Fascicule XXXIV

MÉMORIAL
DES
SCIENCES PHYSIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM, (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

FASCICULE XXXIV

Analogies corpusculaires et ondulatoires

Par M. A. BUHL
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

Préface de M. Louis de BROGLIE
Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
—
1937

Fascicule XXXIV

MÉMORIAL
DES
SCIENCES PHYSIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM, (FONDATION MITTAG-LEFFLER), AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEURS :

Ch. FABRY
Membre de l'Institut

H. VILLAT
Membre de l'Institut

J. VILLEY
Professeur à la Sorbonne

FASCICULE XXXIV

Analogies corpusculaires et ondulatoires

Par M. A. BUHL
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

Préface de M. Louis de BROGLIE
Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1937

MÉMORIAL

DES

SCIENCES PHYSIQUES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

105439

MÉMORIAL

DES

SCIENCES PHYSIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEURS :

Ch. FABRY
Membre de l'Institut

H. VILLAT
Membre de l'Institut

J. VILLEY
Professeur à la Sorbonne

FASCICULE XXXIV

Analogies corpusculaires et ondulatoires

PAR M. A. BUHL
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

PRÉFACE DE M. LOUIS DE BROGLIE
Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

—

1937

PRÉFACE

Dans le présent fascicule, M. Buhl s'est proposé d'attirer l'attention de ses lecteurs, géomètres ou physiciens, sur l'importance que peuvent présenter certaines conceptions raffinées et récemment acquises de l'analyse mathématique pour l'interprétation des théories modernes de la physique. Avec la compétence, la pénétration et l'originalité d'esprit qui le caractérisent, l'auteur nous montre comment la structure formelle des récentes théories physiques, en particulier de la Relativité Einsteinienne et de la Mécanique ondulatoire, se rattache à des formes générales bien connues depuis longtemps des analystes; mais il nous montre aussi comment les idées subtiles des mathématiciens contemporains sur les courbes indéfiniment brisées et sur les structures indéfiniment fines, sur les intégrales généralisées au sens de Stieltjes et de M. Lebesgue, etc., idées qui ont si considérablement étendu l'horizon de la science abstraite, sont susceptibles de nous aider à comprendre certains aspects d'apparence paradoxale des doctrines quantiques actuelles de la Physique. Il nous fait entrevoir, en maniant ces concepts nouveaux, des analogies corpusculaires et ondulatoires bien instructives au point de vue de la mécanique ondulatoire et laisse pressentir des interprétations possibles pour les relations d'incertitude dont nous devons la connaissance à M. Heisenberg.

Assurément, et M. Buhl nous le dit lui-même, ces intéressantes et profondes remarques ne peuvent encore résoudre complètement le problème si difficile et si capital de l'interprétation physique des théories quantiques, notamment en ce qui concerne le rôle précis qu'y jouent les probabilités et le sens véritable du quantum d'Action, de la mystérieuse constante h de Planck. Mais, du moins pour les théoriciens de la Physique, l'exposé de M. Buhl a le considérable intérêt de nous mieux faire voir toutes les ressources que nous pouvons trouver dans les conceptions de l'analyse moderne, notamment sur les structures infiniment fines, pour nous aider à interpréter les difficultés, au premier abord bien surprenantes, que la Physique théorique a cru rencontrer sur son chemin depuis une trentaine d'années. Peut-être ces difficultés sont-elles, sinon entièrement du moins en partie, plus apparentes que réelles et dues entre autres raisons au fait que les théoriciens de la Physique, plus habitués à manier les méthodes traditionnelles de l'Analyse du continu que les méthodes plus générales des géomètres contemporains, cherchent toujours à représenter les phénomènes physiques à l'aide de fonctions « raisonnablement » continues, alors que ces phénomènes ne sont peut-être pas représentables en détail de cette façon. Au fond, la plupart des physiciens ont encore plus ou moins consciemment l'opinion préconçue que Joseph Boussinesq exprimait naguère assez plaisamment en disant : « Les fonctions ont tout intérêt à avoir des dérivées ». Malheureusement, en s'obstinant à ne pas sortir du domaine du continu et en ignorant volontairement la possibilité des structures infiniment fines, les Physiciens rendent peut-être insolubles des problèmes qu'ils pourraient résoudre assez aisément en élargissant leurs méthodes. C'est là, me semble-t-il, l'enseignement essentiel que les théoriciens de la Physique peuvent recevoir en lisant le fascicule, si instructif à tous égards, de M. Buhl.

Louis de BROGLIE.

ANALOGIES CORPUSCULAIRES

ET

ONDULATOIRES

Par M. A. BUHL.

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

C'est un lieu commun que de rappeler que les équations de la Physique théorique ont d'abord été associées à des divergences évanouissantes c'est-à-dire à des équations du type (avec i indice de sommation)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F_i = 0. \tag{a}$$

Si l'on veut satisfaire à (a) avec des λF_i, aux lieux et places des F_i, le multiplicateur λ dépendant des x_i, l'équation peut être scindée en deux autres dont la première est (a) même, la seconde étant

$$F_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0, \tag{b}$$

ce qui équivaut au système différentiel

$$\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \ldots = \frac{dx_n}{F_n}. \tag{c}$$

Cette remarque si simple est grosse de prodigieuses conséquences. Étudier les équations des théories physiques, tirées de (a), et le système (c) qui préside aux théories mécanistes, sont choses qu'un esprit suffisamment puissant devait associer. Nous avons rencontré cet esprit en notre grand Henri Poincaré qui a écrit d'innombrables choses relatives à (a) et *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* en partant de (c). Le second point de vue a été poursuivi, notamment par M. George D. Birkhoff [1] et par MM. Nicolas Kryloff et N. Bogoliuboff [2]. Bien que le système (c) corresponde, en général, à une Mécanique *non linéaire*, il emprunte cependant à l'équation (a) une certaine maniabilité qui rappelle celle des opérations linéaires. L'association n'en reste par moins difficile à étudier et ce n'est pas à celle-ci, considérée dans toute sa généralité, que le présent fascicule est dédié. D'abord nous ne nous sommes guère élevé au-dessus du cas où n est égal à 2 ou à 3. Dans ces cas, nous étudions des *espaces à canaux* (ou *à tubes de congruences*) dans lesquels se propagent transversalement des fronts d'ondes susceptibles de s'émietter en corpuscules, d'où des aperçus qui rappellent, *en beaucoup plus élémentaire* mais d'une façon qui doit néanmoins fixer l'attention, les principales nouveautés de la Mécanique ondulatoire. On peut en juger tout de suite en se reportant à la liste de *conclusions analogiques* qui termine le Chapitre I.

Des publications préliminaires ont été faites en [3] et en [4]. MM. Bouligand, Giraud et Delens ont signalé [5], dans le même ordre d'idées, un important rapprochement entre congruences étudiées par M. Levi-Civita et un problème ressortissant à la Théorie du potentiel.

Ce fascicule contient quelques réflexions philosophiques d'ailleurs très réduites. Ce qu'il y a de plus saisissant doit certainement concerner cette nouvelle forme de la Connaissance où l'Incertitude s'incorpore logiquement à la Théorie. Ernest Renan, dans *L'Avenir de la Science* (16ᵉ édition, p. 58) a écrit : « La géométrie seule se formule en axiomes et en théorèmes. Ailleurs le vague est le vrai ». On peut ajouter aujourd'hui que les progrès de la Science n'ont pas rétréci mais étendu le domaine du vague et ce jusqu'aux régions physico-géométriques elles-mêmes.

Quant à l'essence même des possibilités théoriques ici développées, faut-il rappeler que, dans l'infinie complexité des phénomènes naturels, nous ne pouvons guère percevoir que des invariants et que la Science est faite de considérations invariantives. Or, le système (c) est remarquable parce qu'il comporte des *intégrales*, c'est-à-dire des fonctions qui restent constantes en vertu du système même, et l'équation (a) est peut-être plus remarquable encore parce qu'elle permet des invariances pour intégrales attachées à des champs d'intégration déformables dans des conditions qui peuvent être indéfiniment complexes.

D'ailleurs, en général, les deux choses sont réunies et tout problème physique tant soit peu évolué comporte, à la fois, des *intégrales* et des *invariants intégraux*.

CHAPITRE I.

STRUCTURES FINES A DEUX DIMENSIONS.

1. **Considérations antiponctuelles. Cellules.** — On a suffisamment répété, avec M. Louis de Broglie, que l'espace corpusculaire ne pouvait être celui des *figures* et des *mouvements* ordinaires. Des affirmations de ce genre se retrouvent, à l'heure actuelle, sous bien des aspects; il semble surtout qu'on soit porté à substituer, aux localisations si nettes de la géométrie ordinaire, des formes limites en lesquelles la structure géométrique ne se conserve pas entièrement.

Parfois, on constate tout à coup la disparition de quelque notion qui, à vrai dire, n'a jamais été bien définie, qui ne paraît même pas susceptible de l'être, mais qui, depuis les origines de la Science, n'en semblait pas moins jouer un rôle fondamental; tel est, par exemple, le cas de la notion de *point*.

Ainsi M. Oswald Veblen [6] écrit : The development of the quantum theory has several times suggested that mathematicians may be called on to devise a geometry in which there are no points.

Il existerait une géométrie, il vaudrait peut-être mieux dire une *agéométrie*, dans laquelle il n'y aurait plus de points. Et il semble qu'il y ait un grand nombre de manières de légitimer une telle invraisemblance.

On peut d'abord s'attaquer au *point matériel* qui fut toujours très fictif. Par le fait qu'on le qualifie de *matériel*, on lui prête les attributs de la matière ordinaire et, si l'on ne veut pas tomber dans le cercle vicieux déjà signalé par Henri Poincaré [7], à propos des atomes, et qui consiste à expliquer la matière par la matière, il faudra admettre que les corpuscules jugés élémentaires ne sont pas des objets, des individus localisables dans l'espace ordinaire à la façon d'un point.

Si l'on est porté à concéder des mouvements à ces corpuscules, leurs trajectoires ne seront pas non plus des courbes euclidiennes; ces trajectoires auront des *structures fines* tout en devant conserver certaines propriétés *métriques* correspondant à la possibilité de faire et d'utiliser encore des mesures bien que ce soit dans des conditions tout à fait nouvelles. Mais, si l'on ne considère plus que des trajectoires à structure fine, ce n'est pas par intersection de deux de ces lignes que l'on retrouvera l'une des définitions, ou des prétendues définitions, du point géométrique.

Une autre manière encore de présenter ces considérations consiste à faire du point l'espace sans étendue qui est, en revanche, l'élément localisateur essentiel. Or les incertitudes de Heisenberg, inhérentes au monde des structures fines, empêchent précisément de telles localisations. Il faut des figures à structure très conventionnelle pour que leur décroissance indéfinie donne une configuration limite. Bref le point apparaît comme une fiction incompatible avec certaines considérations physiques.

Il est extrêmement remarquable que, même dans ces mondes antiponctuels, il reste possible de faire des mesures et, plus généralement, de considérer des intégrales qui se conservent même quand les domaines d'intégration perdent plus ou moins leurs propriétés de continuité. Le but du présent opuscule est surtout d'étudier une catégorie de telles intégrales.

Quant à l'évanouissement des conceptions et des correspondances ponctuelles, de nombreux aperçus philosophiques sur la question sont dus à Eddington, Langevin, etc; *voir* Chap. III. M. Paul Renaud [8] considérant que le point est un concept inaccessible, lui substitue la notion de *cellule de connaissance*. Ces cellules, considérées d'abord dans un espace à deux dimensions, dans un plan, peuvent y former des réseaux favorables aux mesures et particulièrement faciles à utiliser si les cellules sont différemment coloriées. Mais la précision de la mesure et la facilité du coloriage sont choses qui s'opposent; un véritable point n'est pas coloriable. Il y a là des oppositions qui sont de la nature des incertitudes de Heisenberg.

M. Renaud voit, en tout ceci, avec raison, des considérations structurales qui renseignent sur la structure de notre pensée. Le déterminisme classique est ponctuel; il laisse présager un déterminisme ondulatoire, plus général, complétant le premier comme les ondes ont complété les mouvements ponctuels. *Il peut exister un tout cohérent où rien cependant n'est défini de façon absolue.* Ceci rappelle Auguste Comte prévoyant qu'*au-dessous du réel observé par le physicien et réglé par des lois pourrait se trouver un réel plus profond et entièrement déréglé* [8 *a*].

2. Deux opinions de Laplace. — Le développement des théories quantiques ou ondulatoires prend parfois un caractère trop exclusivement actuel. Les Anciens n'ont pas été sans avoir quelques pressentiments de la forme de la Science d'aujourd'hui. Mais nous ne remonterons pas jusque-là. Entre certaines citations concernant l'Antiquité et les exposés modernes, et d'ailleurs beaucoup plus près de ces exposés, on peut citer deux opinions de Laplace [9] qui m'ont toujours semblé injustement et fâcheusement oubliées.

Dans son *Exposition du Système du Monde*, Édition de 1846, Laplace, page 156, écrit : « La nature de cette modification singulière en vertu de laquelle un corps est transporté d'un lieu dans un autre est et sera toujours inconnue ».

Plus loin, page 164 : « Nous avons dans la pesanteur un exemple journalier d'une force qui semble agir sans interruption. A la vérité nous ignorons si ses actions successives sont séparées par des intervalles de temps dont la durée est insensible ».

La première citation montre que les questions de localisation étaient déjà singulièrement obscures pour Laplace. La seconde que la notion de quantification ne répugnait pas à cet illustre esprit et qu'elle n'était écartée que pour des raisons provisoires de commodité.

3. Structures fines. Intégrales de Stieltjes. — La Mécanique ondulatoire, la Gravifique (et ces deux formes de la Science semblent faites pour se compénétrer et finalement s'identifier) n'ont pas été construites de manière plus ou moins fortuite et les résultats qu'elles donnent ne sont pas dus à des hasards plus ou moins heureux. Elles naissent toutes deux d'extensions de la notion de *mesure*. La Physique n'a nullement à être euclidienne ou non euclidienne; l'essentiel est qu'elle soit *métrique* et, dès lors, on est en droit d'attendre quelque chose de toutes les métriques. La Gravifique utilise la métrique riemannienne pour laquelle

$$ds^2 = g_{ij}\,dx_i\,dx_j. \tag{1}$$

La Mécanique ondulatoire utilise une métrique de structures fines, identique, au fond, à ce que donne la mesure des ensembles. On peut, dans de telles structures, construire des ds^2 de la forme (1) ce qui a été fait par M. Th. De Donder [10] qui, dans le monde électronique, imagine des *ultra-électrons* dont le rôle est précisément d'assurer l'existence physique de ds^2 riemanniens.

On peut arriver à ces conclusions par une autre voie encore : celle des *intégrales de Stieltjes*. Ces intégrales, généralement prises sur des structures fines, suffisent à expliquer les nouveautés métriques propres aux théories corpusculaires et ondulatoires et ceci sans aucune culture du paradoxe. En descendant dans le monde de la microphysique, il n'y a aucune raison pour qu'on y retrouve les *formes* conçues à l'échelle ordinaire; les idées de configuration limite, de tangente, de dérivée, disparaissent cependant que des notions intégrales subsistent. C'est ouvrir un champ de recherches immense que d'étudier cette dernière conservation au sujet de laquelle des développements comme ceux qui vont suivre ne sont jamais que très simples [11].

Soit un triangle ABC dont la base BC $= a$ est divisée en n parties

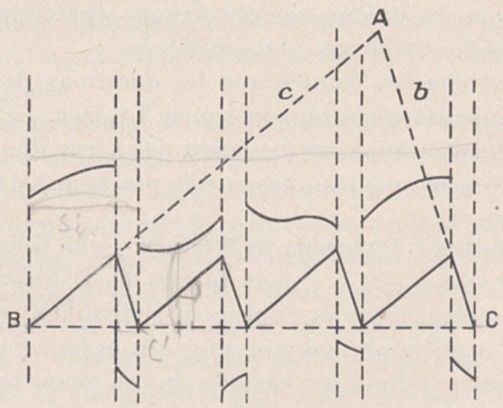

Fig. 1.

égales S_i. Sur chaque segment S_i on construit, comme l'indique la figure 1, un triangle semblable à ABC d'où l'obtention d'une ligne L en dents de scie allant de B en C. Cette ligne L est évidemment une fonction continue à laquelle on peut attribuer une équation $y = F(x)$ si BC sert d'axe des x et si B est l'origine. *Quel que soit* n, la ligne L, de B en C, est rectifiable et a pour longueur $b + c$. Par les sommets de L, y compris B et C, menons maintenant des perpendiculaires (pointillées sur la figure) à BC. On obtient ainsi $2n$ intervalles. Dans le premier soit un arc de courbe à ordonnées positives, dans le second un arc à ordonnées négatives, dans le troisième un arc à ordonnées positives et ainsi de suite. L'ensemble de ces arcs constitue une fonction discontinue $y = f(x)$. L'intégrale

$$\int_0^a f(x)\,dF(x), \tag{2}$$

qui est une intégrale de Stieltjes, a certainement un sens quel que soit n c'est-à-dire quelque fine que devienne la structure de la scie. Si les choses se passent comme sur la figure, tous les éléments de l'intégrale (2) sont même positifs.

Si, dans (2), $f(x)$ *se réduit à une même constante, pour tout l'intervalle* BC, *l'intégrale est nulle*. Évident. Même résultat si $f(x)$ est la constante h_i sur S_i.

Si, dans (2), $f(x)$ *est remplacé par* $f(x) + h_i$, *sur* S_i, *l'intégrale est invariante*. Conséquence immédiate de l'assertion précédente. Elle fait concevoir une propagation corpusculaire pendant laquelle une intégrale (2) resterait invariante.

Plus généralement une intégrale (2), sans rester invariante, peut jouer un rôle intéressant dans une propagation corpusculaire et elle doit ce rôle à la ligne singulière L, d'autant plus singulière que n est plus grand et tendant, pour n croissant indéfiniment, vers une *fonction continue sans dérivée*.

On pourrait évidemment refaire tous les raisonnements afférents à la ligne L en la remplaçant par une ligne *ordinaire* allant de B en C et pouvant, à la limite, se confondre avec le segment *ordinaire* BC. Mais alors, à la limite, $F(x)$ serait identiquement nulle, il en serait de même de l'intégrale (2) et l'on ne voit pas ce que l'on pourrait tirer d'utile ou d'intéressant de ces identiques nullités.

Comme quoi les fonctions continues sans dérivées, les intégrales de Stieltjes et d'ailleurs d'autres conceptions relevant du même ordre d'idées, peuvent jouer des rôles fondamentaux dans l'étude de propagations corpusculaires.

Terminons par une remarque encore fort curieuse. La ligne L se compose de deux sortes de segments correspondant respectivement aux équations différentielles

$$y' - \operatorname{tang} B = 0, \qquad y' + \operatorname{tang} C = 0.$$

Celles-ci peuvent être remplacées par l'équation unique

$$y'^2 - (\operatorname{tang} B - \operatorname{tang} C) y' - \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = 0 \tag{3}$$

qu'on pourra toujours vérifier en un point quelconque, même singulier, de la ligne brisée L. Et, ce résultat étant indépendant de n, il semble bien qu'on ait le droit de dire qu'il est encore valable pour n croissant indéfiniment. Mais, dans ce dernier cas, y tend vers une fonction continue *sans dérivée* et y', *n'existant plus*, ne peut pas vérifier une équation différentielle telle que (3).

Cette contradiction rentre dans les *conditions catastrophiques* de M. Georges Bouligand, conditions « telles que le symbolisme auquel nous ont habitué les démonstrations classiques devienne, de par la généralité des hypothèses, dépourvu de tout sens » [12].

Quoiqu'il en soit, de telles circonstances sont choses courantes dans les théories ondulatoires et corpusculaires. On pourrait, à leur sujet, épiloguer indéfiniment, les imperfections du langage et de la pensée figurée se faisant complices de la difficulté mathématique proprement dite. Ainsi on pourrait prétendre que, même lorsque n croît indéfiniment il y a, toujours et partout, *sur la structure fine* de BC, des pentes tang B ou — tang C. Oui, mais, *pour un x donné*, il n'y a pas aboutissement à un dy ou à un y' bien défini. On s'approche au moins d'un cas ou la cohérence, qu'on ne se résigne pas à abandonner, n'existe qu'entre concepts imparfaitement définis, cas analogue à celui signalé précédemment, à la fin du paragraphe 1.

4. **Structures fines plus générales. Canaux.** — Substituons maintenant aux coordonnées x, y des coordonnées curvilignes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$. Dans le réseau en P et Q, on pourra imaginer des déformations de la ligne brisée L précédente auxquelles seront attachées des intégrales, généralisant (2),

$$\int f(P)\, d[F(P) - \Phi(P)], \tag{4}$$

la ligne $Q = \Phi(P)$ devenant quelconque, avec ou sans structure fine, et remplaçant la base BC de la figure 1. Là encore, il y a une propagation corpusculaire adjointe à (4), mais les lignes à Q constant n'étant plus parallèles entre elles comme les droites à y constant, les corpuscules ont, en général, des rotations sur eux-mêmes.

Si, en (4), $F - \Phi$ devient une fonction susceptible d'être différentiée, au sens analytique ordinaire du mot, l'intégrale (4) prend la forme

$$\int_c \Lambda(P)\,dP = \int_C \Lambda(P)\,dP, \tag{5}$$

pour deux arcs c et C quelconques dont les extrémités sont sur deux courbes P_1 et P_2 d'équations $P = \lambda_1$ et $P = \lambda_2$.

Inversement, on aurait pu partir des intégrales de différentielle exacte (5) et remonter à l'intégrale de Stieltjes (4) qui est plus subtile. Nous allons étendre (5) dans un ordre d'idées analogue mais qui nous permettra, d'une manière particulièrement simple, d'attacher, à l'extension, des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles ou même des équations fonctionnelles d'un type très général.

Considérons un *canal* formé de deux courbes infiniment voisines d'équations respectives $P = \lambda$ et $P = \lambda + d\lambda$. Ce canal détermine ds,

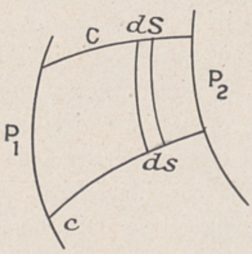

Fig. 2.

sur c, en x, y et dS, sur C, en X, Y. Attribuons provisoirement, à la courbe C, une équation $\Phi(X, Y) = 0$, la fonction Φ ayant, au moins, des dérivées partielles du premier ordre. On fera des hypothèses de même nature sur c, courbe qui, en ds, aura une normale de cosinus directeurs α, β.

$dx = -\beta\,ds$
$dy = \alpha\,ds$
$dP = P_x\,dx + P_y\,dy$
$= (-P_x\beta + P_y\alpha)\,ds$

Dans ces conditions, l'égalité (5) peut s'écrire

$$\int_c \Lambda(P) \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ P_x & P_y \end{vmatrix} ds = \int_C \frac{\Lambda(P)}{\Theta(X, Y)} \begin{vmatrix} \Phi_X & \Phi_Y \\ P_X & P_Y \end{vmatrix} \frac{\Theta(X, Y)\,dS}{\sqrt{\Phi_X^2 + \Phi_Y^2}}. \tag{6}$$

La fonction $\Theta(X, Y)$ est évidemment arbitraire.

Posons

$$\frac{1}{\Theta\sqrt{\Phi_X^2+\Phi_Y^2}}\begin{vmatrix}\Phi_X & \Phi_Y \\ P_X & P_Y\end{vmatrix} = \begin{cases}\Delta(X, Y), \\ \Delta_1(P, \Phi), \\ \Delta_1(P, 0) \text{ sur } C.\end{cases} \tag{7}$$

On arrive ainsi à l'intégrale en propagation invariante, dans les canaux considérés, *sur toute une famille d'arcs* C,

$$\int_C \Lambda(P)\Delta_1(P, 0)\Theta(X, Y)\,dS = \int_C \Theta\,dS, \tag{8}$$

si

$$\Lambda(P)\Delta_1(P, 0) = 1. \tag{9}$$

Expliquons-nous plus en détail. Les canaux et, par suite, la fonction P sont, pour le moment, supposés donnés. On part d'*une* courbe C particulière, donc d'*une* fonction $\Phi(X, Y)$ particulière. Avec cela, on calcule le premier membre de (7) et l'on obtient $\Delta(X, Y)$ qui, en variables P, Φ, devient $\Delta_1(P, \Phi)$. Cette dernière expression, sur la courbe C, est évidemment $\Delta_1(P, 0)$. Mais fixons surtout notre attention sur $\Delta_1(P, \Phi)$.

Lorsqu'on a obtenu ce second membre, on a bien, en (7), une équation aux dérivées partielles, en Φ, qui est vérifiée par la fonction Φ d'où l'on est parti mais qui peut être vérifiée aussi par une famille de fonctions beaucoup plus générale. D'où une famille de courbes C propageant l'intégrale (8), en $\Theta\,dS$, si la condition (9) est réalisée; mais cette dernière peut toujours l'être par le choix de $\Lambda(P)$.

Prenons un exemple déjà considéré [13], [14], [4] mais que nous pouvons compléter ici de manière particulièrement intéressante.

Soit un cercle de centre O et de rayon R. Les rayons constitueront les canaux. Quelles sont les courbes sur lesquelles deux rayons interceptent un arc égal à celui intercepté sur le cercle?

Si l'on traitait le problème directement, à l'aide des équations

$$ds = R\,d\theta, \qquad ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$

on se servirait, comme on voit, des coordonnées polaires r, θ. On est donc conduit à poser

$$\Phi = \frac{r}{R} - 1 = 0, \qquad P = \theta$$

avec

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \theta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

et en écrivant x, y pour X, Y, puisque r et θ sont minuscules.

Le premier membre de l'équation (7), pour $\Theta = 1$, prend la valeur

$$\frac{1}{R(\Phi + 1)}$$

ce que l'on obtient aussi avec

$$\Phi = \frac{x^2 + y^2}{R(x\cos\omega + y\sin\omega)} - 1 = \frac{r}{R\cos(\theta - \omega)} - 1 = 0.$$

Les courbes cherchées sont des cercles, de diamètre R, passant par O. Ces cercles ont pour enveloppe le cercle donné, il en passe deux par tout point intérieur à ce çercle distinct de O, ils forment une famille correspondant à la constante arbitraire ω. Ce résultat peut être vérifié immédiatement par la théorie des angles inscrits ; il est *analytique*. Nous l'étendrons bientôt dans le domaine non analytique des structures fines.

A propos des *espaces à canaux*, qui viennent déjà d'apparaître dans ce paragraphe, notons que ce sont des cas particuliers des *espaces fibrés* de M. W. Threlfall [54]. *Voir*, ci-après, la fin du Chapitre III.

5. **Équation de Schrödinger.** — Reprenons les généralités des équations (6) et (7). L'intégrale (6) peut être empruntée à la formule de Green

$$\int_a (\alpha F + \beta G)\, ds = \int\int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) dx\, dy \tag{10}$$

en laquelle A est une aire à frontière fermée a. Cette formule (10) est, elle-même, une conséquence de l'identité

$$\int_a X\, dY = \int\int_A dX\, dY \tag{11}$$

qui, comme nous l'avons toujours montré, peut être considérée comme le point de départ de toutes les recherches de Physique théorique.

En (10), le contour fermé a peut être le quadrilatère (*fig.* 2) dont les côtés sont P_1, c, P_2, C. On doit avoir, de plus,

$$F = \Lambda(P) P_y, \qquad G = -\Lambda(P) P_x, \tag{12}$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

Alors, sur chacun des côtés P_1, P_2, l'intégrale de ligne est nulle et la formule (6) suit immédiatement. D'autre part, quelles que soient les fonctions F et G, on peut toujours poser

$$F\,dx + G\,dy = u^2\,d\frac{v}{u} = u\,dv - v\,du \tag{14}$$

car ceci n'est autre chose que la considération d'un certain facteur intégrant pour l'équation différentielle

$$F\,dx + G\,dy = 0. \tag{15}$$

De (14) on conclut

$$F = uv_x - vu_x, \qquad G = uv_y - vu_y \tag{16}$$

et (13) donne alors

$$u\,\Delta v - v\,\Delta u = 0, \tag{17}$$

si Δ est le laplacien à deux variables. Ceci donne

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta v}{v} = \Omega(x, y).$$

D'où l'équation de Schrödinger

$$\Delta W - \Omega W = 0 \tag{18}$$

dont u et v sont alors deux solutions. En Mécanique ondulatoire, il importe de pouvoir prendre arbitrairement la fonction Ω. Supposons donc que l'on commence par là. Avec deux solutions, u et v, de (18), on formera, par (16), les fonctions F et G qui vérifieront forcément (13) d'où ensuite, par (12), la fonction P, c'est-à-dire le choix d'un système de canaux, de trajectoires possibles. Ceci, remarquons-le, sans rien qui, jusqu'ici, soit équivalent à l'introduction d'un temps t, d'un mode de parcours concernant les canaux ou trajectoires en question. Le temps t est certainement inséparable de la Dynanique classique mais vouloir le transporter, sans discernement et comme une notion première, en Mécanique ondulatoire c'est probablement vouloir passer du domaine grossier au domaine subtil avec un manque absolu de précautions. Il est cependant probable aussi qu'il y a, dans les domaines corpusculaires, des notions de nature temporelle mais elles doivent être adéquates à ces domaines et non au domaine astronomique d'où provient la variable t habituelle.

Au point de vue philosophique — auquel nous n'accordons ici que fort peu — tout ceci est magnifiquement développé dans un ouvrage de M. Gustave Juvet [15]. On y lit (p. 129) qu'il faut renoncer à suivre un corpuscule sur sa trajectoire et (p. 132) que personne n'a jamais pu mesurer la durée de révolution d'un électron sur son orbite.

6. **Structures fines incluses dans les courbes ordinaires.** — Nous allons reprendre, à l'aide des considérations circulaires terminant le paragraphe 4, des choses qui, à vrai dire, pourraient aussi bien se déduire des considérations rectilignes de la figure 1. Mais nous ferons mieux ressortir ainsi l'extrême variété qui s'attache à la notion de structure fine.

Revenons donc au cercle de centre O, de rayon R ou a, et à deux rayons quelconques OA ou OB pour rechercher les courbes sur lesquelles ces rayons interceptent des arcs égaux à l'arc AB du cercle primitif. Prenons, cette fois, la solution directe correspondant à l'équation différentielle

$$ds = a\,d\theta \quad \text{ou} \quad dr^2 + r^2\,d\theta^2 = a^2\,d\theta^2 \tag{19}$$

dont l'intégrale générale est

$$r = a\cos(\theta - \omega). \tag{20}$$

Elle représente tous les cercles, de diamètre a, passant par O, donc tangents intérieurement au cercle donné. Par tout point M, intérieur à ce dernier et distinct du centre, on peut faire passer deux cercles (20) symétriques l'un de l'autre par rapport à la corde commune OM. Le cercle donné, enveloppe des cercles (20), est solution singulière de l'équation différentielle (19).

Voilà, sans doute, tout ce que l'on peut dire de la question au point de vue *analytique*. Mais il en est tout autrement si l'on abandonne ce point de vue.

Ainsi soient des rayons voisins OA, OB, OC, ...; je pars de α, sur OA, avec l'un ou l'autre des arcs $\alpha\beta$ ou $\alpha\gamma$ égaux à AB. En β, je ne suis pas forcé de continuer analytiquement l'arc $\alpha\beta$ en $\beta\delta$; je puis poursuivre continûment avec $\beta\varepsilon$ et, en ε, un choix analogue sera

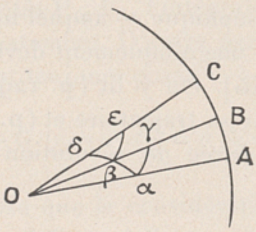

Fig. 3.

encore possible. Ainsi de suite. Un chemin tel que $\alpha\beta\varepsilon\ldots$, quand les éléments $\alpha\beta$, $\beta\varepsilon$, ..., deviendront infiniment petits en même temps que AB, BC, ..., ne cesse point pour un observateur indéfiniment subtil, qui en a toujours la génération présente à l'esprit, de satisfaire à l'énoncé initial. Même si l'on contestait qu'un continuum tel que $\alpha\beta\varepsilon\ldots$ satisfasse à l'équation différentielle (19), on ne pourrait élever la même contestation quant au problème *intégral* qu'une équation différentielle a peut-être le tort de traduire trop à l'étroit.

Il y a une infinité fort indéterminée de courbes vulgaires que l'on pourrait tracer, sur la figure, avec un crayon donnant toujours un trait d'une certaine largeur, trait dans l'épaisseur duquel un observateur subtil pourrait inscrire un chemin $\alpha\beta\varepsilon\ldots$; *c'est ainsi qu'une courbe grossière quelconque peut comporter une structure fine ou, plus exactement, une structure indéfiniment fine qui résout certaines questions physiques pour un observateur subtil et précisément là où un observateur grossier n'obtiendrait rien.*

Un chemin tel que $\alpha\beta\varepsilon\ldots$, quand les points anguleux, tels β, sont indéfiniment rapprochés est un nouvel exemple de fonction continue sans dérivée; satisfait-il à l'équation différentielle (19) qui, elle, suppose une dérivée r' par rapport à θ. Cette question est relative à une circonstance catastrophique analogue à celle signalée à propos de l'équation (3) mais le problème initial, relatif à une équivalence d'arcs, n'en est pas moins résolu par le chemin $\alpha\beta\varepsilon\ldots$ considéré. Les fonctions n'ont pas « tout intérêt à avoir une dérivée » comme le voulait Joseph Boussinesq [16]; cela dépend essentiellement de la structure attribuée aux phénomènes et de l'échelle à laquelle on les étudie.

Le Problème du Déterminisme peut encore trouver ici d'intéressants développements.

Le chemin $\alpha\beta\varepsilon\ldots$ n'est nullement déterminé par son premier élément $\alpha\beta$. Où va-t-on en partant de α? Cela n'est pas encore décidé. C'est exactement la seule réponse que l'on puisse faire, avec Sir Arthur Eddington [17], lorsqu'on s'interroge sur le comportement d'une trajectoire électronique.

Les *incertitudes de Heisenberg* peuvent encore être facilement illustrées dans l'ordre d'idées actuel. Sur un chemin $\alpha\beta\varepsilon\ldots$, *à structure indéfiniment fine*, une localisation de plus en plus réduite empêche, de plus en plus, la conception d'une tangente ou, si l'on préfère, l'ensemble des tangentes ne tend vers aucune configuration limite quand la structure s'affine de plus en plus.

Et, sur l'ensemble du chemin, les tangentes parallèles à une direction donnée tendent à devenir infiniment nombreuses si bien qu'une direction de tangente ne localise nullement une position.

Que l'on traduise ceci dans le langage cinématique, les tangentes devenant des vitesses, et l'on aura bien, comme il a été dit, les fameuses incertitudes qui empêchent de préciser indéfiniment, à la fois, et la position et la vitesse.

Une autre singularité, attachée à la notion de mesure, est que, dans la Mécanique nouvelle, une mesure n'est pas forcément *répétable* (*Voir* Chap. III).

7. **Structures fines et équations différentielles.** — On conçoit immédiatement la nature intime des structures fines étudiées à propos des équations différentielles (3) et (19). Ces équations définissent des *réseaux;* par chaque point du plan, il passe *deux* courbes intégrales et *le long d'une courbe quelconque* (non intégrale) on peut emprunter au réseau un chemin brisé qui diffère d'aussi peu qu'on veut de cette courbe quelconque.

Le système (7) peut donner de tels résultats d'une infinité de manières. Si, par exemple, le second membre est réduit à $\Delta_1(P, 0)$

et que, sur la courbe $\Phi = 0$, on pose

$$\Phi_x + \Phi_y y' = 0,$$

on a une équation différentielle du premier ordre et du second degré en y'.

Avant de chercher à généraliser ce résultat, il est intéressant de se demander si l'on ne pourrait pas le particulariser encore, le rattacher notamment à une équation différentielle

$$\text{(21)} \qquad A\,dx + B\,dy = 0$$

qui serait à la fois du premier ordre *et du premier degré*. Or il y a quelque chose d'intéressant à faire en ce sens en multipliant l'équation (21) par un facteur $\mu(x, y)$ de manière à la mettre sous la forme

$$\text{(15)} \qquad F\,dx + G\,dy = 0$$

avec

$$\text{(13)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

La condition (13), qui joue un rôle fondamental en Physique théorique (évanouissement d'une divergence), donne ici

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu A) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu B) = 0$$

et, si l'on développe, on voit que la détermination de μ dépend de la nouvelle équation

$$\text{(22)} \qquad B\,dx - A\,dy = 0$$

qui, aux courbes intégrales de (21), associe leurs trajectoires orthogonales. On peut alors reprendre le raisonnement du paragraphe 5, à partir de l'équation (14), et l'on met ainsi l'intégrale générale de (21) sous la forme $v = Cu$, si C est une constante arbitraire et si u et v sont deux solutions d'une équation de Schrödinger (18).

Inversement, si u et v sont deux solutions d'une équation de Schrödinger (18), on peut toujours poser

$$u^2\, d\frac{v}{u} = P_y\,dx - P_x\,dy$$

c'est-à-dire

$$P_y = uv_x - vu_x, \qquad -P_x = uv_y - vu_y,$$

ces équations étant compatibles précisément en vertu de (18).

On voit que l'équation de Schrödinger peut être associée à une chose aussi banale que celle constituée par une famille de courbes planes et par les trajectoires orthogonales de cette famille. Ce réseau orthogonal peut servir à créer des structures fines qui sont alors attachées à l'équation différentielle

$$(\mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy)(\mathrm{B}\,dx - \mathrm{A}\,dy) = 0. \tag{23}$$

L'équation de Schrödinger n'est donc pas une création transcendante véritablement issue d'une microphysique déjà développée; on peut la trouver dans des questions très élémentaires concernant les premiers principes de l'Analyse et de la Géométrie infinitésimales.

Ces considérations, relatives à des tracés plans, donnent aussi des choses intéressantes sur les surfaces. L'équation (23), développée en

$$\mathrm{AB}\,dx^2 + (\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)\,dx\,dy - \mathrm{AB}\,dy^2 = 0, \tag{24}$$

est identifiable avec l'équation

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

de la projection des lignes asymptotiques d'une surface $z = z(x, y)$, si $r + t = 0$, donc quand il s'agit de *surfaces harmoniques*. Les asymptotiques de ces surfaces donnent, en projection sur Oxy, un réseau plan orthogonal.

De même l'équation des lignes de courbure

$$dq(dx + p\,dz) = dp(dy + q\,dz),$$
$$(dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy),$$

est identifiable avec (24) si

$$(p^2 - q^2)s = pq(r - t).$$

C'est là une équation de Monge-Ampère qui admet l'intégrale intermédiaire

$$p^2 + q^2 = \Phi(z)$$

des *surfaces moulures* engendrées par une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre, à section droite quelconque, dont les génératrices sont parallèles à Oz. Les lignes de courbure de ces moulures se projettent, sur Oxy, suivant un réseau orthogonal formé des tangentes et des développantes de la section droite.

Ces considérations, toujours si simples, ne vont pas sans aperçus philosophiques assez troublants.

Imaginons *tracée*, au hasard, sur une surface quelconque, une ligne quelconque H. Cette ligne H n'est ni une ligne de courbure, ni une asymptotique, ni une géodésique. Cependant, par le seul fait que je la suppose *tracée*, je puis imaginer, *incluses dans le trait*, diverses structures fines l'une formée, par exemple, d'éléments de lignes de courbure, l'autre d'éléments d'asymptotiques, une troisième d'éléments de géodésiques.

Un observateur subtil, d'ailleurs particularisé dans l'étude des lignes de courbure, ne pourrait-il avoir une préférence pour la première structure qu'il déclarera particulièrement justifiée cependant que deux autres observateurs, également subtils, mais ayant d'autres préférences géométriques croieront mieux rendre compte de la nature de H en invoquant soit la structure asymptotique, soit la structure géodésique?

Les objections à ce raisonnement ne sont pas impossibles. On peut prétendre, par exemple, qu'un géomètre ne peut être spécialisé dans les lignes de courbure sans connaître aussi bien les asymptotiques mais ceci tient au caractère extrêmement rudimentaire des exemples précédents. Il n'en subsiste pas moins que des observateurs subtils différents peuvent concevoir des structures fines en rapport avec leurs préférences, leur formation intellectuelle, peut-être même avec le désir d'aboutir à une structure plutôt qu'à une autre.

Alors développer la subtilité géométrico-analytique et l'esprit de finesse reste sans doute un moyen de faire des constructions délicates et harmonieuses mais ce n'est pas sûrement un moyen d'homogénéiser et d'unifier la Science. La subtilité menace d'avoir une infinité de formes. Il resterait toutefois la ressource de reconnaître franchement une telle chose et de chercher à en rendre les effets aussi anodins que possible.

Tout ceci ne fait que paraphraser ces lignes célèbres dues encore à Eddington [18] : We have found a strange foot-print on the shores of the unknow. We have devised profound theories to account for its origin. At last, we have succeeded in reconstructing the creature that made the foot-print. And Lo! it is our own.

On pourrait encore invoquer les aperçus sur le libre arbitre dus à Émile Boutroux. La plus grande subtilité ne peut faire découvrir du définitif au fond des choses; nous n'y trouverons jamais que le reflet de nous-mêmes, de nos pensées, de nos manières de sentir et d'évaluer.

8. **Structures fines du point de vue fonctionnel. Quantification.** — Nous nous sommes proposé, dans le paragraphe précédent, de relier la question des structures fines à des considérations aussi élémentaires que possible. Il faudrait maintenant faire l'inverse et rechercher les généralités à attacher notamment au système (7). Dans cette voie, on est vite aux limites de l'Analyse mais il y a d'indéniables élégances à mettre en évidence.

D'abord, la construction de $\Delta_1(P, \Phi)$, en (7), peut aisément être généralisée et de façon considérable. On peut poser que $\Delta_1(P, \Phi)$ sera une construction fonctionnelle quelconque dépendant, par exemple, de tout un symbolisme de dérivations partielles pourvu toutefois d'un facteur Φ de telle sorte que, pour $\Phi = 0$, on ait une expression $\Delta_1(P, 0)$ permettant une construction nette de l'équation (9).

Ainsi, il pourra y avoir, en (7), des équations aux dérivées partielles, en Φ, d'ordre quelconque.

On pourra leur faire correspondre des courbes intégrales, $\Phi = 0$, extrêmement diverses et formant, dans les canaux $P = \text{const.}$, des configurations transversales prolongées, continûment ou non, quand on passe de canal à canal contigu. Les canaux devenant de plus en plus étroits, on arrivera ainsi à des propagations *corpusculaires*, chaque corpuscule tenant cependant à toute une ligne qui joue le rôle de *front d'onde* et qui le pilote. Cette conception, généralement considérée comme très nouvelle, ne l'est peut-être pas autant qu'on l'a dit. Les fronts d'onde à structure fine (ou les trajectoires corpusculaires, comme nous allons le voir dans les deux paragraphes suivants) ne sont pas comparables à des lignes euclidiennes, comme nous l'avons déjà dit au paragraphe 1, mais ceci n'empêche pas que la définition du point, comme intersection de deux lignes, rappelle précisément le corpuscule dont l'existence ne paraît pouvoir être assurée que sur un front d'onde.

Parmi les constructions arbitraires de $\Delta_1(P, \Phi)$, il faut particulièrement remarquer celles où Φ figurera de manière périodique. Si 2π est la période, on peut alors tirer, de (7), non seulement des fronts d'onde $\Phi = 0$ mais les fronts $\Phi = 2k\pi$ avec k entier arbitraire. Une *quantification* apparaît.

On voit que la généralité des intégrales de Stieltjes, un instant abandonnée en (5), est largement retrouvée en (6), (7), (9), avec des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles, des équations fonctionnelles, qui peuvent être fort diverses.

9. **Fronts d'ondes et trajectoires corpusculaires.** — Jusqu'ici les canaux étaient formés de courbes euclidiennes et les fronts transversaux, quoiqu'ayant une structure fine, ne perdaient pas la continuité. Or aucune de ces deux choses ne semble d'accord avec l'expérience. Ce n'étaient que des conceptions analytico-géométriques transitoires qui vont maintenant se transformer dans un sens plus acceptable.

Reprenons l'équation (6) et remplaçons, dans l'intégrale du second membre,

$$(25) \qquad \Theta(X, Y) \quad \text{par} \quad \Theta(X, Y)\sqrt{P_X^2 + P_Y^2}.$$

Alors l'équation (7) peut s'écrire

$$(7, a) \qquad \frac{1}{\Theta\sqrt{P_X^2 + P_Y^2}\sqrt{\Phi_X^2 + \Phi_Y^2}} \begin{vmatrix} \Phi_X & \Phi_Y \\ P_X & P_Y \end{vmatrix} = \begin{cases} \Gamma\,(X, Y), \\ \Gamma_1(P, \Phi), \\ \Gamma_1(P, 0) \text{ sur C}. \end{cases}$$

Les formules (8) et (9) deviennent alors respectivement

$$(8, a) \qquad \int_C \Lambda(P)\Gamma_1(P, 0)\Theta(X, Y)\sqrt{P_X^2 + P_Y^2}\,dS = \int_C \Theta\sqrt{P_X^2 + P_Y^2}\,dS$$

et

$$(9, a) \qquad \Lambda(P)\Gamma_1(P, 0) = 1.$$

Or l'équation (7, a) a évidemment des structures, sinon identiques, du moins analogues en P et en Φ. Dans ces conditions, les considérations de structure fine, rapportées jusqu'ici aux fronts d'ondes, doivent s'étendre tout naturellement aux canaux, c'est-à-dire aux trajectoires corpusculaires. Même lorsque ces trajectoires sont continues, on voit qu'elles doivent avoir, en général, une structure fine qui les fait essentiellement différer de la trajectoire du point matériel de la Mécanique classique. Nous ne pouvons donc pas, toujours en général, nous représenter géométriquement, de façon tangible, une trajectoire corpusculaire et notamment électronique. C'est quelque chose de particulièrement subtil qui ne se dessine pas avec de la mine de plomb, de l'encre, de la craie, de la matière déjà constituée.

Puis, comme les fronts d'ondes peuvent être discontinus en se brisant de canal à canal contigu, il faudra admettre, toujours par analogie, qu'il peut en être de même des trajectoires, des canaux eux-mêmes et nous serons conduits, sinon par l'intuition, du moins par la logique de l'Analyse, à concevoir le corpuscule se révélant en des lieux différents mais dont on perd la trace en des lieux jugés intermédiaires de par notre conception vulgaire de l'espace.

N'oublions pas de signaler le cas particulier, très intéressant, où $\Gamma_1(P, \Phi)$ est tel que l'équation $(7, a)$ se conserve *exactement* quand on permute P et Φ.

10. Considérations groupales. — Après la permutation qui vient d'être signalée, nous allons aborder des transformations, formant un certain groupe, qui conservent le système (7) ou, tout au moins, sa structure globale. Posons

$$Q = P + f(\Phi), \tag{26}$$

la fonction f, considérée comme donnée, étant dérivable par rapport à Φ, d'où

$$Q_X = P_X + f'(\Phi)\Phi_X, \qquad Q_Y = P_Y + f'(\Phi)\Phi_Y.$$

L'équation (7) avec second membre $\Delta_1(P, \Phi)$, peut, sans subir aucun changement, être écrite

$$\frac{1}{\Theta\sqrt{\Phi_X^2+\Phi_Y^2}}\begin{vmatrix} \Phi_X & \Phi_Y \\ Q_X & Q_Y \end{vmatrix} = \Delta_1[Q - f(\Phi), \Phi]. \tag{7, b}$$

Mais alors, le second membre peut être considéré comme une des constructions arbitraires, indiquées au paragraphe 8, et simplement assujetties à avoir un sens pour $\Phi = 0$. Et, dans ces conditions, l'équation (7), prise sous la forme $(7, b)$, se rapporte à des canaux (Q), d'équations $Q = \text{const.}$, avec Q toujours défini en (26).

Ainsi, du système (P) des canaux primitifs et avec le secours d'un front d'onde, on peut déduire de nouveaux canaux (Q) propres, tout comme les (P), à transmettre certaines invariances intégrales transversales qui, elles, ne dépendent toujours que de fronts (Φ) d'abord associés aux canaux (P).

Ceci établit un nouveau mode d'alliance entre ondes et trajectoires, mode qui s'ajoute à celui signalé au paragraphe précédent.

Il y a aussi là une certaine illustration des complications que peuvent subir d'anciennes théories ondulatoires quand on cherche à les mettre sous forme corpusculaire. Les corpuscules pourraient avoir plusieurs manières de se faire piloter et, entre autres cas, les théories photoniques de la lumière apparaissent comme ayant de profondes indéterminations que ne présente nullement l'ancienne optique ondulatoire.

Enfin si, des canaux (P), on déduit des canaux (Q) on peut, de même, des canaux (Q), déduire des canaux (R) qui auraient pu être déduits directement des (P). C'est en ceci que les canaux ou trajectoires corpusculaires sont soumis à des transformations formant *groupe*, ce qui a grande importance, car une étude générale et directe de l'équation (7) est absolument chimérique; il faut se rabattre sur ses transformations, comme on a fait jusqu'ici pour l'équation de Schrödinger.

11. Permutations de symboles opératoires. — Nous avons déjà attiré l'attention sur l'équation (13) qui, exprimant l'évanouissement d'une divergence, doit être, malgré l'extrême simplicité qu'elle affecte dans le cas de deux variables, rapprochée des équations fondamentales de la Physique théorique. Cette équation (13) provenait des équations (12) qui donnent aussi

$$FP_x + GP_y = 0.$$

Nous avons donc l'association

$$\frac{\partial}{\partial x}F + \frac{\partial}{\partial y}G = 0, \qquad F\frac{\partial}{\partial x} + G\frac{\partial}{\partial y} = 0, \tag{27}$$

la seconde égalité étant une équation aux dérivées partielles du premier ordre vérifiée par la fonction P.

Or le fait que, dans les équations (27), les premiers membres sont constitués *avec les mêmes opérateurs*, pris dans un ordre différent, est l'un des plus fondamentaux de la Science actuelle. Il admet des généralisations considérables dont nous nous approcherons davantage au Chapitre suivant. L'intérêt, *ici*, est de saisir le germe de la chose.

Il y a donc aussi une raison *symbolique* pour qu'un espace à canaux soit associé à une propagation corpusculaire et ondulatoire. De plus l'intégration de la seconde équation (27) est équivalente à celle de l'équation

$$\frac{dx}{F} = \frac{dy}{G},$$

ce qui nous ramène à l'équation différentielle du premier ordre et au paragraphe 7. Dans la théorie de l'équation différentielle du premier ordre il y a déjà, à l'état latent, l'essentiel des considérations de la Physique théorique.

12. **L'opération de mesure.** — Une chose signalée, en Mécanique ondulatoire, comme particulièrement curieuse serait l'opération de mesure qui pourrait modifier, du tout au tout, la marche d'un phénomène. Avec les préliminaires déjà exposés, cette chose devient d'une compréhension immédiate.

Reprenons la figure 3 et un chemin $\alpha\beta\varepsilon\ldots$, front d'onde ou trajectoire, sur lequel nous nous proposons de vérifier, par mesure directe, qu'un arc $s\theta$ est bien égal à $a\theta$. Pour faire cette mesure, il faut partir d'un point, tel α, sur le rayon OA, pour aboutir à un point, tel λ, sur un rayon OL. Or, c'est sur tout rayon, tel OA, OB, ..., OL, que la structure fine, dont on veut évaluer l'arc, peut brusquement changer de direction. Si donc elle se prolonge, au delà du point λ, on lui aura fourni, en arrêtant l'opération de mesure au rayon OL, une occasion d'avoir une bifurcation sur ce rayon. Voilà donc bien un cas où une opération de mesure peut brusquement modifier l'allure d'un phénomène ou les probabilités concernant cette allure.

Pour les mesures *non répétables*, comme il a déjà été dit, *voir* Chapitre III.

13. **Polarisation multiple. Auto-interférence.** — Voici autre chose de tout aussi intéressant. Un cercle, dont le rayon ρ est très petit et peut même décroître indéfiniment est traversé par un chemin $\alpha\beta\varepsilon\ldots$; ce n'est pas en faisant décroître ρ que je préciserai l'allure du chemin dans ce cercle. On pourra toujours imaginer que le dit cercle ne contienne pas ou qu'il contienne un point anguleux tel β. C'est encore là une image simple qui paraît aider grandement à comprendre comment un photon, par exemple, peut, d'après Dirac [19], se trouver *soit dans un état de polarisation unique*, *soit*, à la fois, *dans deux*

états de polarisation différents. L'image semble même excellente, les questions de polarisation se ramenant aisément à des questions d'orientation.

On arrive encore, dans le même ordre d'idées, à se représenter un photon interférant avec lui-même. Cela serait analogue à un chemin $\alpha\beta$ qui se continuerait, à la fois, en $\beta\delta\ldots$ et en $\beta\varepsilon\ldots$, jusqu'à ce que ces deux branches, de bifurcations en bifurcations, viennent de nouveau à se réunir.

14. **Conclusions analogiques.** — La théorie sommaire des espaces à canaux, exposée jusqu'ici, appuyée surtout sur la notion de *structure fine*, contient déjà des représentations, des interprétations à peu près élémentaires, pour :

a. Le front d'onde qui se propage transversalement par rapport aux canaux et qui, n'ayant à transporter que des invariants intégraux, peut s'émietter, se corpusculariser de canal à canal contigu. Ceci est évidemment l'idée fondamentale du présent fascicule. Son premier complément essentiel est qu'au point de vue de la structure fine il n'y a sans doute pas de différence fondamentale entre fronts d'ondes et trajectoires corpusculaires. (*Voir* § 9 et 10).

b. L'équation de Jacobi et le Principe de Huyghens. — Ceci, ayant déjà été développé dans un autre fascicule [14], n'a pas été repris explicitement dans ce Chapitre. Il s'agit de la transformation d'une équation (7) en une équation de Jacobi, ce qui n'est pas difficile à imaginer étant donnée la présence de $\Phi_X^2 + \Phi_Y^2$ dans le premier membre de (7). On revient alors, en partant de (7), aux considérations jacobiennes classiques, cependant que, d'autre part, comme nous l'avons montré plus haut, on peut associer aussi, à (7) une équation de Schrödinger. Il est naturellement très remarquable que (7) puisse servir de trait d'union entre l'équation de Schrödinger, l'équation de Jacobi et même avec le Principe de Huyghens facile à associer à l'équation de Jacobi.

c. L'équation de Schrödinger. (*Voir* § 5.)

d. Les incertitudes de Heisenberg. (*Voir* la fin du § 6.)

e. Le temps généralisé multiplement paramétrique et même *fonctionnel.* Quelques mots sur cet inépuisable sujet ont été écrits à la fin du paragraphe 5; ils seront complétés au Chapitre suivant. De toutes façons, il n'y a aucune raison pour que le temps t, de nature astronomique, soit identiquement transportable dans les structures fines de la microphysique. Ces structures dépendent d'indéterminations considérables qui laissent sans doute place à un temps généralisé multiplement paramétrique ou même fonctionnel.

f. L'opération de mesure qui modifie brusquement l'allure d'un phénomène ou les probabilités le concernant. (*Voir* § 12.)

g. Le photon qui peut être, à la fois, dans deux états de polarisation différents. (*Voir* § 13.)

h. Le corpuscule rotationnel ou à orientation variable. Ce corpuscule correspond à l'élément de front d'onde qui, en général, ne garde évidemment pas une même orientation.

i. La permutation de symboles opératoires. Cette permutation, apparue timidement en (27), peut être l'objet de généralisations considérables. *Voir* Chapitre suivant et Introduction. Dualité des travaux Poincaré. Dualité des équations électromagnétiques.

j. La non répétabilité des mesures. Conséquence de *e*, c'est-à-dire d'un temps généralisé propre à l'espace microphénoménal. (*Voir* Chap. I, § 5; Chap. II, fin § 25; Chap. III à propos de [44].)

CHAPITRE II.

TENTATIVES D'EXTENSIONS SPATIALES.

15. **Structures fines polydimensionnelles.** — Nous n'avons examiné jusqu'ici que des structures fines planes ou situées sur des surfaces ordinaires. Les questions de structures fines, dans l'espace à trois dimensions et à plus forte raison dans l'hyperespace, sont beaucoup plus compliquées. S'il n'est pas difficile de créer des schémas qui, à la limite, aboutissent aux courbes sans tangentes, il l'est incomparablement plus de créer, dans un ordre d'idées analogue et de manière tant soit peu générale, des surfaces sans plans tangents, car, même dans le cas des surfaces ordinaires, on ne définit, on ne manie point les éléments superficiels aussi facilement que les éléments d'arc.

Aussi, avant d'arriver aux cas généraux, a-t-on développé des cas d'abord très particuliers comme celui des surfaces développables non réglées. M. Henri Lebesgue nous a narré [20], non sans quelque humour, les résistances scandalisées qu'il rencontra lorsqu'il annonça l'existence de telles surfaces. Et encore n'y a-t-il là, comme nous allons le voir, que de la structure fine à deux dimensions adroitement utilisée dans l'espace à trois.

Une étude, à coup sûr non moderne mais très archimédienne, des aires sphériques conduit aussi à des considérations intéressantes quoique toujours très particulières.

Ces généralités, en pleine élaboration dans l'état actuel de la Science, doivent conduire, au delà des courbes sans tangentes et des surfaces sans plans tangents, à des espaces *sans espaces euclidiens tangents*, espaces en lesquels des évaluations *intégrales* seraient cependant possibles et pourraient même être qualifiées de *mesures*. Ainsi peut se constituer une Physique de nombres et d'analyse mathématique, en laquelle il n'y aurait pas forcément des *formes* intuitivement et vulgairement saisissables. De cette Science, la Mécanique ondulatoire fournit les premiers aspects. La G. I. D. de M. G. Bouligand [21], les Espaces abstraits de M. Maurice Fréchet [22], les recherches de M. Jean-Louis Destouches [23], pour ne citer que des auteurs français, peuvent lui servir de fondements. Elle atteste la supériorité du domaine intelligent sur le domaine sensible ; elle peut ne plus être constamment en contact avec la vérification expérimentale. Elle doit simplement ne pas la contredire. De plus elle doit avoir un caractère d'art qu'eut toujours la science classique bien faite ; il y aura alors de grandes chances pour qu'elle puisse prolonger utilement cette dernière.

16. **Surfaces développables non réglées.** — Nous allons reprendre, d'une manière réduite, cette notion qui, répétons-le, a été introduite dans la Science par M. Lebesgue [24]. Nous profiterons de l'exposé de M. Bouligand [21].

Soient deux axes rectangulaires Oxy, leurs bissectrices OA et OB et une brisée $O\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ dont les segments sont alternativement parallèles à OA et à OB, l'abscisse x étant constamment croissante lorsqu'on parcourt cette ligne; cette dernière hypothèse, sans être absolument nécessaire, joue un rôle simplificateur. La brisée considérée, lorsque tous les segments qui la constituent deviennent infiniment petits et infiniment nombreux, peut devenir la structure fine d'une courbe fort quelconque issue de O.

Si maintenant la figure tourne autour de Oy, les droites OA et OB donnent un cône C. Le segment $O\alpha$ donnera une zone conique appliquée tout naturellement sur C. Le segment $\alpha\beta$ donnera une zone s'appliquant sur C, dans la zone engendrée par $\alpha'\beta'$. Le segment $\beta\gamma$ donnera une applicabilité sur la zone engendrée par $\beta''\gamma'$ et ainsi de suite.

On voit que, pour réaliser une application effective, il faut supposer que la surface de révolution engendrée par la brisée soit coupée suivant ses parallèles singuliers. Cette application pourrait aussi être

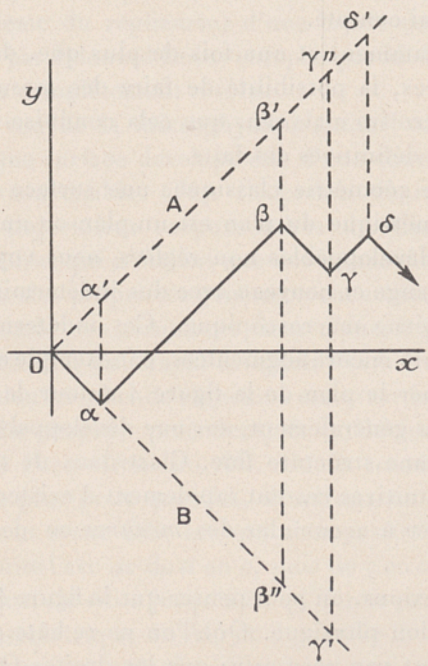

Fig. 4.

faite d'une infinité de manières, au bénéfice de l'une ou de l'autre des nappes du cône C. Ainsi, par exemple, on pourrait tout appliquer sur la nappe supérieure en faisant subir un retournement aux cônes engendrés par $O\alpha$, $\beta\gamma$, ... ; une fois l'application faite sur le cône, on peut dérouler celui-ci sur un plan.

Que l'on suppose maintenant, comme il a été dit plus haut, que la brisée $O\alpha\beta\gamma\delta$... devienne une structure fine et nous aurons réalisé une surface de révolution applicable sur un cône et, par suite, sur un plan, surface qui ne contiendra plus aucun segment rectiligne fini.

Il n'est pas absolument impossible qu'on se récrie contre un tel raisonnement, comme l'ont fait certains géomètres de la fin du siècle dernier. On peut prétendre que ce n'est pas de l'applicabilité au sens d'autrefois. Soit. Mais, si nous nous plaçons au seul point de vue des notions métriques, il faut cependant reconnaître que la surface de révolution finalement considérée possède exactement la même métrique que le cône C. Et, dans l'ordre d'idées scientifique le plus élevé, c'est cela qui compte.

On conçoit notamment et une fois de plus que, dans le domaine des microstructures, la possibilité de faire des mesures subsiste et puisse même s'accroître mais sans que cela conduise à des représentations théoriques définitives des faits.

Avec l'ancienne géométrie classique, une surface qui possède de toutes façons la métrique du plan est un plan ou une développable *réglée*. Avec les développables non réglées, nous voyons apparaître tout un monde étrange et nouveau avec des indéterminations insoupçonnées en géométrie macroscopique. Ces indéterminations pourraient être d'ailleurs encore augmentées, par exemple en ne se bornant plus à faire tourner le plan de la figure 4 autour de Oy mais en le faisant rouler, plus généralement, sur une développable qui pourrait, elle-même, avoir une structure fine. C'est dans de tels cas que les représentations intuitives cessent rapidement d'exister cependant que l'on peut continuer à accumuler des *mesures* ou des intégrales les représentant.

Malgré ces réflexions, on peut penser que la figure 4 est loin d'avoir quelque signification physique. Que l'on ne se hâte pas de conclure en ce sens. Il n'est pas nécessaire que les droites OA et OB soient perpendiculaires. Supposons seulement qu'elles aient Ox pour bissectrice. Ce peuvent être alors les droites *isotropes* et $O\alpha\beta\gamma\delta$... devient une *structure fine isotrope* ($ds^2 = 0$) (*voir* Chap. III). Or cette structure est celle que les Théories gravifiques prêtent aux rayons lumineux.

17. Développables non réglées. Variante. — Voici, sur le même sujet, des considérations un peu différentes. *Toute surface développable, en perdant tout segment rectiligne fini, peut recevoir une structure fine qui en fait une courbe plane.* Étalons la développable donnée sur un plan dont nous ne considérerons qu'une portion rectangulaire R. Par des parallèles à l'un des côtés, divisons ce rectangle en n rectangles identiques et replions ceux-ci sur un seul, comme une bande de n timbres-poste sur un seul timbre. Quand n croît indéfiniment, le rectangle primitif tend ainsi vers un segment rectiligne auquel, évidemment, il faut d'ores et déjà concéder une structure fine. On peut maintenant incurver ce segment de manière à en faire une courbe plane à plan perpendiculaire à R.

Notons que le résultat peut être obtenu d'une infinité de manières et que le problème du repliement d'une bande de n timbres sur un seul, considéré par Édouard Lucas et repris par M. Sainte-Laguë [25], n'est pas encore complètement résolu.

Au point de vue de la microphysique, nous voici maintenant à même de tirer une surface développable d'une courbe présentant une structure fine convenable. C'est l'occasion de revenir aux fronts d'onde et aux trajectoires corpusculaires du Chapitre précédent, fronts et trajectoires qui n'étaient que des lignes mais des lignes d'où pourraient sortir des propriétés généralement attribuées aux surfaces. Dès lors, le monde des structures fines n'aurait pas forcément un nombre de dimensions nettement assignable (*cf.* G. Bouligand [21]).

On pourrait donner plus de rigueur à ces assertions. Reprenons la figure 3 (§ 6 du chapitre précédent) et la détermination des arcs isométriques de l'arc circulaire AC. De O comme centre et avec un rayon n fois plus petit que OA, décrivons un arc circulaire ac, avec a sur OA et c sur OC, arc qui n'est pas tracé sur la figure 3. Parcourons ensuite l'arc ac de a en c, puis de c en a, puis de nouveau de a en c, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il soit parcouru n fois. Cet arc n-uple est isométrique de AC et il possède la structure fine qui permet, d'après ce qui précède, d'en faire sortir une surface développable.

Ceci se rattache encore à des subtibilités fondamentales dues à M. Lebesgue [36]. Sur l'arc n-uple, un même point de l'espace coïncide avec n points de l'arc entre lesquels il y a des *distances*.

18. Ondes archimédiennes. — Nous avons déjà envisagé cette question et sous ce même titre [14]. Nous y revenons pour en simplifier le premier aspect et pour la compléter.

Sur une sphère de centre O et de rayon R (*fig.* 5) soit, en A, un élément superficiel $d\sigma$. Considérons également l'axe Oz et le cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à Oz. Par tous les points du contour de $d\sigma$, abaissons des perpendiculaires sur Oz. Nous formons

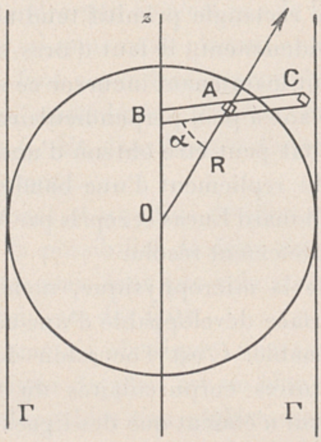

Fig. 5.

ainsi un conoïde qui, sur le cylindre Γ circonscrit à la sphère, découpe, en C, un élément $d\omega$. Nous avons ainsi

$$\frac{d\sigma \cos\alpha}{AB} = \frac{d\omega}{CB} = \frac{d\omega}{R}, \qquad R\cos\alpha = AB,$$

d'où $d\sigma = d\omega$. Ceci s'étend immédiatement à une aire sphérique finie qui se trouve être ainsi égale à sa projection conoïdale sur Γ, la directrice rectiligne du conoïde étant l'axe de Γ.

Au point de vue pédagogique, on pourrait remarquer qu'il n'y a sans doute pas de manière plus simple de faire la théorie des aires sphériques, ce que, fort heureusement, l'Enseignement élémentaire ne semble plus ignorer [25 *a*].

Revenons aux considérations mécaniques. Imaginons que la sphère glisse, dans le cylindre Γ, d'un mouvement de translation, Γ et le conoïde BC restant immobiles. Dans ce conoïde, l'élément sphérique $d\sigma$ se propage, d'un mouvement *harmonique* (si la translation de la sphère est *uniforme*) en restant *constant en aire*. Pour un observateur grossier, cette aire, infiniment petite et constante, peut être traitée comme la *masse* constante d'un point matériel mais, pour un observateur subtil. cette prétendue masse ne sera constante qu'en valeur absolue et sera, en outre, *dirigée* puisqu'elle est d'orientation variable. On voit ainsi comment de simples considérations archimédiennes peuvent conduire à imaginer une Mécanique du point, ou mieux du corpuscule, plus subtile que la Mécanique classique. Cette subtilité s'accroîtrait encore si la sphère, en glissant dans Γ, tournait sur elle-même. Ceci aide également à comprendre comment, au mouvement d'un point, tel O, tournant ou non sur lui-même, on peut associer des propagations de fronts d'ondes. Il est à peine besoin de dire que, dans Γ, les sphères et les conoïdes, tels BC, peuvent être en nombre quelconque.

Revenons maintenant aux isométries circulaires étudiées au paragraphe 6 du Chapitre précédent. Elles permettent d'imaginer, sur la figure 5, d'autres cylindres circulaires, de *diamètre* R, parallèles et tangents intérieurement à Γ, donc ayant toujours une génératrice coïncidant avec Oz. Sur ces nouveaux cylindres γ, le conoïde BC découpe encore une aire égale à celle découpée, en C, sur Γ, et égale aussi, par suite, à l'aire sphérique découpée en A.

La sphère et un cylindre γ se coupent suivant une courbe de Viviani V bien connue. Cette courbe V, animée d'un mouvement de translation τ parallèle à Oz, reproduit un cylindre γ et, animée d'une rotation ρ autour de Oz, reproduit la sphère. Supposons qu'on donne à V une τ aussi petite qu'on le voudra puis, de même, une ρ, puis une nouvelle τ, puis une nouvelle ρ, et ainsi de suite. Alors V décrit, dans ces conditions, une *surface à structure fine* F, à lignes singulières V pouvant être indéfiniment rapprochées l'une de l'autre, *l'ensemble des plans tangents de* F *ne tendant vers aucune configuration limite*. Car si l'on imagine une telle configuration, on peut indéfiniment la changer en rendant de plus en plus fine la structure de F.

Une telle F est analogue à la ligne continue mais indéfiniment brisée ou sinueuse qui, de ce fait, n'a plus d'ensemble de tangentes tendant vers une configuration déterminée. Et cependant cette F, devenue singulière au point de vue différentiel, a conservé la propriété intégrale originelle de la sphère primitivement considérée ou des cylindres γ; un conoïde BC découpe sur F une aire toujours égale à celle découpée sur Γ. Une F, en mouvement dans Γ, donne toujours une propagation d'aires invariantes dans tous les conoïdes tels que BC. Évidemment le mouvement dont il s'agit peut être, lui aussi, une combinaison de déplacements τ et ρ.

Nous avons amorcé ailleurs [13] l'étude des surfaces les plus générales sur lesquelles un conoïde BC découpe des aires invariantes équivalentes au $d\omega$ considéré en C sur le cylindre Γ. On trouve notamment, comme surfaces *ordinaires*, des hélicoïdes à courbure totale constante: ces hélicoïdes pourraient servir à réaliser de nouvelles structures fines.

En tout ceci les canaux propagateurs sont conoïdaux, donc rectilignes.

M. Paul Delens a attiré mon attention sur des propagations d'aires sphériques s'effectuant dans des canaux également empruntés à des familles de sphères, ceci conformément au théorème suivant [26] : *Toute surface sphérique* ABC... *se projette, en vraie grandeur* A′B′C′..., *sur un cône circonscrit à la sphère, lorsque chaque point* A, B,... *est projeté sur la surface conique, en* A′, B′,..., *par un arc de cercle* AA′, BB′,... *ayant pour centre le sommet* S *du cône circonscrit et rencontrant* (*orthogonalement*) OS.

Un tel théorème pourrait donner lieu à de longs développements et servir à construire de nouvelles structures fines. Mais, malgré leur intérêt propre, nous laissons de tels cas particuliers qui peuvent être absorbés aisément dans la théorie générale des espaces à canaux exposée ci-après.

On retiendra seulement qu'à partir de conceptions géométriques très anciennes (Archimède, Viviani,...) on peut déjà construire nombre de schémas facilitant, non sans une grande élégance, l'abord de la Mécanique ondulatoire et corpusculaire.

Dans un fascicule précédent [14] nous avons examiné, dans un espace à canaux *coniques* issus de O, les surfaces (dites de Buhl-Vincensini) sur lesquelles un cône quelconque, de sommet O, découpe une aire équivalente à celle qu'il découpe sur une sphère de centre O. Ce sont des surfaces de Monge engendrées par roulement du plan d'une lemniscate de centre O sur un cône auxiliaire ayant encore O pour sommet. Par chaque point du plan roulant on peut faire passer *deux* lemniscates d'où aisément la constitution de surfaces de Monge, *à structure fine*, conservant les aires sphériques par projection conique.

19. De T.-J. Stieltjes et Ch. Hermite à D. Hilbert. — Puisque tout ce qui précède ne donne que des cas particuliers de structures fines, il faut en venir maintenant, si possible, à des théories plus générales. Un premier moyen d'en obtenir une serait de généraliser l'intégrale de Stieltjes

$$\int f(x)\, d\mathrm{F}(x) \tag{1}$$

en une intégrale n-uple contenant n-variables. Mais la théorie des intégrales de Stieltjes *multiples* est encore dans un état extrêmement rudimentaire et la Physique théorique en est toujours à utiliser une grosse majorité d'intégrales multiples qui ne font que généraliser une dégénérescence élémentaire de l'intégrale précédente.

Pour que l'intégrale (1) soit une véritable intégrale de Stieltjes, il faut que la fonction $\mathrm{F}(x)$ n'ait pas de dérivée; sinon (1) peut s'écrire

$$\int f(x)\, \mathrm{F}'(x)\, dx \tag{2}$$

et c'est une intégrale ordinaire. Cette dégénérescence (2), dans le cas de deux, trois,... variables, donne naissance aux intégrales doubles, triples,...

$$\int\int f(x, y)\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}\right) dx\, dy, \tag{3}$$

$$\int\int\int f(x, y, z)\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz, \tag{4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et il est aisé de démontrer directement la filiation (2), (3), (4),..., ce que nous ferons plus loin, au paragraphe 20.

Mais il est à remarquer aussi que les *divergences* introduites sous les signes d'intégration, en (3), (4),... peuvent aisément prendre la forme de déterminants symboliques

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \mathrm{XY}_x & \mathrm{XY}_y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{XY}_x & \mathrm{XY}_y & \mathrm{XY}_z \\ \mathrm{Z}_x & \mathrm{Z}_y & \mathrm{Z}_z \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

qui se ramènent immédiatement à des déterminants fonctionnels. Alors il n'y a, en (2), (3), (4), ..., que les formules ordinaires du changement de variables dans les intégrales simples ou multiples.

Abordons maintenant un point qui est absolument capital dans l'étude des structures fines et de leurs extensions, bien que nous ne l'ayons point fait apparaître jusqu'ici.

Les intégrales prises sur des structures fines sont, en général, compliquées d'imaginaires.

On peut entendre par là, aussi simplement que possible, que les expressions sous les signes d'intégration contiennent, outre les variables, le symbole i racine carrée de -1. Pourquoi? L'explication est aisée dans le cas de structures fines planes issues d'espaces à canaux et, pour ce qui est des cas plus complexes, on peut admettre, tout naturellement, que ce ne sont pas des complications croissantes qui feront disparaître les imaginaires apparues dans un cas des plus simples.

Prenons donc une structure fine plane sur laquelle on évalue finalement, comme en la formule (8) du Chapitre précédent, des intégrales en $\Theta(X, Y)\,dS$. Si, de α comme centre (*fig.* 6), sur la trajectoire P_1,

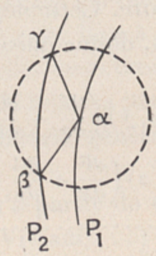

Fig. 6.

je décris un cercle de rayon très petit ε coupant P_2, trajectoire infiniment voisine de P_1, en β et γ, le produit $\Theta\,dS$ aura la même valeur sur $\alpha\beta$ et sur $\alpha\gamma$ car ces deux arcs sont égaux, ce qui conserve dS, et, d'autre part, $\Theta(X, Y)$ est invariable aussi puisque, si ε tend vers zéro, le domaine circulaire peut être considéré comme entièrement relatif au point α de coordonnées X et Y. C'est précisément à cette égalité de $\Theta\,dS$, sur $\alpha\beta$ et sur $\alpha\gamma$, que correspond la possibilité d'existence d'une structure fine. Mais, en général, les trajectoires P_1 et P_2 ne seront pas rectilignes et, mêmes si elles l'étaient, elles pourraient avoir une structure fine. Dans ces conditions, les intersections du petit cercle avec P_2 pourront être en nombre supérieur à deux et être réelles *ou imaginaires*.

Ceci est une raison pour qu'on n'attache pas trop d'importance aux espaces à canaux *faisant image;* s'ils font image, s'il semble qu'on puisse les dessiner, les circonstances imaginaires précédentes échappent à cette représentation sensible et l'on n'obtient alors, très probablement, qu'une représentation très imparfaite. On voit combien les structures fines nous sont dissimulées; même réelles, elles constituent, *en premier lieu*, des cas limites que nous ne pouvons pas véritablement nous représenter et, *en second lieu*, elles sont, en général, compliquées de considérations imaginaires. C'est un fait merveilleux que l'intelligence humaine ait commencé à les atteindre tout de même au moyen d'un symbolisme mathématique approprié.

Un des premiers instruments introduits en Mécanique ondulatoire a été l'expression

$$(f_k, g_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int f_k^* g_j \, d\tau \tag{5}$$

avec

$$d\tau = dx_1 \, dx_2 \ldots dx_l.$$

C'est une intégrale multiple contenant maintenant l variables mais qui ne diffère en rien des intégrales (2), (3), (4),... quand, dans ces dernières, le nombre des variables est porté à l.

Par f_k^*, il faut entendre l'imaginaire conjuguée de f_k. On peut se représenter commodément les f_i et les g_i comme les composantes respectives de vecteurs,

$$f(f_1, f_2, \ldots, f_m), \quad g(g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

appartenant à des sous-espaces ayant respectivement m et n dimensions et faisant partie de l'espace général qui en a l. Donc $m \leqq l$ et $n \leqq l$. Mais, en général, l, m, n doivent croître indéfiniment, ce qui est une *troisième cause* de complications.

Dans l'espace auquel nous sommes parvenus maintenant, espace qui peut avoir une structure fine, être compliqué d'imaginaires et posséder une infinité de dimensions, que pouvons-nous faire? Conformément à l'esprit déjà manifesté à la fin du paragraphe 10 du chapitre précédent, on ne voit guère qu'une ressource. *Il faut considérer le symbolisme fondamental né avec cet espace et chercher les transformations de ce symbolisme en lui-même.* C'est cela qui sera le *phénomène* accessible ou qui y conduira. L'idée est la même que celle de la Mécanique la plus élémentaire envisageant le déplacement d'un solide invariable dans l'espace euclidien; on n'étudie rien d'autre que le groupe des déplacements du solide. Au début de ce fascicule (§ 2), nous avons rappelé l'opinion de Laplace d'après laquelle cette notion de *déplacement sans déformation*, qui semble si simple à un esprit vulgaire, était déjà considérée comme impénétrable. Il en est facilement de même dans les *espaces fonctionnels*, dans les *espaces abstraits;* l'utile, l'intéressant est que l'on peut trouver, dans ces derniers espaces, des schèmes phénoménaux que la Mécanique du solide est loin de pouvoir donner.

Les transformations des expressions (5) en elles-mêmes reposent originellement sur des travaux dus à Charles Hermite. Un opérateur, qui peut dépendre ou non d'un indice h, soit H_h, est *hermitique* si

$$(f_k, \mathrm{H}_h g_j) = (\mathrm{H}_h f_k, g_j). \tag{6}$$

L'expression (5) elle-même, sans intervention d'aucun opérateur, donne

$$(f_k, g_j) = (g_j, f_k)^{\star}.$$

Les *espaces de Hilbert*, plus généralement, sont formés d'une infinité d'éléments *fonctionnels*, f, g, ..., dont la propriété la plus essentielle, lorsqu'on les prend deux à deux, s'exprime par l'égalité

$$(f, g) = (g, f)^{\star} \quad \text{ou} \quad (f, g) = \overline{(g, f)}, \tag{7}$$

la seconde notation ayant exactement même signification que la première et étant maintenant la plus usitée.

Il n'est pas nécessaire d'imaginer, pour faire la théorie de tels espaces, que (f, g) ait une signification intégrale telle que (5). Ainsi les notions intégrales qui, à propos de structures fines, se sont révélées beaucoup plus générales que les notions différentielles, sont maintenant à leur tour et de beaucoup, dépassées dans les *espaces fonctionnels abstraits*.

Quant aux opérateurs analogues à H_h, on peut les concevoir comme des transformations T adéquates aux (f, g) et donnant (6) comme cas particulier.

C'est encore une autre et prodigieuse merveille que de telles constructions aient été possibles avec un jeu interne de transformations T pouvant prendre une signification phénoménale. Au point de vue philosophique, il doit cependant en être obligatoirement ainsi, de tels jeux traduisant évidemment celui du cerveau humain, c'est-à-dire de phénomènes physico-biologiques dont certains *semblent* ensuite pouvoir être situés hors de nous-mêmes. Je souligne le verbe *sembler*; s'il reste quelque obscurité dans ce que je viens d'écrire, je la vois surtout dans la difficulté d'attribuer une signification exacte à ce verbe.

Il n'a pu entrer, dans le plan de ce fascicule, de faire une théorie des opérateurs hermitiques. Rappelons que le plus simple est un facteur *réel* $V(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ quelconque. Ensuite viennent les

$$H_h = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_h}, \tag{8}$$

ce que l'on démontre au moyen de l'intégration par parties.

L'équation de Schrödinger est construite avec des opérateurs hermitiques.

Rappelons aussi que les composantes de deux vecteurs a et b donnent un *produit scalaire hermitique*

$$(a, b) = a_i^* b_i,$$

avec i indice de sommation, et qu'une *matrice* H est *hermitique* lorsque

$$(a, Hb) = (Ha, b).$$

La comparaison avec (6) montre que, bien que tous les auteurs ne le fassent pas, il est tout de même indiqué d'étudier la théorie des matrices *finies* avant d'étudier les espaces à la Hilbert où jouent des matrices *infinies*.

Quant aux notations Ha ou Hb, nous pensons qu'elles sont considérées comme très élémentaires. C'est le cas du système

$$y_i = a_{ik} x_k$$

où la matrice des a_{ik} agit sur un vecteur x, aux composantes x_k, pour le transformer en un autre vecteur y aux composantes y_i.

Enfin puisque nous avons rappelé (Chap. I, § 3), d'après les travaux de M. Th. De Donder, qu'un espace à structure fine pouvait avoir une métrique riemannienne, on voit maintenant combien cette première conception était grosse de généralisations.

La bibliographie des questions traitées en ce paragraphe est immense. Bornons-nous à citer Eugen Wigner [27] à propos des égalités (5) et (6). Les espaces de Hilbert ont été particulièrement considérés, dans l'abstrait, par J. von Neumann [28] et les transformations T sont les *linear transforms* de Marshall Harvey Stone [29]. Ce dernier ouvrage s'inspire beaucoup du précédent. On peut voir, dès le début de chacun, que les espaces de Hilbert ne sont pas uniquement définis par la propriété (7). Mais les autres propriétés sont surtout destinées à assurer à l'espace, ou plutôt à ses transformations, un caractère linéaire et à permettre d'y effectuer les principales opérations algébriques. La propriété (7), dénommée *symétrie hermitique*, garde le rôle essentiel.

Voir également le bref et ingénieux exposé de M. Jean Delsarte [29 *a*].

La théorie de Dirac [19] reprend tout ceci avec un symbolisme particulièrement commode quoique le Chapitre consacré, par cet auteur, aux *transformations*, soit d'une étude particulièrement difficile.

Les *espaces abstraits*, de M. Maurice Fréchet [22], sont peu chargés de symbolisme et de notations, ce qui n'empêche pas que leur rôle physico-mécanique s'affirme très grand avec les développements, déjà mentionnés, qui leur sont donnés par M. Jean-Louis Destouches [23].

En outre, tout ce qui touche aux équations intégrales touche également à tous ces sujets. La matrice, instrument essentiel pour la transformation vectorielle, représentait des opérations qui pouvaient converger dans des espaces à une infinité de dimensions.

20. A propos de l'intégrale de Stieltjes multiple. — La difficulté d'étudier des intégrales de Stieltjes multiples, ne serait-ce que doubles, conduit cependant à rattacher, à la notion en question, des préliminaires dignes d'être notés. Reprenons l'intégrale simple (1) qui peut être écrite, dans le cas de *dégénérescence* suffisamment explicité par la figure 7,

$$\int f(x)\,d\mathrm{F}(x) = \int \overline{\mathrm{M}m}\,d.\overline{\mathrm{N}m} = \int \overline{\mathrm{M}m}.\overline{\mathrm{QP}}. \tag{9}$$

Si la courbe *intégrante* (N) se réduisait à la bissectrice de $y\mathrm{O}x$, on aurait $\mathrm{QP} = mp = dx$, d'où l'intégrale ordinaire de $f(x)\,dx$.

Voyons maintenant quelle est, dans le cas de l'intégrale double, la figure analogue à la figure 7. Il y aura deux *surfaces intégrantes;* la

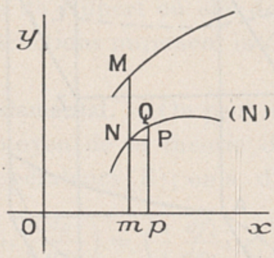

Fig. 7.

première coupe le prisme de section droite $dx\,dy$ suivant ACEBA, la seconde suivant IJLKI. La différence $\mathrm{QP} = \mathrm{Q}p - \mathrm{N}m$, de la figure 7, est à remplacer (*fig.* 8) par

$$\text{aire } \mathrm{L}eb\mathrm{K} - \text{aire } \mathrm{J}c\mathrm{AI},$$

c'est-à-dire par

$$\text{aire } \mathrm{L}lk\mathrm{K} - \text{aire } \mathrm{J}j\mathrm{I},$$

ou par

$$\frac{1}{2}(l\mathrm{L} + k\mathrm{K})\,\overline{kl} - \frac{1}{2}\,\overline{j\mathrm{J}}.\overline{\mathrm{I}j}. \tag{10}$$

Il faudrait pouvoir manier cette expression sans supposer aux surfaces intégrantes une distribution de plans tangents fondée sur des dérivations partielles et c'est là que commencent de redoutables difficultés. Le cas simple, analogue à (9), est, au contraire, celui où l'on peut poser, avec $z = \mathrm{F}(x, y)$ pour équation de la surface IJLKI,

$$\overline{\mathrm{I}j} = \overline{kl} = dy,$$

$$\overline{k\mathrm{K}} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}dx, \qquad \overline{j\mathrm{J}} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}dy, \qquad l\mathrm{L} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}dy$$

ce qui donne à l'expression (10) la forme

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}dx\,dy.$$

Mais, alors que sur la figure 7 il n'y a qu'une seule différence QP, il doit y en avoir ici une seconde, soit

$$\text{aire } CceE - \text{aire } AbB,$$

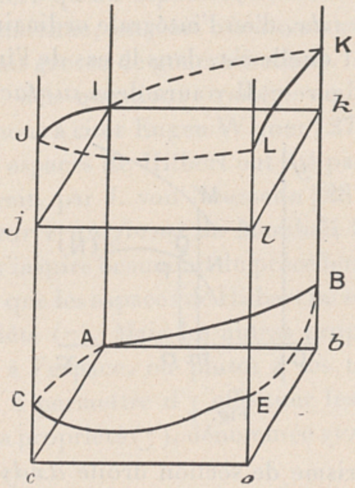

Fig. 8.

ce qui, avec $z = G(x, y)$ pour équation de la surface ACEBA, conduit à

$$\frac{\partial G}{\partial y}\,dx\,dy,$$

d'où enfin l'intégrale double (3). On parviendrait à (4) par des raisonnements analogues dans l'espace à quatre dimensions.

Si l'on cherche à identifier des intégrales, telles que (3), (4),..., avec des intégrales (5) d'un nombre de variables correspondant, on obtient, par exemple dans le cas de trois variables, des équations de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \Phi(x, y, z)$$

qui doivent jouer un rôle physique fondamental. Mais, une telle équation étant vérifiée par des fonctions F_1, G_1, H_1 *aussi particulières qu'on voudra*, on en conclut

$$\frac{\partial}{\partial x}(F - F_1) + \frac{\partial}{\partial y}(G - G_1) + \frac{\partial}{\partial z}(H - H_1) = 0,$$

et, par suite, l'équation fondamentale est

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Mais quelque grand que soit le rôle joué par cette équation, il est maintenant indéniable que si elle a besoin de généralisations dans les espaces de Riemann (les équations d'Einstein reviennent à l'évanouissement d'une divergence généralisée), elle en appelle de plus grandes encore dans les espaces de Hilbert où elle doit même pouvoir être remplacée par des constructions purement intégrales.

21. **Système dual fondamental.** — On peut revenir au résultat (11), en le complétant, au moyen de la théorie des opérateurs hermitiques [30]. Soient les opérateurs (8); on a, d'après (6),

$$\left(f_k, \frac{1}{i}\frac{\partial g_j}{\partial x_h}\right) = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial f_k}{\partial x_h}, g_j\right).$$

Supposons maintenant les g_j et les variables x_h en même nombre; on pourra écrire

$$\left(f_k, \frac{1}{i}\frac{\partial g_j}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}, g_j\right) \tag{12}$$

avec j indice de sommation variant de 1 à $n = l$. La manière la plus simple de satisfaire à l'égalité (12) est de la réduire à l'identité $0 = 0$, en posant à la fois

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0, \qquad g_j \frac{\partial f_k^\star}{\partial x_j} = 0. \tag{13}$$

On voit que l'on retrouve, en la première équation (13), le lemme fondamental de la divergence évanouissante, tandis qu'en la seconde on a une équation aux dérivées partielles du premier ordre qui a toujours été alliée intimement à la première mais souvent sans que l'on s'en rende compte. Et l'association

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g_j = 0, \qquad g_j \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \tag{14}$$

résulte visiblement et immédiatemment d'une intervention d'opérateurs qui, précisément parce qu'ils ne sont pas permutables, adjoignent l'une à l'autre deux choses différentes mais toujours remarquablement associables.

Le fait, *en lui-même*, est extrêmement simple; on peut conclure immédiatement le système (14) de la première équation seule où g_j serait remplacé par λg_j, avec λ fonction des x_j, mais on peut déduire de là tant de conséquences qu'on doit alors rechercher si l'association (14), aussi simplement établie, n'a pas quelque racine profonde et surtout généralisable. On sait maintenant que la généralisation est du côté des expressions hilbertiennes (5) et des opérateurs hermitiques.

La seconde équation (14) équivaut au système différentiel

$$\frac{dx_1}{g_1} = \frac{dx_2}{g_2} = \ldots = \frac{dx_n}{g_n} \tag{15}$$

qui est à la base de toutes les théories et représentations *mécanistes*. Henri Poincaré, dès la première page des *Méthodes nouvelles*, part de ce système; d'autre part, l'illustre savant, dans ses recherches de Physique mathématique, a épuisé à peu près tout le cycle des équations aux dérivées partielles qui peuvent être construites à partir de la première équation (14).

Nous avons déjà fait allusion à tout ceci au Chapitre précédent (§ 11 et 14, *i*). Dans un travail récent [5] de MM. Bouligand, Giraud et Delens, on rapproche une généralisation des problèmes de Dirichlet et de Neumann de la théorie des congruences. C'est une association (14).

Au point de vue historique, on a préparé la Mécanique ondulatoire, sans faire encore aucune allusion à cette expression, quand on a associé les deux équations (14), par exemple, comme nous allons le revoir, en construisant la formule de Green, les équations canoniques, les équations de Maxwell, la théorie du multiplicateur de Jacobi et autres choses de ce genre. La véritable Mécanique ondulatoire récente a généralisé tout cela et absolument à perte de vue. Combien peu de chose est le système (14) déduit, si particulièrement, de (5), (6), (8).

22. **Formule de Green.** — Nous avons déjà rappelé [31] que la formule de Green

$$\int \alpha_i g_i \, d\sigma = \int \frac{\partial g_i}{\partial x_i} d\tau,$$

dont la forme évanouissante $0 = 0$ donne les équations de la Physique théorique, pouvait provenir, par un certain changement de variables, de l'identité

$$\int X_1\, dX_2 \ldots dX_n = \int dX_1\, dX_2 \ldots dX_n,$$

les premières intégrales étant $(n-1)$-uples, les secondes n-uples. Or le changement de variables à déterminer exige l'intégration de la seconde équation (14).

23. Équations canoniques. — Encore un sujet déjà traité [30], [31] mais qui peut être repris très brièvement. Les variables x_j vont former deux séries

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \quad \text{et} \quad y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

et la première équation (14) pourra être écrite

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial y_j} = 0.$$

On y satisfait identiquement en posant

$$P_j = \frac{\partial F}{\partial y_j}, \qquad Q_j = -\frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

Alors la seconde équation (14) devient

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j} = 0.$$

Le premier membre est la *parenthèse de Poisson* apparentée ainsi avec les équations d'ondes, ce dont profite largement la théorie de Dirac. Et l'équation finalement obtenue équivaut au système

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

24. Équations de Maxwell. Gravifique. — Imaginons que les variables x_j soient au nombre de quatre et que la première équation (14) soit

$$(16) \qquad \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad (M_{ij} = -M_{ji}).$$

On voit que tout est disposé pour que le déterminant symbolique soit identiquement nul.

La seconde équation (14) est alors de la forme

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Le système différentiel caractéristique (15) correspondant est le *premier système* maxwellien *généralisé* au sens de M. Th. De Donder. Le *second système* s'obtiendra en annulant les mineurs des termes de la première ligne de (17), au moyen de M_{ij} spéciaux. Comme ces mineurs peuvent se lire aussi bien en (16), on voit qu'ici l'association (14) donne, en somme, le premier système maxwellien à partir du second, c'est-à-dire le plus compliqué à partir du plus simple.

Il est alors aisé de passer de ces systèmes maxwelliens aux formules fondamentales du Calcul différentiel absolu et de la Gravifique. Le Calcul différentiel absolu conserve des formules telles que (17) quand, dans la seconde ligne du déterminant, on remplace les ∂ par des D relatifs à des dérivations covariantes généralisant la dérivation partielle ordinaire. Les dérivées en D ne sont pas permutables et, à leur non permutabilité, correspond la notion de courbure dans un *espace de Riemann*. Tel est le nœud essentiel des Théories d'Einstein, mais nous ne pouvons ici insister davantage.

On peut dire toutefois que, si la Mécanique ondulatoire et les espaces de Hilbert donnent aux notions intégrales une immense importance que les notions différentielles n'égalent plus, le Calcul différentiel, comme s'il ne voulait pas accepter sa déchéance, a fait, en retour, une magnifique défense. Qu'on se reporte, par exemple, à l'Ouvrage récent de MM. Schouten et Struik [32] et on ne pourra qu'admirer les subtilités et la puissance du Calcul différentiel absolu.

25. **Espaces à canaux. Congruences.** — Étendons maintenant, dans l'espace à trois dimensions, la théorie des espaces à canaux du Chapitre précédent et ce toujours comme conséquence de l'associa-

tion (14). La formule de Green est ici

$$(18) \qquad \iint_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) d\tau,$$

d'où pour la première équation (14),

$$(19) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation (19) en posant

$$(20) \qquad \begin{cases} F = \Lambda(P, Q)(P_y Q_z - P_z Q_y), \\ G = \Lambda(P, Q)(P_z Q_x - P_x Q_z), \\ H = \Lambda(P, Q)(P_x Q_y - P_y Q_x). \end{cases}$$

Les surfaces $P = \text{const.}$ et $Q = \text{const.}$ déterminent des canaux contigus, tubes, si l'on veut, d'une congruence. De ces canaux ou tubes nous considérons généralement un faisceau ayant, à peu près, une apparence prismatique complétée par deux bases transversales qui seront des surfaces σ quelconques. Sur la surface totale et sur la surface latérale du quasi-prisme, l'intégrale double de (18) est nulle.

Il s'ensuit que, sur une base σ ou sur une cloison transversale quelconque, on a l'invariance

$$(21) \qquad \iint_\sigma \left(\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q}\right) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma = \int_\Sigma U\, dP + V\, dQ.$$

La parenthèse introduite dans l'intégrale double représente évidemment $\Lambda(P, Q)$. Le contour Σ entoure non moins évidemment le quasi-prisme et sert de frontière à la cloison σ.

C'est la formule (21) qui est la *formule de Stokes pour espaces à canaux*.

Les formules (20) donnent

$$FP_x + GP_y + HP_z = 0, \qquad FQ_x + GQ_y + HQ_z = 0.$$

Donc P et Q sont intégrales de l'équation

$$(22) \qquad F\frac{\partial}{\partial x} + G\frac{\partial}{\partial y} + H\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

et ceci n'est autre que la seconde équation (14). L'association (14) est ici celle de (19) et de (22).

Rappelons encore le cas du canal contenant transversalement $d\sigma$ en (x, y, z) et dS en (X, Y, Z). Les cloisons finies σ et S sont interceptées par un même faisceau de canaux; elles sont en projection canale. On peut écrire, pour $\Lambda\, d\mathrm{P}\, d\mathrm{Q}$,

$$\Lambda(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \mathrm{P}_x & \mathrm{P}_y & \mathrm{P}_z \\ \mathrm{Q}_x & \mathrm{Q}_y & \mathrm{Q}_z \end{vmatrix} d\sigma = \frac{\Lambda(\mathrm{P}, \mathrm{Q})}{\Theta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})} \begin{vmatrix} \Phi_\mathrm{X} & \Phi_\mathrm{Y} & \Phi_\mathrm{Z} \\ \mathrm{P}_\mathrm{X} & \mathrm{P}_\mathrm{Y} & \mathrm{P}_\mathrm{Z} \\ \mathrm{Q}_\mathrm{X} & \mathrm{Q}_\mathrm{Y} & \mathrm{Q}_\mathrm{Z} \end{vmatrix} \frac{\Theta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})\, d\mathrm{S}}{\sqrt{\Phi_\mathrm{X}^2 + \Phi_\mathrm{Y}^2 + \Phi_\mathrm{Z}^2}}.$$

La cloison S a pour équation $\Phi = 0$. Posons

$$(23) \qquad \frac{1}{\Theta\sqrt{\Phi_\mathrm{X}^2 + \Phi_\mathrm{Y}^2 + \Phi_\mathrm{Z}^2}} \begin{vmatrix} \Phi_\mathrm{X} & \Phi_\mathrm{Y} & \Phi_\mathrm{Z} \\ \mathrm{P}_\mathrm{X} & \mathrm{P}_\mathrm{Y} & \mathrm{P}_\mathrm{Z} \\ \mathrm{Q}_\mathrm{X} & \mathrm{Q}_\mathrm{Y} & \mathrm{Q}_\mathrm{Z} \end{vmatrix} = \begin{cases} \Delta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \\ \Delta_1(\Phi, \mathrm{P}, \mathrm{Q}), \\ \Delta_1(0, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) \text{ sur S}, \end{cases}$$

puis, pour déterminer $\Lambda(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$,

$$(24) \qquad \Lambda(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\,\Delta_1(0, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 1.$$

C'est le moyen d'avoir

$$(25) \qquad \int\int_\mathrm{S} \Theta\, d\mathrm{S} = \int\int_\sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \mathrm{P}_x & \mathrm{P}_y & \mathrm{P}_z \\ \mathrm{Q}_x & \mathrm{Q}_y & \mathrm{Q}_z \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{\Delta_1(0, \mathrm{P}, \mathrm{Q})}.$$

En un canal ou en un faisceau de canaux se propagent des intégrales en $\Theta\, d$S invariantes. On est parti de la cloison S d'équation $\Phi = 0$; on a maintenant un ensemble de cloisons S' déterminé par l'équation aux dérivées partielles (23) avec second membre $\Delta_1(\Phi, \mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

Mais cette analyse peut être l'objet d'une immense généralisation. Je puis imaginer que $\Delta_1(\Phi, \mathrm{P}, \mathrm{Q})$ est, d'autorité, une expression fonctionnelle simplement assujettie à se réduire, pour $\Phi = 0$, à une expression $\Delta_1(0, \mathrm{P}, \mathrm{Q})$ bien déterminée. Ainsi il peut y avoir, en (23), des équations aux dérivées partielles de tous les ordres, même d'ordre infini. Par (24), on arrivera toujours, en (25), à des intégrales en $\Theta\, d$S invariantes en leur propagation sur des surfaces S fort indéterminées de par leur constitution paramétrique ou même fonctionnelle. Ces surfaces pourront se fragmenter, s'émietter de canal à canal, ce qui correspond toujours à l'idée de corpuscules pilotés par des fronts d'ondes. Mais nous ne nous représenterons pas véritablement les choses dès que $\Delta_1(\Phi, P, Q)$ sera d'une construction fonctionnelle (et, en général, non analytique) tant soit peu compliquée car alors l'équation (23) ne sera pas intégrable pratiquement. Et de tels cas d'impossibilité ne correspondent ici qu'à une manière d'interpréter le système (14) qui, lui-même, n'est à peu près *rien* par rapport à une théorie générale des espaces de Hilbert.

L'association entre ondes et corpuscules offrira donc toujours un *ensemble* de modalités dont la conception globale est radicalement impossible à l'intelligence humaine. C'est avec intention que nous soulignons *ensemble*; ces modalités sont infiniment variées et ne sont pas dénombrables ni susceptiples d'être rangées et étudiées dans la continuité, par trop simple, du temps t d'origine astronomique. Les seules considérations d'intégration, attachées à une équation (23), peuvent conduire à un *hypertemps*, multiplement paramétrique ou fonctionnel, dont le temps vulgaire ne saurait donner aucune idée.

26. Équation de Schrödinger. — Comme dans le cas de deux variables, on peut associer l'équation de Schrödinger, à trois variables, aux équations (19) et (20). Et, comme la théorie des espaces à canaux ne donne qu'une bien faible idée de la Mécanique ondulatoire, on doit peut-être conclure, hélas, que l'équation de Schrödinger elle-même n'atteint que peu de chose dans cette Mécanique. Toutefois, son rôle jusqu'ici a été immense et a largement suffi à détourner de la Science nouvelle nombre d'esprits paresseux.

On peut condenser les relations (20) en

$$F\,dx + G\,dy + H\,dz = \Lambda(P, Q)\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = u^2\,d\frac{v}{u}, \tag{26}$$

du moins si le déterminant est de la forme $X\,dY$, ce qui exige la condition bien connue

$$\begin{vmatrix} P_yQ_z - P_zQ_y & P_zQ_x - P_xQ_z & P_xQ_y - P_yQ_x \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_yQ_z - P_zQ_y & P_zQ_x - P_xQ_z & P_xQ_y - P_yQ_x \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons-la réalisée. Cela ne fait que particulariser les canaux qui d'ailleurs restent encore très indéterminés. Alors

$$F = uv_x - vu_x, \qquad G = uv_y - vu_y, \qquad H = uv_z - vu_z \tag{27}$$

et la relation fondamentale (19) devient

$$u\,\Delta v - v\,\Delta u = 0$$

avec Δ laplacien à trois variables. Ceci peut s'écrire

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta v}{v} = \Omega(x, y, z).$$

C'est dire que u et v sont solutions de l'équation de Schrödinger

$$\Delta W - \Omega W = 0.$$

Ecrire (19) avec (27) revient aussi à

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\mu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\nu) = 0, \tag{28}$$

si, f étant fonction arbitraire,

$$\rho = \frac{u^2}{f'\left(\dfrac{v}{u}\right)}, \qquad \lambda, \mu, \nu = \frac{\partial}{\partial(x, y, z)} f\left(\frac{v}{u}\right). \tag{29}$$

Dans les derniers chapitres de [14] et de [31] on voit aussi comment on peut unir très simplement le symbolisme de Schrödinger à celui de Jacobi.

27. **Introduction du temps vulgaire.** — Pour cette introduction, les considérations du paragraphe précédent sont suffisantes. On ne fait que les étendre légèrement en remplaçant (28) par

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\mu) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\nu) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{30}$$

C'est l'équation de continuité bien connue pour un fluide de densité ρ. L'intégrale

$$\iiint_\tau \rho\, d\tau$$

étendue à tout le volume τ (variable, en général) ne dépend pas de t.

Écrivons que l'on satisfait à (30) avec (29), u et v étant fonctions de x, y, z, t. On aura

$$u\left(\Delta v + \frac{1}{u}\frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) - v\left(\Delta u - \frac{1}{v}\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{31}$$

avec

$$\frac{1}{u}\frac{\partial \rho}{\partial v} = -\frac{f''(\lambda)}{f'^2(\lambda)}, \qquad \frac{1}{v}\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{1}{f'^2(\lambda)}\left[\frac{2}{\lambda}f'(\lambda) + f''(\lambda)\right] \qquad \text{si } \lambda = \frac{v}{u}.$$

L'équation (31) peut être remplacée par le système

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta v + \frac{1}{u}\frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + Vv = 0,\\ &\Delta u - \frac{1}{v}\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + Vu = 0,\end{aligned}\right. \tag{32}$$

où V peut être une fonction ou même une construction fonctionnelle fort quelconque. Le système (32) a plutôt été particularisé qu'étendu. Pour

$$f' = \frac{1}{a\lambda},$$

il devient

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta v + a\frac{\partial v}{\partial t} + Vv = 0,\\ &\Delta u - a\frac{\partial u}{\partial t} + Vu = 0,\end{aligned}\right. \tag{33}$$

et l'intégrale triple ci-dessus, en $\rho\, d\tau$, est alors

$$\int\int\int_\tau uv\, d\tau.$$

Si a et $-a$ sont imaginaires conjuguées, donc si a est purement imaginaire et si V se réduit à $V(x, y, z, t)$ réel, alors u et v peuvent être imaginaires conjuguées. C'est le cas habituel [33]. On trouvera plus de détails en [4].

La construction de systèmes tels que (32) et (33) est fort analogue, on le voit, à l'analyse propre aux espaces à canaux. Il s'agit, dans les deux cas, de conserver de certaines intégrales invariantes.

CHAPITRE III.

GÉNÉRALITÉS PONCTUELLES ET ONDULATOIRES.

28. Les généralités dont il s'agit ici ne sont guère envisagées que sous forme de renseignements bibliographiques. Considérons d'abord les exposés tentant de rapprocher les espaces corpusculaires de la théorie des ensembles; ils ne s'imposent pas aussi généralement que l'on pourrait croire. Les grands ouvrages traitant de Mécanique ondulatoire dépendent même peu des théories ensemblistes et, souvent, ne les mentionnent pas explicitement. Les groupes, surtout au point de vue de la causalité, jouent bien davantage.

Commençons par les ensembles. La notion de mesure, due à M. Émile Borel [34], doit fixer l'attention comme susceptible de prendre, peut-être, soit le sens physique habituel, soit quelque sens, aux modalités nouvelles, adéquat au monde des structures fines.

Nous supposons bien connue la notion d'ensemble *dénombrable*, de *mesure* nulle, ensemble qui peut correspondre, élément par élément, à la suite des nombres entiers et qui a même *puissance* que cette suite. Après viennent les ensembles ayant la puissance du continu, tel l'ensemble de tous les points formant le segment 0-1; ils ont, en général, une mesure non nulle.

La notion de mesure se complète par la notion d'intégration sur l'ensemble due à M. Henri Lebesgue [35]. Ce dernier est d'ailleurs revenu récemment, sur la mesure, dans un travail d'un grand intérêt pédagogique [36].

Dans les espaces à canaux, les émiettements de fronts d'onde, d'abord continus, transforment des ensembles continus, en ensembles discontinus, avec conservation de la puissance et d'intégrales attachées au front primitif. La *mesure* peut être exactement conservée, comme lorsqu'il y a propagation d'arcs ou d'aires; lorsqu'elle varie, l'étude en est plus délicate.

Un des résultats les plus remarquables dus à M. Borel, contenu dans ses *Leçons* de 1898, concerne les *continus de mesure nulle*. Cela peut revenir à considérer diverses sortes de continuité, par exemple divers ensembles continus ayant *même mesure*; ce par quoi ils diffèrent est dénombrable ou continu de mesure nulle. Toutefois les exemples discutés par M. Borel ne semblent pas réalisables dans le monde de la matière ordinaire et le monde physique des structures fines ne semble pas non plus les avoir utilisés jusqu'ici. Notons qu'ils sont susceptibles de vulgarisations intéressantes dues à M. Borel lui-même [37].

Mais ceci porte à parler de continus, de mesure ou de longueur nulle, qui, dans un ordre d'idées fort différent, ont pris un sens phénoménal et même, cette fois, avec le plus grand succès. Ainsi une droite isotrope est un continu de longueur nulle. Certes l'assertion n'a pas le sens précédent. Les ensembles mesurables de M. Borel sont réels et généralement définissables en eux-mêmes sur le segment 0-1. La droite isotrope n'est pas intrinsèquement définissable; elle exige des considérations de géométrie à deux dimensions. Mais, de de ce côté, nous aurons des résultats remarquables. Avec des droites isotropes, on peut créer des *structures fines isotropes* inscriptibles dans une courbe *réelle* quelconque. Par A, point de la courbe, je mène une droite isotrope I_1 jusqu'à sa rencontre avec la droite isotrope I_2, non parallèle, qui passe par le point B, infiniment voisin de A, et je parcours I_2 jusqu'à sa rencontre avec I_3 qui passe par le point C, infiniment voisin de B, non parallèlement à I_2. Et ainsi de suite. Une structure fine isotrope, $ds^2 = 0$, conduit à imaginer des trajectoires de même équation qui deviennent réelles pour des ds^2 plus quelconques dont les coefficients ne sont pas toujours positifs. On arrive ainsi aux rayons lumineux des théories gravifiques. Quant à la structure fine isotrope précédente, elle peut être obtenue de deux manières différentes; elle est double. Ceci peut aider à comprendre comment un rayon lumineux peut avoir une structure duale, comment le photon le plus simple peut, lui aussi, être double. De telles réflexions, quoique faites à bâtons rompus, suffiraient à montrer que l'on peut espérer beaucoup des structures fines, des mesures, des considérations ensemblistes y attachées.

Revenons au fait de compter, de dénombrer. La figure 3 du Chapitre premier (§ 6), parmi beaucoup d'autres exemples analogues, appelle des compléments de première importance.

Essayons de nous demander combien il pourrait y avoir de constructions de ce genre y compris les aboutissements, concevables mais non représentables sur le papier, aux fonctions continues sans dérivées. Je puis d'abord concevoir que l'arc AC soit divisé non pas en deux mais en n parties, égales ou non, et que n croisse indéfiniment. D'où des figures numérotables

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n, \quad \ldots$$

et formant un ensemble dénombrable. Pour n croissant indéfiniment, je puis ensuite concevoir une *première* figure limite me livrant une fonction continue sans dérivée, figure qui, précisément à cause de son caractère limite, ne pourra être numérotée que par un symbole nouveau, soit ω. Mais la fonction f_ω, ainsi obtenue, n'est pas unique; les procédés qui y ont conduit peuvent être variés d'une infinité de manières d'où la conception de fonctions continues sans dérivées à obtenir successivement et auxquelles je puis attribuer ainsi les indices

$$\omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \omega + 3, \quad \ldots$$

qui forment une suite dénombrable mais *transfinie*. Le premier nombre transfini est ω. C'est ainsi que peut apparaître, très simplement, la notion du *transfini*. Le transfini joue un grand rôle dans les classifications de René Baire [38], présentées, avec beaucoup d'élégance, par M. de la Vallée Poussin [39]; c'est un prolongement, un perfectionnement du dénombrable mais ce n'est, en rien, le continu.

Ceci porte à se demander s'il n'existerait pas des ensembles qui ne seraient ni dénombrables ni continus mais d'une nature *intermédiaire*. On n'en connaît point mais, jusqu'ici, on n'a pu *démontrer* qu'il n'en pouvait exister. Aussi le fait que le dénombrable suit le continu est-il *hypothétique;* c'est la célèbre *Hypothèse du continu* à laquelle M. W. Sierpinski vient de consacrer tout un Ouvrage [40] en lequel le transfini joue un grand rôle. On voit, à nouveau, combien est complexe la notion du continu malgré l'idée intuitive, très élémentaire, que nous croyons en avoir.

A propos de la notion générale d'intégrale, il faut mentionner, après l'Ouvrage de M. de la Vallée Poussin précité, celui de M. S. Saks [41]. Le continu, sans dérivation obligée, y joue naturellement un grand rôle.

La notion de mesure n'atteint pas tout; nos pensées s'y dérobent le plus souvent. Le jeu des *groupes* révèle mieux la structure des transformations phénoménales, sans exclure la structure de la Pensée. Toutes les pensées humaines forment un *groupe* puisque leurs associations, dans toute espèce de raisonnement et même dans les manifestations sentimentales ne peut donner, en fin de compte, autre chose qu'une pensée humaine. Les tentatives logistiques modernes, absolument générales, équivalent peut-être à ceci.

Quoiqu'il en soit, c'est du côté des groupes qu'il faut chercher toutes les manifestations du Principe de Causalité, ce qui est grandement développé par M. Georges Bouligand [21], [42], [43], [12].

Rappelons, à l'actif de la mesure, qu'elle est la base des Théories einsteiniennes. Ces théories n'ont d'autres principes que le suivant : *Tout instrument de mesure est variable dans un champ variable.* C'est cette variabilité de la mesure qui conduit au recours aux géométries à ds^2 ou à étalonnement variables. De tels recours pourront être diversifiés; ils ne peuvent plus être abandonnés. Quant aux théories intra-atomiques, si elles paraissent parfois si étranges et si nouvelles, c'est précisément parce que la notion de mesure n'y est plus ce qu'elle était autrefois ni même ce qu'elle est dans les théories gravifiques.

M. Louis de Broglie a consacré tout un intéressant fascicule à la *non répétabilité* des mesures [44]. Dans la nouvelle Mécanique, une mesure, en général, n'est pas *répétable*. C'est ce que l'on peut encore concevoir dans les espaces à canaux. En effet, lorsqu'on dit qu'une mesure est répétable, au sens ordinaire de cet adjectif, il s'agit d'une répétition au bout d'un certain laps de temps astronomique ou ordinaire. Or les espaces à canaux admettent déjà un temps paramétrique ou fonctionnel beaucoup plus complexe. En général on ne pourra analyser celui-ci, y retrouver quelque chose, avec la variable t vulgaire. (*Cf.* Chap. I, § 5; Chap. II, fin § 25.)

M. Jean Louis Destouches a donné [45], à propos du *neutron*, un exemple de théorie dépassant non seulement celle des espaces à canaux mais encore la Mécanique ondulatoire fondée sur l'équation de Schrödinger car cette équation, comme nous l'avons vu ici, ne s'élève guère au-dessus des théories fondées sur l'évanouissement de divergences relativistiques ou non. Il y a des analogies entre le neutron et le photon; le premier traverse la matière plus aisément que le second ne traverse les corps dits transparents. Il y a, très probablement, une curieuse structure fine à attribuer aux trajectoires neutroniques mais nous sommes toujours très loin de pouvoir nous les représenter.

M. André George, d'après Fermi, a examiné la Mécanique quantique dans ses rapports avec la Causalité [46]. Discussions analogues à celles de M. Louis de Broglie en [44]. Conservation du t ordinaire autant qu'il est possible. La Mécanique considérée est celle des opérateurs hermitiques c'est-à-dire celle qui est interprétable dans un espace de Hilbert où, par définition pour ainsi dire, les transformations sont celles qui correspondent à ces opérateurs. Mais on peut imaginer des extensions où apparaîtraient d'autres opérateurs. Peut-être en correspond-il de tels à l'existence du neutron.

M. Eugène Néculcéa, en étudiant la Théorie du rayonnement, d'après C.-G. Darwin, a remis en évidence le rôle essentiel des divergences évanouissantes [47]. Critique de la notion d'individualité et de la notion de pure particule pour le photon.

M. Jean Perrin [48] est aussi mathématicien et philosophe que physicien. Il écrit de belles choses sur le Nombre et le Continu, sur les formes qui doivent être *découvertes*, « car il semble exister, dans le cerveau humain, des contrées sans limite où dorment, dans la nuit, des possibles sans nombre que la Conscience peut ne jamais animer ».

M. L. Brillouin, à propos du champ *self-consistent*, étudie la répartition des électrons sur les ondes [49]. Insuffisance des équations de Schrödinger et de Dirac.

M. Eugène Néculcéa a encore publié une adaptation de Sir Arthur Eddington relative au Déterminisme [17]. Bizarrerie des trajectoires électroniques. Une chose ayant une position et une vitesse précise n'est pas un électron. L'incertitude est incorporée dans la description. Arrangement astucieux qui nous empêche de trouver plus que nous ne devons connaître.

M. Paul Langevin [50], en revenant sur les notions corpusculaires, prend la défense du Déterminisme. Critique des trajectoires électroniques suivant Lorentz et de la théorie planétaire.

M. Jean Louis Destouches essaie, non sans succès, de jeter les bases d'une Mécanique générale [23]. Généralisations des Mécaniques ponctuelles fondées sur l'hamiltonien. Comparaisons possibles avec les espaces à canaux où un hamiltonien peut être extrait d'une équation telle (7) Chap. I ou (23) Chap. II. Passage général aux Mécaniques ondulatoires. Principe d'*ondulisation* consistant à substituer des opérateurs différentiels d'ordre supérieur à ceux du premier ordre. Recours aux espaces de D. Hilbert et aux espaces abstraits de M. Maurice Fréchet.

M. Georges Bouligand [43] a repris les Relations d'incertitude en *trois* domaines différents, ce dont on peut déjà se rendre compte dans H. Weyl [51]. Ici nous nous sommes attachés surtout au troisième point de vue, celui des courbes à structure fine.

M. Maurice Fréchet, célèbre par ses Espaces abstraits [22], a repris l'Arithmétique de l'Infini [52]. Ses premières lignes sont pour le point de vue Volterra-Buhl : *La ligne est une courbe plane fermée et le nombre est son aire*. C'est partir de l'identité

$$\int_{C} X\,dY = \int\int_{A} dX\,dY$$

ainsi que je l'ai toujours fait dans mes recherches de Physique théorique. Mais il y a d'autres éléments que des aires auxquels on peut faire correspondre des nombres. Et il y a aussi des correspondances d'éléments qui, entendues de manière générale, donnent les espaces abstraits. Le *transfini* vient de *nombres ordinaux infinis*. La numération transfinie est *topologique*. Classes de Baire. Mesure de Borel et intégration de Lebesgue. *Revoir* de la Vallée Poussin [39].

M. Antoine Appert a prolongé tout ceci [53]. Aboutissement au transfini lié à l'hypothèse du continu.

M. Paul Renaud n'a pas craint de s'attaquer à la structure de la Pensée [8]. Ses idées fondamentales ont déjà été exposées au début du présent fascicule. Le déterminisme classique est ponctuel; il reste à l'*onduliser*.

Quant aux *espaces à canaux*, mis largement à contribution dans le présent fascicule, on peut les rattacher aux *espaces fibrés* de M. W. Threlfall [54]. Les fibres ne sont pas toujours les canaux mais plutôt les variétés qui les constituent.

Dans un récent travail [55] on trouvera des rapprochements entre espaces fibrés et espaces de groupes, au sens de M. Élie Cartan.

Enfin, dans mes *Nouveaux Éléments d'Analyse* (*Calcul infinitésimal*, *Géométrie*, *Physique théorique*) [56] qui développent mon Cours de la Faculté des Sciences de Toulouse et sont édités dans un but pédagogique, on trouvera également de tels rapprochements construits à partir des considérations les plus élémentaires.

Ces *Nouveaux Éléments* contiennent aussi (Chap. I, § 7) des réflexions philosophiques sur les doutes et les hésitations qui, du domaine psychologique, sont passés dans le domaine géométrico-physique. Ceci équivaut au « vague vrai » de Renan dont il a été question ici même dans notre Introduction.

Il y a un rapprochement analogue à faire avec un article récent de M. Louis de Broglie [57], article dont je dois la communication à l'éminent géomètre lui-même.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. George D. Birkhoff. — *Dynamical Systems*. American mathematical Society, Colloquium Publications. Vol. IX; VIII-296 pages, New-York, 1927. *Voir* analyse dans *L'Enseignement mathématique*, t. 27, 1928, p. 170.

2. Nicolas Kryloff et N. Bogoliuboff. — *Mécanique non linéaire*. Œuvre très importante mais dispersée en de nombreux fascicules inégaux surtout quant à l'étendue du texte français. *Voir* analyses dans *L'Enseignement mathématique*, t. 30, 1931, p. 180; t. 31, 1932, p. 138-139 et 314-315; t. 33, 1934, p. 242.

3. A. Buhl. — Ondes et Corpuscules dans les Espaces à canaux (*Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 5, t. 19, 1933, p. 809).

4. A. Buhl. — Sur quelques analogies corpusculaires et ondulatoires (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2, t. 58, novembre 1934).

5. G. Bouligand, G. Giraud et P. Delens. — Le Problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel (*Actualités scientifiques*, fasc. 219, Paris, 1935; Hermann).

6. Oswald Veblen. — Certain Aspects of Modern Geometry (*The Rice Institute Pamphlet*, vol. 21, october 1934, p. 207).

7. H. Poincaré. — *Électricité et Optique*. Leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899. Deuxième édition publiée par Jules Blondin et Eugène Néculcéa (Paris, Gauthier-Villars. *Voir* Introduction).

8. Paul Renaud. — Structure de la Pensée et Définitions expérimentales (*Actualités scientifiques*, fasc. 173, Paris, 1934; Hermann).

8 *a*. Em. Meyerson. — Réel et Déterminisme dans la Physique quantique (*Ibid.*, fasc. 68, 1933). *Voir* p. 40.

9. Laplace. — *Œuvres*, t. 6 (Paris, 1846; Imprimerie royale).

10. Th. De Donder. — Interprétation physique de la Relativité générale (*Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 2 décembre 1922, p. 732; 3 février 1923, p. 59; 3 mars 1923, p. 91). *Voir* également les fascicules concernant la Gravifique, publiés par M. De Donder dans le *Mémorial des Sciences mathématiques*, par exemple le fascicule VIII, 1925, p. 13.

11. A. Buhl. — Sur l'intégrale de Stieltjes (*Comptes rendus*, 20 mai 1935).

12. G. Bouligand. — Géométrie infinitésimale directe (G. I. D.) et Physique mathématique classique (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 71, 1935, p. 35). *Cf.* [21].

13. A. Buhl. — Tourbillons, Corpuscules, Ondes avec quelques préliminaires

sur le rôle des opérateurs en Physique théorique (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3, t. 24, 1932, p. 1).

14. A. Buhl. — Structures analytiques et Théories physiques (*Mémorial des Sciences physiques*, fasc. 22, 1933, p. 48).

15. G. Juvet. — *La Structure des nouvelles Théories physiques*. Nouvelle Collection scientifique Émile Borel (Paris, 1933; F. Alcan).

16. Em. Picard. — La vie et l'œuvre de Joseph Boussinesq (*Institut de France*). Lecture faite en la Séance publique annuelle du 11 décembre 1933.

17. Sir Arthur Eddington. — Sur le Problème du Déterminisme (adapté de l'anglais par Eugène Néculcéa) (*Actualités scientifiques*, fasc. 112, p. 22. Paris, 1934; Hermann).

18. Sir Arthur Eddington. — *Space Time and Gravitation*. Cambridge, at the University Press, 1920. *Voir* p. 201.

19. P. A. M. Dirac. — *Les Principes de la Mécanique quantique*. Traduction Al. Proca et J. Ullmo (*Les Presses universitaires de France*, Paris, 1931). *Voir* Chap. I, § 2.

20. H. Lebesgue. — *Notice sur les Travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue* (Toulouse, 1922; Ed. Privat). *Voir* Introduction.

21. G. Bouligand. — *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*. Préface de M. Élie Cartan. *Cf.* [12] (Paris, 1932; Vuibert). Pour les développables non réglées, *voir* p. 191. Pour les caractères dimensionnels, *voir* tout le Chapitre XVII.

22. M. Fréchet. — *Les Espaces abstraits et leur Théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale*. Collection Em. Borel (Paris, 1928; Gauthier-Villars).

23. J.-L. Destouches. — Les Principes de la Mécanique générale (*Actualités scientifiques*, fasc. 140. Paris, 1934; Hermann).

24. H. Lebesgue. — Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan (*Comptes rendus*, t. 128, 1899).

25. A. Sainte-Laguë. — Géométrie de situation et jeux (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 41, 1929).

25. *a.* R. Estève et H. Mitault. — *Cours de Géométrie*, II, p. 196 (Paris, 1936; Gauthier-Villars). Le tome III, publié avec une Préface de M. Georges Bouligand, signale dans une Introduction due aux auteurs (p. xi), l'une des contradictions de la géométrie du solide.

26. F. G.-M. — *Exercices de Géométrie*. 5e édition (Tours; A. Mame et fils. Paris, 1912; J. de Gigord). *Voir* p. 940. Article nécrologique dans *L'Enseignement mathématique*, t. 18, 1916, p. 445.

27. E. Wigner. — *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (Braunschweig, 1931; Friedr. Vieweg und Sohn).

28. J. von Neumann. — *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin, 1932; J. Springer).

29. Marshall Harvey Stone. — *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis* (New-York, 1932; American math. Society).

29 *a*. Jean Delsarte. — Les Groupes de Transformations linéaires dans l'Espace de Hilbert (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 57, 1932).

30. A. Buhl. — Les Théories modernes se rapportant à la Relativité (66e *Congrès des Sociétés savantes*, Toulouse, 1933).

31. A. Buhl. — Gravifiques, Groupes, Mécaniques (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 62, 1934).

32. J. A. Schouten und D. J. Struik. — *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* (Groningen-Batavia, 1935; Zweite Auflage Erster Band. P. Noordhoff).

33. L. de Broglie. — *Théorie de la Quantification dans la nouvelle Mécanique* (Hermann, 1932). *Voir* notamment Chap. II.

34. E. Borel. — *Leçons sur la Théorie des Fonctions*. 1re édition, 1898. 2e édition, 1914 (Paris, Gauthier-Villars).

35. H. Lebesgue. — *Leçons sur l'Intégration*. Collection Em. Borel. 1re édition, 1904. 2e édition, 1928 (Paris, Gauthier-Villars). Pour tout ce qui concerne l'intégrale de Stieltjes, *voir* la 2e édition, Chap. XI.

36. H. Lebesgue. — Sur la mesure des grandeurs (*L'Enseignement mathématique*, à partir du t. 31, 1932).

37. E. Borel. — *L'Espace et le Temps*. Nouvelle Collection scientifique (Paris, 1922; F. Alcan). *Voir* particulièrement Chap. IV.

38. A. Buhl et G. Bouligand. — En mémoire de René Baire. Éloge funèbre (*L'Enseignement mathématique*, t. 31, 1932).

39. C. de la Vallée-Poussin. — *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire*. Collection Em. Borel (Paris, 1916; Gauthier-Villars).

40. Waclaw Sierpinski. — *Hypothèse du Continu*. Monografje matematyczne, t. IV (Varsovie, 1934; Seminar matem. Uniw. Warsz.).

41. Stanislaw Saks. — *Théorie de l'Intégrale*. Monografje matematyczne, t. II (Varsovie, 1933; Seminar matem. Uniw. Warsz.). *Voir*, au Chap. V. Intégrale de Lebesgue et Intégrale de Riemann-Stieltjes.

42. G. Bouligand. — *Premières Leçons sur la Théorie générale des Groupes et ses Applications à l'Arithmétique, à l'Algèbre, à la Géométrie* (Paris, 1935, Vuibert).

43. G. Bouligand. — La Causalité des Théories mathématiques (*Actualités scientifiques*, fasc. 184. Paris, 1934; Hermann).

44. L. de Broglie. — Sur une forme plus restrictive des Relations d'incertitude, d'après MM. Landau et Peierls (*Ibid.*, fasc. 31, 1932).

45. J.-L. Destouches. — État actuel de la Théorie du Neutron (*Ibid.*, fasc. 33, 1932).

46. André George. — Mécanique quantique et Causalité, d'après Enrico Fermi (*Ibid.*, fasc. 38, 1932).

47. E. Néculcéa. — Sur la Théorie du rayonnement, d'après M. C. G. Darwin (*Ibid.*, fasc. 56, 1933).

48. J. Perrin. — La Recherche scientifique (*Ibid.*, fasc. 58, 1933).

49. L. Brillouin. — La Méthode du Champ self-consistent (*Ibid.*, fasc. 71, 1933).

50. P. Langevin. — La notion de Corpuscules et d'Atomes (*Ibid.*, fasc. 132, 1934).

51. H. Weyl. — *Gruppentheorie und Quantenmechanik.* Zweite Auflage, 1931 (Leipzig, S. Hirzel). *Voir* particulièrement Kap. II.

52. M. Fréchet. — L'Arithmétique de l'Infini (*Actualités scientifiques*, fasc. 144, Paris, 1934; Hermann).

53. A. Appert. — Propriétés des Espaces abstraits les plus généraux (*Ibid.*, fasc. 145 et 146, 1934).

54. W. Threlfall. — Quelques résultats récents de la Topologie des variétés (*L'Enseignement mathématique*, t. 35, 1936). Exposé fait à Genève, parmi d'autres, dans un Cycle de Conférences particulièrement consacrées à la Topologie. Nombreuses références bibliographiques concernant tout le Cycle.

55. A. Buhl. — Espaces fibrés. Quanta. Groupes (*L'Enseignement mathématique*, t. 36, 1937). Rappels élémentaires au sujet de la citation précédente, notamment quant à certains résultats de MM. E. Cartan et W. Threlfall.

56. A. Buhl. — *Nouveaux Éléments d'Analyse* (*Calcul infinitésimal, Géométrie, Physique théorique*). Cours de la Faculté des Sciences de Toulouse. Tome I, 1937. Paris, Gauthier-Villars.

57. L. de Broglie. — Réalité physique et idéalisation (*Revue de Synthèse*), t. 8, octobre 1934).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE III.

Généralités ponctuelles et ondulatoires.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
105439 Quai des Grands-Augustins, 55.

Revue générale des Sciences

pures et appliquées

FONDATEUR : LOUIS OLIVIER (1890-1910) — DIRECTEUR : J.-P. LANGLOIS (1910-1923)

Gaston DOIN et C^ie, éditeurs, 8, place de l'Odéon, PARIS

LIBRAIRIE-IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Envoi dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris
Frais de port en sus. (Chèques postaux : Paris 29 323.) R. C. Seine 99 506.

MÉMORIAL DES SCIENCES PHYSIQUES

DIRECTEURS

CH. FABRY

HENRI VILLAT ET JEAN VILLEY

Volumes in-8 raisin (25×16) se vendant séparément 15 francs.

Fascicules parus :

Fasc.
1. *L. de Broglie.* — La Mécanique ondulatoire.
2. *A. de Gramont.* — La Télémétrie monostatique.
3. *G. Moreau.* — Propriétés électriques et magnétiques des flammes.
4. *F.-H. Van den Dungen.* — Les Théories générales de la technique des vibrations.
5. *J. Barbaudy.* — Les Bases physico-chimiques de la distillation.
6. *F. Bedeau.* — Le Quartz piézo-électrique et ses applications dans la technique des oscillations hertziennes.
7. *E. Aubel et A. Genevois.* — L'État actuel de la question des ferments.
8. *René Dubrisay.* — Applications de la mesure des tensions superficielles à l'analyse chimique.
9. *G. Ribaud.* — Le rayonnement des corps non noirs.
10. *Mesnager.* — Détermination expérimentale des efforts intérieurs dans les solides.
11. *Charles Fabry* et *H. Buisson.* — L'absorption des radiations dans la haute atmosphère.
12. *E. Rothé.* — Les ondes séismiques et leur propagation.
13. *R. Mesny.* — Les réseaux électromagnétiques et leurs applications.
14. *C. Bialobrzeski.* — La thermodynamique des étoiles.
15. *G. Van Lerberghe.* — Calcul des affinités physico-chimiques.
16. *A. Boutaric.* — La concentration des ions d'hydrogène.
17. *Barbillion.* — Réglage électrique et mécanique des Stations centrales productrices d'énergie.
18. *L. Cagniard.* — Les Variations du pouvoir inducteur spécifique des fluides.
19. *A. Richard.* — La Synthèse industrielle des alcools.
20. *L. Dunoyer.* — Les émissions électroniques des couches minces.
21. *J. Villey.* — Introduction à l'étude de la Résistance des matériaux.
22. *A. Buhl.* — Structures analytiques et théories physiques.
23. *J. Villey.* — Éléments de thermodynamique cinétique.
24. *Ch. Fabry.* — Les principes de la photométrie en Astronomie et en Physique.
25. *C. Gutton.* — Lignes téléphoniques.
26. *Henri Labrouste.* — L'analyse des séismogrammes.
27. *G. Foëx.* — Les lois expérimentales du paramagnétisme.
28. *J. Villey.* — Les principes des moteurs thermiques.
29. *J. Sudria.* — L'action euclidienne de déformation et de mouvement.
30. *E. Henriot.* — Les couples de radiation et les moments électromagnétiques.
31. *J. Villey.* — Le rendement des moteurs thermiques.
32. *H. Pariselle.* — Polarimétrie et Chimie.
33. *J. Villey.* — Propriétés générales des fluides moteurs.

Nombreux fascicules en préparation. — Consulter la Notice spéciale.

105439-37 Paris. — Librairie-Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.