer; qu'à convaincre l'obstination du sophiste, sans la persuader: mon but dans cette théorie est de faire l'un & l'autre; pour cet effet, je prendrai des exemples les plus simples & les plus faciles, dans lesquels il soit aisé de créer les nombres qui en font l'objet.

Or, 1°. si dans le cercle on considere deux rayons de telle maniere, que l'un soit à gauche & l'autre à droite de leur point commun, qui est le centre, le premier, si l'on veut, (car c'est arbitraire) sera dit quantité positive, & l'autre quantité négative; & les nombres qui en seront les expressions seront appelés, l'un positif & l'autre négatif, ou d'un nom commun nombres opposés; mais ces quantités étoient de même espece

avant d'avoir été envisagées sous ce point de vue, puisque chacune étoit un rayon ; donc elles doivent l'être après, puisque la maniere dont on envisage une chose, n'est qu'une opération purement mentale qui ne sauroit altérer sa nature ; donc les nombres qui seront les expressions de ces quantités, seront après cette opération de la même espece qu'ils étoient auparavant ; donc les nombres qui expriment la valeur de ces rayons, quoiqu'opposés, sont homogenes.

2°. Si l'on veut exprimer un bien de cent livres & une dette de cinquante, & qu'on veuille faire voir ou se souvenir que ces deux nombres affectent la fortune d'un homme d'une maniere opposée, ou qu'on a envisagé ces deux nombres sous deux points de vue contraires, il faut nécessairement leur donner des signes auxquels on puisse reconnoître cet attribut idéal, & l'on écrira + 100 l. — 50 l. : or ces nombres étoient homogenes avant cette opération, puisqu'ils exprimoient des livres ; ils expriment aussi des livres après : donc cette opération n'a pas changé leur espece ; ils sont donc tout aussi homogenes après cette opération, qu'ils l'étoient avant ; donc ces nombres, quoi qu'opposés, sont homogenes.

3°. Si l'on demande ce que signifient les nombres + 6 & — 4 par exemple ? Il est aisé de répondre que ce sont les parties du tout dix, envisagées sous deux points de vue contraires. Or

ces deux nombres ſont homogenes ; car avant que ces parties n'ont été enviſagées ſous des points de vue contraires, chacune exprimoit un nombre entier abſtrait ; elles étoient donc homogenes, & conſidérées avec leur ſigne ; elles ſont encore des nombres abſtraits, mais oppoſés, en vertu d'une qualité idéale qui ne peut troubler leur homogénéité ; donc les nombres + 6 & — 4, quoiqu'oppoſés, ſont homogenes.

2. D'après ces exemples, il eſt aiſé de voir que les nombres oppoſés ſe forment en prenant un tout qu'on décompoſe en deux parties, & en enviſageant celles-ci ſous deux points de vue contraires, relativement à un point fixe de décompoſition ; & que par conſéquent les nombres oppoſés qui ſont l'expreſſion de ces deux parties, ſont abſtraits ou concrets, ſuivant que le tout eſt lui-même abſtrait ou concret.

3. Maintenant je vais plus loin, & je dis que deux nombres ne peuvent être oppoſés qu'autant qu'ils ſont homogenes. En effet, pour que deux nombres ſoient oppoſés, il faut néceſſairement qu'ils puiſſent être conſidérés comme les deux parties d'un tout, leſquelles ont été enviſagées ſous deux points de vue contraires, relativement à un point fixe de décompoſition, ou ce qui revient au même, il faut que ces nombres ne different entr'eux que par la maniere dont ils ſont enviſagés l'un & l'autre par rapport à un point fixe,

laquelle maniere n'eſt, comme il a déjà été dit, qu'une qualité idéale dans laquelle ſeule l'oppoſition conſiſte ; or il eſt des nombres qui ne ſauroient être enviſagés ainſi, ou qui different entr'eux par d'autres qualités : tels ſont, par exemple, les nombres + 50 t. — 100 l. ; ces nombres different entr'eux par la qualité phyſique de livres & de toiſes ; ces deux nombres ne peuvent donc pas être conſidérés comme parties d'un tout ; ils ne ſont donc pas homogenes, & par conſéquent ils ne peuvent être oppoſés, comparés entr'eux : donc deux nombres ne peuvent être oppoſés qu'autant qu'ils ſont homogenes.

4. Par où l'on voit, 1°. que l'oppoſition mathématique conſiſte dans la maniere d'enviſager les parties d'une même quantité par rapport à un point fixe de décompoſition, & que par conſéquent elle ſuppoſe toujours l'homogénéité des parties oppoſées, & ne la trouble pas, ſans quoi il y auroit manifeſtement contradiction.

2°. Que l'oppoſition renferme toujours trois choſes dans ſon objet ; ſavoir, un tout décompoſé, deux parties compoſantes, enviſagées ſous deux points de vue contraires, & un point fixe de décompoſition.

3°. Que deux nombres oppoſés ne ſont autre choſe que les deux parties d'un même tout, enviſagées ſous deux points de vue contraires, relativement à un point fixe.

Afin de compléter l'intelligence de cette théorie, je vais l'appliquer à des exemples d'addition & de soustraction.

EXEMPLE PREMIER.

De l'addition des nombres opposés.

5. Je suppose qu'un corps quelconque A, soit frappé à l'extrémité d'un de ses diametres par une force comme 12, & en même-temps par une force comme 6 à l'autre extrémité du même diametre, la premiere, si l'on veut, car c'est arbitraire sera positive, & l'autre négative. Cela posé, il conste par expérience, que de ces deux forces réunies en une seule dans le corps A, la plus petite se réduit à zéro, & que la plus grande ne conserve que son excès sur l'autre; ou bien que de ces deux forces réunies en une seule, il ne reste que leur différence : or : c'est là une addition de deux nombres qui expriment deux forces opposées, puisque ces deux forces se réunissent dans un seul & même corps A; 2°. le résultat de cette addition est la différence des nombres qui expriment ces deux forces opposées, puisque le corps A, après l'expérience, a un mouvement égal à l'excès de ces deux forces : donc pour avoir le résultat de l'addition de ces deux forces opposées, il faut soustraire le nombre 6 qui exprime l'une de ces deux forces du nombre 12, qui exprime l'autre force opposée;

& la formule + 12 + (− 6) qui eſt la traduction exacte des conditions de la queſtion, doit prendre cette forme + 12 − 6 en vertu de l'oppoſition.

Mais ſi l'on avoit + 12 l., & − 4 t., & qu'on proposât de faire l'addition de ces deux nombres, la queſtion ſeroit abſurde, & l'opération impraticable, parce que ces nombres ſont hétérogenes.

COROLLAIRES.

6. Il ſuit de là, 1°. que dans la formule + 12 + (− 6) que fourniſſent les conditions de la queſtion, le ſecond ſigne indique qu'à la partie + 12, il faut ajouter la deuxieme partie 6, enviſagée ſous un point de vue contraire à celui ſous lequel on a enviſagé la premiere, c'eſt-à-dire, qu'il faut diminuer la premiere de toute la valeur de la ſeconde. Il faut donc écrire + 12 − 6.

7. 2°. Que dans les nombres oppoſés, quoique les conditions de la queſtion indiquent une addition, néanmoins le véritable but de cette opération eſt une ſouſtraction; voilà pourquoi ces nombres ſe diminuent dans l'addition, & que par conſéquent dans cette opération il faut écrire les nombres oppoſés les uns à la ſuite des autres, avec le ſigne qu'ils tiennent de l'oppoſition.

EXEMPLE

EXEMPLES II.

De la soustraction des nombres opposés.

8. D'après ce qui vient d'être dit touchant l'addition des nombres opposés, la soustraction de ces sortes de nombres ne peut avoir aucune difficulté : car soit, par exemple, les mêmes nombres + 12 & − 6 qui expriment des forces opposées, & dont on demande la différence. Je dis que les conditions de la question seront exactement exprimées par cette formule + 12 − (− 6); or le second signe de cette formule indique que de la partie + 12, il faut soustraire la partie 6 envisagée sous un point de vue contraire à celui sous lequel on a envisagé la premiere ; c'est-à-dire, que pour faire cette opération, il faut envisager la deuxieme sous le même point de vue que la premiere, ou bien qu'il faut augmenter celle-ci de toute la valeur de l'autre. La formule doit donc prendre cette forme + 12 + 6 = 18.

Dailleurs, soustraire le nombre − 6 qui exprime, ou peut exprimer une force du nombre + 12, qui exprime une force opposée, c'est décomposer celui-ci en deux nombres, qui expriment deux forces opposées, dont il est, ou peut être supposé la somme, & dont l'un est − 6 ; il faut donc que celui que l'on cherche soit + 18, puisque d'après l'addition, il n'y a qu'un nom-

bre, comme 18, qui ajouté à un autre nombre opposé — 6, puisse donner + 12. Mais si l'on proposoit de soustraire — 6 l. de + 12 s., par exemple la question seroit absurde, & l'opération impraticable, parce que ces deux nombres sont hétérogenes.

COROLLAIRES.

9. Il suit de là, 1°. que dans les nombres opposés, quoique les conditions de la question indiquent une soustraction, néanmoins le véritable but de cette opération est une addition.

10. 2°. Que la soustraction de ces sortes de nombres n'étant qu'une augmentation faite dans l'un d'autant d'unités qu'il s'en trouve dans l'autre, il faut écrire le nombre soustrait à la suite du nombre proposé, en changeant le signe — en + que le premier tient de l'opposition.

EXEMPLE III.

De la multiplication des nombres positifs & négatifs.

11. L'addition & la soustraction des nombres positifs & négatifs, n'ont présenté aucune difficulté, parce qu'elles sont fondées sur la maniere dont ces nombres sont envisagés; mais l'on sait qu'il n'en est pas de même des deux autres opérations de la multiplication & de la division, quoique ces deux dernieres opérations aient une ana-

logie si marquée avec les deux premieres. Cherchons donc quels sont les principes d'où l'on peut partir avec confiance pour donner à ces deux opérations toute la clarté dont elles peuvent être susceptibles, en commençant d'abord par la multiplication : or, on sait, d'après la définition de cette opération, 1°. que le multiplicande peut être tout ce qu'on voudra, abstrait ou concret, positif ou négatif, tandis que le multiplicateur ne peut avoir aucune de ces manieres d'être, c'est-à-dire, qu'il doit toujours être considéré isolé, dépouillé de toute qualité ou détermination, soit réelle, soit idéale, en sorte qu'il n'ait par sa qualité aucun rapport avec le multiplicande ; 2°. que le produit doit être de la même espece que le multiplicande.

Mais on peut (& l'on est en droit) me demander ce que signifie le signe qui est ou qui peut être en tête du multiplicateur, dans l'expression ($+ 5 \times - 4$,) par exemple ? Je réponds que ce signe ne désigne point que le multiplicateur a été envisagé sous un point de vue contraire à celui sous lequel on a envisagé le multiplicande, & que par conséquent cette expression ne désigne point (parce qu'elle ne peut sans absurdité) désigner une multiplication des nombres opposés ; mais elle désigne deux opérations à la fois ; savoir, 1°. que le multiplicande $+ 5$ doit être répété quatre fois ; 2°. que le résultat doit être soustrait des nombres qui précedent, ou qu'on peut sup-

poser précéder ; c'est-à-dire, que le signe — qui est en tête du multiplicateur, indique toujours la soustraction du résultat de la premiere opération ; & qu'ainsi cette expression peut prendre cette forme A — (+ 5 × 4,) la lettre A représentant le nombre qui peut précéder le résultat que l'on cherche, sans que cette forme puisse l'altérer ; or (6) + 5 × 4 = 20, qui soustrait de A, donne (8) A — 20.

COROLLAIRES.

12. Par où l'on voit, 1°. que si l'on a — 5 × + 4, le produit sera — 20, puisque cette expression peut prendre cette forme A + (— 5 × 4,) sans que le résultat soit altéré.

13. 2°. Que + 5 × + 4 = + 20. Car, l'expression pouvant prendre cette forme A + (+ 5 × 4) ; le premier signe indique l'addition du produit + 5 × 4 ; il doit donc être (6) + 20.

14. 3°. Que — 5 × — 4 = + 20 ; car, cette expression peut prendre cette forme A — (— 5 × 4) ; or — 5 × 4 = — 20, qui soustrait, ainsi que le premier signe l'indique, doit être (8) + 20.

REMARQUE.

15. On peut en vertu des principes de la division ordinaire, & par un raisonnement semblable à celui que je viens de faire sur la multiplica-

tion, expliquer avec la même facilité la division des nombres positifs & négatifs.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

16. Il s'ensuit de cette théorie, 1°. que l'hétérogénéité des nombres opposés est une absurdité ; 2°. que les nombres négatifs ou ceux qui sont précédés du signe $-$, existent tout aussi réellement que les nombres positifs ou ceux qui sont précédés du signe $+$; 3°. que les uns sont de la même espece que les autres, puisque leur qualité distinctive n'est qu'un attribut idéal, résultant du point de vue sous lequel ils sont envisagés.

Telle étoit l'opinion d'un des plus grands promoteurs de l'algebre vers le milieu du dernier siecle. Descartes prouva le premier, que les racines négatives dont on ne faisoit aucun usage avant lui, & qu'on rejetoit comme inutiles, étoient tout aussi réelles que les racines positives, & que la seule différence qu'elles admettoient entr'elles, ne dépendoit que de la maniere d'envisager les quantités dont elles étoient les expressions ; & si la différence idéale que Descartes mettoit entre ces quantités, a été réalisée par Wolf & tous les auteurs, qui depuis ont écrit sur cette matiere, ce n'a été sans doute que parce que ce grand philosophe a été mal commenté, ou parce qu'on a abusé de l'expression.

SECTION II.

De la théorie du calcul des imaginaires.

Le paralogiſme qui s'eſt gliſſé dans la théorie des imaginaires, vient ſans doute de ce qu'on les a calculées d'après les principes établis pour calculer les irrationnelles. Or, l'application de ces principes ne pouvoit, comme elle l'a fait, 1°. *que conduire à de faux réſultats*, puiſqu'elle exige qu'on faſſe ſubir aux imaginaires les mêmes transformations qu'on fait ſubir aux irrationnelles, ce qui eſt illicite; 2°. que s'oppoſer à la conviction que doivent entraîner les démonſtrations des réſultats de leurs combinaiſons entr'elles, puiſqu'on en cherche encore qui la produiſent.

Mon but, dans cette théorie, eſt de remédier à ces deux vices eſſentiels; pour cet effet, je ferai voir, 1°. ce qu'on doit entendre par imaginaire; 2°. quelle eſt leur origine; 3°. quelles ſont les formes dont elles doivent néceſſairement être revêtues avant de leur faire ſubir les opérations de compoſition & de réſolution, afin d'avoir des réſultats clairs & rigoureux. C'eſt de la notion exacte de ces trois points importans que naîtront évidemment des idées lumineuſes ſur leur nature, la maniere de les combiner, & ſur les réſultats de leurs combinaiſons.

THÉOREME PREMIER.

17. Toute puiſſance entiere d'une quantité quelconque rationnelle, doit être néceſſairement rationnelle.

D. Toute puiſſance eſt un produit dans lequel la racine entre comme facteur, un nombre de fois exprimé par l'indice de cette puiſſance ; donc ſi la puiſſance entiere d'une quantité quelconque rationnelle n'étoit pas rationnelle, ſa racine ne le ſeroit pas. ce qui ſeroit contre l'hypotheſe ; donc, &c.

COROLLAIRES.

18. Donc toute puiſſance, paire d'une quantité quelconque rationnelle, eſt poſitive, quel que ſoit le ſigne de la racine qui la forme, & que la puiſſance impaire d'une telle quantité eſt *poſitive ou* négative, ſuivant que le ſigne qui précede celle-ci eſt poſitif ou négatif : car la racine entre un nombre de fois pair dans la puiſſance paire, & un nombre de fois impair dans la puiſſance impaire : or, (5 & 8) la puiſſance ne peut être négative dans le premier cas, quel que ſoit le ſigne de la racine, ni dans le ſecond, ſi la racine eſt poſitive, ni poſitive, ſi la racine eſt négative ; donc, &c.

THÉOREME II.

19. Toute puiſſance dont l'indice eſt égal, double ou trlpie, ou, &c. de celui d'une *irration-*

nelle, doit être néceſſairement rationnelle ; & toute puiſſance dont l'indice n'a aucune de ces propriétés, doit être irrationnelle.

D. 1°. Toute irrationnelle peut être repréſentée par $\sqrt[p]{a^q}$, pourvu que p ne ſoit ni égal ni ſous-multiple de q ; en outre, d'après les conditions du théoreme, l'indice p du radical peut ſervir d'indice à la puiſſance, pourvu qu'il ſoit multiplié par une quantité entiere r, & on aura $(\sqrt[p]{a^q})^{p.r}$ pour expreſſion générale & exacte de conditions du théoreme. Or, $(\sqrt[p]{a^q})^{p.r}$ ou $(a^{\frac{q}{p}})^{p.r}$ ou encore $a^{\frac{pqr}{p}}$ eſt évidemment une quantité rationnelle, puiſque le numérateur exponentiel eſt multiple du dénominateur ; donc, &c.

2°. L'indice de la puiſſance n'ayant aucune de ces propriétés, il peut être repréſenté par une quantité quelconque r, & alors l'expreſſion précédente deviendra $(\sqrt[p]{a^q})^r$, ou $a^{\frac{qr}{p}}$: or, cette expreſſion eſt celle d'une irrationnelle, puiſque le numérateur exponentiel ne peut être multiple du dénominateur ; donc, &c.

COROLLAIRE.

20. Il ſuit de là, 1°. que $(\pm\sqrt{a})^2$ ne peut être $-a$; car ſi le carré de $\pm\sqrt{a}$ étoit $-a$, ce carré ſeroit contradictoire à $+a$, qui par (hyp.) eſt un

carré positif, puisque la puissance de la quantité qui est sous le radical, est toujours censée du même indice que celui de la racine qu'on lui rapporte; donc le carré de $\pm \sqrt{a} = +a$; donc toutes les puissances paires de $\pm \sqrt{a}$, seront rationnelles positives, puisque (18) la racine entre un nombre de fois pair dans ces puissances dont l'indice est multiple de celui de la racine; mais que toutes ses puissances impaires seront irrationnelles, positives ou négatives, suivant que le signe de la racine est positif ou négatif, puisque cette racine entre un nombre de fois impair dans ces puissances, dont l'indice n'est pas multiple de celui de la racine.

2°. Que $(\pm \sqrt[4]{a})^4$ ne peut $= -a$; car si cette quatrieme puissance étoit $-a$, elle seroit contradictoire à $+a$, qui par (hyp.) est une quatrieme puissance positive (18); donc toutes les puissances dont l'indice est égal, ou double, ou, &c. de celui de la racine $\pm \sqrt[4]{a}$ seront des quantités rationnelles positives, puisque cette racine entre un nombre de fois pair dans ces puissances, & que l'indice de celle-ci est multiple de l'indice de celles-là; mais que toutes les autres puissances dont l'indice n'a aucune de ces propriétés, soit qu'il soit eu-dessus ou en-dessous de celui de la racine, seront toutes irrationnelles positives ou négatives, suivant que le signe de la racine étant positif ou

négatif, elle entrera dans la puiſſance un nombre de fois pair ou impaire.

SCHOLIE.

21. On doit remarquer, 1°. que ſi une puiſſance d'indice pair eſt négative rationnelle ou irrationnelle, la racine d'indice correſpondant, ne peut être ni rationnelle ni irrationnelle, poſitive ou négative, puiſque (18) toutes les puiſſances d'indice pair de pareilles quantités, ſont néceſſairement des quantités rationnelles ou irrationnelles, mais poſitives ; par où l'on voit évidemment que ces ſortes de puiſſances ne peuvent pas réſulter de la ſeule multiplication, & que par conſéquent elles ſuppoſent une opération ultérieure qui eſt la ſouſtraction, opération par laquelle elles ſont dénaturées ; donc les racines d'où elles réſultent le ſont auſſi, c'eſt-à-dire, que de rationnelles ou irrationnelles poſitives ou négatives, les ſeules poſſibles d'abord, lors de la premiere opération, elles deviennent impoſſibles en vertu de la ſeconde ; & ce ſont ces ſortes de racines qu'on eſt convenu d'appeler imaginaires pour le diſtinguer des deux autres eſpeces.

22. 2°. Que les puiſſances quelconques des quantités irrationnelles ſe forment aiſément, & ſans être altérées, en transformant celles-ci en expreſſion de puiſſance fractionnaire, & en multipliant

l'exposant de la quantité par l'indice de la puissance demandée, après avoir élevé le coefficient s'il est autre que l'unité positive, à la puissance demandée.

THÉOREME III.

23. Toute imaginaire peut être considérée comme provenant d'une équation pure, d'un degré déterminé par l'indice de cette imaginaire, & dans laquelle le terme constant est positif.

D. Tout nombre pair résultant d'un nombre impair par quelque puissance du nombre 2, si l'on appelle r ce nombre impair, & p les puissances successives de 2, $r.2^p$ sera l'indice d'un radical imaginaire quelconque; en outre $-b$ peutreprésenter la puissance négative correspondante à cet indice, & alors on aura pour expression d'une imaginaire quelconque $\sqrt[r.2^p]{-b}$, & *par conséquent* $x = \sqrt[r.2^p]{-b}$ pour expression de la racine d'une équation dont le degré est déterminé par l'indice de l'imaginaire; or, 1°. si on éleve les deux membres de cette équation à la puissance marquée par l'indice de l'imaginaire, onaura $x^{r.2^p} = -b$; 2°. transposant $-b$ dans le premier membre, il viendra $x^{r.2^p} + b = 0$. Equation pure dont le degré est celui de l'imaginaire, & dans laquelle le terme constant est positif; donc, &c.

COROLLAIRES.

24. Par où l'on voit, 1°. que le terme conſtant ou la quantité b (qui eſt cenſée ici une puiſſance paire d'un degré déterminé par l'indice du radical, puiſqu'on lui rapporte une racine paire), ne devient négative, de poſitive qu'elle devoit néceſſairement être par ſa conſtitution primitive (21), qu'en vertu d'une opération ſecondaire qui eſt la ſouſtraction ; opération qu'exige la ſolution de l'équation dont il s'agit ; c'eſt-à-dire, que par cette ſolution on enviſage cette puiſſance ſous un point de vue contraire à celui ſous lequel on l'avoit enviſagée d'abord, lors de la formation de l'équation ; la racine doit donc être enviſagée de même : or (21), cette racine ne pouvoit être que réelle, poſitive ou négative dans le premier cas ; elle doit donc être imaginaire dans le ſecond ; & par conſéquent ce théoreme démontre par la nature même de la choſe, ce qui n'avoit été déduit des précédens que par analogie.

25. 2°. Qu'une expreſſion radicale ne peut être imaginaire qu'autant que le réſultat des quantités qui ſont ſous le ſigne radical eſt négatif, & que l'indice du radical eſt un nombre pair ; or, ce réſultat peut, quel qu'il ſoit, être repréſenté par $-b$; & cet indice par $r.2^p$, r repréſentant un nombre impair quelconque, & p les puiſſances

successives de 2 ; & dès-lors $\sqrt[r.2^p]{-b}$ sera évidemment l'expression d'une racine paire quelconque d'une puissance paire quelconque devenue négative, ou ce qui est le même, d'une imaginaire ; & s'il y a quelque quantité réelle qui précede l'imaginaire, elle pourra être représentée par $\pm a$, & on aura pour expression générale d'une quantité en partie réelle & en partie imaginaire $\pm a \pm \sqrt[r.2^p]{-b}$. Or, $\pm \sqrt[r.2^p]{-b}$ est un produit évidemment décomposable en ces deux facteurs-ci $\pm \sqrt[r.2^p]{b} \times \sqrt[r.2^p]{-1}$; donc si, comme on le peut, on désigne le facteur réel par $\pm n$, tout radical imaginaire pourra prendre cette forme $+a + n\sqrt[r.2^p]{-1}$.

THÉOREME IV.

26. La transformation totale d'une imaginaire quelconque en expression de puissance fractionnaire, est illicite ; ou ce qui est le même, que $\sqrt{-a}$, par exemple, ne peut prendre la forme de $(-a)^{\frac{1}{2}}$ ou de $-a^{\frac{1}{2}}$.

D. Toute transformation erronée est évidemment illicite : or, la transformation de $\sqrt{-a}$ en $(-a)^{\frac{1}{2}}$ ou en $-a^{\frac{1}{2}}$ est erronée, 1°. en $(-a)^{\frac{1}{2}}$; car si on éleve cette expression au quarré, on aura (14) $+a$; tandis qu'on doit avoir $-a$ (20).

2°. $\sqrt{-a}$ ne peut pas non-plus prendre la for-

me de $-a^{\frac{1}{2}}$; car si cela étoit, $\sqrt[6]{-a^2}$ pourroit aussi prendre celle-ci $-a^{\frac{2}{6}}$ ou $-a^{\frac{1}{3}}$, ou enfin $\sqrt{-a}$, & par conséquent une imaginaire pourroit égaler une réelle, ce qui est absurde ; donc, &c.

COROLLAIRES.

27. 1°. On ne peut donc pas élever une imaginaire monome à ses différentes puissances à la maniere des irrationnelles, après l'avoir transformée en expression de puissance fractionnaire, puisque cette transformation influe, non-seulement sur l'expression de la quantité, mais encore sur la quantité même ; on a donc avancé une erreur, quand on a dit que *toute expression radicale peut être convertie en expression de puissance fractionnaire.*

28. 2°. Par le secours de la formule du binome, on ne peut pas extraire des racines paires d'une quantité polynome, dont tous les termes sont négatifs, ou en partie positifs, & en partie négatifs, si la valeur de ceux-ci est plus grande que celle des autres ; puisque pour cela, il faudroit transformer l'expression radicale en expression de puissance fractionnaire, ce qui n'est pas permis. On a donc mal conclu quand on a dit que *la formule du binome s'étendoit à toutes les puissances même fractionnaires de toute sorte de quantités.*

REMARQUE.

29. Si dans l'exemple $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ du dernier théoreme, on transforme ces deux facteurs en ces quatre-ci : $\sqrt{a}, \times \sqrt{a}, \times \sqrt{-1}, \times \sqrt{-1}$, on trouvera pour résultat exact $-a$, puisque le résultat des deux facteurs réels est (19) $+a$, & celui des deux autres doit être (20) -1 ; car s'il étoit $+1$, il seroit contradictoire à -1, qui est un carré négatif par hypothese. Or, (11) $+a \times -1 = -a$; donc $(\pm\sqrt{-a})^2 = -a$.

D'ailleurs, quand on demande le carré de $\pm\sqrt{-a}$, on demande évidemment le carré de la racine carrée d'un carré négatif, ou ce qui revient au même, le carré de la racine carrée d'un carré soustrait, c'est-à-dire, que par cette question, on impose deux conditions à remplir ; savoir, 1°. de faire le produit de $\pm\sqrt{+a}$ par $\pm\sqrt{+a}$; 2°. de le soustraire des quantités qui précedent ou qu'on peut supposer précéder ; or (20), $\pm\sqrt{+a} \times \pm\sqrt{+a} = +a$; soustroyant, il devient $-a$; donc $(\sqrt{\pm -a})^2 = -a$.

30. Par où l'on voit que la transformation partielle de $\pm\sqrt{-a}$ en expression de puissance fractionnaire, est licite ; parce que cette transformation n'influe que sur l'expression de la quantité ; puisque le résultat remplit les conditions de la question, tandis que la transformation totale

emmene des résultats contradictoires à ces conditions. Il en est de même $\pm \sqrt[4]{-a}$, qui peut prendre cette forme $\pm \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{-1}$, ainsi que toute autre imaginaire d'un degré supérieur ; donc toute imaginaire peut, sans que l'imaginarité soit détruite être transformée en deux facteurs, dont l'un soit réel & l'autre imaginaire, chacun du même indice ; & c'est là ce qui constitue la transformation partielle, la seule licite, au lieu que la transformation totale anéantit l'imaginarité, & c'est ce qui la rend illicite.

THÉOREME V.

31. Le produit d'une quantité quelconque réelle rationnelle ou irrationnelle, par une quantité imaginaire, est nécessairement imaginaire, ou bien que a, ou $\sqrt{a}$, multiplié par $\sqrt{-a}$, par exemple, donne une imaginaire.

D. 1°. $a \times \sqrt{-a} = a \times 1 \times \sqrt{-a}$; & $a \times 1 \times \sqrt{-a} = a\sqrt{-a}$ or, cette derniere expression est évidemment celle d'une imaginaire ; donc, &c.

2°. $\sqrt{a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$; or, $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ donne (20) a pour résultat, & $a \times \sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$; donc, &c.

COROLLAIRES.

32. Il s'ensuit de là, 1°. que $\pm\sqrt{-a} \times \pm\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$; en effet (25), $\pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}$

$\times \sqrt{-1}$, & $\pm\sqrt{-b} = \pm\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$; or $\pm\sqrt{a} \times \pm\sqrt{b} = +\sqrt{ab}$ & (29) $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$; on aura donc $+\sqrt{ab} \times -1$; ce qui donne $-\sqrt{ab}$.

33. 2°. Que $+\sqrt{-a} \times -\sqrt{-b} = +\sqrt{ab}$ car $+\sqrt{-a} = +\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$; & $-\sqrt{-b} = -\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$; on aura donc $+\sqrt{a} \times -\sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$; or, les deux premiers facteurs de cette expression donnent $-\sqrt{ab}$, & les deux autres -1; mais $-\sqrt{ab} \times -1 = +\sqrt{ab}$.

THÉOREME VI.

34. Toute puissance impaire d'une quantité quelconque imaginaire, est nécessairement imaginaire, ou bien que la troisieme, la cinquieme, &c. puissance de $\sqrt{-a}$, par exemple, est une quantité imaginaire.

D. 1°. En effet, $(\sqrt{-a})^3 = \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, ou les deux premiers facteurs (29) donnent $-a$; & $-a \times \sqrt{-a} = -\sqrt{-a}$; donc, &c.

2°. Pour élever $\sqrt{-a}$ à la cinquieme puissance, il faut multiplier $\sqrt{-a}$ élevée au cube par $\sqrt{-a}$ élevée au carré : or, $(\sqrt{-a})^3 = -a\sqrt{-a}$ & le carré de $\sqrt{-a} = -a$, on aura donc $-a\sqrt{-a} \times -a = +a^2\sqrt{-a}$; il en est de même de la septieme puissance de $\sqrt{-a}$, & en général de toute autre puissance impaire; donc, &c.

THÉOREME VII.

35. Toute puiſſance dont l'indice eſt égal, double, triple, ou, &c. de celui d'une imaginaire, eſt néceſſairement réelle rationnelle, & toute puiſſance dont l'indice n'a aucune de ces propriétés eſt néceſſairement imaginaire.

D. 1°. Toute imaginaire (1) peut être repréſentée par $\sqrt[2p]{-b}$; en outre, d'après les conditions du théoreme, l'indice $2p$ de la racine peut ſervir à la puiſſance, pourvu qu'il ſoit multiplié par une quantité r qui repréſente un des termes de la ſuite naturelle, & alors $(\sqrt[2p]{-b})$ ſera évidemment l'expreſſion exacte des conditions du théoreme; or, $(\sqrt[2p]{-b})^{r.2p}$ doit être néceſſairement une quantité réelle rationnelle; car $(\sqrt[2p]{-b})^{r.2p} =$

(1) Cette propoſition & bien d'autres relatives à cette matiere ſe trouvent clairement démontrées dans les Elémens de mathématiques de Martin, ci-devant Profeſſeur de Philoſophie au College national de Toulouſe; j'invite mes Lecteurs à jeter les yeux ſur la partie de cet ouvrage; marqué au coin *du génie mathématique*.

$(\sqrt[2p]{b})^{r.2p} \times (\sqrt[2p]{-1})^{r.2p}$ (25) ; mais la puiſſance $r.2^p$ de chacun de ſes facteurs, eſt (29 & 34) une quantité réelle rationnelle ; donc leur produit doit l'être auſſi ; donc, &c.

2°. L'indice de la puiſſance n'ayant aucune de ces propriétés relativement à celui de la racine, il peut être repréſenté par la quantité r, & on aura pour expreſſion des conditions $(\sqrt[2p]{-b})^r$: or, cette puiſſance doit être imaginaire ; car (25) $(\sqrt[2p]{-b})^r = (\sqrt[2p]{b})^r \times (\sqrt[2p]{-1})^r$; mais $(\sqrt[2p]{b})^r$ eſt (19) une quantité réelle irrationnelle, & $(\sqrt[2p]{-1})^r$ eſt (34) une imaginaire ; on aura donc une irrationnelle à multiplier par une imaginaire, ce qui (31) donne un réſultat imaginaire ; donc, &c.

COROLLAIRES.

37. 1°. Les puiſſances paires ſucceſſives de $\pm\sqrt{-b}$, ſeront une ſuite de quantités réelles rationnelles alternativement négatives & poſitives, quel que ſoit le ſigne quila précede, puiſque dans ce cas l'indice de la puiſſance eſt multiple de celui de la racine ; mais que $\pm\sqrt{-b}$ élevée à ſes puiſſances impaires ſucceſſives, donnera une ſuite de quantités imaginaires alternativement poſitives & négatives, ou négatives & poſitives, ſuivant

que le ſigne qui la précede eſt poſitif ou négatif, puiſque dans ce cas l'indice de la puiſſance n'eſt pas multiple de celui de la racine.

37. 2°. $\pm \sqrt[4]{-b}$ élevée aux puiſſances 4, 8, 12, &c. donnera une ſuite de quantités réelles rationnelles, alternativement négatives & poſitives, de quel ſigne qu'elle ſoit précédée ; mais que $\pm \sqrt[4]{-b}$ élevée à toute autre puiſſance dont l'indice ne ſera pas multiple de celui de la racine, donnera une ſuite de quantités imaginaires, dont les unes ſeront poſitives & les autres négatives, ſans aucune loi.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

38. De cette théorie on peut conclure, 1°. que les imaginaires ſont de vraies quantités, puiſque les unes ſont plus grandes que les autres, & que par leur combinaiſons entr'elles, elles fourniſſent des réſultats réels.

2°. Qu'elles different autant des réelles par les principes de leur calcul que par leur nature.

3°. Que les raiſonnemens & les démonſtrations des irrationnelles ne peuvent nullement leur être appliqués, puiſque l'analogie n'eſt point une démonſtration, & que d'ailleurs du réel à l'imaginaire on ne peut rien conclure.

SECTION III.

De la théorie des équations du troisieme degré.

CHAPITRE PREMIER.

De la synthese & de l'analyse des équations de ce degré.

39. Les mathématiques emploient deux voies également sures pour découvrir la vérité ; savoir, la synthese & l'analyse. Une question mathématique ne sauroit être résolue en rigueur, sans le concours de ces deux voies ; sa nature peut seule déterminer quelle est celle des deux qu'il faut employer la premiere ; & alors il peut arriver deux cas, ou que le résultat soit conforme, ou bien qu'il soit contradictoire aux conditions de la question : dans le premier cas, la question est proposable, & dans l'autre elle implique contradiction avec les conditions qui l'accompagnent ; néanmoins, on est assuré d'en trouver la solution par ces deux voies, dans l'un & dans l'autre cas, pourvu que l'on observe rigoureusement les lois qui caractérisent leur exactitude. C'est

ſans doute pour avoir négligé d'obſerver ces *lois, qu'on a laiſſé introduire* un paralogiſme choquant dans la théorie des équations du troiſieme degré ; paralogiſme dont je vais faire voir, & l'exiſtence, & la maniere de l'éviter. Pour cet effet, je commencerai d'abord par la voie de la ſyntheſe, c'eſt-à-dire, par examiner quelle eſt la forme que doivent avoir les différentes combinaiſons de divers élémens ou facteurs d'où une telle équation peut réſulter ; leſquels facteurs je ſuppoſerai pour plus de ſimplicité, tantôt réels, tantôt purement imaginaires, & tantôt en partie réels, & en partie imaginaires monomes du ſecond degré (1), au nombre deſquels je mettrai même zéro ; mais le moins compoſés poſſible, & tels que la ſomme des poſitifs égale celle des négatifs ; afin que l'équation n'ait pas de ſecond terme. De là, il ſera aiſé de déterminer, par analogie, la forme des combinaiſons d'élémens plus compoſés.

En ſecond lieu, j'emploierai la voie de l'analyſe ; c'eſt-à-dire, que par la forme du réſultat déterminée par la premiere, je conclurai à celle que doivent avoir les élémens dans la ſeconde. Afin de procéder avec ordre, je demande qu'on m'accorde, comme évidens ou démontrés, ici ou ailleurs, les principes ſuivans.

---

(1) De la forme $a\sqrt{-1}$, & $a + a\sqrt{-1}$: où a eſt ſuppoſé rationnel.

ERRATA.

PAGE 5, *ligne* 12, ſervillement, *liſez* ſervilement.

Page 15, *ligne* 19, après lesmots même corps A, *liſez* ſuivant des directions oppoſées par rapport à ce même corps.

Page 17, *ligne* 6, ſoit, *liſez* ſoient.

Page 18, *ligne* 17, après le ſigne +, *liſez* ou ſigne + en —.

Pag. 20, *ligne* 8, ſupprimez le numéro qui eſt entre les deux paranthefes.

Page 23, *ligne* 20, or (5 & 8), *liſez* or (13 & 14).

Page 24, *ligne* 22, COROLLAIRE, *liſez* COROLLAIRES.

Page 27, *ligne* 24, avant le mot celui, *liſez* égal à.

Page 29, *ligne* 24, à la place de (20), *liſez* (20 & 29).

Page 30, *ligne* 3, $\sqrt{-a}$, *liſez* $\overset{i}{\sqrt{-a}}$.

Page 33, *ligne* 20, $-\sqrt{-a}$, *liſez* $-a\sqrt{-a}$.

Page 34, *ligne* 8, $\overset{2p}{\sqrt{-b}}$, *liſez* $\overset{2p}{\sqrt{-b}}$.

Page 35, *ligne* 1, $(\overset{2p}{\sqrt{-1}})^{r.2p}$, *liſez* $(\overset{2p}{\sqrt{-1}})^{r.2p}$.

Idem, *ligne* 16, 37, *liſez* 36.

Page 36, *ligne* 19, avant 2°., *liſez* 39.

Idem, *ligne* 21, avant 3°., *lisez* 40.

Page 37, *ligne* 7, supprimez le n°. 39.

Page 39, *ligne* 10, avant le mot trois, *lisez* le résultat des combinaisons de.

Idem, *ligne* 17, avant les mots leur somme, *lisez* ou enfin l'un réel, l'autre purement imaginaire, & le troisieme en partie réel & en partie imaginaire, pris 2 à 2, ou 3 à 3; & au lieu de leur somme, *lisez* la somme.

Page 41, *ligne* 3, (41), *lisez* (42).

Page 42, *ligne* 25, (38), *lisez* (42).

Page 49, *ligne* 2, (41), *lisez* (42).

Page 53, *ligne* 1, l'indéterminée, *lisez* à l'indéterminée.

Idem, *ligne* 4, sensée, *lisez* censée.

Page 58, *ligne* 21, imaginaire, *lisez* imaginaires.

Page 59, *ligne* 5, imaginaire, *lisez* imaginaires.

Page 63, *ligne* 1, quatrieme ne, *lisez* quatrieme cas ne.

Page 64, *ligne* 13, qui, réelle, *lisez* qui étant réelle.

ARTICLE PREMIER.

De la ſynthese.

41. PRINCIPE 1er. Si le premier terme d'une équation compoſée, & par conſéquent du troiſieme degré, n'a d'autre coefficient que l'unité, celui du ſecond terme eſt égal à la ſomme des produits des facteurs ou racines priſes 2 à 2; celui du troiſieme à la ſomme des produits de ces mêmes racines priſes 3 à 3.

42. 2e. Si l'on combine par voie d'addition trois facteurs, dont un eſt o, & les autres réels, ou purement imaginaires, ou en partie réels, & en partie imaginaires; ou tous trois réels, ou tous purement imaginaires, ou en partie réels, & en partie imaginaires; ou l'un réel ou purement imaginaire, & les autres en partie réels, & en partie imaginaires, ou purement imaginaires, leur ſomme ſera o, réelle ou purement imaginaire, ou en partie réelle & en partie imaginaire; elle ſera o, ſi la ſomme des poſitifs égale celle des négatifs; elle ſera réelle, ſi les facteurs réels ſont inégaux avec ſigne différent, & ſi les imaginaires ſont égaux avec différent ſigne; & imaginaire, ou en partie réelle, & en partie imaginaire dans toute autre hypotheſe.

43. 3e. Un produit ne peut être imaginaire, lorſque des facteurs parement imaginaires du

ſecond degré y entrent en nombre pair, & réciproquement.

43. 4e. De quelle maniere que l'on combine trois facteurs réels, leur réſultat eſt néceſſairement réel.

REMARQUE.

44. Trois facteurs réels combinés 2 à 2, donnent un réſultat négatif (1); & ſi on les combine 3 à 3, il ſera poſitif ou négatif, ſuivant que deux ou un d'entr'eux eſt négatif: par le moyen de ces quatre principes & de la théorie des combinaiſons, il ſera aiſé de démontrer les théorêmes ſuivans.

THÉORÊME PREMIER.

45. Si trois facteurs, dont l'un eſt zéro & les autres réels, ou purement imaginaires, ou en partie réels, & en partie imaginaires, ſont combiné 2 à 2, ou 3 à 3, le réſultat ſera 0, réel, ou purement imaginaire.

D. 1°. Ces trois facteurs pris 2 à 2, donnent trois combinaiſons dans deux, deſquelles zéro entre; donc, ſi deux de ces facteurs ſont réels ou

---

(1) Il ne faut pas perdre de vue que les trois facteurs dont il s'agit ici, ſont toujours tels, que la ſomme des poſitifs égale celle des négatifs, quelle que ſoit leur forme.

purement imaginaires, *la troisieme combinaison* (33 & 44) sera réelle, & purement imaginaire (41), si deux de ses facteurs sont en partie réels & en partie imaginaires; donc, &c.

2°. Ces trois facteurs combinés 3 à 3, ne donnent qu'une combinaison, où zéro entrant pour facteur, doit nécessairement la réduire à 0; donc, &c.

REMARQUE.

46. Le résultat que donnent ces trois facteurs combinés 2 à 2, est (6) négatif ou positif; il est négatif si deux des facteurs sont réels, ou si étant en partie réels & en partie imaginaires, chacune des parties est précédée dans chacun du même signe, & positif si ces facteurs sont purement imaginaires, ou en partie réels, & en partie imaginaires; mais chacune des parties précédée dans chacun de de signes alternatifs.

THÉORÊME II.

47. Si trois facteurs purement imaginaires, monomes du second degré, sont combinés 2 à 2, ou 3 à 3, le résultat sera réel ou purement imaginaire.

D. 1°. Ces trois facteurs combinés 2 à 2, donnent trois combinaisons, dans chacune desquelles les facteurs imaginaires entrent en nombre pair; donc (43), le résultat sera réel.

2°. Ces trois facteurs pris 3 à 3, ne fournissent qu'une combinaison dans laquelle les facteurs imaginaires entrent en nombre impair; donc (43), le résultat sera purement imaginaire; donc, &c.....

REMARQUE.

48. 1°. Le résultat que donnent ces facteurs pris 2 à 2, sera (6) nécessairement négatif. 2°. Celui des combinaisons 3 à 3, sera positif ou négatif (6), suivant que deux de ces facteurs seront précédés du signe + ou —.

THÉORÊME III.

49. Si trois facteurs, dont l'un est réel, l'autre purement imaginaire, & le troisieme en partie réel & en partie imaginaire, sont combinés 2 à 2, ou 3 à 3, le résultat sera purement imaginaire, ou en partie réel & en partie imaginaire.

D. 1°. Ces trois facteurs pris 2 à 2, donnent trois combinaisons, dans chacune desquelles le facteur imaginaire entre une fois en nombre pair, & une fois en nombre impair; donc si le coefficient du facteur imaginaire est égal au facteur réel, il ne restera (6) qu'une des trois parties imaginaires, & les trois parties réelles (38) s'évanouiront; le résultat sera donc purement

imaginaire, & en partie réel, & en partie imaginaire si cette condition manque (42).

2°. Ces trois facteurs pris 3 à 3, ne donnent qu'une combinaison, qui est composée de deux parties, dans l'une desquelles le facteur imaginaire entre une fois en nombre pair, & une fois en nombre impair; donc (42) le résultat est en partie réel & en partie imaginaire.

REMARQUE.

50. 1°. Si dans l'hypothese du théorême, le facteur en partie réel & en partie imaginaire, a ses deux parties précédées du même signe ou de signe différent, le résultat de ces trois facteurs combinés 2 à 2, sera (6) négatif ou positif; mais que dans toute autre supposition, ce résultat sera composé de deux parties, dont l'une réelle sera toujours positive, & l'autre imaginaire négative ou positive, suivant que ce facteur sera précédé de même ou de différent signe.

51. 2°. Le résultat de ces trois facteurs pris 3 à 3, sera négatif ou positif, suivant que les deux parties du facteur en partie réel, & en partie imaginaire, seront précédées du signe + ou —, ou bien tout positif ou tout négatif, suivant que les deux parties de cemême facteur seront précédées des signes — & +, ou + & —, quelle que soit d'ailleurs la valeur réelle du coefficient de l'imaginaire (6).

THÉORÊME IV.

52. Si trois facteurs, dont l'un eſt réel & les deux autres en partie réels & en partie imaginaires, ſont combinés 2 à 2, ou 3 à 3, le réſultat ſera réel, ou en partie réel & en partie imaginaire.

D. 1°. La partie imaginaire entre quatre fois en nombre impair dans les trois combinaiſons que ces trois facteurs fourniſſent; or ſi les facteurs en partie réels, & en partie imaginaires, ne different que par le ſigne, ces parties imaginaires ſe détruiront mutullement; donc le réſultat ſera réel; & en partie réel, & en partie imaginaire, ſi ces facteurs different d'ailleurs (42).

2°. La partie imaginaire entre deux fois en nombre impair dans la ſeule combinaiſon que fourniſſent ces facteurs pris 3 à 3; donc ſi ces facteurs ſont comme dans le cas précédent, les parties imaginaires du réſultat étant égales avec ſigne différent, ſe détruiront (42); donc ce réſultat ſera réel, & en partie réel, & en partie imaginaire, ſi ces facteurs different d'ailleurs (42).

REMARQUE.

53. 1°. Le réſultat réel que donnent ces facteurs, dans l'hypotheſe du théorême, étant combinés 2 à 2, eſt négatif ou poſitif (6), ſuivant que le coefficient de la partie imaginaite du fac-

teur en partie réel, & en partie imaginaire, ſera égal ou plus grand que la partie réelle de ce même facteur ; & que le réſultat en partie réel & en partie imaginaire, ſera en tout négatif, ou la partie réelle négative, & l'imaginaire poſitive ; ou ſi le coefficient de la partie imaginaire, vaut moins que le double de la partie réelle de ce même facteur, le réſultat aura (6) la partie réelle poſitive, & l'imaginaire négative.

54. 2°. Le réſultat réel des combinaiſons de ces facteurs, pris 3 à 3 eſt négatif, quelle que ſoit la valeur réelle du coefficient de la partie imaginaire ; & le réſultat en partie réel & en partie imaginaire, eſt tout poſitif, ſi les deux parties du plus grand facteur en partie réel & en partie imaginaire, ont le ſigne + ; & que le coefficient de la partie imaginaire ſoit égal ou plus petit que la partie réelle, & tout négatif, ou partie poſitif, & partie négatif, ou *vice verſa* dans toute autre hypotheſe.

THÉORÊME V.

55. Si trois facteurs, dont l'un eſt purement imaginaire, & les deux autres en partie réels & en partie imaginaires, ſont combinés 2 à 2, ou 3 à 3, le réſultat ſera réel, ou purement imaginaire, ou en partie réel & en partie imaginaire.

D. 1°. De trois combinaiſons que donnent ces trois facteurs combinés 2 à 2, deux ſont com-

posées de deux parties, l'une réelle & l'autre imaginaire, & la troisieme combinaison de quatre, dont deux sont réelles, & les autres imaginaires. Or, si les coefficiens réels des facteurs en partie réels & en partie imaginaires, sont égaux, le facteur imaginaire entrant deux fois en nombre impair dans deux des combinaisons avec des quantités réelles égales & de différent signe, & deux fois en nombre pair avec les parties imaginaires des deux autres facteurs, tandis que la partie imaginaire de ceux-ci entre dans la troisieme combinaison deux fois en nombre impair avec des quantités réelles, égales & de signe différent, & une seule fois en nombre pair, les parties imaginaires (42) se détruisent; donc le résultat est réel; mais si cette condition manque, ce résultat (42) est en partie réel & en partie imaginaire.

2°. Ces trois facteurs combinés 3 à 3 donnent un résultat purement imaginaire, ou en partie réel & en partie imaginaire; car si les facteurs en partie réels & en partie imaginaires, sont tels que le coefficient de la partie imaginaire soit égal dans chacun; ces deux facteurs combinés 2 à 2 ne donnent qu'une combinaison dans laquelle la partie imaginaire entre deux fois en nombre impair, multipliée par deux quantités réelles, égales & de signe différent, les parties imaginaires se détruiront (42), & la partie réelle res-

tante, multipliée par le troisieme facteur purement imaginaire, donnera (31) un résultat purement imaginaire ; mais si ces coefficiens sont inégaux, les parties imaginaires qui entrent en nombre impair dans ces combinaisons, ne pouvant se détruire (42), le résultat sera en partie réel & en partie imaginaire ; & ce résultat multiplié par le troisieme facteur purement imaginaire, donnera (42) un résultat en partie réel & en partie imaginaire ; donc, &c.

REMARQUE.

56. 1°. Le résultat réel que donnent ces facteurs combinés 2 à 2, sera positif, si le coefficient des parties imaginaires des facteurs en partie réels & en partie imaginaires, est égal ou plus grand que la partie réelle de ces mêmes facteurs, quels que soient leurs signes (5) ; & négatif dans le cas contraire, & que le résultat en partie réel & en partie imaginaire, sera tout positif, ou la partie réelle positive & l'imaginaire négative, suivant que le facteur purement imaginaire sera positif ou négatif.

57. 2°. Le résultat purement imaginaire de ces facteurs combinés 3 à 3, sera positif ou négatif, suivant que le facteur purement imaginaire sera négatif ou positif ; & le résultat en partie réel & en partie imaginaire, sera positif, si les coéfficients réels de la partie imaginaire des facteurs,

en partie réels & en partie imaginaires, ſont inégaux & affectés de ſignes différens, & que le facteur purement imaginaire étant poſitif, ſon coefficient réel differe de ceux des deux autres parties imaginaires ; & ce réſultat ſera négatif, ſi le facteur purement imaginaire étant poſitif ou négatif, le coefficient de la partie imaginaire de l'un des deux autres facteurs eſt égal à la partie réelle, & que ces deux quantités ſoient négatives ; & enfin, poſitif & négatif dans toute autre hypotheſe.

THÉORÊME VI.

58. Si trois facteurs en partie réels & en partie imaginaires, ſont combinés 2 à 2, ou 3 à 3, le réſultat ſera purement imaginaire, ou en partie réel & en partie imaginaire.

D. 1°. La partie imaginaire entre une fois en nombre pair & deux fois en nombre impair dans chacune des trois combinaiſons que donnent ces trois facteurs pris 2 à 2 ; or, ſi dans deux de ces facteurs la partie réelle égale le coefficient de la partie imaginaire, ou ſi la partie réelle de l'un égale le coefficient de la partie imaginaire de l'autre, les parties réelles de ces combinaiſons ſeront égales & affectées de ſignes différens, & les imaginaires ſeront affectés de ſignes différens, mais inégales ; donc (42), le réſultat ſera purement

imaginaire, & en partie réel & en partie imaginaire dans toute autre hypothese, puisque (41), ni les réelles, ni les imaginaires ne pourront se détruire totalement.

2°. Ces trois facteurs combinés 3 à 3, donnent une combinaison qui est en partie réelle & en partie imaginaire; en effet, la combinaison de deux d'entr'eux sera ou purement imaginaire, ou en partie réelle & en partie imaginaire; or, dans l'un & l'autre cas, ce résultat combiné avec le troisieme facteur donnera une quantité en partie réelle & en partie imaginaire pour nouveau résultat; car, dans le premier cas, le facteur imaginaire entre une fois en nombre pair dans l'une des deux parties de ce produit, & une fois en nombre impair dans l'autre. Donc le résultat est (42) en partie réel & en partie imaginaire; dans le second cas, la partie imaginaire entre une fois en nombre pair & deux fois en nombre impair dans le produit; dailleurs, ces facteurs n'ayant rien d'égal, comparés entr'eux, quant aux parties qui les constituent, ni les parties réelles, ni les imaginaires qui composent leur produit ne peuvent s'entre-détruire; donc le résultat (42) est en partie réel & en partie imaginaire; donc, &c.

REMARQUE.

59. 1°. Le résultat purement imaginaire que donnent ces facteurs pris 2 à 2, sera négatif si deux

d'entr'eux ſont précédés du même ſigne, ou la partie réelle du ſigne —, & l'imaginaire du ſigne +; & il ſera poſitif dans toute autre hypotheſe (5); & le réſultat en partie réel & en partie imaginaire ſera poſitif ou négatif, ou bien la partie réelle poſitive, & l'imaginaire négative, ou *vice verſa*; il ſera poſitif, 1°. ſi deux des facteurs ayant la partie réelle égale, & l'imaginaire inégale, ils ſont précédés de ſignes alternatifs + & —, ou ſi tous étant inégaux, la partie réelle de deux d'entr'eux eſt négative, & l'imaginaire poſitive, & que le coefficient de la partie imaginaire du troiſieme ſoit plus grand que ſa partie réelle (5); mais il ſera en partie poſitif & en partie négatif, ſi ces deux facteurs ont même ſigne; 2°. il ſera négatif, ſi ces deux facteurs ayant ſeulement la partie imaginaire égale, leurs deux parties ſont précédées du même ſigne, ou ſi étant tous trois inégaux dans toutes leurs parties, deux d'entr'eux ſont précédés du même ſigne (5); 3°. la partie réelle négative & l'imaginaire poſitive, ſi étant tous inégaux, ils ſont précédes de mêmes ſignes alternatifs, ou ſi deux d'entr'eux étant précédés du ſigne — pour la partie réelle, & du ſigne + pour l'autre, le coefficient de l'imaginaire du troiſieme facteur eſt plus petit que ſa partie réelle (5).

60. 2.° Le réſultat en partie réel & en partie imaginaire que donnent ces facteurs pris 3 à 3, ſera poſitif ou négatif, ou la partie réelle poſitive & l'imaginaire négative ou *vice verſa*; il ſera

positif, 1.° si la partie réelle de deux d'entr'eux est précédée du signe +, & l'autre du signe —; ou bien si l'un d'entr'eux étant tout positif, l'autre tout négatif, la partie réelle du troisieme est précédée du signe —, & l'autre du signe +; 2.° il sera négatif dans le cas contraire; ou bien lorsque la partie réelle de deux d'entr'eux égale le coefficient de leur partie imaginaire, & que chaque partie ayant signe différent, la partie réelle du troisieme facteur est précédée du signe +, & l'autre du signe — (5).

61. 3.° La partie réelle positive & l'imaginaire négative, si deux des facteurs ayant chacun ses deux parties positives ou de signe différent, ou bien toutes deux négatives, le troisieme les a négatives, ou bien de signe différent, & la partie réelle négative & l'imaginaire positive dans le cas contraire (5).

ARTICLE II.

De l'analyse.

62. D'après ces notions, il est facile, à l'aspect d'une équation quelconque du troisieme degré délivré du second terme, & des formules que présentent les méthodes (1) de solution,

(1) On suppose dans ce mémoire que les méthodes de solution des équations du troisieme degré, sont connues du Lecteur.

De déterminer, par la voie de l'analyſe, quelles ſont les diverſes formes dont ſes racines ſont ſuſceptibles; or, une telle équation pouvant évidemment être repréſentée par cette formule générale $x^3 \pm px \pm q = 0$; dans laquelle p exprime le réſultat des combinaiſons des racines priſes 2 à 2, & q celui de ces mêmes racines priſes à 3 à 3; & la valeur de ces deux quantités, dépendant de celle des quantités données correſpondantes de l'équation comparée, il s'en ſuit que p & q ſont des indéterminées, qui peuvent avoir telle valeur que l'on voudra; ſavoir 0, ou réelle, ou purement imagnaire, ou en partie réelle & en partie imaginaire.

63. *Premiere hypotheſe.* Suppoſons, qu'une d'elles, q par exemple eſt 0, tandis que p, dans l'équation propoſée, eſt, 1°. réel, 2°. purement imaginaire (1); 3°. en partie réelle & en partie imaginaire monome du ſecond degré (2); il eſt clair que dans le premier cas, une des racines eſt 0, puiſque q eſt 0, & que les deux autres ſont (45) ou réelles ou purement imaginaires; dans le ſecond purement imaginaires; & dans le troiſieme en partie réelles & partie imaginaires (45); & dans tous ces cas elles ſeront exactes ou non, ſuivant que la va-

(1) De la forme $\pm a\sqrt{-1}$.

(2) De la forme $\pm a \pm a\sqrt{-1}$.

Cette forme de racines ayant été adoptée dans la Synthese, ne peut être changée dans l'analyſe.

leur ſuppoſée l'indéterminée p ſera ou non le réſultat exact de la ſomme des racines priſes 2 à 2 ; de ces mêmes racines, dis-je, dont la valeur ſuppoſée à l'autre indéterminée q eſt ſenſée repréſenter le réſultat exact de leur ſomme priſes 3 à 3, ou ce qui eſt le même, ſuivant que cette valeur de p ſera ou non un carré parfait.

64. *Seconde hyppotheſe.* Suppoſons que p eſt o ; tandis que dans l'équation propoſée q eſt 1.° réel, poſitif ou négatif, n'importe ; 2.° purement imaginaire ; 3.° en partie réel & en partie imaginaire.

Dans le premier cas, les racines ne peuvent être 1.° toutes réeles, puiſque (43) p ne ſeroit point o ; 2.° une o & les deux autres ou réelles, ou purement imaginaires ou en partie réelles & en partie imaginaires ; puiſque q n'eſt point o ; 3°. une réelle & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires ; puiſque (52) p eſt o ; 4° Toutes trois purement imaginaires ; puiſque (47) q eſt réel ; 5°. une réelle, l'autre purement imaginaire & la troiſieme en partie réelle & en partie imaginaire (49) ; 6°. ni une purement imaginaire & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (55) ; 7°. ni toutes trois en partie réelles & partie imaginaires (58) ; puiſque dans ces trois derniers cas p ne ſeroit point o ou q réel, ce qui eſt contre l'hypotheſe. Elles doivent donc être une réelle & les deux autres

en partie réelles & partie imaginaires (1), exactes ou non, ſuivant que les valeurs ſuppoſées aux indéterminées dans l'équation comparée expriment exactement ou non les conditions des fonctions que ces mêmes indéterminées indiquent dans la formule, ou bien ſuivant que la valeur de q ſera ou non un cube parfait.

Dans le ſecond cas, les racines ne peuvent être, 1°. toutes trois purement imaginaires; puiſque (47) p eſt o; 2°. une réelle & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (52); 3°. une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troiſieme en partie réelle & en partie imaginaire (49); 4°. toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires (58) (2); elles ſont donc une purement imaginaire & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires; mais la partie réelle ſera incommenſurable; & dans ce cas comme dans tous les ſuivans, elles ſeront exactes ou non aux mêmes conditions que dans le cas précédent.

Dans le troiſieme cas, elle ſont en partie réelles & en partie imaginaires; car elles ne peuvent être 1°. toutes trois réelles (43); 2°. purement imaginaires (47); 3°. une réelle & les autres en partie réelles & en partie imaginaires (52);

(1) Mais n on de la forme de l'article 63 n^te^. 2.

(2) Il eſt inutile d'examiner le cas où une d'elles eſt o, puiſque q n'eſt point o.

4°. une réelle, l'autre purement imaginaire & la troisieme en partie réelle & en partie imaginaire (49); ni une purement imaginaire & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires. pour la même raison (1), elles sont donc toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires (2), exactes ou non aux mêmes conditions que dans les cas précédens.

65. *Troisieme hypothese.* Supposons que p est réel, positif ou négatif, tandis que q est réel ou purement imaginaire, ou en partie réel & en partie imaginaire, positif ou négatif; & d'abord soit p réel positif & q réel positif ou négatif.

Cela posé, il est clair que les racines sont une réelle & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires; car elles ne peuvent être 1°. toutes trois réelles; puisque (44) p est positif; 2°. toutes trois purement imaginaires, puisque (47) q est réel; 3°. une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troisieme en partie réelle & en partie imaginaire (49); 4°. une purement imaginaire, & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (55); 5°. toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires (58) (3); elles seront donc une réelle & les deux autres en partie réelles

(1) Il est inutile d'examiner les autres combinaisons des racines où une est 0, puisque q n'est point 0.

(2) Non de la forme prescrite à l'article 63 n^te. 2.

(3) Il est inutile d'examiner les autres formes de racines où une d'elles est 0, puisque q n'est point 0.

& en partie imaginaires (1) exactes, ou non aux mêmes conditions que ci-dessus.

66. 2°. Si dans la même hypothese p est négatif, alors il peut arriver que $\frac{1}{27}p^3$ qui est sous $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$ expression de la premiere racine, soit égal, plus petit ou plus grand que $\frac{1}{4}q^2$ qui est toujours positif, puisque cette quantité est le carré d'une réelle.

Dans le premier cas, les racines sont toutes trois réelles, & l'une d'elles double de chacune des autres. Car alors le radical carré se réduit à 0, & par conséquent $a = b$; lapremiere racine est donc $a + b$ ou $2a$, & les deux autres sont chacune $-a$.

Dans le second cas, une des racines sera réelle & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires; puisqu'alors les deux radicaux cubiques de l'expression de la premiere racine, représentés par a & b, n'auront rien d'imaginaire; mais les deux autres racines auront chacune une des deux parties imaginaires, puisqu'elles contiennent le facteur imaginaire $\sqrt{-3}$.

Dans le troisieme cas, toutes les racines seront réelles; car l'expression de la premiere

---

(1) La forme de ces racines sera $a + b$ pour la réelle; & $-\frac{(a+b)}{2} + \frac{(a-b)}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{(a+b)}{2} - \frac{(a-b)}{2}\sqrt{-3}$ pour les deux autres; a exprimant $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$ & b $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$

peut prendre cetre forme $(c + d\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (c - d\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$; or, si on fait la somme de ces deux suites développées, les termes de rang pair, les seuls qui contiennent le facteur imaginaire se détruiront, & le résultat de cette somme sera une suite de termes tous réels. Les deux autres racines seront pareillement réelles; car outre la moitié de la premiere, la seconde racine contient la partie $\frac{c-d}{2}\sqrt{-3}$, & la troisieme $\frac{c-d}{2}\sqrt{-3}$: mais, si ayant développé ces quantités comme on l'a fait d'abord, on fait le calcul que les expressions de ces secondes racines indiquent, on obtiendra, réduction faite, un résultat qui ne contiendra (32) que des quantités réelles.

67. 3.° Soit p réel, positif ou négatif, & q purement imaginaire, aussi positif ou négatif; si p est positif, quelque soit le signe de q, les racines seront (47), ou toutes trois purement imaginaires, ou une purement imaginaire & les deux autres en partie réelles, & en partie imaginaires (55 & 56); & si p est négatif, elles seront nécessairement toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires; car elles ne peuvent être 1°. une réelle, & les deux autres en partie réelles, & en partie imaginaires; puisque (52), p est réel, & q purement imaginaire. 2.° Une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troisieme en partie réelle & en partie imaginaire; puisque (49) p est

réel ; 3.° une réelle, & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires ; puiſque (52) q eſt purement imaginaire (1) ; donc elle sſeront, &c.. & ces racines ſeront exactes ou non, aux mêmes conditions que ci-deſſus.

68. 3.° Soit p comme dans le dernier cas, & q en partie réel & en partie imaginaire. Les racines ne peuvent être, 1.° toutes trois purement imaginaires (47) ; 2.° une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troiſieme en partie réelle & en partie imaginaire (49) ; 3.° une réelle & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (52) ; 4.° une purement imaginaire, & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (55) ; 5.° toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires (58) (2) ; par où l'on voit que les valeurs pour p & pour q ne pouvant exiſter à la fois telles qu'on les a ſuppoſées, l'équation comparée exprime une contradiction ; ſes racines ſeront donc dans ce cas en partie réelles & en partie imaginaire ; mais inaſſignables en termes finis, puiſqu'alors la quantité qui eſt ſous

---

(1) Il eſt inutile d'examiner les autres formes de racines où toutes trois ſont réelles, ou une d'elles 0 ; puiſque q n'eſt ni réel ni 0.

(2) L'examen des autres formes de racines eſt ſuperflu.

le radical cube de la premiere racine, ne peut être un cube parfait.

69. *Quatrieme hypothese.* Supposons q réél & p 1°. purement imaginaire, les racines ne peuvent être, 1.° toutes trois purement imaginaire (47); 2.° l'une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troisieme en partie réelle & en partie imaginaire (49); 3.° une réelle, & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (52); 4.° une purement imaginaire, & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (55); 5.° toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires (58) (1); les valeurs supposées à p & à q étant donc incompatibles, l'équation comparée exprime une contradiction: donc ici comme dans le dernier cas, les racines sont en partie réelles & en partie imaginaires; mais inassignables en termes finis; puisque la quantité qui est sous le radical cube de la premiere racine ne peut être, un cube parfait.

2.° p en partie réel & en partie imaginaire; il est évident que les racines ne peuvent être, 1.° toutes les trois purement imaginaires (47); 2.° une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troisieme en partie réelle & en partie imaginaire (49); 3.° une réelle & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (52);

(1) L'examen des autres formes de racines est superflu.

4.° une purement imaginaire, & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (55); 5.° toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires (58) (1); les valeurs de p & de q ſont donc incompatibles entr'elles, comme dans les cas précédens; les racines ſont donc comme dans ces cas.

70. *Cinquieme hypotheſe.* Suppoſons p purement imaginaire, & q ou purement imaginaire, ou en partie réel & en partie imaginaire; 1.° q purement imaginaire, il eſt clair que les racines ne peuvent être, 1°. toutes les trois purement imaginaires (47); 2.° une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troiſieme en partie réelle & en partie imaginaire (49); 3.° une réelle & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (52); 4.° une purement imaginaire, & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (55); 5.° toutes les trois en partie réelles & en partie imaginaires (58) (2); les valeurs ſuppoſées à p & à q ſont donc incompatibles entr'elles; les racines ſont donc comme ci-deſſus en partie réelles & en partie imaginaires; mais inaſſignables en termes finis.

2.° q en partie réel & en partie imaginaire, les racines ne peuvent être, 1°. toutes trois purement imaginaires (47); 2.° une réelle, & les

(1) L'examen des autres formes eſt ſuperflu.

(2) Même remarque que ci-deſſus.

deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (52); 3.° une purement imaginaire, & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (55); mais elles peuvent être ſeulement une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troiſieme en partie réelle & en partie imaginaire (49 & 58) ou (58) toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires (1), exactes ou non, ſuivant que l'expreſſion de la premiere racine ſera ou ne ſera pas exacte.

72. *Sixieme hypotheſe.* Suppoſons p en partie réel & en partie imaginaire, & q purement imaginaire, ou en partie réel & en partie imaginaire, & d'abord q purement imaginaire. Les racines ne peuvent être, 1.° purement imaginaires (47); 2.° une réelle, l'autre purement & imaginaire, & la troiſieme en partie réelle & en partie imaginaire (49); 3.° une réelle & les deux autres en partie réelles & en partie imaginaires (52); 4.° une purement imaginaire, & les deux autres en partie réelles en partie imaginaires (55); 5.° toutes trois en partie réelles & en partie imaginaires (58) (2); les valeurs de p & de q ſont donc incompatibles entr'elles; les racines ſont donc encore en partie réelles & en partie imaginaires, mais inaſſignables en termes finis.

---

(1) L'examen des autres formes eſt ſuperflu.

(2) Même remarque que ci-deſſus.

73. 2°. q en partie réel & en partie imaginaire. Les racines peuvent être, 1.° une réelle, l'autre purement imaginaire, & la troisieme en partie réelle & en partie imaginaire (49); 2.° une purement imaginaire, & les deux autres en partie réelle & en partie imaginaires (55); 3.° toutes les trois en partie réelles & en partie imaginaires (58); 4.° un réelle, & les autres en partie réelles & en partie imaginaires (52); car elles ne peuvent être purement imaginaires (47) (1): elles seront donc, 1.° &c., exactes ou inexactes..... Le premier cas a lieu, lorsque la partie réelle de la valeur en partie réelle & en partie imaginaire, représentée par p, est précédée du signe $+$, quel que soit celui de l'autre; & qu'en même temps, la partie réelle & la partie imaginaire représentée par q, sont précédées, la premiere du signe $-$, & l'autre du signe $+$.

Le second, lorsque cette même valeur pour p est précédée de mêmes signes que dans le premier cas, & que celle de q; savoir, la partie réelle est précédée du signe $+$, & l'autre du signe $-$.

Le troisieme, lorsque la partie réelle & la partie imaginaire de p sont précédées, la premiere du signe $-$ quel que soit celui de l'autre, & quel que soit aussi le signe des parties de la valeur de q; les autres combinaisons de signes n'offrent que

(1) L'examen des autres formes est superflu.

des probabilités ; ainſi le quatrieme ne pouvant préſenter aucun indice caractériſtique, eſt évidemment douteux.

SCHOLIE.

74. Ce ſont là toutes les hypotheſes poſſibles des formes dont ſont ſucceptibles les réſultats ſynthétiques en vertu de l'hypotheſe primitive, & qui mettent à portée de conclure que les racines d'une équation du troiſieme degré ne ſont exactes qu'autant que les valeurs ſuppoſées à p & à q rempliſſent fidellement les fonctions que ces indéterminées indiquent ; c'eſt-à-dire, qu'à ces deux conditions, 1°. que la valeur ſuppoſée à p eſt exactement la ſomme des produits des racines priſes 2 à 2 ; 2°. que la valeur ſuppoſée à q eſt en même-temps la ſomme exacte des produits de ces mêmes racines priſes 3 à 3 : & la commenſurabilité de l'expreſſion de la premiere racine préſentée par la méthode de ſolution, eſt un indice ſûr de la coexiſtence de ces deux conditions.

75. Par une raiſon contraire, l'incommenſurabilité de cette expreſſion eſt évidemment un indice de la non-coexiſtence de ces mêmes conditions ; & par conſéquent l'équation exprimant alors une contradiction, les racines ne ſauroient être exactes, quels que ſoient d'ailleurs les ſignes & les valeurs ſuppoſés à p & à q : or, ſi dans cette

hypothese les valeurs de p & de q sont, 1°. une d'elles réelle & l'autre purement imaginaire, ou en partie réelle & en partie imaginaire, ou l'une purement imaginaire & l'autre aussi purement imaginaire, ou en partie réelle & en partie imaginaire, ou bien enfin toutes les deux en partie réelles & en partie imaginaires, il est clair que les racines développées doivent être dans tous ces cas en partie réelles & en partie imaginaires, mais inassignables en termes finis ; 2°. si les valeurs de p & q sont toutes les deux réelles, & que celle de $\frac{1}{27}p^3$ soit, 1°. négative ; 2°. plus grande que celle de $\frac{1}{4}q^2$, qui, réelle, est toujours positive, il est clair encore que les racines qui, développées, sont réelles, sont aussi inassignables en termes finis ; puisque dans l'un & dans l'autre cas, l'équation d'où elles proviennent exprime une contradiction fondée sur l'incompatibilité des valeurs des indéterminées p & q : d'où il résulte évidemment, 1°. qu'il y a l'infini à parier contre 1 qu'une équation du troisieme degré, prise au hasard, n'aura pas de racines exactes ; car quelle que soit la valeur supposée à p, elle est toujours censée représenter exactement la somme des produits des racines prises 2 à 2 ; tandis que, parmi une infinité qu'on peut en supposer à q, il n'y en a qu'une qui puisse représenter exactement la somme des produits de ces mêmes racines prises 3 à 3, & réci-

proquement ; 2°. qu'il eſt impoſſible d'éviter le *cas irréductible* (1).

---

(1) C'eſt-à-dire, ce cas où l'on n'a pu, malgré tous les efforts, trouver des racines réelles, exprimées autrement que par des ſéries infinies, lorſque la quantité qui eſt ſous le radical cube de l'expreſſion de la premiere racine, réunit, ainſi qu'il a été dit, ces trois conditions à la fois ; 1°. que la valeur de $\frac{1}{27}p^3$ eſt réelle rationnelle négative ; 2°. que cette valeur eſt plus grande que celle de $\frac{1}{4}q^2$, qui étant réelle rationnelle auſſi (17), eſt toujours poſitive ; 3°. que le réſultat de ces deux valeurs, combiné avec la valeur de $-\frac{1}{2}q$, n'eſt pas un cube parfait ; & l'on voit, par ce qui précede, que ce cas mérite le nom, non pas de *cas irreductible*, mais celui de *cas impoſſible*. Je m'explique ; on a mis en problême, ſi par les méthodes connues, il ne ſeroit pas poſſible d'éviter le *cas irréductible*, ou d'en trouver une par laquelle on pût l'éviter ; ou en d'autres termes, on a demandé ſi l'on ne pourroit pas aſſigner autrement que par des ſéries infinies, les racines d'une équation du troiſieme degré dans le *cas irréductible* ; ou ſi l'on veut réduire la queſtion à ſon véritable ſens & à ſes vrais termes, elle doit être poſée ainſi : ſeroit-il poſſible d'aſſigner en termes finis les racines d'une équation du troiſieme degré, lorſqu'avec les deux premieres conditions ci-deſſus, elle exprime une contradiction ?

Solution. Ce problême porte ſa ſolution dans ſon énoncé ; mais ſi, en attendant que j'en donne une rigoureuſe, on en veut une par analogie, la voici : pour pouvoir éviter le *cas irréductible*, ou pour pouvoir aſſigner en termes finis les racines d'une équation du troiſieme degré dans le *cas irréductible*, il eſt évident qu'il

CHAPITRE II.

Nouvelle méthode pour résoudre une classe très-étendue d'équations du troisieme degré dans le cas irréductible, *dont personne jusqu'ici n'avoit pu trouver la solution.*

On peut voir dans les mémoires de l'académie des sciences de Paris, pour l'année 1741, la méthode de *Nicole*, pour assigner les racines de toute équation du troisieme degré dans le cas *irréductible* de la forme $x^3 - ax + \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}a} = 0$.

La méthode de ce géometre a trois défauts essentiels ; le premier, est d'être fondée sur des

faudroit pouvoir trouver des racines exactes, lorsque les valeurs rationnelles supposées ou indéterminées p & q, avec les conditions prescrites, n'expriment pas exactement & en même-temps, l'une, la somme des produits des racines prises 2 à 2, & l'autre, celle des produits de ces mêmes racines prises 3 à 3. Or, nous avons fait voir en général qu'il est impossible de trouver de telles racines sous une forme finie en pareil cas : donc l'écueil du *cas irréductible* est impossible à éviter ; donc demander dans ce cas l'expression des racines, autre que par des séries infinies, c'est demander une chose absurde ; puisque c'est demander des facteurs exacts d'un résultat qui n'est pas leur multiple ; ce qui implique contradiction : par où l'on voit que ce fameux problême ne doit sa célébrité qu'au vice de son énoncé.

étonnemens ; le second, ec conduir à des calculs prolixes & laborieux ; le troisieme, d'avoir recours aux équations du second degré. Celle que je propose est, je pense, préférable ; puisque, non-seulement elle est à l'abri de ces défauts, mais encoe, elle embrasse une classe d'équations infiniment plus étendue. Voici les principes sur lesquels elle est fondée.

THÉOREME PREMIER.

76. Il est clair, 1°. que si l'on double la quantité $\mp \frac{1}{2} q$, prise avec un signe contraire, on aura le dernier terme $\pm q$; 2°. que si l'on triple la racine cubique du reste du carré de $\mp \frac{1}{2} q$, soustrait de la quantité qui est sous le radical $+ \sqrt{(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)}$, on aura $- p$, coefficient de x, second terme de l'équation $x^3 - px \pm q = 0$.

D. 1°. $\mp \frac{1}{2} q \times 2 = \mp \frac{1}{2} q = \mp q$, qui pris avec un signe contraire, donne $\pm q$ dernier terme de l'équation.

2°. Le quarré de $\mp \frac{1}{2} q = \frac{1}{4} q^2$, qui, soustrait de $\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3$ donne $- \frac{1}{27} p^3$, dont la racine cubique donne $- \frac{1}{3} p$; lequel multiplié par 3, donne $- p$, second terme de l'équation en question ; donc, &c.

COROLLAIRES.

77. Il suit de là, que si q étant une irrationnelle du second degré, & p rationnel, l'équation $x^3 - px \pm q = 0$ est dans le cas irréductible, 1°. la quantité $+ \frac{1}{2} q + \sqrt{(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)}$ est en partie irration-

nelle & en partie imaginaire du ſecond degré ; ce qui eſt évident.

78. 2°. Le carré de l'irrationnelle $\mp \frac{1}{2}q$, ſouſtrait de la quantité $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ qui eſt ſous le radical imaginaire, doit donner pour reſte un cube parfait ; puiſque le triple de la racine de ce reſte devant donner le coefficient de x qui, par hypotheſe, eſt rationnel, doit être auſſi rationnel ; ce qui ne pourroit être, ſi ce reſte n'étoit pas un cube parfait.

79. 3°. Qu'une équation du troiſieme degré qui manque de ſecond terme, dont le premier n'a diautre coefficient que l'unité, dont le coefficient de x eſt rationnnel, & qui a pour dernier terme une irrationnelle du ſecond degré, ne peut admettre dans l'expreſſion de ſes racines une quantité en partie irrationnelle du ſecond degré, & en partie imaginaire du même degré, qu'autant que le carré de la partie irrationnelle ſouſtrait de la quantité qui eſt ſous le radical imaginaire, donne pour reſte un cube parfait ; puiſque le triple de la racine cublique de ce reſte doit fournir le coefficient de x, lequel, par ſuppoſition, eſt une quantité rationnelle.

THÉOREME II.

80. Si on éleve au cube une quantité en partie irrationnelle, & en partie imaginaire du ſecond degré de la forme $\sqrt{p} + \sqrt{-q}$, le réſultat ſera de la

forme de la racine ; & si l'on soustrait le carré de la partie irrationnelle de ce cube, de la quantité qui est sous le radical imaginaire, ce reste sera un cube parfait.

D. 1°. Le cube de $\sqrt{p} + \sqrt{-q}$ est $p\sqrt{p} + 3p\sqrt{-q} - 3q\sqrt{p} - q\sqrt{-q}$, ou bien $(p - 3q)\sqrt{p} + (3p - q)\sqrt{-q}$, ou $(p - 3q)\sqrt{p} + \sqrt{(-9p^2q + 6pq^2 - q^3)}$, quantité en *partie irrationnelle & en partie imaginaire du second degré.*

2°. Si $p^3 - 6p^2q + 9pq^2$, carré de l'irrationnelle $(p - 3q)\sqrt{p}$, est soustrait de la quantité $-9p^2q + 6pq^2 - q^3$ qui est sous le second radical, on trouvera pour reste, $-p^3 - 3p^2q - 3pq^2 - q^3$, qui est évidemment *le cube de* $-p - q$.

COROLLAIRES.

81. Il suit de là, 1°. que la quantité $(p - 3q)\sqrt{p} + \sqrt{(-9p^2q + 6pq^2 - q^3)}$ a les conditions requises (79) pour pouvoir être admise dans l'expression des racines d'une équation du troisieme degré dans le *cas irréductible*, & cette équation (62) est $x^3 + (-3p - 3q)x + (-2p + 6q)\sqrt{p} = 0$, laquelle a pour racines.

1°. $x = \sqrt[3]{((p - 3q)\sqrt{p} + \sqrt{(-9p^2q + 6pq^2 - q^3)})} + \sqrt[3]{((p - 3q)\sqrt{p} - \sqrt{(-9p^2q + 6pq^2 - q^3)})} = \sqrt{p} + \sqrt{-q} + \sqrt{p} - \sqrt{-q} = 2\sqrt{p}$.

$2^{\circ}. x = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\left((p-3q)\sqrt{p}+\sqrt{(-9p^2q+6pq^2-q^3)}\right)}+\sqrt[3]{\left((p-3q)\sqrt{p}-\sqrt{(-9p^2q+6pq^2-q^3)}\right)}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{\left((p-3q)\sqrt{p}+\sqrt{(-9p^2q+6pq^2-q^3)}\right)}-\sqrt[3]{\left((p-3q)\sqrt{p}-\sqrt{(-9p^2q+6pq^2-q^3)}\right)}\right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{p}-\sqrt{-q}-\sqrt{p}+\sqrt{-q}) + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\,(\sqrt{p}+\sqrt{-q}-\sqrt{p}+\sqrt{-q}) = -\sqrt{p}-\sqrt{3q}.$

$3^{\circ}. x = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\left((p-3q)\sqrt{p}+\sqrt{(-9p^2q+6pq^2-q^3)}\right)}-\sqrt[3]{\left((p-3q)\sqrt{p}-\sqrt{(-9p^2q+6pq^2-q^3)}\right)}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{\left((p-3q)\sqrt{p}+\sqrt{(-9p^2q+6pq^2-q^3)}\right)}-\sqrt[3]{\left((p-3q)\sqrt{p}-\sqrt{(-9p^2q+6pq^2-q^3)}\right)}\right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{p}-\sqrt{-q}-\sqrt{p}+\sqrt{-q}) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{-3}\,(-\sqrt{p}-\sqrt{-q}+\sqrt{p}-\sqrt{-q})\right) = -\sqrt{p}+\sqrt{3q}.$

82. Obſervons maintenant que dans l'équation $x^3+(-3p-3q)x+(-2p+6q)\sqrt{p}=0$ le double du coefficient de x, ou bien $-6p-6q$ ajouté à la quantité $-2p+6q$, coefficient de l'irrationnelle $\sqrt{p}$, dans le dernier terme, donne $-8p$ qui égale, au ſigne près, huit fois la quantité p qui eſt ſous le radical carré.

Cela posé, si l'on suppose que p représente un nombre dont aucun des facteurs n'est carré parfait, $(-2p+6q)\sqrt{p}$ sera une irrationnelle du second degré, réduite à son expression la plus simple (1). Ainsi l'équation $x^3+(-3p-3q)x+(-2p+6q)\sqrt{p}=0$, est telle, 1°. que son dernier terme est une irrationnelle du second degré, réduite à son expression la plus simple ; 2°. que le double du coefficient de x, ajouté au coefficient de l'irrationnelle, donne, au signe près, l'octuple de la quantité qui est sous le radical carré.

83. D'où il suit, que toutes les fois qu'une équation du troisieme degré, dans le *cas irréductible*, réunira ces deux conditions, ses racines seront exprimées par les trois formules trouvées ci-dessus.

$$x=2\sqrt{p}.$$
$$x=-\sqrt{p}-\sqrt{3q}.$$
$$x=-\sqrt{p}+\sqrt{3q}.$$

Appliquons cette méthode à quelques exemples.

EXEMPLE PREMIER.

84. Soit l'équation $x^3-18x-4\sqrt{5}=0$ qui a les conditions que la méthode exige ; puisque $4\sqrt{5}$ est une irrationnelle du second degré, réduite

(1) C'est-à-dire, réduite de telle sorte que la quantité qui est sous le signe radical ne contienne point de facteur qui soit une puissance exacte du degré de ce radical.

à ſon expreſſion la plus ſimple ; & que -36, double du coefficient de x, ajouté à -4, coefficient de l'irrationnelle $\sqrt{5}$, donne (5) -40, quantité qui vaut huit fois celle qui eſt ſous le radical carré au ſigne près. Préſentement, pour déterminer les valeurs de p & q, comparons l'équation $x^3 - 18x - 4\sqrt{5}$ à l'équation fondamentale $x^3 + (-3p - 3q)x + (-2p + 6q)\sqrt{p} = 0$, & il viendra $3p + 3q = 18$, & $(-2p + 6q)\sqrt{p} = -4\sqrt{5}$; de la derniere équation, on déduit $p = 5$; & en ſubſtituant la valeur de p dans la premiere, il vient $3q = 3$, ou $q = 1$; ſubſtituant les valeurs de p & de q à leur place dans les formules ci-deſſus, on trouvera que les trois racines de l'équation propoſée ſont, $x = 2\sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5} - \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Exemple II.

Soit encore cette équation-ci $x^3 - 22x + 4\sqrt{5} = 0$ qui a les conditions réquiſes ; puiſque $4\sqrt{5}$ eſt une irrationnelle du ſecond degré, réduite à ſon expreſſion la plus ſimple ; & que -44 double du coefficient de x étant ajouté à $+4$ coefficient de l'irrationnelle $\sqrt{5}$ donne $-40 = 8 \times 5$ au ſigne près. Comparant enſuite cette équation-ci à l'équation générale, on aura $3p + 3q = 22$; & $(-2p + 6q)\sqrt{p} = 4\sqrt{5}$; donc $p = 5$, & $3q = 7$; enfin ſubſtituant ces valeurs dans les formules, on

trouvera pour racines $x = 2\sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5} - \sqrt{7}$, $x = -\sqrt{5} + \sqrt{7}$.

Ces exemples suffisent pour prouver avec quelle promptitude on peut trouver par cette méthode, aussi simple que facile, les racines d'un nombre infini d'équations du troisieme degré dans le *cas irréductible*.

Nicole, il est vrai, a résolu toutes les équations de la forme $x^3 - ax + \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{1}{6}a}$; mais l'on peut aisément démontrer que la classe de celles qu'on résout par cette méthode, est infiniment plus étendue; car l'équation fondamentale $x^3 + (-3p - 3q)x + (-2p + 6q)\sqrt{p} = 0$, peut, en supposant $p = q$, prendre cette forme $x^3 - 6p + 4p\sqrt{p} = 0$, laquelle est exactement celle qu'exige la méthode de *Nicole*, en faisant $6p = a$, & par conséquent lorsque $p = q$ mon équation est aussi générale que la sienne : or, p pouvant avoir un nombre infini de valeurs différentes de q, il s'ensuit évidemment que mon équation est plus générale, & qu'ainsi la méthode de *Nicole* n'atteint qu'une branche particuliere d'équations que la mienne embrasse.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

Concluons de cette théorie, 1°. que les racines d'une équation du troisieme degré, délivrée de son second terme, telle que $x^3 \pm px \pm q =$, sont susceptibles de neuf formes différentes, évi-

demment dépendantes des ſignes de l'indéterminée p, & diverſes valeurs qu'on peut ſuppoſer aux indéterminées p & q ; d'où il réſulte qu'on a avancé une erreur, quand on a dit que *toute équation du troiſieme degré a au moins une racine réelle* ; 2°. que l'on peut, dans tous les cas, déterminer ces racines avec la plus grande facilité par les formules de *Cardan*, ou par la mienne, ou bien démontrer qu'il eſt impoſſible de les aſſigner d'une autre maniere, ſous une forme finie ; & qu'ainſi la théorie des équations du troiſieme degré eſt aujourd'hui preſque auſſi complete qu'on puiſſe le déſirer. Les conjectures que *Dalambert* a haſardées ſur cette matiere, Dictionnaire encyclopédique, article *Cas irréductible*, ſont donc évidemment dénuées de fondement.

3°. Que quand l'une ou l'autre des indéterminées p ou q ; ou toutes les deux à la fois, préſentent des radicaux, c'eſt mal-à-propos qu'on a preſcrit de les faire évanouir ; puiſque par là, élevant néceſſairement l'équation à un plus haut degré, la ſolution en devient plus longue & plus difficile.

Tel eſt le ſupplément additionnel à la théorie actulele des équations du troiſieme degré, qui, depuis *Cardan*, *Viete* & *Bombelli*, n'avoit fait qu'un très-petit pas, dû à *Nicole*.

On objectera & on dira que la théorie qui traite des équations qui n'ont que des racines purement

imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires ou irrationnelles, eſt évidemment inutile ; puiſque les queſtions des conditions deſquelles ces équations ſont cenſées être la traduction exacte, ne peuvent avoir aucune application à la pratique : or la théorie additionnelle propoſée n'embraſſe principalement que de telles équations ; cette théorie eſt donc parfaitement inutile.

Cette objection, la ſeule qu'on puiſſe faire contre cetre théorie ſupplémentaire, n'eſt qu'un ſophiſme ſpécieux, auquel cependant nous répondrons ſans réplique, en obſervant que cette théorie doit être enviſagée ſous deux rapports différens, & relativement aux équations du troiſieme degré, ſon but principal, & relativement à celles du quatrieme degré, eſſentiellement liées aux premieres, & auxquelles le paralogiſme dont nous avons démontré l'exiſtence eſt commun : or cette théorie ſupplémentaire eſt utile ſous l'un & l'autre rapport ; ſous le premier, puiſqu'elle apprend, à l'aſpect d'une équation, 1°. à prononcer, ſans crainte d'erreur & ſans paſſer par le détail du calcul, ſouvent très-pénible, ſur la forme de ſes racines ; 2°. à diſtinguer les queſtions de ſolution *poſitive*, des queſtions de ſolution *négative*, ou qui impliquent ; avantages très-précieux en algebre dans l'un & l'autre cas.

Sous le ſecond rapport, puiſqu'une équation du du quatrieme degré ne pouvant être réſolue ſans

paſſer par une équation du troiſieme, il faut néceſſairement connoître toutes les formes des racines de celle-ci, afin de pouvoir prononcer ſainement ſur celle des racines de celle-là, & dont les combinaiſons des racines peuvent être étendues par des priucipes analogues; & puiſque la théorie des équations du quatrieme degré s'étend au cas où toutes les racines ſont imaginaires, celle du troiſieme doit néceſſairement s'y étendre auſſi.

D'ailleurs c'eſt à la théorie de faire voir juſqu'où la pratique peut ou ne peut pas aller, de lui indiquer la route qu'elle doit tenir, de l'éclairer & d'en écarter les obſtacles & les écueils; ainſi la ſphere de l'une eſt plus étendue que la ſphere de l'autre, & par conſéquent leurs limites ne ſauroient être communes.

FIN.