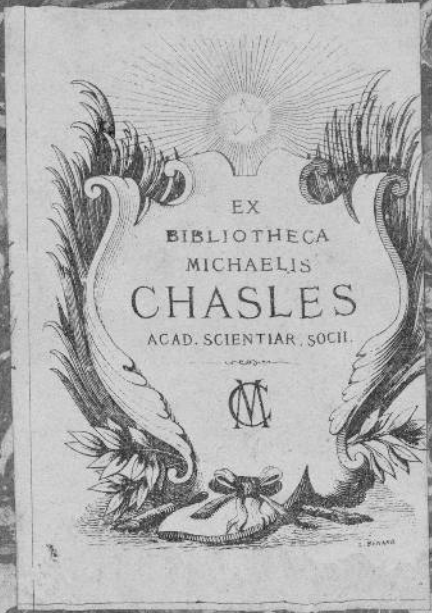

EX
BIBLIOTHECA
MICHAELIS
CHASLES
ACAD. SCIENTIAR. SOCII.

Brunck. non ute

DE LINEIS LOGARITHMICIS ET SPIRALIBUS HYPERBOLICIS.

EXERCITATIONES GEOMETRICÆ.

Autore R. P. PETRO NICOLAS, è Societate JESU.

TOLOSÆ,
Ex TYPOGRAPHIA PEKIANA.

M. D. C. XCVI.

TOLOSÆ,
Ex TYPOGRAPHIA PERIANA.

M. D. C. XCVI.

CLARISSIMO DOCTISSIMOQUE VIRO

DOM. DOM. GUILLELMO

DE

CASEMAJOU,

ABBATI S. PETRI DE INSULA in Medurco, Archidiacono majori Ecclesiæ Metropolitanæ Tolosanæ, & in Uuiversitate Tolosana Sacræ Theologiæ Professori Regio ac Decano.

QUÆ de Novis Spiralibus antè aliquot annos scripsi, harum rerum peritis magnopere probata cognovi ex pluribus eorum literis, quibus etiam me hortabantur, ut ejusdem generis alia cùm primùm possem in lucem ederem : His enim Geometriam non parùm illustratum iri. Tu verò, VIR CLARISSIME, non solùm idem à me crebrò petis, sed vehementer urges, & morantem increpas; tum quæ singularis est humanitas Tua, bonarúmque artium promovendarum cura, quidquid in Te erit quò celeriùs res perfici possit, prolixè libentérque offers. Atqui neque repulsam à nobis ferre Te sinit magna il-

*la quæ propter summam virtutem Tuam, perfectámque eruditionem, & ardens inprimis Religionis adversus Novatorum insidias defendendæ studium, jamdudum nobis tecum est contracta necessitudo, neque decet me, tam propensæ isti erga me voluntati officiisque non respondere. Habe igitur quod postulas, Geometricas exercitationes duas, in quibus quæcunque ad Lineas Logarithmicas & Spirales Hyperbolicas pertinent, breviter & quàm potui accuratissimè prosecutus sum. Atque hæc lucubratio Tibi, VIR CLARISSIME, aliisque præstantibus Geometris eò jucundior erit, quòd in argumento versatur arduo inprimis & subtili, neque ab ullo quod sciam hactenùs pertractato. Nam de Spiralibus Hyperbolicis nihil uspiam in omnibus aut veterum aut recentiorum Geometrarum libris me legere memini, nisi quod * VVallisius obiter advertit quemadmodùm è Parabolicis curvis certa ratione convolutis Spiralis Archimedea eíque affines oriuntur, ita Hyperbolæ atque in universum singulis lineis suas Spirales respondere. Quod attinet ad Logarithmicam, eam Angli Geometræ doctissimi viri quasi delibatam aliis pleniùs uberiúsque tractandam reliquerunt, ut notat * Pardiæus noster, qui & se hujus Lineæ ope quadrasse Hyperbolam tradit; quâ autem ratione, non indicat, Nos luculenter explicabimus. Nam & cum Figuræ Logarithmicæ dimensione, ejúsve centro gravitatis, & cum ipsius curvæ Tangente connexam esse Hyperbolæ quadraturam ostendemus. Quod*

* Mechan. part. 2. prop. 28.

* Elem. Geom. in præfat.

unum si hanc Lineam commendaret, tamen eam maximi fieri par esset; Quid enim aliud est quo Spiralis tantopere celebretur, quàm illius Tangentis cum circuli quadratura mirabilis conjunctio, quam qui primus demonstravit Archimedes immortalem est apud posteros gloriam consecutus. At sunt aliæ permultæ insignésque Logarithmicæ lineæ proprietates, tum ad Geometriæ praxin, tum ad Logarithmorum numericorum doctrinam explicandam perutiles, præsertim verò ad elucidandas quæstiones Analyticas, de quibus erit alius differendi locus. Nunc enim Geometrica solùm attingo. Porrò utriusque lineæ Logarithmicæ ac Spiralis Hyperbolicæ tractationem simul conjunxi, quoniam illæ quantumvis prima specie dissimiles admodùm videantur, magnam tamen inter se consensionem habent, & una sine altera perfectè intelligi nequaquam potest. Hoc igitur Opusculum, VIR CLARISSIME, mole quidem exiguum, sed inventorum novitate atque præstantia non indignum ut arbitror, quod Tibi offeratur, benigne accipe, ut Nostræ pignus amicitiæ, meæque erga Te observantiæ monumentum. Erit in eo fortasse aliquid quo interdùm oblecteris, ubi Theologiæ quam summa cum laude jam à tot annis in celeberrima Academia Tolosana profiteris, intermissis paulisper gravioribus studiis, ad hæc amœniora Te conferre volueris. Erit certè in quo se aliquando exerceat ingenium Nepotis Tui adolescentis eximii, quem Tu Græcis latinisque literis apprimè excultum ad omnem eruditionem informas. Vale.

ERRATA.

Oro Lectorem ut priusquàm legat, corrigere velit quæ Typographo exciderunt errata sequentia præsertim quinque priora, nam cætera parvi sunt momenti.

Pag. 2. (sit *ab*, *bf*), lege sit *a b*, *bf*.
Pag. 6. in fine coroll. 1. (AB, BC, CF) lege AB, BC, CD.
Pag. 7. in demonstratione (quoties AB in AF) lege in AE.
Pag. 15. in demonst. (ad Cylindrum ex AM) lege ad duplum Cylindri.
Pag. 26. num. III. sub finem (ABX, ALY) lege ABX, HLY.
Pag. 34. in demonst. (ad artum) lege ad arcum,
Pag. 41. (Dico 3. Distentiam) lege Distantiam.
Pag. 42. sub finem paginæ (qud fieri non potest) lege quod.
Pag. 47. linea 7. (simul ad arcum LS) lege ad arcum ES.
Pag. 48. in demonst. (ergo ratio *f a* ad *e*) lege ratio *a* ad *e*.
Ultima linea ejusdem pag. (ad centrum C) lege ad centrum A.

DE LINEIS LOGARITHMICIS EXERCITATIO GEOMETRICA.

DEFINITIONES.

ESTO (*Fig.* 1.) Linea FF, cujus ſit talis proprietas ut ſumptis in axe deinceps quotcumque partibus æqualibus AB, BC, CD, DE ordinatæ inter ſe inæquales AF, BF, CF, DF, EF ſint continuè proportionales. Linea FF vocetur *Logarithmica.*

Deſcriptio hujus lineæ paulò aliter ſic etiam poteſt intelligi. Sit axis AE, cui in A & E applicatæ ſint AF, EF inæquales inter ſe. Diviſaque AE bifariam in C, ex C applicetur CF media proportionalis inter AF, EF. Diviſis item bifariam AC, CE, in B, D, inter AF, CF applicetur media proportionalis BF; & inter CF, EF media DF atque diviſis iterùm bifariam ſingulis AB, BC, CD, DE applicentur mediæ, & ſic in infinitum. Puncta F, F extrema illarum omnium mediarum proportionalium deſcribent lineam Logarithmicam FFF.

ELEMENTARES QUÆDAM PROprietates lineæ Logarithmicæ.

EX ipſa generatione lineæ Logarithmicæ deduci facilè poſſunt ſequentes proprietates.

I. *Linea Logarithmica* FF *produci poteſt in infinitum tam verſus partem* V *in qua ordinatæ decreſcunt quàm verſus partem* Y *in qua creſcunt*; addendo nimirum axi AE tam verſus S quàm verſus X partes æquales ipſis AB, BC &c. & ordinando ex earum extremis rectas continuè proportionales in ratione rectarum AF, BF, & inter has ordinando alias medias in infinitum modo ſupradicto.

II. *Linea Logarithmica* VY *est curva perpetuò convexa versus axem* SX.

Hoc facilè ostendetur supposito hoc Lemmate. In Trapezio *a cff*, diviso bifariam latere *a c* in *b* ducatur parallela *b f*. Dico quadratum *b f* majus esse rectangulo sub *a f*, *c f*.

Producatur *ff* donec occurrat *a c* in *g* Quoniam *ab*, *b c* sunt æquales (*Hyp.*) ratio, *ag*, *ab*, major est quàm ratio *bg*, *bc*. Ergo per conversionem rationis ratio *ag*, *bg*, sivè *af*, *bf*, minor est ratione *bg*, *cg*, sivè *bf*, *cf*. Sit *ab*, *bf* ut *bf*, *cf*. Erit ergo *ab* major quàm *af*, ac proinde rectangulum *ab*, *cf*, sive quadratum *b f*, majus rectangulo *a f*, *c f*. Quod erat ostendendum.

Ostendamus jam lineam FF esse curvam perpetuò convexam versus axem S X. Sumantur in curva duo quæcunque puncta F, F quæ conjunganrur rectâ F L F.. Sintque ex punctis F, F ordinatæ AF, C F, & A C, bisecetur in B, ducatúrque ordinata B F quæ occurrat rectæ F L F in L.

In Trapezio A C F F, quadratum B L majus est rectangulo A F, C F (*Lemm. præc.*) est autem ex natura lineæ Logarithmicæ F F F, quadratum B F æquale rectangulo sub AF, CF. ergo quadratum B L majus est quadrato BF, ac proinde recta B L major quàm recta BF, ergo linea FF est curva in puncto F extremo ordinatæ B F convexa versus axem SX. Idem autem ostendetur de aliis punctis.

III. *Ordinatæ in Logarithmica decrescunt versus unam partem* SV, *infra quamcunque magnitudinem datam*; *crescunt autem versus alteram partem* XY, *supra quamcunque magnitudinem datam.*

Ordinatæ enim A F, B F, C F, D F, E F, &c. coustituunt versus S, V, progressionem geometricam infinitarum linearum decrescentium; Ex altera autem parte ordinatæ E F, D F, CF, BF, AF, &c. constituunt progressionem geometricam infinitarum linearum crescentium, atqui in progressione geometrica decrescente per infinitos terminos pervenitur ad aliquem terminum minorem quâcunque datâ quantitate; & in progressione geometrica crescente per infinitos terminos pervenitur ad aliquem terminum majorem quâcunque datâ quantitate, ut geometris satis notum est, & demonstravit Gregorius à S. Vincentio propos. 77. & 119. libri de progressionibus geometricis. ergo ordinatæ in Logarithmica decrescunt versus S, V infra quamcunque magnitudinem datam, crescunt autem supra quamcunque magnitudinem datam versus X, Y.

IV. *Curva Logarithmica* VFY *est asymptotos axi* SX.

Cùm enim ordinata possit versus partem S, V, minor esse quacunque data; ut modò diximus: manifestum est curvam VFY accedere ad axem SX propiùs distantia quacunque data; nunquam autem cum eo

concurrit, nam ex descriptione lineæ Logarithmicæ patet ad quodcunque punctum axis SX, applicari ordinatam per cujus extremum Logarithmica transit, ergo curva Logarithmica VFY axi S X asymptotos est.

V. *Sumptis in axe æqualibus* AB, BC, CD, DE, *&c. & ductis ordinatis* AF, BF, CF, DF, *&c. atque ex punctis* F, F *demissis in* AF *perpendicularibus* FG, FH, FI, FK, *&c. differentiæ* FG, GH, HI, IK, *&c. sunt continuè proportionales in ratione ordinatarum* AF, BF.

Cùm enim A G, A H æquales sint ipsis B F, C F. Sintque ex natura Logarithmicæ tres A F, B F, C F, proportionales, erit tota AF ad totam A G ut ablata A G ad ablatam A H, ergo reliqua F G est ad reliquam G H ut tota A F ad totam B F. Similiter ostendetur GH, HI, esse ut B F, C F hoc est ut A F, B F, & sic de cæteris.

Corollarium. Hinc quælibet ordinata F A est summa infinitarum FG, GH, HI, &c. continuè proportionalium quæ sunt differentiæ ordinatarum AF, BF, CF, DF, &c.

VI. *Si in axe Logarithmicæ sumantur utcunque duæ partes æquales, atque ex illarum extremis ducantur ordinatæ, illæ erunt inter se proportionales.*

Sint 1. sumptæ A B, C D æquales (*fig.* 2.) & intermedia B C sit ipsis commensurabilis. Ostendendum est ordinatas A L, B L esse inter se, ut sunt ordinatæ CL, DL. Quoniam BC commensurabilis supponitur ipsis A B, C D, est ad illas ut numerus aliquis X ad numerum Z. Quot sunt unitates in numero X, in totidem partes æquales dividatur BC in punctis E, F; Quot autem sunt unitates in numero Z, in totidem partes æquales dividantur singulæ AB, CD in punctis G, H. atque ex omnibus illis punctis ducantur ordinatæ G L, E L, F L, H L. erunt igitur ex natura lineæ Logarithmicæ omnes ordinatæ A L, GL, BL, EL, FL, CL, HL, DL continuè proportionales. Cùm autem AB, CD ponantur æquales, tot erunt partes AG, GB æquales in AB, quot sunt CH, H D æquales in C D. ac proinde tot rationes AL, GL; GL, BL, quot rationes CL, HL; H L, D L. Cùm ergo omnes rationes A L, G L; G L, B L; C L, HL; H L, D L sint æquales inter se, ratio AL, B L erit æqualis rationi CL, DL cùm utraque sit composita ex totidem rationibus æqualibus.

Sint jam Secundò sumptæ AB, IK æquales partes axis, sitque intermedia BI incommensurabilis ipsis, AB, IK. Ostendendum est ordinatas AL, BL esse adhuc inter se ut sunt ordinatæ IL, KL.

Quoniam BI est incommensurabilis ipsis AB, IK, potest ex BI auferri aliqua BC quæ sit commensurabilis ipsis AB, IK, relinquat autem C I minorem quacunque data (ut Geometris satis notum est) ipsi IK sit æqualis C D. erit ergo C I æqualis D K. Cùm autem CI possit esse minor quacunque data, etiam D K potest esse minor quacunque

data. Quoniam verò tam CI quàm DK possunt esse indefinitè exiguæ manifestum est rationem tam CL, IL, quàm DL, KL abire in rationem æqualitatis, cùm ergo adæquentur CL, IL, & DL, KL, ratio CL, DL evadit æqualis rationi IL, KL.. Jam verò quoniam AB, IK, (*hyp.*) & IK, CD (*construct.*) sunt æquales, etiam AB, CD æquales sunt. est autem & intermedia BC (*constr.*) commensurabilis ipsis AB, CD. ergo ratio AL, BL æqualis est rationi CL, DL (*ex prima parte ante demonstrata*) Cùm ergo ratio CL, DL abeat in rationem IL, KL, ut ostensum est. Sequitur rationem AL, BL æqualem esse rationi IL, KL. Quod erat ostendendum.

VII. *In Logarithmica si ducantur utcunque quatuor ordinatæ, ratio duarum eodem modo continet aut continetur in ratione aliarum duarum, quomodo axis inter duas primas interceptus continet aut continetur in axe intercepto inter duas posteriores.*

Hæc est pulcherrima hujus lineæ proprietas pro qua intelligenda.

Sint *primò* (*fig.*1.) quatuor ordinatæ AF, CF, DF, EF. sitque axis AC inter duas AF, CF interceptus multiplex axis DE intercepti inter duas DF, EF.

Divisâ rectâ AC in partes AB, BC æquales ipsi DE. ductisque ordinatis ex punctis divisionum. omnes rationes AF, BF; BF, CF; DF, EF æquales sunt ut probatum est num. VI. Præterea manifestum est totidem esse rationes AF, BF; & BF, CF quot sunt partes AB, BC.. ergo ratio AF, CF tam est multiplicata rationis AF, BF sive æqualis DF, EF, quàm recta AC est multiplex ipsius AB sive æqualis DE.. ergo ratio AF, CF eodem modo continet rationem DF, EF quomodo axis AC continet axem DE.

Secundò. Sint quatuor ordinatæ AF, DF; CF, EF tales ut axis AD non sit quidem multiplex axis CE sit tamen illi commensurabilis. Divisâ AD in partes AB, BC, CD & CE in partes CD, DE æquales maximæ communi mensuræ ipsarum AD, CE, Cùm sit evidens esse tot rationes AF, BF; BF, CF; CF, DF inter AF, & DF quot sunt partes AB, BC, CD æquales in AD; & tot rationes CF, DF; DF, EF inter CF, EF quot sunt partes in CE; sintque præterea singulæ illæ rationes inter se æquales, sequitur rationem AF, DF eodem modo continere rationem CF, EF quomodo axis AD, continet axem CE.

Tertiò sint (*Flg.*2.) quatuor ordinatæ AL, OL, CL, DL tales ut axis AO sit incommensurabilis axi CD. Potest ex AO auferri AF commensurabilis ipsi CD relinquens autem FO minorem quacunque data, ergo cùm ratio AL, FL eodem modo contineat rationem CL, DL quomodo AF continet CD. ut modo ostendimus, desinat autem ratio AL, FL in rationem AL, OL (eo quod FL desinit in OL propter indefinitam exiguitatem ipsius FO) & recta AF desinat similiter in

rectam

rectam A O; sequitur rationem A L, O L eodem modo continere rationem C L, D L, quomodo recta AO continet rectam C D.

VIII. *Si in Logarithmica (fig. 1.) ducantur utcunque tres ordinatæ* AF, DF, EF. *ratio primæ* AF *ad secundam* DF, *eodem modo continet rationem secundæ* DF *ad tertiam* EF *aut in ea continetur quomodo axis* AD *interpositus inter primam & secundam continet axem* DE *interpositum inter secundam & tertiam, aut in eo continetur.*

Demonstrabitur eodem planè modo in tribus ordinatis, quo demonstratum est numero præcedenti in quatuor.

IX. *In Logarithmica, partes axis sunt Logarithmi ordinatarum respondentium, & parallelæ axi sunt Logarithmi differentiarum respondentium.*

Logarithmi dicuntur numeri progressionis Arithmeticæ adjuncti aliis numeris progressionis geometricæ, iisque respondentes primus primo, secundus secundo &c.

Sit igitur in Logarithmica FF (*fig.* 1.) progressio geometrica ordinatarum AF, BF, CF, DF, &c. cùm partes axis AB, AC, AD, AE, &c. constituant progressionem arithmeticam, constat eas partes Logarithmos esse ordinatarum vel Logarithmorum vicem subire. Similiter cùm differentiæ F G, G H, H I, I K &c. constituant progressionem geometricam ut dictum est antè,& FG, FH, FI, FK parallelæ axi S X constituant progressionem arithmeticam, manifestum est parallelas axi esse Logarithmos, aut vicem Logarithmorum subire respectu differentiarum FG, GH, HI, IK.

Atque ex hac insigni proprietate hujus lineæ inditum est illi Logarithmicæ nomen.

X. *Curva Logarithmica generatur ex duplici motu, uno æquabili & altero proportionaliter accelerato aut retardato.*

Intelligatur (*fig.* 1.) recta CO perpendicularis ad AE, manénsque semper sibi ipsi parallela ferri deorsum motu æquabili ex C in B, A &c. ita ut æqualibus temporibus percurrat æquales rectas CB, BA & interim alia recta HP parallela ipsi AE manénsque semper sibi ipsi parallela feratur ex H in G, F &c. motu proportionaliter accelerato ita ut æqualibus temporibus percurrat rectas proportionales geometricè; intersectiones F, F, F, harum duarum rectarum CO, HP designabunt curvæ Logarithmicæ partem quæ inter ordinatas C F, AF interjacet. Si autem intelligatur recta C O ferri sursum motu æquabili ex C in D, E, & recta HP simul ferri ex H versus I, K motu proportionaliter retardato, intersectiones F, F harum rectarum designabunt curvæ Logarithmicæ partem FFF quæ inter ordinatas C F, EF posita est. Et si uterque ille motus intelligatur perpetuó fieri tam sursum versus V, quam deorsum versus Y, supponantúrque rectæ CO, H P infinitæ, per harum recta-

rum interſcetionem deſcribetur tota curva Logarithmica.

Demonſtratio per ſe manifeſta eſt, nec majori videtur explicatione indigere.

Obſervatis primis hiſce atque elementaribus lineæ Logarithmicæ proprietatibus quæ ex ipſa ejus generatione facilè deducuntur, veniamus modò ad alia magis recondita quæ ſpectant ſpatiorum dimenſionem, ac rotundorum tam circa axem quàm circa baſin, centra gravitatis, tangentes, curvæ ipſius dimenſionem aliáque hujuſmodi quæ ſubtiliores geometræ in curvilineis contemplari atque inveſtigare ſolent.

PROPOSITIO I.

Proportio ſegmentorum Logarithmicorum.

SEgmenta Logarithmica deinceps poſita, ACFF, CEFF (*fig.* 3.) habentia æquales axes (AC, CE) ſunt inter ſe ut ordinatæ AF, CF baſes ſegmentorum.

DEMONSTRATIO.

DIviſis enim axibus AC, CE in quotcunque partes æquales AB, BC, & CD, DE totidem numero, ex natura curvæ FF ordinatæ AF, BF, CF, DF, EF ſunt continuè proportionales, ergo AF, BF:: CF, DF; & AF, CF : : CF, EF. Unde ex methodo indiviſibilium ſegmenta. ACFF. CDFF ſunt inter ſe ut baſes AF, CF. Idem per inſcripta aut circumſcripta rectangula facilè poſſet oſtendi more antiquorum. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I. Hinc totus locus Logarithmicus ASVF, cujus baſis AF, nihil eſt aliud quàm ſumma infinitorum ſegmentorum ABFF, BCFF, CDFF &c. continuè proportionalium, quorum altitudines AB, BC, CD &c. ſunt æquales.

Corollarium II. Totus locus ASVF eſt ad primum ſegmentum ABFF ut baſis AF ad FG differentiam ordinatarum AF, BF. Sunt enim ſegmenta ABFF, BCFF, CDFF &c. ut ordinatæ AF, BF, CF &c. ſive ut AF, AG, AH &c. ſive ut differentiæ FG, GH, HI &c. ergo ſumma ſegmentorum ſive locus eſt ad primum ſegmentum ABFF, ut ſumma differentiarum AF ad primam differentiam FG.

PROPOSITIO II.

Dimensio segmentorum Logarithmicorum.

IIsdem positis (*fig.* 3.) centro A, asymptotis AF, AX describatur quæcunque Hyperbola LL, quam secent in L, L, rectæ FKL, FL perpendiculares ad AF, & compleatur rectangulum FKOL.

Dico segmentum Logarithmicum AEFF esse ad rectangulum circumscriptum AM, ut rectangulum FKOL ad segmentum Hyperbolicum FKLL.

DEMONSTRATIO.

SEgmento AEFF circumscribantur rectangula AP, BP, CP, DP, & segmento hyperbolico FKLL inscribantur rectangula GL, HL, IL, KL. Rectangulum AP est ad rectangulum BP ut AF, ad BF, hoc est ut FG ad GH, hoc est ut rectangulum FO ad rectangulum GO, & sic de cæteris. ergo summa rectangulorum AP, BP, CP, DP est ad primum AP, ut summa rectangulorum FO, GO, HO, IO ad primum FO. Cùm autem ex proprietate hyperbolæ LL, rectangula GL, HL, IL, KL sint æqualia propter proportionales AF, AG, AH, AI, AK, toties rectangulum GL sive FO continetur in summa rectangulorum GL, HL, IL, KL quoties AB in AE, vel rectangulum AP in rectangulo AM. Ergo ex æquo summa rectangulorum AP, BP, CP, DP est ad rectangulum AM, ut rectangulum FKOL ad summam rectangulorum GL, HL, IL, KL. Desinunt autem rectangula AP, BP &c. in segmentum AEFF, & rectangula GL, HL &c. in segmentum FKLL, per divisionem continuam AE in plures partes æquales, & connexam ei divisionem rectæ FK in plures proportionales; ergo segmentum AEFF est ad rectangulum AM ut rectangalum FKOL ad segmentum hyperbolicum FKLL. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc data Hyperbolæ quadraturâ, quadratur figura Logarithmica, & vicissim.

PROPOSITIO III.

Tangens curvæ Logarithmicæ.

IIsdem positis. (*fig.* 3.) Tangat curvam Logarithmicam in F recta FZ, occurrens asymptoto AS in Z.

Dico subtangentem AZ esse ad rectam AE, ut rectangulum AFL ad segmentum Hyperbolicum FKLL.

DEMONSTRATIO.

EX puncto F unde ducta est tangens FZ, per aliud punctum F extremum ordinatæ BF ducatur secans FFT quæ occurrat asymptoto in T.

In Triangulo AFT, AT, BT :: AF, BF, & per conversionem rationis AT, AB :: AF, FG. hoc est rectangulum AFL ad rectangulum GFL. Sed AB est ad AE ut rectangulum GFL ad summam rectangulorum GL, HL, IL, KL (ut dictum est in demonstratione præcedentis propositionis) ergo ex æquo, AT est ad AE, ut rectangulum AFL ad summam rectangulorum GL, HL, IL, KL. Definit autem subsecans AT in subtangentem AZ per divisionem continuam AE in plures partes æquales, similiter summa rectangulorum GL, HL, IL, KL definit in segmentum Hyperbolicum. FKLL. ergo AZ subtangens est ad AE, ut rectangulum AFL ad segmentum Hyperbolicum FKLL. Quod erat demonstrandum,

Corollarium. Hinc datâ tangente curvæ Logarithmicæ, habetur quadratura Hyperbolæ, & vicissim.

PROPOSITIO IV.

Dimensio segmenti Logarithmici ex tangente.

IIsdem positis (*fig.* 3.) Dico segmentum AEFF esse æquale rectangulo sub AZ subtangente & FK differentia ipsarum AF, EF, maximæ & minimæ ordinatarum segmenti.

DEMONSTRA-

DEMONSTRATIO.

REctangulum ſub AZ, FK ad rectangulum AM habet rationem compoſitam AZ, AE; & FK, AF. Eſt autem ratio AZ, AE æqualis rationi rectanguli AFL ad ſegmentum hyperbol. FKLL (*prop.* 3.) & ratio FK, AF eſt eadem cum ratione rectanguli FKOL ad rectangulum AFL. ergo rectangulum ſub AZ, FK habet ad rectangulum AM rationem compoſitam ex duabus, 1. rectanguli AFL ad ſegmentum hyperbol. FKLL. 2. Rectanguli FKOL ad rectangulum AFL. ex iiſdem autem rationibus componitur ratio rectanguli FKOL ad ſegmentum hyperbol. FKLL, ergo rectangulum ſub AZ, FK habet ad rectangulum AM, eamdem rationem quam rectangulum FKOL ad ſegmentum hyperbol. FKLL. Atqui ratio rectanguli FKOL ad ſegmentum hyperbolicum FKLL eadem eſt cum ratione ſegmenti Logarithmici AEFF ad rectangulum AM (*prop.* 2.) ergo rectangulum ſub AZ, FK habet ad rectangulum AM eamdem rationem quam ſegmentum Logarithm. AEFF ad idem rectangulum AM. ergo rectangulum ſub AZ, FK, ſegmento Logarithmico AEFF æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.

Dimenſio loci Logarithmici ex tangente.

IIſdem poſitis (*fig.* 3.) Dico locum Logarithmicum ASVF, æquari rectangulo ſub AZ ſubtangente, & AF maxima ordinata loci.

DEMONSTRATIO.

EX præcedenti ſegmentum Logarithmicum AEFF æquatur rectangulo ſub AZ ſubtangente & FK differentia inter maximam & minimam ordinatam ſegmenti, atque hoc verum eſt quantũvis creſcente ſegmento minima ordinata EF minuatur. Ergo totus locus Logarithmicus quod eſt maximum ſegmentum ſuper baſi AB conſtitutum, & in quo minima ordinata evaneſcit, æquatur rectangulo ſub AZ & maxima ordinata AF. Quod erat demonſtrandum.

Aliter. Locus eſt ad ſegmentum AEFF ut AF ad FK. (*Coroll.* 2. *prop.* 1.) eſt autem ſegmentum AEFF æquale rectangulo ſub AZ, FK (*prop.* 4.) ergo locus æqualis eſt rectangulo ſub AZ, AF. Quod erat deſtrandum.

Corollarium. Tangens AZ ſecat locum Logarithmicum ASVF in

duas partes æquales, cùm enim Triangulum AZF sit dimidium rectanguli sub AZ, AF, est etiam dimidium loci rectangulo illi æqualis.

PROPOSITIO VI.

Rotundum ex segmento Logarithmico circa axem.

IIsdem positis (*fig.* 3.) Dico solidum rotundum genitum ex segmento Logarithmico ACFF circa axem AC rotato esse ad Cylindrum circumscriptum genitum ex rectangulo ACQF, ut segmentum AEFF cujus altitudo AE dupla est altitudinis AC est ad rectangulum circumscriptum AM.

DEMONSTRATIO.

EX natura curvæ FF quoniam AC, CE sunt æquales (*hyp.*) tres AF, CF, EF sunt continuè proportionales. ergo ut quadratum AF ad quadratum CF sive ut circulus radii AF ad circulnm radii CF, ita AF est ad EF; similiter divisâ in C bifariam rectâ AE axe segmenti AEFF, & in B rectâ AC axe rotundi ex ACFF circà AC, AF basis segmenti AEFF est ad CF ordinatam ejusdem segmenti, ut quadratum AF ad quadratum BF sive ut circulus radii AF (qui circulus basis est rotundi ex ACFF) ad circulum radii BF. Et sic divisa AE axe segmenti AEFF in quotcunque partes æquales, & in totidem divisa AC axe rotundi, ostendetur AF basim segmenti AEFF esse ad ordinatas in eodem segmento, ut est circulus radii AF (qui circulus basis est rotundi ex ACFF) ad circulum respondentem, ergo ex methodo indivisibilium, summa ordinatarum segmenti AEFF hoc est ipsum segmentum AEFF est ad rectangulum circumscriptum AM, ut summa circulorum rotundi hoc est ipsum rotundum ex ACFF circa AC est ad Cylindrum circumscriptum genitum ex AQ circa eamdem AC. Quod erat demonstrandum. Idem more antiquorum inscribendo aut circumscribendo in segmento AEFF rectangula & in rotundo ex ACFF Cylindros facilè ostendi posset.

PROPOSITIO VII.

Distantia centri gravitatis segmenti Logarithmici ab axe.

ESto (*fig.* 4.) segmenti Logarihmici ACFF centrum gravitatis punctum *n* à quo in axem AC ducatur perpendicu-

laris *nm* quæ erit distantia centri gravitatis ab axe.

Dico rectam *mn* esse æqualem quartæ parti duarum ordinatarum AF, CF simul sumptarum.

DEMONSTRATIO.

SUmptâ CE æquali ipsi AC, ordinetur EF & compleantur rectangula ACQF, AEMF, sitque *p* centrum gravitatis rectangi AQ: & ex *p* in AC perpendicularis *op*.

Ratio rotundi geniti ex segmento ACFF circa AC, ad Cylindrum genitum ex rectangulo AQ circa eamdem AC, est eadem (*prop. 6.*) quæ segmenti AEFF ad rectangulum AM. Hæc autem ex tribus intelligi potest composita. 1. ex ratione segmenti AEFF ad segmentum ACFF; sive (*prop.* 1.) ex ratione AF, CF simul ad AF. 2. ex ratione segmenti ACFF ad rectangulum AQ. 3. ex ratione rectangi AQ ad rectangulum AM. sive 1. ad 2. ergo ratio rotundi ex segmento ACFF circa AC ad Cylindrum ex rectangulo AQ circa AC, composita est ex his tribus rationibus.

1. AF, CF simul ad AF.
2. Segmenti ACFF ad rectangulum AQ.
3. 1. ad 2.

Rursùs idem Rotundum ex segmento ACFF circa AC ad Cylindrum ex rectangulo AQ circa eamdem AC habet etiam rationem compositam ex his duabus.

1. Segmenti ACFF ad rectangulum AQ.
2. Rectæ *mn* distantiæ centri gravit. segmenti ACFF ad *op* distantiam centri gravit. rectanguli AQ ut satis geometris notum est, & demonstrat Tacquetus lib. 5. Cylindricorum & annularium.

Ergo ratio composita ex tribus supradictis rationibus est eadem cum ratione composita ex duabus jam relatis. ergo sublata communi ratione segmenti ACFF ad rectangulum AQ, remanet ratio *mn*, ad *op* æqualis compositæ ex duabus AF † CF, AF, & 1. ad 2. ergo æqualis est rationi, AF † CF ad AF bis sumptam. & permutando *mn* est ad AF † CF ut *op* ad AF bis sumptam: est autem *op* distantia centri gravitatis rectanguli AQ, dimidia ipsius AF ac proinde quarta pars AF bis sumptæ; ergo *mn* quarta pars est AF † CF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Distantia centri gravitatis totius loci Logarithmici ab axe.

IIsdem positis (*fig.* 4.) Dico centrum gravitatis totius loci Logarithmici ASVF distare ab axe AS quarta parte ipsius AF basis loci.

DEMONSTRATIO.

CEntrum gravitatis cujuscumque segmenti ACFF super basi AF insistentis distat ab axe AC quarta parte AF † CF, quantumvis exigua sumatur CF, & crescat segmentum, ergo in segmento maximo in quo prorsus evanescit minima ordinata CF, hoc est in loco ASVF, centrum gravitatis distat ab axe seu asymptoto quarta parte ipsius AF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Proportio Rotundorum circa axem ex segmentis Logarithmicis & loco integro.

IIsdem positis (*fig.* 4.) Dico solida rotunda genita ex segmentis ACFF, CEFF deinceps positis & habentibus axes AC, CE æquales, esse inter se ut quadrata ordinatarum AF, CF.

Demonstrabitur eodem modo per indivisibilia quo propos. 1.

Corolarium. Hinc Rotunda ex segmentis deinceps positis & æqualis altitudinis genita, constituunt progressionem geometricam decrescentem in ratione quadratorum ordinatarum AF, CF. Ergo juxtà proprietatem sitis notam progressionis geometricæ, summa terminorum, sive Rotundum ex loco integro ASVF circa asymptotum AS est ad primum terminum nempe Rotundum ex segmento ACFF ut quadratum AF ad quadratum AF — quadr. CF.

PROPOSI-

PROPOSITIO X.

Rotundum ex loco Logarithmico circa asymptotum seu axem reducitur ad Cylindrum.

IIsdem positis (*fig.* 4.) Dico Rotundum ex loco integro ASVF circa asymptotum AS revoluto, æquari Cylindro cujus altitudo est AZ subtangens ex F extremo basis AF; basis autem est semicirculus radii AF.

DEMONSTRATIO.

SIt AK quarta pars ipsius AF: erit AK distantia centri gravitatis loci ASVF ab axe seu asymptoto AS (*prop.* 8.) jam Rotundum ex loco ASVF circa AS æquatur solido recto cajus altitudo circumferentia radii AK, basis autem ipse locus (*Tacquet. lib.* 5. *Cylind. & annul.*) sive loco æquale (*prop.* 5.) rectangulum sub AZ, AF. tale autem solidum rectum est Parallelepipedum cujus altitudo AZ, basis rectangulum sub AF & circumferentia radii AK sive Cylinder cujus altitudo AZ, basis semicirulus radii AF. Nam cùm AK sit quarta pars ipsius AF, rectangulum sub circumfereutia radii AK & AF est quarta pars rectanguli sub circumf. radii AF & AF, sive dimidia trianguli sub AF & radii AF circumferentia, sive circuli radii AF, ergo &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Distantia centri gravitatis segmenti Logarithmici à basi.

ESto (*fig.* 3.) punctum *m* in quo parallela basi AF transiens per centrum gravitatis segmenti Logarithmici AEFF secat axem AE.

Dico A*m* esse ad AE altitudinem segmenti, ut Trilineum KFF ad rectangulum circumscriptum KM.

DEMONSTRATIO.

SEcent ordinatæ AF, BF, CF, DF rectam KF in *p*, *q*, *r*, Quoniam segmenta ABFF, BCFF, CDFF, DEFF sunt continuè proportionalia in ratione rectarum FG, GH, HI, IK (*coroll.* 2. *prop.* 1.) segmenta AEFF, BEFF, CEFF, DEFF sunt etiam ut rectæ

KF, KG, KH, KI sive ut illis æquales, KF; *p*F; *q*F; *r*F.

Intelligatur jam super ordinatas AF, BF, CF, DF erigi segmenta AEFF, BEFF, CEFF, DEFF perpendiculariter ad planum AEFF, & sic de aliis omnibus segmentis. generabitur solidum quod Dettonvillæus sive D. Pascal vocat summam triangularem figuræ AEFF incipiendo ab E, quódque solidum probat esse ad solidum rectum altitudinis AE, baseos AEFF ut est A*m* ad AE. Quoniam igitur hujus solidi sive summæ triangularis sectiones AEFF, BEFF, CEFF &c. sunt inter se ut KF, *p*F, *q*F, *r*F ordinatæ respondentes in trilineo KFF; ex methodo indivisibilium solidum prædictum triangulare est ad solidum altitudinis AE, baseos AEFF (hoc est ut antè diximus A*m*, ad AE) ut trilineum KFF ad rectangulum KM. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I. Dividendo A*m* est ad *m*E ut trilineum KFF ad complementum FMF.

Corollarium II. Datâ Hyperbolæ quadraturâ habetur ratio segmenti AEFF ad rectangulum AM (*prop. 2,*) ergo & trilinei KFF ad idem rectangulum AM, ac proinde & ad rectangulum KM, ergo & ratio A*m*, AE. & punctum *m* & recta A*m* distantia gravitatis segmenti AEFF à basi. Et vicissim data distantia A*m* centri gravitatis segmenti Logarithmici AEFF à basi AF datur ratio A*m*, AE, ergo & ratio trilinei KFF ad rectangulum KM, ergo & ejusdem trilinei ad rectangulum AM, ergo & segmenti AEFF ad idem rectangulum AM, ergo & quadratum Hyperbolæ (*coroll. prop. 2.*)

PROPOSITIO XII.

Analogia centrorum gravitatis figuræ Logarithmicæ & Hyperbolæ.

IIsdem positis (*fig.* 3.) esto punctum *n* in quo recta parellela KL & transiens per centrum gravitatis segmenti Hyperbolici FKLL secat rectam FK.

Dico axes AE, FK similiter dividi in punctis *m*, *n*.

DEMONSTRATIO.

OStensum est in præced. propositione A*m* esse ad AE in ratione trilinei KFF ad rectangulum circumscriptum KM, nunc ergo dicimus in eadem ratione esse K*n* ad KF.

Ex proprietate Hyperbolæ positis AF, AG, AH, AI, AK continuè proportionalibus, segmenta Hyperbolica FGLL, GHLL, HILL, IKLL sunt æqualia (*Greg. à S. Vincent. prop. 109. Hyperb.*) ergo segmenta FGLL,

FHLL, FILL, FKLL sunt inter se ut numeri 1. 2. 3. 4. sive ut rectæ GF, HF, IF, KF. ergo juxta methodum Dettonvillæi traditam in præcedenti propositione summa triangul. figuræ FKLL incipiendo ab F est ad solidum circumscriptum altitudinis FK, baseos autem FKLL, ut K*n* ad KF. Ut autem summa illa Triangularis figuræ FKLL est ad prædictum solidum circumscriptum, ita Trilineum KFF est ad rectangulum circumscriptum KM (eò quod sectiones summæ triangularis. FGLL, FHLL &c. Sint inter se perpetuò ut respondentes GF, HF &c. ordinatæ trilinei KFF) ergo K*n* est ad KF ut trilineum KFF ad rectangulum KM. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIII.

Proportio Rotundi geniti ex segmento Logarithmico, circa basin, ad Cylindrum circumscriptum.

IIsdem positis (*fig.* 3.) Dico rotundum ex segmento Logarithmico AEFF circa basin AF esse ad duplum Cylindri circumscripti geniti ex rectangulo AM circa eamdem basin AF, in ratione composita segmenti AEFF ad rectangulum AM, & trilinei KFF ad rectangulum KM.

DEMONSTRATIO.

CF secans bifariam AE, transit per centrum gravitatis rectanguli AM. secet in *m* axem AE recta parallela basi AF transiens per centrum gravitatis segmenti AEFF, hoc posito, Rotundum ex AEFF circa AF æquatur solido recto cujus basis AEFF, altitudo circumferentia radii A*m* (*Tacquet lib.* 5. *Cylind.*) & Cylinder ex AM circa AF æquatur solido recto cujus basis AM, altitudo circumferentia radii AC, ac proinde duplum cylindri ex AM circa AF æquatur solido recto cujus basis AM, altitudo circumferentia radii AE. Ergo rotundum ex AEFF circa AF ad duplum cylindri ex AM circa eamdem AF, est in ratione composita AEFF ad AM, & A*m* ad AE, sive (*Propos.* 11.) trilinei KFF ad rectangulum KM: Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Proportio inter subtangentem & distantiam centri gravitatis segmenti Logarithmici à basi.

ESto (*fig.* 3.) A*m* distantia centri gravitatis segmenti AEFF à basi AF.

Dico A*m* esse ad AZ subtangentem ut trilineum KFF ad segmentum AEFF.

DEMONSTRATIO.

A*m* est ad AE ut trilineum KFF ad rectangulum KM (*prop.* 11.) sed ut AE ad AZ, ita (sumptâ communi altitudine KF) rectangulum sub AE, KF sive rectângulum KM, ad rectang. sub AZ, KF sive ad segmentum AEFF (*prop.* 4.) ergo ex æquo A*m* est ad AZ ut trilineum KFF ad segmentum AEFF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Distantia centri grav. totius loci Logarithmici à basi.

IIsdem positis (*fig.* 3.) Dico distantiam centri grav. totius loci Logarithmici ASVF à basi sua AF esse æqualem subtangenti AZ.

DEMONSTRATIO.

IN quocunque segmento AEFF A*m* distantia centri grav. à basi est ad subtangentem AZ ut trilineum KFF ad segmentum ipsum AEFF. ergo cùm segmentum est maximum evanescente minima ordinata ÆF sive in loco ASVF, quoniam tunc trilineum KFF idem est cum loco ipso (evanescente nimirum rectangulo AEFF) distantia centri gravitatis loci est eadem cum AZ subtangente. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Datâ Hyperbolæ quadratura habetur centrum grav. segmenti & loci Logarithmici.

DEMONSTRATIO.

IIsdem positis (*fig.* 3.) Datâ Hyperbolæ quadraturâ quadratur segmentum Logarithmicum AEFF (*prop.* 2.) ergo trilineum KFF. ergo habetur ratio trilinei KFF. ad rectangulum KM. Ergo & ratio A*m* (distantiæ centri grav. segmenti AEFF à basi) ad AE altitudinem segmenti: (*prop.* 11.) Ergo habetur ipsa A *m* distantia à basi AF. habetur autem distantia ab axe ejusdem centri grav. segmenti AEFF. (*prop.* 7.) ergo datâ Hyperb. quadraturâ habetur centrum grav. segmenti cujuscunque Logarithmici AEFF.

Similiter datâ Hyperbolæ quadr. habetur ſubtangens AZ (*prop.* 3.) hæc autem eſt diſtantia centri gravit. loci ASVF à baſi AF (*prop.* 15.) ergo habetur diſtantia centri grav. loci à baſi. Habetur autem & ejuſdem centri diſtantia ab axe ſeu aſymptoto (*prop.* 8.) ergo & centrum totius loci. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVII.

Rotundum ex loco Logarithmico circa baſin rotato reducitur ad Cylindrum.

IIſdem poſitis (*fig.* 4.) compleatur rectangulum AZRF. Dico rotundum ex loco integro ASVF circa baſin AF duplum eſſe cylindri ex rectangulo AR circa eamdem baſin AF.

DEMONSTRATIO.

ILlud enim rotundum æquatur (*Tacq. lib.* 5. *Cylindr.*) ſolido recto cujus baſis eſt locus ipſe ſive illi æquale rectangulum AR (*prop.* 5.) altitudo autem circumferentia radii AZ, cum AZ ſit diſtantia centri grav. loci à baſi AF (*prop.* 15.) ergo illud rotundum æquatur Parallelepipedo cujus baſis rectangulum ſub AZ & circumferentia radii AZ, altitudo autem AF. Atqui tale parallelepipedum duplum eſt cylindri ex rectangulo AR circa AF. Talis enim cylindri altitudo eſt eadem AF & baſis quæ eſt circulus radii AZ dimidia eſt rectanguli ſub AZ & radii AZ circumferentia; ergo rotundum ex loco ASVF circa AF duplum eſt cylindri ex rectangulo AR circa AF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Proprietas inſignis Tangentium Logarithmicam.

ESto (*fig.* 5.) Logarithmica curva BD quàm in duobus quibuſcunque punctis B, D tangant rectæ BZ, DY occurrentes aſymptoto in Z, Y.

Dico ductis ordinatis BA, DC ſubtangentes ſeu interceptas AZ, CY æquales eſſe.

DEMONSTRATIO.

DIvisâ AC in quotcunque partes æquales in E, F punctis, uni illarum AE ſumatur æqualis CG. tum ex E, G ordinatis EH, GI,

per B, H ducatur secans BHV quæ occurrat asymptoto in V; & per D, I secans DIX quæ occurrat asymptoto in X.

Ex natura Logarithmicæ AB, EH : : CD, GI. Sed AB, EH : : AV, EV in triangulo ABV; & CD, GI : : CX, GX in triangulo CDX. ergo AV, EV : : CX, GX, Et per convers. rationis AV, AE : : CX, CG. Sunt autem AE, CG æquales (*construct.*) ergo & AV, CX. Divisâ autem AC in partes indefinitè exiguas, definit subsecans AV in subtangentem AZ, & subsecans CX in subtangentem CY. ergo subtangens AZ æqualis est subtangenti CY. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I. Subtangentes ex omnibus Logarithmicæ punctis sunt æquales inter se.

Corollarium II. Quoniam subtangentes AZ, CY sunt æquales, sublatâ vel additâ communi CZ, reliquæ vel compositæ AC, ZY sunt æquales.

Corollarium III. Demissa ex D in AB perpendiculari DK, si jungatur KZ. erunt KZ, DY æquales & parallelæ. Cùm enim ZY æqualis sit ipsi AC (*Coroll.* 2.) & AC ipsi KD, erit ZY æqualis ipsi KD: sunt autem & parallelæ ZY, KD, ergo quæ illas conjungunt KZ, DY sunt æquales & parallelæ.

Potest hoc tertium Corollarium sic etiam efferri. Si in ordinata AB sumatur punctum K, à quo ducatur KD parallela asymptoto AY, & occurrens Logarithmicæ in D, ducantur autem ex B, D tangentes BZ, DY, & jungatur KZ erit KZ æqualis & parallela tangenti DY.

PROPOSITIO XIX.

Dimensio superficiei genitæ ex curva Logarithmica circa axem revoluta.

ESto (*fig.* 6.) segmentum Logarithmicum ACDB, quod intelligatur volvi circa axem AC. Dico data Hyperbolæ quadratura, superficiem rotundam genitam ex curva BD reduci ad circulum.

DEMONSTRATIO.

I. DUctâ ex B tangente BL quæ occurrat asymptoto in L, illi ex B erigatur æqualis B*b* parallela AC. & centro A vertice L per *b* intelligatur descripta Hyperb. L*b*; tum demissâ ex D in AB perpendiculari DS, divisa sit BS in quotcunque partes æquales in P, Q, R punctis, ex quibus erigantur ad AB perpendiculares P*p* Q*q*; R*r*, S*s* quæ occurrant curvæ Logarithmicæ in H, I, K, & Hyperbolæ L*b* in *p*, *q*, *r*, *s*. Et jungantur rectæ LP, LQ, LR, LS quæ æquales erunt respondentibus

P*p*, Q*q*, R*r*, S*s* (*Greg. à S. Vincentio prop.* 196 *de Hyperbola*) Ex punctis etiam H, I, K ducantur ordinatæ HE, IF, KG, & tangentes H*n*, I*o*, K*l* quæ occurrant in *n*, *o*, *l* rectis, QL, RK, SD, ex B autem tangens BL occurrat in *m* rectæ PH, denique compleantur rectangula BX, PX, QX, RX circumscripta segmento hyperbolico BS*sb*. his positis.

II. In triangulo ABL, AB, BP : : BL, sive B*b* B*m*. Ergo rectangulum sub AB, B*m* æquatur rectangulo sub B*b*, BP sive rectangulo BX. Intelligatur jam tangentem H*n* produci & occurrere asymptoto in M, & Q*q* ocurrere PL in T. Quoniam (*Coroll.* 3. *prop. præc.*) PL, HM sunt parallelæ, sunt autem & PH, Q*q* parallelæ, quadrilaterum PH*n*T est parallelogrammum, quare PT, H*n* sunt æquales. Jam in triangulo APL, AP, PQ :: PL, PT sive æquales P*p*, H*n*, ergo rectangulum sub AP, H*n* sive sub EH, H*n* æquatur rectangulo sub P*p*, PQ sive rectangulo PX. Similiter ostendetur rectangulum sub FI, I*o* æquari rectangulo QX, & rectangulum sub GK, K*l* æquari rectangulo RX. Ergo summa rectangulorum sub ordinatis AB, EH, FI, GK & tangentibus B*m*, H*n*, I*o*, K*l* æquatur summæ rectangulorum BX, PX, QX, RX.

III. Intelligantur singulæ ordinatæ AB, EH, FI &c. aliæque omnes intermediæ erigi in punctis suis extremis B, H, I &c. curvæ Logarithmicæ BD, perpendiculariter ad planum ACDB, generabitur ex illis ita erectis superficies cylindrica cujus basis erit curva BD. Quoniam autem ita dividi potest recta BS in partes æquales, ut summa tangentium B*m*, H*n*, I*o* &c. desinat in curvam BD (*ut demonstravit Fermatius in Dissertatione de comparatione curvarum cum rectis.*) Manifestum est summam rectangulorum sub ordinatis AB, EH &c. erectis, & tangentibus B*m*. H*n* &c. contentorum, desinere in illam superficiem cylindricam. Desinit autem & summa rectangulorum BX, PX, QX, RX pariter in segmentum Hyperbolicum BS*sb*, ergo ex methodo inscriptorum & circumscriptorum, prædicta superficies cylindrica æquatur segmento Hyperbolico BS*sb*.

IV. Datâ autem Hyperbolæ quadraturâ nota est tangens BL (*propos.* 3.) ac proinde illi æqualis B*b*, & punctum L, & AL semiaxis Hyperbolæ L*b*, atque ita describi potest hyperbola L*b*. Præterea quoniam datâ hyperbolæ quadraturâ, quadratur segmentum BS*sb*; datâ eadem Hyperbolæ quadraturâ quadrabitur superficies cylindrica genita ex ordinatis AB, EH, FI &c. Logarithmicæ erectis supra curvam BD.

V. Denique quoniam prædicta superficies cylindrica genita ex AB, EH &c. erectis in B, H &c. est ad superficiem rotundam genitam ex curva BD circa axem AC ut est radius ad circumferentiam; manifestum est data hyperbolæ quadratura prædictam superficiem rotundam reduci ad circulum. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc ſequitur ſuperficiem cylindricam genitam ex omnibus ordinatis totius loci Logarithmici erectis ſupra curvam Logarithmicam infinitam æqualem eſſe ſegmento hyperbolico ALbB & datâ hyperbolæ quadraturâ ſuperficiem rotundam genitam ex curva Logarithmica infinita circa aſymptotum rotata reduci ad circulum.

PROPOSITIO XX.

Dimenſio curvæ Logarithmicæ.

IIſdem poſitis (*fig.* 6.) Producatur CA verſus Y, & centro A aſymptotis AB, AY deſcribatur quæcunque hyperbola ZZ, cui inſcribantur rectangula BV, PV, QV, RV; compleatur item rectangulum BSO*b*, & tangens BL ſecet in N rectam DS. Denique intelligatur ſolidum Hyperbolicum genitum ex ductu duorum ſegmentorum hyperbolicorum BS*sb*, BSZZ ſive ſolidum cujus ſectiones ſint rectangula ZB*b*, ZP*p*, ZQ*q* &c.

Dico curvam Logarithmicam BD eſſe ad rectam BN quemadmodum prædictum ſolidum hyperbolicum eſt ad parallelepipedum cujus baſis rectangulum BO, altitudo BZ.

DEMONSTRATIO.

OStenſum eſt in præcedentis propoſitionis decurſu tangentem H*n* æqualem eſſe rectæ PT, & BL, PL &c. æquari ipſis B*b*, P*p* &c. Eſt autem B*m* ad PT in ratione compoſita B*m*, BP (ſive BL, BA, ſive B*b*, BA) & BP ſive illi æqualis PQ, PT, hoc eſt PA, PL, ſive PA, P*p*. Ergo tangens B*m* eſt ad tangentem H*n* in ratione compoſita ex duabus B*b*, BA, & PA, P*p* ſive ex duabus B*b*, P*p*. & PA, BA aut æquali BZ, PZ, ſive ex duabus BX rectanguli ad PX rectangulum, & BZ ad PZ. Ergo tangens B*m* eſt ad tangentem H*n* ut parallelepipedum cujus baſis BX altitudo BZ ad parallelepipedum cujus baſis PX altitudo PZ ſive ut parallelepipedum quod fit ex ductu rectangulorum BX, BV ad parallelepipedum, quod fit ex ductu rectangulorum PX, PV. Similiter oſtendetur tangentem H*n* eſſe ad tangentem ſequentem I*o* ut parallelepipedum ex ductu rectanguli PX in PV, ad parallelepipedum ex ductu QX rectanguli in rectangulum QV, & ſic deinceps. Ergo ſumma tangentium B*m*, H*n*, I*o*, K*l* eſt ad primam B*m* ut ſumma parallelepipedorum ex ductu BX in BV, PX in PV, QX in QV &c. eſt ad primum ex ductu BX in BV, ſive cujus baſis eſt BX, altitudo

titudo BZ. Est autem tangens B*m* ad BN ut BP ad BS, hoc est rectangulum BX ad rectangulum BO, hoc est parallelepipedum cujus basis BX altitudo BZ ad parallelepip. cujus basis BO, altitudo BZ; ergo ex æquo summa tangentium B*m*, H*n*, I*o* &c. est ad rectam BN, ut summa parallelepipedorum ex ductu rectangulorum BX, PX, QX &c. in rectangula BV, PV &c. ad parollelepipedum cujus basis BO, altitudo BZ. Per indefinitam autem divisionem rectæ BS in partes æquales definit summa tangentium in curvam BD, & summa parallelepipedorum in solidum hyperbolicum quod fit ex ductu segmentorum BS*sb*, BSZZ. Ergo curva BD est ad rectam BN ut prædictum solidum Hyperbolicum ad parallelepipedum cujus basis BO, altitudo BZ. Quod erat destrandum.

Corollarium. Hinc patet ad hoc ut reducatur curva Logarithmica BD ad rectam, requiri præter hyperbolæ quadraturam quæ necessaria est ut ducatur tangens BL ac proinde habeatur punctum L vertex hyperbolæ L*b*, ut habeatur cubatura solidi prædicti quod fit ex ductu segmentorum hyperbolicorum BS*sb*; BSZZ in se, quæ cubatura nobis adhuc ignota est.

tinuo BZ. ER autem tangens Bm ad DN ut BP ad BS, hoc est rectangulum BX ad rectangulum BO, hoc est parallelepipedum cujus basis BX altitudo BZ ad parallelepipedum cujus basis BO, altitudo BZ; ergo ex angulo summa tangentium Bm, Fh, Ie &c. ad rectam BN, ut summa parallelepipedorum ex unoquoque rectangulorum BX, PX, QX &c. in rectangula BV, PV &c. ad parallelepipedum cujus basis BO, altitudo BZ. Patenbit etiam eadem divisione in recta BS in partes æquales dividendo summa tangentium in curvam BD, & summa parallelepipedorum in solidum hyperbolicum quod fit ex unoquoque segmentorum BSx4, BSZZ. Ergo curva BD est ad rectam BN ut parabolicum solidum Hyperbolicum ad parallelepipedum cujus basis BO, altitudo BZ. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Hinc patet ad hoc inveniendum curvæ logarithmicæ BD ad rectam, requiri parabolæ quadratum quæ-necessaria est ut ducatur tangens BL, ac proinde habetur punctum L vertex hyperbolæ L4, ut habeatur subtensa solidi parabolici quod fit ex dicta segmentorum hyperbolicorum BSx4, BSZZ in e, quæ subtensa nobis adhuc ignota est.

DE SPIRALIBUS HYPERBOLICIS, EXERCITATIO GEOMETRICA.

DEFINITIONES.

ESTO (*fig.* 1.) circulus EOPQ, cujus centrum A, & curva BCDE talis, ut ductâ ad illam ex centro A quâcunque AC quæ occurrat circumferentiæ EOPQ in O, ſint radii AE, AC ut reciprocè arcus reſpondentes EO, EOPQE. *Curva* BCDE *vocetur ſpiralis Hyperbolica. Cujus centrum* A. *Radii* AC, AD, AE: *circulus genitor* EOPQ.

Eſt autem BCDE, *prima circulatio* talis ſpiralis quæ tota eſt extra circulum genitorem. Cùm enim ſint AE, AC ut reciprocè arcus EO, EOPQE, ſit autem minor arcus EO quàm EOPQE, erit AE minor quàm AC, ac proinde punctum C eſt extra circulum EOPQ, idem dic de aliis punctis.

Secunda autem *circulatio* intelligi poteſt EFGHI in qua radii AE, AF ſunt ut reciprocè arcus EOPQEO, EOPQE ſive circumf. EOPQE ſemel ſumpta † arcus EO ad circumferentiam EOPQE. Illa autem circulatio erit tota intra circulum genitorem, cùm enim ſit arcus EOPQEO major arcu EOPQE, erit AE major radio AF. Similiter poteſt intelligi tertia, quarta, quinta &c. in infinitum circulatio, ita ut nulla ſit omnium ultima & minima.

Itaque cùm in ſpirali Archimedea prima circulatio ſit intra circulum eâque omnium minima, reliquæ autem omnes extra, & quidem perpetuò majores, ita ut nulla ſit omnium maxima; accidit é contra in ſpirali noſtra Hyperbolica ut prima circulatio omnium maxima ſit extra circulum genitorem, reliquæ autem omnes intra, eæque perpetuò minores ita ut nulla ſit minima.

PROPOSITIO I.

Insignis proprietas spiralis Hyperbolicæ.

SIt (*fig.* 2.) spiralis Hyperbolica DEF, in qua sumantur tres radii AD, AE, AF continuè proportionales, & centro A describantur arcus circuli DR, EO occurrentes rectis AE, AF in R, O.

Dico arcus illos DR, EO esse æquales.

DEMONSTRATIO.

QUoniam (*hyp.*) tres radii AD, AE, AF, sunt continuè proportionales, sunt autem illi radii ex proprietate spiralis Hyperbolicæ, ut reciprocè arcus respondentes EOPQEO, EOPQE, EOPQ, tres illi arcus sunt etiam continuè proportionales, ergo differentiæ QE, EO sunt ut arcus EOPQ, EOPQE, sive ut rectæ AE, AD. Jam arcus DR ad arcum EO habet rationem compositam arcûs DR ad arcum QE (hoc est AD, AE) & arcûs QE ad arcum EO (hoc est ut ostensum est AE, AD) ergo cùm rationes AD, AE, & AE, AD componant rationem æqualitatis AD, AD, arcus DR est æqualis arcui EO. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

IIsdem positis. Si intelligatur inter AD, AE, sumi quotcunque medias proportionales, unam, tres, quinque &c. & totidem inter AE, AF, & centro A describi ex illis tanquam radiis arcus circulorum.

Dico summam arcuum indefinitorum inter puncta D, E hoc modo describendorum, esse æqualem summæ arcuum indefinitorum describendorum inter E, F, sive dico terminum in quem desinunt arcus hoc modo descripti inter D, E æqualem esse termino in quem desinunt arcus descripti inter E, F.

DEMONSTRATIO.

SUmatur inter AD, AE una media proportionalis AK, & inter AE, AF una media AL, & radiis AD, AK describantur arcus DS, KS circa curvam DE; radiis autem AE, AL describantur arcus ES, LS circa curvam EF. Erunt igitur quinque AD, AK, AE, AL, AF continuè

tinuè proportionales. Ergo cùm tres AD, AK, AE ſint proportionales, (*ex præced. propoſ.*) arcus DS, KS erunt æquales, item cùm tres AK, AE, AL ſint proportionales, arcus KS, ES erunt æquales, denique cùm tres AE, AL, AF ſint propottionales, arcus ES, LS erunt æquales; quatuor igitur arcus DS, KS, ES, LS æquales ſunt: ergo ſumma duorum DS, KS qui deſcripti ſunt inter D, E, æqualis eſt ſummæ duorum ES, LS deſcriptorum inter E, F. Similiter ſi ſumerentur quotcunque mediæ inter AD, AE, & totidem inter AE, AF, oſtenderetur ſummam arcuum deſcriptorum inter D, E puncta, æquari ſummæ deſcriptorum inter puncta E, F: Hinc ergo ſequitur terminum in quem deſinunt arcus deſcripti inter D, E æquari termino in quem deſinunt arcus deſcripti inter E & F. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Correſpondentium Figurarum generatio & proprietates.

ESto (*fig.* 3.) figura ABF, comprehenſa duabus rectis AB, AF & curva BF. diviſóque angulo BAF in partes indefinitas per rectas AC, AD, AE, &c. illis tanquam radiis deſcribantur ſectores ABG, ACG, ADG, AEG &c. Sit autem & alia figura HIKL, talis ut omnes arcus BG, CG, DG, EG ſimul ſumpti inter punctum A & punctum F poſiti, definant in rectam HI, ita ut HI ſit terminus omnium illorum arcuum à B ad F, & terminus arcuum à B ad C, D, E &c. ſit æqualis rectis HM, HO, HQ &c. tum ad axem HI applicatæ ordinatæ HL, MN, OP, QR &c. ſint æquales radiis AB, AC, AD, AE &c. reſpondentibus in figura ABF. Figura HIKL hoc modo conſtituta vocatur à Vvalliſio *correſpondens figuræ* ABC. Hoc poſito.

Correſpondentis Figuræ tres ſunt præ cæteris inſignes proprietates. Nam 1. correſpondens figura HIKL figuræ ABF dupla eſt. Idem dicendum de partibus quæ ſibi reſpondent, ita ſi ordinatæ HL, MN ſunt æquales radiis AB, AC, ſegmentum HMNL duplum eſt ſectoris ABC. 2. Curvæ BF, LK ſunt æquales inter ſe, idem dic de partibus curvarum ſibi reſpodentibus. 3. Denique Angulus ABS quem tangens BS facit cum radio AB, æqualis eſt angulo HLT quem tangens LT ex puncto L correſpondenti ipſi B, facit cum ſua ordinata HL. Unde ulterius ſequitur poſito angulo BAS recto, ſubtangentes AS, HT æquales eſſe, habent enim Triangula BAS, HLT rectangula, duos angulos ABS, HLT æquales ac præterea latus AB æquale lateri HL (*hyp.*) ergo latera AS; HT ſunt æqualia.

Atque hæc à doctiſſimo Vvalliſio aliiſque obſervata, ſic brevitter demonſtrantur.

DEMONSTRATIO.

INtelligatur curva BF in tot partes dividi ut singulæ sumi possint pro lineis rectis, sitque una illarum BV, & in angulo BAV sit sector circuli ABX. Cum curva BV ita exigua sit ut pro recta habeatur, arcus BX pariter pro recta linea haberi potest & trilineum BVX pro triangulo eóque rectangulo, cùm angulus AXB qui fit à radio & circumferentia circuli deficiat ab angulo recto solo angulo contingentiæ qui minor est quocunque rectilineo dato. Jam arcui BX sit æqualis recta H*x*, & compleatur rectangulum H*x*YL, secétque recta *x* Y curvam LK in Z Cùm arcus BX sit infinitè exiguus ac proinde & ipsi æqualis recta Hx & LY, curva LZ est quoque infinitè exigua haberique potest pro recta siue particula tangentis LT, & trilineum LZY pro triangulo rectangulo cùm angulus Y rectus sit. His positis.

I. Cùm arcus BX rectæ H*x* æqualis sit, & radius AB, ordinatæ HL, sector ABX dimidius est rectanguli HY, & ita indefiniti alii sectores pari modo figuræ ABF circumscripti, indefinitorum rectangulorum figuræ HIKL circumscriptorum dimidii erunt. Unde sequitur figuram ABF, figuræ HIKL dimidiam esse.

II. Cùm Triangula rectangula BVX, LZY habeant latera BX, LY æqualia, nec non VX, ZY (est enim VX differentiâ ipsarum AB, AV, & ZY differentia ipsarum HL, *x*Z, & sunt AB, AV ipsis HL, *x*Z ex hypoth. æquales) sequitur Hypotenusas BV, LZ esse æquales. Ita ostendetur reliquas curvæ BF particulas indefinitè exiguas, reliquis curvæ LK particulis indefinitè exiguis æquales esse, ac proinde tota curva BF toti LK æqualis est.

III. Cùm Triangula BVX, LZY duo latera duobus lateribus æqualia habeant, angulosque X, Y rectos illis lateribus comprehensos, etiam anguli reliqui VBX, ZLY sunt æquales, quibus subtractis ab angulis ABX, HLY rectis, remanent anguli ABV, sive ABS, & HLZ sive HLT æquales inter se. Quod erat demonstrandum.

Scholion. Huic modo demonstrandi, quem adhibuimus in præsenti propositione, deest aliquid ut perfectè Geometricus dici possit, assumitur enim curvas indefinitè exiguas haberi posse pro rectis & particulis tangentium. Quoniam tamen hæc methodus & brevis & perspicua est, eámque à summis hujus ætatis Geometris usurpari video, omitto aliam demonstrationem quam in manu habeo, magis quidem Geometricam, sed multò longiorem, quámque ubi videbitur opportunum, exhibebo.

PROPOSITIO IV.

Spirali Hyperbolicæ correſpondens eſt Logarithmica.

ESto (*fig.*2.) Spiralis Hyperbolica DEFG cujus circulus genitor EOPQ. Sitque *rt* recta æqualis termino ſeu ſummæ arcuum indefinitorum qui à puncto D ad punctum F deſcribi poſſunt circà ſpiralem DF. Atque ex *r* reſpondente puncto D ordinetur *rd* æqualis radio ſpiralis AD, & ex puncto *t* reſpondente puncto F ordinetur *tf* æqualis radio ſpiralis AF, tum per puncta *d*, *f* aſymptoto *rt* intelligatur deſcripta Logarithmica *def*.

Dico ſegmentum Logarithmicum *drtf* eſſe correſpondens ſectori ſpiralis ADEF.

DEMONSTRATIO.

SEcetur *rt* bifariam in *s*, & per *s* ordinetur *se*; ſumatur etiam in ſpirali radius AE, medio loco proportionalis inter AD, AF. Igitur ſumma arcuum indefinitorum inter puncta D, E, æquatur ſummæ arcuum inter puncta E, F (*prop.* 2. *h.*) quare ſumma arcuum inter D, E, eſt dimidia ſummæ arcuum inter D, F; eſt autem (*Hyp.*) *rt* æqualis ſummæ arcuum inter D, F, ergo *rs* æquatur ſummæ arcuum inter D, E. Rursùs ex proprietate Logarithmicæ *def* cùm partes axis *rs*, *st* ſint æquales, *se* eſt media proportionalis inter *rd*, *tf*. Eſt autem & AE (*hyp.*) media inter AD, AF æquales (*Hyp.*) ipſis *rd*, *tf*, ergo *se* ordinata æqualis eſt radio ſpiralis AE. Similiter ſi divideretur axis *rt* in quatuor, octo &c. in infinitum partes æquales, oſtenderetur ſingulas partes eſſe æquales, ſummis arcuum reſpondentibus in ſpirali DEF, & ordinatas in Logarithmica *def* ex punctis diviſionum eſſe æquales radiis in ſpirali reſpondentibus. Ergo (*defin. in prop.* 3.) ſegmentum Logarithmicum *rtfd* eſt correſpondens ſectori ſpiralis Hyperbolicæ ADEF. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Similiter ſi duobus radiis ſpiralis AE, AF, ſumatur tertius proportionalis AG, & rectæ *st* ſumatur æqualis *tu* ordinetúrque in Longarithmica producta verſus *f*, recta *ug*, oſtendetur ſegmentum *tugf* eſſe correſpondens ſectori ſpiralis AFG. Et ſic in infinitum ſingula ſegmenta Logarithmica decreſcentia ſunt correſpondentia ſingulis ſectoribus decreſcentibus ſpiralis. Et generaliter quodcunque ſegmentum Logarithmicum eſt correſpondens illi ſectori ſpiralis cujus rallii extremi æquales fuerint extremis ordinatis prædicti ſegmenti. Idem dicen-

dum de ſegmentis creſcentibus in infinitum verſus *c*, ea nimirum correſpondere ſectoribus ſpiralis creſcentibus pariter verſus C. Unde totum ſpatium Logarithmicum quod inter curvam Logarithmicam *cZ* infinitam ejuſque aſymptotum *ox* pariter infinitam continetur, correſpondet toti ſpatio ſpiralis Hyperbolicæ quod jacet inter AE productam in infinitum verſus E, & curvam etiam infinitam tam extra circulum genitorem EOPQ excurrentem, quam intra illum per infinitas circulationes abeuntem in punctum A.

Tangens ſpiralis Hyperbolicæ in quolibet puncto.

POſſemus illam tangentem eruere tum ex tangente Logarithmicæ quæ illi correſpondet, tum ex analogia ſpiralis Hyperbolicæ cum Archimedea, tum ex methodo quam tradidimus pro ſpiralibus in propoſ. 1. libri de novis ſpiralibus; ſed elegantiùs multò & faciliùs quæſitam tangentem obtinebimus ex methodo tradita in Theoremate 1. appendicis ejuſdem libri. Atque hac occaſione Theorema illud quod ibi indemonſtratum propoſuimus, hic demonſtrabimus, multò etiam univerſaliùs quàm propoſitum fuit.

PROPOSITIO V.

SInt (*fig.* 4.) duæ curvæ quæcunque BCD, EFG, & curva HKV talis, ut ductis ex A duabus quibuſcunque rectis ABE, ACF, ſumptâque in EQ rectâ EI æquali curvæ EF, duæ ordinatæ EH, IK æquales ſint duabus rectis AB, AC reſpondentibus. Sint denique BX, EZ, HY tangentes curvarum BC, EF, HK, in punctis X, Z, Y occurrentes rectis AZ, EQ, perpendicularibus ad AE, EH.

Dico ſubtangentem AX ad ſubtangentem EY eſſe in ratione compoſita AB, AE, & AZ, EZ.

DEMONSTRATIO:

DUctis ex B, E, H per C, F, K ſecantibus BCO, EFP, HKQ, quæ occurrant in O, P, Q rectis AZ, EY, ex punctis C, F, ducantur CM, FN perpendiculares ad AE, centroque A radio AB deſcribatur arcus circuli BR qui ſecet in R rectam ACF, & cujus tangens ſit BS, compleatur denique rectangulum HEIL. His poſitis.

Cùm AB, AC æquales ſint (*hyp.*) ordinatis EH, IK, CR æqualis eſt ipſi KL. Jam ratio AO, EQ componitur ex rationibus AO, AB; & AB aut EH, EQ. Hoc eſt ex rationibus MC, MB; HT, TK ſive ex duabus

MC,

MC. TK; HT, MB. Est autem TK æqualis EI & EI curvæ EF (*hyp.*) atque ita ratio MC, TK eadem est cum ratione MC ad curvam EF; ratio autem HT, MB sive KL, MB est eadem cum ratione CR, MB (cùm æquales sint KL, CR ut ostensum est) ergo ratio AO, EQ componitur ex duabus his, MC ad curvam EF, & CR, MB. Sive substitutis loco MC ad curvam EF, tribus MC, NF; NF ad subtensam E,F; subtensæ EF ad curvam EF. aut ipsis æqualibus AC, AF; AP, EP, & subtensæ EF ad curvam EF. Substitutis item loco rationis CR, MB duabus CR, CS; CS, MB, aut CR, CS; AS, AB. tandem ratio AO, EQ composita reperitur ex quinque AC, AF; AP, EP; subtensæ EF, ad arcum EF; CR, CS; AS, AB.

Prima autem ratio AC, AF in puncto B desinit in rationem AB, AE; Secunda AP, EP in rationem AZ, EZ quoniam secans EP desinit in tangentem EZ; Tertia autem ratio subtensæ EF ad curvam EF desinit in rationem æqualitatis. Quarta verò ratio CR, CS desinit etiam in rationem æqualitatis (*Lemm. seq.*) Quinta demùm ratio AS, AB desinit in rarionem æqualitatis AB, AB. Ergo cùm ratio subsecantium AO, BQ desinat in rationem subtangentium AX, EY. sequitur rationem AX, EY componi ex quinque rationibus quarum duæ sunt AB, AE; AZ. EZ & aliæ tres sunt rationes æqualitatis quæ cùm nihil immutent, ratio AX, EY componitur ex duabus AB, AE; AZ, EZ. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

SIt curva *b c* ad quam ex puncto *a* sint ductæ *a b*, *a c* & radio *ab* descriptus sit arcus circuli *b r*, occurrens in *r*, rectæ *a c* sitque arcûs *b r* tangens *b s* occurrens *a c* in *s*. Ostendendum est rationem *cr*, *cs* desinere in *b*, in rationem æqualitatis.

Ductâ ut priùs secante *b c o* & tangente *b x* quæ occurrant in *o*, *x*, rectæ *a x* perpeodiculari ad *a b*. Compleatur parallelogrammum *a s e o* & rectangulum *a b f x*. Junctáque *b r* producatur donec occurrat *o e* in *d*.

Propter parallelas *a s*, *o e* ratio *c r*, *c s* est eadem cum ratione *od*, *o e*. Probandum est igitur rationem *o d*, *o e* desinere in *b*, in rationem æqualitatis, quod erit manifestum, si tam *o e* quàm *o d* desinant in eamdem rectam *x f*, puncto *c* conveniente cum puncto *b*. Hoc autem certum est. Nam primò tunc secans *b c o* conuenit cum tangente *b x* & punctum *o* cum puncto *x*, & cùm *a s* fiat eadem cum *a b*; *o e* parallela *a s* fit eadem cum *x f* parallela *a b*. Secundò punctum *d* cùm sit concursus secantis *b r d* & *o e* parallelæ *a s*, desinat autem secans *brd* in tangentem circuli ex *b*, & *o e* in *x f* ut dictum est, punctum inquam *d* sit concursus tangentis circuli ex *b*, & rectæ *x f* ac proinde evadit

idem cum puncto *f*: evadit autem & *o* idem cum *x*, ergo recta *o d* evadit eadem cum recta *x f*. Quod erat demonstrandum.

Carollaria propositionis præcedentis

C*Orollarium I.* Sive ambæ lineæ BCD, EFG sint curvæ aut rectæ, aut una illarum curva altera recta propositio vera est. Hoc solum adverte lineam rectam quasi sui ipsius tangentem esse.

Corollarium II. Si rectæ AB, AE forent æquales, ac proinde punctum B idem cum puncto E, tunc ratio AX, EY esset æqualis rationi AZ, EZ.

Corollarium III. Si curva EFG sit talis ut ejus tangens EZ sit perpendicularis ad AE, ac proinde parallela AX, tunc AX, EY :: AB, AE, atque hoc evenire manifestum est, quando curva EFG est arcus circuli descripti centro A.

Corollarinm IV. Denique si AB, AE sint æquales, & prætereà curva EFG sit arcus circuli descripti centro A, vel alia curva cujus tangens in E sit perpendicularis ad AE, tunc AX æquatur ipsi EY. Atque hîc est casus Theorematis 1. adjecti ad finem libri de novis spiralibus.

DEFINITIO.

ESto quæcunque curva BCD cujus radius AB, sit autem & recta AE & arcus circuli EFG descriptus centro A. Intelligatur alia curva HKV talis ut sumptâ in axe EQ rectâ EI quâcunque æquali arcui EF, ordinatæ EH, IK ad axem EQ sint semper æquales AB, AC radiis respondentibus curvæ BC. *Hoc modo constituta curva* HKV *dicatur Analoga* curvæ BC.

Est ergo hæc insignis proprietas curvæ Analogæ, HKV, ut si ex quocunque puncto illius H ducatur tangens HY occurrens axi EQ in Y. ex puncto autem B respondente puncto H ducatur tangens BX occurrens in X rectæ AZ perpendiculari ad radium AB ex cujus extremo B ducta est tangens, subtangentes EY, AX sint ut AE, AB. (*prop. præc. ejusque Coroll.* 3.

Sunt & aliæ eximiæ Analogarum curvarum proprietates, quas brevitati consulentes hìc omittimus, unam autem insignem referemus infrà Prop. 14.

PROPOSITIO VI.

Spirali Hyperbolicæ Analoga curva est Hyperbola.

ESto (*fig.* 5.) Spiralis Hyperbolica DEF genita ex circulo EOPQ. Exponatur autem recta infinita HZ, in qua sumatur HI æqualis circumferentiæ circuli genitoris EOPQE, & ex I erigatur IK perpendicularis ad HZ & æqualis AE radio circuli. Centro H, asymptotis HV, HZ angulum rectum continentibus, per K describatur Hypẽrbola KM.

Dico illam Hyperbolam esse analogam spirali DEF.

DEMONSTRATIO.

SUmaur in spirali quodcunque punctum D & jungatur AD occurrens circuli circumferentiæ in Q. Ordinetur autem ad Hyperbolam AM recta LM æqualis radio AD. Ex proprietate spiralis AD est ad AE ut circumferentia EOPQE ad arcum EOPQ. Est autem AD, AE ut LM æqualis AD ad IK æqualem AE (*Hyp.*) sive ex proprietate Hyperbolæ, ut HI ad HL, ergo circumferentia EOPQE est ad arcum EOPQ ut HI ad HL, est autem circumf. EOPQE æqualis HI (*Hyp.*) ergo arcus EOPQ æqualis est rectæ HL, ac proinde reliquus arcus QE reliquæ rectæ LI æqualis est. Ergo ex definitione anteà tradita spirali DEF analoga est Hyperbola MK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Subtangens spiralis Hyperbolicæ in quocunque puncto æqualis est circumferentiæ circuli genitoris.

IIsdem positis, ex quocunque puncto D spiralis Hyperbolicæ CEF sit tangens DX, quæ occurrat in X rectæ AX perpendiculari ad AD.

Dico subtangentem AX, esse æqualem circumferentiæ circuli genitoris EOPQE.

DEMONSTRATIO.

PUlcherrimam hanc propositionem facilè ex præmissis demonstrabimus in hunc modum. Sit puncto D in Hyperbola Analoga MK

respondens punctum M ita ut ordinata ML sit æqualis radio spiralis AD atque ex M sit tangens Hyperbolæ MZ, jungatúrque HM. Ex proprietate Hyperbolæ duæ HL, LZ sunt æquales: est autem HL æqualis arcui EOPQ ut ostensum est prop. præc. ergo LZ eidem arcui EOPQ æqualis est. Jam ex proprietate curvæ analogæ subtangens LZ est ad subtangentem AX ut radius circuli AQ vel AE ad radium spiralis AD, hoc est ex natura spiralis ut arcus EOPQ ad circumferentiam EOPQE. ergo cum LZ sit æqualis arcui EOPQ, AX æqualis est circumferentiæ EOPQE. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I. Hinc omnes subtangentes in spirali Hyperbolica æquales sunt inter se. Unde etiam apparet conformitas spiralis Hyperbolicæ cum Logarithmica, in hac enim etiam omnes subtangentes æquales sunt ut demonstratum est ibi propos. 18. Coroll. 1.

Corollarium II. Hinc etiam (*Vide figuram* 2.) subtangens curvæ Logarithmicæ *def* correspondentis spirali DEF æqualis est circumferentiæ circuli genitoris EOPQE. est enim æqualis subtangenti spiralis DEF cui Logarithmica correspondet (*prop.* 3. *h.*) ergo circumferentiæ circuli genitoris EOPQE.

Alia demonstratio præcedentis propositionis, independenter à Figura Analoga.

Præmittenda sunt huic demonstrationi duo Lemmata sequentia.

LEMMA I.

SIt (*fig.* 4.) curva *bc* ad quam ex *a* puncto ducatur recta *ab*, sitque *ax* perpendicularis ad *ab*, & centro *a* radio *ab* descriptus arcus circuli *br*.

Dico si ducatur recta *acr* occurrens curvæ *bc* in *c* & arcui *br* in *r*, rationem interceptæ *cr* ad arcum *br* (sumpto semper puncto *c* propiùs ad punctum *b*) desinere in *b*, in rationem rectæ *ab* ad *ax* subtangentem, (ducta ex *b*, rectâ *bx* quæ tangat curvam *bc* in *b*.)

DEMONSTRATIO.

PEr *b*, *c* ductâ secante *bco* quæ occurrat ipsi *ax* in *o*, compleantur parallelogramma, *abfx*, *asco*: & per *b*, *r*, ducatur *brd* quæ occurrat ipsi *oc* in *d*.

Propter

Propter parallelas *cr*, *od* ratio *cr* ad rectam *br* eadem est quæ *od*, ad *bd*.

Ostensum est autem in Lemmate prop. 5. præcedentis, rectam *od* per accessum continuum puncti *c* ad punctum *b*, desinere in rectam *xf*. punctum ergo *d* abit in punctum *f*, & recta *brd* secans circulum in rectam *bf* tangentem circulum, cùm ergo recta *od* abeat in *xf*, & *bd* in *bf*, ratio *od*, *bd* sive *cr br* desinit in puncto *b*, in rationem *xf*, *bf* sive *ab*, *ax*. Cùm autem ratio chordæ *br* ad suum arcum *br* evadat in *b* ratio æqualitatis, ratio *cr* ad chordam *br* desinit in eemdem ac ratio *cr* ad arcum *br*. Ergo ratio *cr* ad arcum *br* desinit in *b*, in rationem *ab*, *ax*. Quod erat demonstrandum.

LEMMA II.

Eximia proprietas spiralis Hyperbolicæ.

SI in spirali Hyperbolica DEF (*fig.* 5.) cujus circulus genitor EOPQ, sumatur quodcunque punctum D, & centro A intervallo AD describatur circulus DRSD, occurrens AE in S.

Dico arcum DRS sumptum versus eam partem in qua radii spiralis crescunt, æqualem esse circumferentiæ circuli genitoris EOPQE.

DEMONSTRATIO.

ARcûs enim DRS ad circumf. EOPQE ratio est composita ex rationibus arcûs DRS ad similem arcum QPOE sumptum in circulo genitore, & arcûs QPOE ad circumferentiam EOPQE. Est autem arcus DRS ad similem arcum QPOE ut radius AD ad radium AQ sive AE. Et arcus QPOE ad circumf. EOPQE est ex natura hujus spiralis ut reciprocè AE ad AD. Ergo arcus DRS habet ad circumferentiam EOPQE rationem compositam AD, AE, & AE, AD sive rationem æqualitatis. Quod erat demonstrandum.

Nota quòd si punctum D sumeretur in secunda revolutione spiralis, arcus DRS deberet comprehendere totam circumferentiam radii AD & insuper arcum prædictum inter D & rectam AE comprehensum; si in tertia revolutione sumenda esset bis circumf. radii AD & insuper prædictus arcus, si in quarta, ter circumferentia & insuper prædictus arcus, &c. in infinitum. Eadémque est demonstratio.

Corollarium I. E' converso si in recta AES infinita, sumatur quod-

cunque punctum S, & centro A radio AS describatur circulus, atque in eo sumatur arcus SRD æqualis circumferentiæ EOPQE circuli genitoris. Punctum D erit ad spiralem Hyperbolicam cujus circulus genitor EOPQE.

Corollarium II. Reliquus arcus DS sumptus versus eam partem in qua radii spiralis decrescunt æquatur circumferentiæ DRSD — circumf. EOPQE sive circumferentiæ radii AD – circumferent. radii AE circuli genitoris.

Demonstratur jam Propositio VII.

EX quocunque puncto D spiralis Hyperbolicæ DEF (*fig.5.*) sit tangens DX quæ occurrat in X rectæ AX perpendiculari ad AD.

Ostendendum est subtangentem AX æqualem esse circumferentiæ circuli genitoris. EOPQE.

DEMONSTRATIO.

SUmpto in spirali DE quocunque puncto B, jungatur AB quæ occurrat in C circulo DRSD descripto radio AD.

Ex natura spiralis Hyperbolicæ AD est ad AB ut reciprocè arcus SRDC ad arcum SRD. Ergo per conversionem rationis AD est ad BC ut arcus SRDC ad arcum DC & permutando AD est ad arcum SRDC ut BC ad arcum DC. Cùm autem per accessum indefinitum puncti B ad punctum D, arcus SRDC desinat in arcum SRD, ratio rectæ AD ad arcum SRDC pariter desinit in rationem rectæ AD ad arcum SRD, ergo ratio BC ad arcum DC desinit in rationem rectæ AD ad arcum SRD. Desinit autem eadem ratio BC ad arcum DC etiam in rationem rectæ AD ad subtangentem AX (*Lemm.* 1. *præced.*) ergo arcus SRD æqualis est subtangenti AX. Est autem arcus SRD æqualis circumferentiæ EOPQE circuli genitoris (*Lemm.* 2. *præced.*) ergo subtangens AX æquatur circumferentiæ EOPQE circuli genitoris. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

CUm in hac spirali radii AD, AE sint ut reciprocè arcus EOPQE, EOPQ; exponens potestatis tam radiorum quàm arcuum est. 1. Ratio ergo composita ex duabus AD, AE, & exponentis radiorum spiralis ad exponentem arcuum est eadem cum ratione AD, AE. Est

autem circumferentia EOPQE ad arcum EOPQ respondentem puncto D ut AD, AE ex natura hujus spiralis, ergo circumferentia EOPQE sive illi æqualis (ut ostensum est) subtangens AX est ad arcum circuli genitoris EOPQ respondentem puncto contactûs D, in ratione composita AD, AE & exponentis radiorum ad exponentem arcuum. Quod convenire cæteris omnibus spiralibus ostendemus infrà.

Porrò cùm punctum D est ut hic in prima revolutione spiralis, arcus respondens puncto D contactûs est solus arcus EOPQ. Cùm autem sumitur in secunda revolutione spiralis est arcus EOPQ † circumferentia EOPQE semel sumpta. Cùm sumitur in tertia est arcus EOPQ † circumf. EOPQE bis sumpta & sic deinceps in infinitum.

De spatiis spirali Hyperbolica contentis.

PROPOSITIO VIII.

Sectores spiralium cum circulo comparantur.

ESto (*fig.*2.) quilibet sector spiralis Hyperbolicæ, ADE, duobus radiis AD, AE & curva DE comprehensus.

Dico illum sectorem æquari rectangulo contento sub semicircumferentia circuli genitoris EOPQE & sub differentia ipsorum AD, AE maximi & minimi radiorum sectoris.

DEMONSTRATIO.

SIt Logarithmica *def* correspondens spirali (*prop.* 4.) ejusque segmentum *desr* correspondeat sectori ADE, erunt igitur *dr*, *es* ordinatæ æquales radiis respondentibus AD, AE. & segmentum sectoris duplum (*prop.* 3.) est autem segmentum *desr* æquale rectangulo contento subtangente Logarithmicæ & differentia ordinatarum *dr*, *es* (*de lineis Logarithmicis prop.* 4.) cùm ergo subtangens Logarithmicæ *def* sit æqualis circumferentiæ circuli genitoris EOPQE (*propos. præc. Coroll.* 2.) erit segmentum *desr* æquale rectangulo sub circumf. circuli genitoris EOPQE & differentia ipsarum *dr*, *es* sive illis æqualium AD, AE, quare sector ADE, segmenti *desr* dimidius erit æqualis rectangulo sub semicircumferentia circuli genitoris EOPQE & differentia radiorum AD, AE. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I. Hinc sector spiralis ADE, est ad circulum genitorem EOPQ ut differentia radiorum AD, AE, ad radium circuli AE, est enim circulus æqualis rectangulo sub semicircumf. sua & radio.

Corollarium II. Sector ſpiralis Hyperb. ADE eſt ad ſectorem circuli ADR circumſcriptum in ratione compoſita differentiæ radiorum extremorum ſectoris AD, AE ad maximum radium AD, & circumferentiæ circuli genitoris EOPQE ad arcum DR. Eſt enim ſector circuli ADR æqualis rectangulo ſub AD & dimidio arcûs DR; ergo ſector ſpiralis ADE eſt ad ſectorem circuli ADR in ratione compoſita differentiæ radiorum extremorum AD, AE, ad AD, & ſemi-circumf. circuli genitoris ad dimidium arcûs DR ſive circumferentiæ circuli genitoris ad totum arcum DR.

Quoniam præcedens propoſitio valdè inſignis eſt, cùm ab ea pendeat tota dimenſio ſpatiorum ſpiralis Hyperbolicæ, viſum eſt eam demonſtrare etiam independenter à lineis Logarithmicis; duplex autem ea de re cogitanti mihi demonſtratio occurrit, una per methodum inſcriptorum & circumſcriptorum, altera per methodum indiviſibilium, utramque hic ſubjicio.

Propoſitio præccedens demonſtratur per methodum inſcriptorum & circumſcriptorum.

ESto (*fig.* 6.) ſpiralis Hyperbolica DEF, ejuſque ſector quilibet ADE, cujus maximus radius AD, minimus AE. Oſtendendum eſt ſectorem ADE æquari rectangulo contento ſub AD–AE & ſemicircumferentia circuli genitoris.

DEMONSTRATIO.

INter AD, AE ſumptis quotcunque mediis proportionalibus AK, AL, AM, deſcribantur ex illis circa curvam DE, arcus DS, KS, LS, MS. Erunt illi omnes inter ſe æquales (*propoſ.* 1.) ac proinde ſectores circulares ADS, AKS, ALS, AMS ſunt inter ſe ut AD, AK, AL, AM. Abſcindantur ex AD rectæ AN, AO, AP, AQ æquales radiis ſpiralis AK, AL, AM, AE. Erunt igitur & AD, AN; AO, AP, AQ, & differentiæ DN, NO, OP, PQ continuè proportionales in ratione AD, AK, AL, AM, ſive in ratione ſectorum circulurium ADS, AKS, ALS, AMS. quare ſumma omnium DN, NO, OP, PQ ſive tota DQ eſt ad primam DN ut ſumma ſectorum circularium eſt ad primum ſectorem ADS. Eſt autem ſector ADS ad totum circulum radii AD ut arcus DS ad circumferentiam radii AD. Cùm ergo ratio ſummæ ſectorum ADS, AKS &c. ad cirrulum radii AD componatur ex duabus 1. ejuſdem ſummæ ſectorum ad ſectorem ADS. 2. ſectoris ADS ad circulum radii AD. Eadem

ratio

ratio componetur ex æqualibus 1. DQ, DN. 2. arcûs DS ad circumf. AD. vel ex duabus 1. DQ ad circumf. radii AD. 2. Arcûs DS ad DN ſive ad KS æqualem (*conſtruct.*) definit autem ratio arcûs DS ad KS in rationem AX ad AD (*Lemm.* 1. *prop.* 7.) & ſumma ſectorum circularium ADS, AKS, ALS, AMS in ſectorem ſpiralis ADE. Ergo ſector ſpiralis ADE eſt ad circulum radii AD in ratione compoſita DQ ad circumf. radii AD, & AX, AD ſive eſt ut rectangulum ſub DQ. AX, ad rectangulum ſub circumf. radii AD & ipſo radio AD. Eſt autem circulus radii AD dimidium rectanguli ſub circumf. radii AD & ipſo radio AD, ergo ſector ſpiralis ADE dimidium eſt rectanguli ſub DQ & AX. Cùm igitur AX ſit æqualis circumferentiæ circuli genitoris (*prop.* 7.) & DQ ſit AD − AQ ſive AD − AE, ſector ſpiralis ADE dimidium eſt rectanguli ſub AD − AE & circumferentia circuli genitoris, ſive æquatur rectangulo ſub AD -- AE & ſemicircumferentia circuli genitoris. Quod erat demonſtrandum.

Alia demonſtratio propoſitionis VIII. per methodum indiviſibilium.

IIſdem poſitis (*figura* 6.) Oſtendendum eſt ſectorem ſpiralis ADE æqualem eſſe rectangulo ſub AD−AE & ſemicircumferentia circuli genitoris.

CONSTRUCTIO.

CEntro A radiis AD, AK, AL, AM deſcribantur arcus DT, KT LT, MS verſus eam partem in qua radii ſpiralis decreſcunt, & occurrentes rectæ AE productæ, in punctis T, T, S.

Sumatur jam recta *a d* æqualis radio ſpiralis AD, & in eâ abſcindantur *a n*, *a o*, *a p*, *a q* æquales ipſis AN, AO, AP, AQ ſive AK, AL, AM, AE radiis ſpiralis. Sit etiam *dt* ad angulos rectos ipſi *a d*, & æqualis circumferentiæ radii AD. jungatúrque *a t*, tum in *d t* ſumatur *d b* æqualis circumferentiæ circuli genitoris, & ex *b* ducatur *bt* parallela *ad*, occurrens *a t* in *t* & ſecans in *k*, *l*, *m*, *e* rectas *nt*, *o t*, *p t* *qt* parallelas *d t*. Denique jungatur *a b*. Hoc poſito.

DEMONSTRATIO.

ARcus DT æquatur circumf. radii AD - circumf. circuli genitoris (*Lemm.* 2. *præc. coroll.* 2.) eſt autem recta *dt* æqualis circumf, radii AD (*conſtruct.*) & *db* æqualis circumf. circuli genitoris. Ergo arcus DT æquatur rectæ *bt*: jam in Triangulo *adt* cum ſit *an*, *ad* : : *nt*, *dt*. Sit

autem *dt* æqualis circumf. radii *ad* sive AD, erit *nt* æqualis circumf. radii *an* sive AN sive AK. Est autem *nk* æqualis *db* sive circumf. circuli genitoris, ergo reliqua *kt* æquatur circumf. radii AK — circumferentiæ circuli genitoris, cùm ergo arcus KT æqualis etiam sit circumf. radii AK — circumfer. circuli genitoris, sequitur *kt* æqualem esse arcui KT. Similiter ostendetur rectam *lt* æqualem esse arcui LT, & *mt* arcui respondenti MS. Omnes denique parallelas trianguli *bet* omnibus arcubus respondentibus in trilineo DET comprehenso spirali DE, arcu DT & recta ET.

Ergo ex methodo indivisibilium trilineum DET æquatur triangulo *bet*.

Jam sector circularis ADT æquatur triangulo *abt* cujus altitudo *ad* est æqualis AD (*constr.*) & basis *bt* æquatur arcui DT, ut ostensum est.

Cùm ergo sector ADT æquetur triangulo *abt* & trilineum DET triangulo *bet*, reliquum nempe sector spiralis ADE æquatur reliquo nempe triangulo *abe*. Est autem triangulum *abe* inter easdem parallelas & super eadem basi *be* dimidium rectanguli *dqeb*. Ergo sector ADE ejusdem rectanguli dimidium est. Continetur autem rectangulum *dqeb* sub *db* æquali (*constr.*) circumferentiæ circuli genitoris & sub *dq* quæ est *ad* — *aq*, sive AD – AQ, sive AD – AE. Igitur sector spiralis ADE dimidium est rectanguli sub circumferentia circuli genitoris & AD – AE sive æqualis est rectangulo sub AD – AE & semicircumferentia circuli genitoris. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Sectores spiralis inter se comparantur.

DIco 1. sector unus spiralis ADE (*fig.* 2) est ad alterum AFG ut differentia radiorum extremorum AD, AE prioris sectoris ad differentiam radiorum AF, AG extremorum posterioris sectoris.

DEMONSTRATIO.

PAtet ex præced. propos. cùm uterque sector sit æqualis rectangulo contento sub semicircumferentia circuli genitoris & sub differentia radiorum extremorum sectoris.

Dico 2. Sectores spiralis deinceps positi ADE, AEF quorum radii AD, AE, AF sunt continuè proportionales, sunt inter se ut radii maximi sectorum, AD, AE.

Ut enim radii AD, AE ita differentia radiorum AD, AE

ad differentiam radiorum AE, AF. Ergo, &c.

Corollarium. Hinc si intelligantur infiniti radii AD, AE, AF, AG, &c. decrescantes proportionaliter usque ad centrum A, fiet progressio geometrica infinita sectorum ADE, AEF, AFG &c. decrescentium.

PROPOSITIO X.

Spatia circulationibus spiralis contenta cum circulo comparantur.

DIco 1. spatium contentum (*vide fig*, 1.) prima circulatione BCDE & recta ES in infinitum producta, infinitum est.

DEMONSTRATIO.

CUm enim ex natura hujus spiralis sit radius AC spiralis ad radium AE ut circumferentia EOPQE ad arcum EO, fieríque possit arcus EO minor quocunque dato, ac proinde ratio circumf. EOPQE ad arcum EO major quacunque data, etiam ratio AC, AE fit major quacunque data, unde radii spiralis AE, AD, AC, AB &c. ita crescunt versus B ut ultimus & maximus AS sit infinitus. Ergo rectangulum sub differentia ipsius AS, & AE, & sub semicircumfer. Circuli genitoris EOPQE infinitum est, ac proinde illi rectangulo vel spatio æquale spatium circulatione BCDE & recta ES contentum (*propos.* 8.) infinitum est.

Dico 2. Spatium secunda circulatione EFGHI & recta EI contentum dimidium est circuli genitoris.

Cùm enim ex natura hujus spiralis sit radius AI ad radium AE, ut reciprocè circumferentia EOPQE ad eamdem circumf. EOPQE bis sumptam, erit radius AI dimidius radii AE, ergo differentia EI radiorum AE, AI est etiam dimidia radii AE. & rectangulum sub EI atque semicircumferentia circuli genitoris EOPQE (hoc est *prop.*8.) spatium contentum spirali EFGHI & recta EI) dimidium est circuli genitoris EOPQE. Quod erat ostendendum.

Corollarium. Similiter ostendetur spatium spiralis tertia circulatione contentum esse ad circulum genitorem ut 1. ad 6. & quarta circulatione contentum esse ad circulum genitorem ut 1. ad 12. & quintâ ut 1. ad 20 potéstque hinc fieri.

CANON UNIVERSALIS. Spatium quacunque circulatione contentum est ad circulum genitorem, ut 1. *ad quadratum numeri denominantis circulationem imminutum ipso numero.*

Ita ſpatium ſecundæ circulationis eſt ad circulum genitorem ut 1. ad 4. quadratum numeri 2. imminutum ipſo numero 2. hoc eſt ut 1. ed 2.

Et ſpatium tertiæ circulationis eſt ad circulum genitorem ut 1. ad 9 — 3 ſive ut 1. ad 6. &c.

Quod convenit etiam primæ circulationi, cujus ſpatium eſt ad circulum genitorem ut 1. ad 1 — 1 hoc eſt ut 1 ad 0, quod arguit ſpatium illud eſſe infinitum.

PROPOSITIO XI.

Summæ circulationum infinitarum ad circulum reducuntur.

IIſdem poſitis., Dico ſummam ſpatiorum infinitis circulationibus contentorum à puncto quolibet ſpiralis D, uſque ad centrum A, eſſe ad circulum genitorem EOPQ ut radius ſpiralis AD ad radium circuli AE.

DEMONSTRATIO.

COnſiderari poteſt talis ſumma ſpatiorum radio AD, & ſpirali DEFGHI &c. contentorum ut ſector cujus maximus radius eſt AD, minimus autem in centro A æqualis 0. Ergo differentia radiorum eſt ipſemet radius AD, ergo ſector ille ſive illa ſumma ſpatiorum æquatur rectangulo ſub ſemicircumferentia circuli genitoris EOPQE & radio AD, quare eſt ad circulum genitorem ut AD ad radium circuli AE. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Hinc ſumma ſpatiorum ſpirali contentorum incipiendo à puncto E uſque ad A æquatur circulo genitori EOPQE.

Hactenus examinavimus tangentes & ſpatia ſpiralis Hyperbolicæ, ſupereſt ut ipſam curvam contemplemur; ac primò ejus iter, deinde magnitudinem & dimenſionem. Quod ſpectat ad iter; ſi concipiatur eam ab A *puncto incipere (fig. 7.) manifeſtum eſt intra circulum per infinitas circulationes in orbem flecti donec perveniat ad punctum* E. *Inde verò extra circulum etiam in orbem ferri per puncta* D, C *donec perveniat ad punctum* B *in quo ſecat rectam* AB *perpendicularem ad* AE. *Quem porrò curſum teneat deinde verſus* R, Y *in infinitum progrediendo, an recurrat verſus* AS *ad eam perpetuò accedendo, an verò recedat ab ea, obſcurum eſt; & rursùs ſi recedat, an ad diſtantiam quacunque data majorem abeat, an verò intra diſtantiam quamdam finitam concludatur, queri poteſt, & quænam ea ſit. atque hæc ſequenti propoſitione elucidabimus.*

PROPO-

PROPOSITIO XII.

Iter ſpiralis Hyperbolicæ in prima circulatione.

DIco 1. ſpiralem Hyperbolicam EDCBRY (*fig.*7.) ex puncto B verſus Y tendentem in infinitum recedere à recta AST.

DEMONSTRATIO.

SUmatur illius quodcunque punctum R in BY infinita, & jungatur RA occurrens circulo genitori EFE in G, ex G ducatur in AE perpendicularis GH, & ex R in AT perpendicularis RS.

Oſtendendum eſt RS majorem eſſe quàm AB.

Ex natura ſpiralis Hyperbolicæ, tota circumferentia EFE eſt ad arcum EF, ut AB ad AE. Et permutando circumf. EFE eſt ad AB, ut arcus EF ad radium AE vel AF. Rursùs ex natura ſpiralis hujus tota circumf. EFE eſt ad arcum EG, ut AR ad AE vel AG. Hoc eſt in triangulo ARS ut RS ad GH, & permutando circumferentia EFE eſt ad RS ut arcus EG ad ſinum ſuum rectum GH. Eſt autem major ratio arcûs EF ad ſinum totum AF quàm arcûs EG ad ſuum ſinum GH, ut notũ eſt Geometris, & demonſtrat Clavius in libro ſinuum tangentium & ſecantium (*prop.* 10. quod enim ibi de chordis probat, idem de ſinubus chordarum dimidiis dici debet) ergo major eſt ratio circumferentiæ EFE ad rectam AB, quàm ejuſdem circumferentiæ ad rectam RS, quare RS major eſt quàm AB. Quod erat oſtendendum.

Dico 2. Spiralem EDCBRY, tendentem ex B verſus Y in infinitum, magis ſemper recedere à recta AT, ſive diſtantiam RS fieri ſemper majorem.

Eſt enim ſemper circumferentia EFE ad diſtantiam RS, ut arcus EG reſpondens ad ſuum ſinum GH, ut ante oſtenſum eſt, ratio autem arcûs EG ad ſuum ſinum eò fit minor, quò arcus ipſe magis decreſcit (*Clavius prop. prædictâ*,) ſimul autem punctum R magis recedit à puncto B; ergo quò punctum R remotiùs eſt à puncto B, ratio circumferentiæ EFE ad diſtantiam RS fit minor, ac proinde RS major exiſtit.

Dico 3. Diſtantiam ſpiralis BRY à recta BT non fieri infinitam, ſed deſinere in rectam quæ ſit æqualis circumferentiæ EFE.

Cùm enim ratio circumferentiæ EFE ad diſtantiam RS ſit eadem cum ratione arcûs reſpondentis EG ad ſuum ſinum rectum GH, utriuſq; rationis in E eſt idem terminus; terminus autem rationis arcûs EG ad ſuum ſinũ GH, in E eſt ratio æqualitatis (ut Geometræ facilè intelligunt & nos demonſtravimus in libro de novis ſpiralibus in Lemmate propoſ. 1.) ergo terminus rationis quam habet circumferentia EFE ad diſtan-

tiam TY maximam ſpiralis BRY à recta AT eſt ratio æqualitatis.

Dico 4, Recta AB producta intelligatur verſus V, ita ut AV ſit æqualis circumferentiæ EFE, & per V ducatur VZ parallela AT, Dico VZ eſſe aſymptoton ſpiralis BRY,

Sequitur ex præcedenti, cùm diſtantia RS verſus Y ita creſcat ut ejus ratio ad circumferentiam EFE ſive AV ſive SX æqualem, deſinat in rationem æqualitatis. Hinc enim manifeſtum eſt, nunquam ſpiralem BRY coincidere cum recta VZ, ſed ad eam perpetuò accedere, & interceptam RX fieri minorem quacunque data, ergo recta VZ ſpiralis BRY aſymptotos eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

Magnitudo ſpiralis Hyperbolicæ.

COnſtat ex dictis ſpiralem EDCBY (*fig.* 7. in infinitum excurrere verſus Y. Ac proinde manifeſtum eſt à quocunque puncto D ſumptam extrorſum curvam DCY infinitam eſſe. An verò introrſum revoluta à quocunque puncto D per E uſque ad centrum A ſit finita vel infinita non ita apparet. Ad quod explicandum.

Dico 1. (*reſumptâ figurâ* 2.) quamcunque portionem DE ſpiralis Hyperbolicæ, æqualem eſſe portioni *de* correſpondenti curvæ Logarithmicæ *def*.

Hoc conſtat ex iis quæ prop. 3. num III. demonſtrata ſunt.

Dico 2. totam curvam ſpiralem DEFG &c. introrſum uſque ad centrum A revolutam eſſe magnitudinis infinitæ.

Eſt enim tota curva Logarithmica *defgz* in infinitum excurrens verſus Z, correſpondens toti ſpirali DEFG &c revolutæ uſque ad centrum A (*Coroll. prop.* 4.) Cùm ergo Logarithmica *defgz* infinita ſit, etiam ſpiralis DEFG, cujus ſingulæ partes ſingulis Logarithmicæ partibus correſpondentibus ſunt æquales ut modò dictum eſt, infinita etiam eſt. Quod erat demonſtrandum.

DIMENSIO SPIRALIS HYPERBOLICÆ.

CUm oſtenſum ſit quamcumque portionem DE ſpiralis eſſe æqualem Logarithmicæ curvæ *de* correſpondenti, manifeſtum eſt ex iiſdem pendere dimenſionem ſpiralis DE, & Logarithmicæ *de* correſpondentis, ſed ut innoteſcat *de* neceſſe eſt priùs eam conſtitui, quod fieri non poteſt niſi ſciatur cujus magnitudinis ſit *rs* ad cujus extrema *r*, *s* applicantur ordinatæ *rd*, *se* æquales radiis AD, AE ſpiralis datæ DEF,

Oſtendimus autem in prop. 4. demonſtratione *ns* eſſe æqualem ſummæ arcuum indefinitorum qui ex centro A circa DE deſcribi poſſunt, reſtat igitur inquirendum cujus magnitudinis ſit illa ſumma. Ad hoc autem juvabit propoſitio ſequens, in qua earum figurarum quas Analogas anteà nominavimus altera proprietas demonſtrabitur.

PROPOSITIO XIV.

Methodus generalis inveniendi ſummam arcuum qui ex quovis centro circa quamcumque curvam deſcribi poſſunt.

ESto (*fig.* 8.) curva BCDEF & punctum A, ex quo jungantur AB, AF intelligantúrque centro A circa curvam BF deſcripti quotcunque arcus BG, CG, DG, EG diviſo angulo BAF per rectas AC, AD, AE. Centro A deſcribatur quicunque arcus IN ſecans AB in I, & AF in N, occurrenſque in K, L, M rectis AC, AD, AE.

Jam intelligatur ſuper axe *in* æquali arcui IN deſcripta figura *ibfn* Analoga figuræ ABF, talis nimirum ut rectâ *in* & arcu IN diviſis proportionaliter in K, L, M: *k*, *l*, *m*, radii AB, AC, AD, AE, AF ſint æquales ordinatis *ib*, *kc*, *ld*, *me*, *nf* reſpondentibus.

Dico terminum arcuum BG, CG, DG, EG eſſe ad arcum BH centro A radio AB deſcriptum in angulo BAF ut figura Analoga *binf* eſt ad rectangulum circumſcriptum *bino*.

DEMONSTRATIO.

ARcus BG eſt ad ſequentem CG in ratione compoſita arcûs BG ad arcum IK; arcûs IK ad arcum KL, & arcûs KL ad arcum CG; ſive AB, AI; IK, KL; AK, aut AI, AC; ſive ex duabus AB, AC; IK, KL. Sunt autem ex natura figuræ Analogæ *bi*, *ck* æquales ipſis AB, AC, & *ik*, *kl* æquales arcubus IK, KL. Ergo arcus BG ad arcum CG habet rationem compoſitam *bi*, *ck*; & *ik*, *kl*; ſive arcus BG eſt ad arcum CG ut rectangulum *ig* ad rectangulum *kg*. Similiter oſtendetur arcus CG, DG, EG eſſe inter ſe ut rectangula *kg*, *ig*, *mg*. Ergo omnes arcu*e* ſimul BG, CG, DG, EG ſunt ad primum BG ut omnia ſimul rectangula *ig*, *kg*, *lg*, *mg*. ad primum *ig*. Eſt autem arcus BG, ad arcum BH ut arcus IK ad arcum IN ſive ut recta *ik* ad

rectam *i n*, sive ut rectangulum *i g* ad rectangulum *i o*; ergo ex æquo omnes arcus simul B G, C G &c. sunt ad arcum BH ut omnia rectangula simul *i g*, *k g* &c. ad rectangulum *i o*. Ergo terminus arcuum BG, CG, DG, EG quócunque numero fuerint est ad arcum BH, ut terminus rectangulorum *i g*, *k g*, *l g*, *m g* sive ut figura *b i n f* ad rectangulum *i o*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Datâ circuli quadraturâ habetur *i n* æqualis arcui IN, ergo habetur positione figura analoga *b i n f*. Ergo data circuli & figuræ analogæ *b i n f* quadraturâ, habetur recta æqualis summæ arcuum circa curvam BF descriptorum.

PROPOSITIO XV.

Dimensio spiralis Hyperbolicæ.

I. DAtâ circuli quadraturâ, habetur recta HI (*fig.* 5.) æqualis circumferentiæ circuli genitoris EOPQ, habetur autem & I K æqualis AE-radio circuli EOPQ, ergo habetur punctum K, & positione Hyperbola KM, quæ describetur per K centro H, asymptotis HV, HZ, rectum angulum continentibus — habetur etiam in eâ hyperbola recta LM ordinata æqualis AD radio spiralis, ergo habetur positione segmentum Hyperbolicum IKML, quod est Analogum sectori spiralis ADE (*prop.* 6.)

II. Datâ Hyperbolæ quadraturâ, habetur segmenti Hyperbolici IKML ratio ad rectangulum M L I circumscriptum. Eadem est autem ratio summæ arcuum indefinitorum circa DE descriptorum (*vide jam figuram* 2.) ad arcum circuli DR (*prop.* 14.) ergo datâ circuli& Hyperbolæ quadraturâ habetur ratio summæ indefinitorum arcuum circa DE ad arcum circuli DR. Est autem summæ illi æqualis recta *r s* axis segmenti Logarithmici *d e s r* correspondentis sectori spiralis ADE (*prop.*4.) ergo datâ circuli & hyperbolæ quadraturâ habetur ratio rectæ *r s* ad arcum DR, ac proinde & magnitudo rectæ *rs*: Notæ sunt autem ordinatæ *d r*, *es* æquales ipsis A D, A E, ergo notum est positione seu descriptione segmentum Logarithmicum *d e s r*.

III. Dato positione segmento Logarithmico *d e s r*, & datâ insuper hyperbolæ quadraturâ, atque cubaturâ solidi Hyperbolici cujus fit mentio prop.20 de Logarithmicis lineis, habetur recta æqualis curvæ Logarithmicæ *d e*, ergo iisdem datis & insuper circuli quadratura habetur recta æqualis spirali DE.

PARS

PARS SECUNDA.

DE SPIRALIBUS HYPERBOLICIS secundi generis.

DEFINITIONES.

HACTENUS ſpiralem Hyperbolicam primi generis contemplati ſumus, in qua radii ſunt ut reciprocè arcus reſpondentes. Nunc veniamus ad *ſpirales Hyperbolicas ſecundi generis*, eæ autem ſunt, *in quibus poteſtates radiorum ſunt ut reciprocè diſſimiles poteſtates arcuum.* Nomine poteſtatis comprehendimus etiam ipſam radicem cujus exponens eſt 1. Ita (*fig.*1.)(utemur enim interdum,ne multiplicentur figuræ,iis quæ pro ſpirali Hyperbolica primi generis delineatæ ſunt, quáſque non primi ſed ſecundi generis eſſe ſupponemus) ſi ſpiralis BCDE ſit talis ut radii AD, AE ſint inter ſe ut quadrata arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ, vel quadrata radiorum AD, AE ut cubi arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ &c. Spiralis BCDE Hyperbolica erit ſecundi generis.

Verùm inter ſpirales Hyperbolicas ſecundi generis duo etiam ordines diſtinguendi ſunt. Vel enim ratio radiorum major eſt quàm reciprocè ratio arcuum vel minor. *Si ratio radiorum ſit major quàm ratio arcuum* dicentur *ſpirales Hyperbolicæ ordinis ſuperioris*; ita ſi radius AD ſit ad radium AE, ut reciprocè quadratum arcûs EOPQE ad quadratum arcûs EOPQ, cùm ratio radiorum ſit duplicata rationis arcuum ac proinde major ratione arcuum, erit BCDE ſpiralis Hyperb. ſecundi generis & ordinis ſuperioris. *Quod ſi è contra ratio radiorum ſit minor quàm reciprocè ratio arcuum* verbi gratia, ſi quadrata radiorum AD, AE fuerint ut reciprocè arcus EOPQE, EOPQ, *erit* BCDE *ſpiralis ſecundi generis & ordinis inferioris.*

PROPOSITIO XVI.

ESto (*fig.* 2.) Spiralis Hyperbolica ſecundi generis & cujuſcunque ordiuis DEF, in qua ſumantur tres radii AD, AE, AF continuè proportionales, & radiis AD, AE deſcribantur

circa curvam DE, arcus circuli DR, EO.

Dico arcum DR ad arcum EO habere rationem compositam AD, AE; & arcûs EOPQ ad arcum EOPQE.

DEMONSTRATIO.

QUoniam (*Hyp.*) radii spiralis AD, AE, AF sunt proportionales, etiam potestates eorum (verbi gratia quadrata &c.) proportionales erunt. Ut autem potestates radiorum (verbi gratia quadrata) ita aliæ potestates (verbi gratia cubi) arcuum reciprocorũ EOPQEO, EOPQE, EOPQ (*Hyp.*) ergo potestates illorum arcuum reciprocorũ sunt continuè proportionales; ergo & ipsi arcus EOPQEO, EOPQE, EOPQ. Quare & differentiæ QE, EO sunt ut arcus EOPQ, EOPQE. Jam arcus DR ad arcum EO rationem habet compositam arcûs DR ad arc m QE (hoc est rectæ AD ad rectam AE) & arcûs QE, ad arcum EO. Ergo arcus DR ad arcum EO habet rationem compositam radii AD ad radium AE, & arcûs EOPQ ad arcum EOPQE. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVII.

IIsdem positis (*fig.* 2.) si inter radios spiralis AD, AE sumantur quotcunque intermedii proportionales, & inter AE, AF totidem, atque centro A ex illis radiis describantur arcus circuli cirea curvas DE, EF.

Dico summam indefinitam arcuum circa DE, esse ad summam indefinitam arcuum circa EF descriptorum, in ratione composita AD, AE, & arcuum reciprocorum EOPQ, EOPQE.

DEMONSTRATIO.

SUmatur enim inter AD, AE una media proportionalis AK, & inter AE, AF media AL, radiis autem AD, AK describantur arcus DS, KS, & radiis AE, AL, arcus ES, LS, occurrátque AK circumferentiæ EOPQ in M.

Ex præced. propos. arcus DS est ad arcum KS in ratione composita AD, AK, & arcûs EOPQ ad arcum EOPQM. Similiter arcus ES est ad arcum LS in ratione composita AE, AL, & arcus EOPQE, ad arcum EOPQEO. Cùm autem quatuor AD, AK, AE, AL sint continuè proportionales ratio AD, AK eadem est cum ratione AE, AL, Similiter cùm propter radios AD, AK, AE, AL, AF proportionales

(*Hyp.*) arcus EOPQ, EOPQM, EOPQE, EOPQES, EOPQEO ſint proportionales (eorumque differentiæ QM, ME, ES, SO) ratio arcuum EOPQ, EOPQM; eadem eſt cum ratione EOPQE, EOPQES. Ergo ratio arcus DS ad arcum KS eadem eſt cum ratione arcus ES, ad arcum LS, quandoquidem utraque ratio eſt compoſita ex rationibus æqualibus. Ergo arcus DS, KS ſimul ſunt ad arcum DS, ut arcus ES, LS ſimul ad arcum ES, & permutando arcus DS, KS ſimul ſunt ad arcus ES, LS ſimul ut arcus DS ad arcum ES. Jam arcus DS ad arcum ES rationem habet compoſitam, arcûs DS ad ſimilem QM (hoc eſt AD, AQ ſive AD.AE) & QM, ES (hoc eſt EOPQ, EOPQE) ergo arcus DS, KS ſimul ſunt ad arcus ES, LS ſimul in ratione compoſita AD, AE, & arcûs EOPQ ad arcum EOPQE.

Similiter ſi non una tantùm ſed tres, quinque, ſeptem &c. ſumerentur mediæ proportionales inter AD. AE, totidémque inter AE, AF, & deſcriberentur circa curvas DE, EF arcus circulorum majori ſemper numero, oſtenderetur ſummam arcuum circa DE ad ſummam arcuum circa EF deſcriptorum eſſe in compoſita ratione radiorum ſpiralis AD, AE & arcuum EOPQ, EOPQE. Unde ſequitur terminum ſive ſummam indefinitam arcuum circa DE ad terminum ſive ſummam indefiuitam arcuum circa EF deſcriptorum habere eamdem rationem compoſitam AC, AE, & arcus EOPQ ad arcum DEOPQE. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Si duobus radiis ſpiralis AE, AF, ſumeretur tertius proportionalis AG, eodem modo probaretur ſummam arcuum circa curvam EF deſcriptorum eſſe ad ſummam arcuum deſcriptorum circa curvam FG in ratione compoſita radiorum AE, AF, & arcuum EOPQE, EOPQEO. ſive in ratione compoſita ex rationibus æqualibus radiodiorum AD, AE, & arcuum EOPQ ad arcum EOPQE, quare ſummæ arcuum circa uurvam DE, circa curvam EF. & circa curvam FG ſunt in continua ratione. Et ſic aſſumptis aliis in infinitum, radiis ſpiralis proportionalibus, ſequitur ſummas illas omnes arcuum inter punctum D & centrum A circa ſpiralem deſcriptorum, conſtituere progreſſionem geometricam in ratione primæ ſummæ, (arcuum nimirum circa curvam DE) ad ſecundam ſummam (arcuum circa curvam EF deſcriptorum.)

Et ſi ex altera parte duobus radiis ſpiralis AE, AD ſumeretur tertius, quartus, quintus, &c. in infinitum radius proportionalis, ſummæ arcuum circa ſpiralem ED CB in infinitum extra circulum genitorem excurrentem conſtituerent aliam progreſſionem geometricam.

PROPOSITIO XVIII.

IIſdem poſitis. Si ratio radiorum ſpiralis AD, AE minor fuerit ratione arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ (*fig.* 2.)

Dico ſummam arcuum circa curvam DE indefinitè deſcriptorum eſſe minorem ſumma arcuum circa curvam EF.

Et ſi ratio radiorum AD, AE fuerit major quàm ratio arcuum reciprocè EOPQE, EOPQ. Dico ſummam arcuum circa D E eſſe majorem ſummâ arcuum circa E F deſcriptorum.

DEMONSTRATIO.

SIt ratio radiorum AD, AE eadem quæ *a* ad *b*, & ratio arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ eadem quæ *c* ad *d*. Fiat *b* ad *e* ut *d* ad *c*. Ergo ratio *b* ad *e* eadem eſt, quæ arcuum EOPQ, EOPQE. Eſt autem ratio *a*, ad *b* eadem quæ radiorum AD, AE, ergo ratio *a* ad *e* quæ componitur ex rationibus *a* ad *b*, & *b* ad *e* componitur etiam ex rationibus radiorum AD, AE & arcuum EOPQ, EOPQE, ergo eſt eadem quam habet ſumma arcuum circa DE ad ſummam arcuum circa EF (*prop. præc.*)

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & b & e \\ c & d & \end{array}\right\}$$

Jam quoniam *a* ad *b* eſt in minori ratione quàm *c* ad *d*, invertendo *b* ad *a* eſt in majori quàm *d*, ad *c*, ſive quàm *b* ad *e*. Quare *a* minor eſt quàm *e*. Ut autem *a* ad *e* ita oſtendimus eſſe ſummam indef. arcuum circa DE ad ſummam indef. arcuum circa EF. Ergo ſumma indef. arcuum circa DE minor eſt quàm ſumma indef. arcuum circa E F.

Eodem modo oſtendetur, ſi ratio radiorum AD, AE, fuerit major ratione arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ, ſummam arcuum indef. circa curvam DE eſſe majorem ſumma arcuum indefin. circa EF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

IIſdem poſitis (*fig.*2.) ſi ſpiralis DEF ſit inferioris ordinis, ſive talis ut ratio radiorum AD, AE ſit minor ratione arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ.

Dico ſummam indefinitam omnium arcuum qui poſſunt deſcribi à puncto F quocunque per totam curvam, FEDCB in infinitum excurrentem verſus B eſſe æqualem lineæ finitæ. Summam autem omnium arcuum qui poſſunt deſcribi à quocunque puncto D per totam curvam DEFG &c. uſque ad centrum A revolutam eſſe æqualem lineæ infinitæ.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

SI enim intelligantur radii infiniti & continuè proportionales AF, AE AD, AC &c. summæ arcuum indefin. circa FE, BD, DC &c. descriptorum, constituunt progressionem geometr. (*Corol. prop.* 17.) cujus primus terminus est summa arcuum circa FE, secundus summa arcuum circa ED, quæ cùm sit minor quam summa arcuum circa EF (*prop. præc.*) eò quod (*Hyp.*) ratio radiorum AD, AE sit minor ratione arcuum EOPQE, EOPQ. Constat progressionem illam geometricam esse decrescentem, ac proinde omnes termini illius progressionis simul sumpti (sive summa omnium arcuum circa FE, ED, DC &c.) constituunt quantitatem sive lineam finitam, ex proprietate progressionis geometricæ decrescentis, quæ satis nota est Geometris quámque Greg. à S. Vincentio fusè demonstravit in libro de progressionibus Geometricis.

Secunda pars propositionis eodem modo probatur, cùm enim summæ arcuum circa DE, EF, FG &c. positis radiis AD, AE, AF, AG &c. continuè proportionalibus constituant progressionem geometricam (*Coroll. prop.* 17.) cáque progressio sit crescens, cùm primus terminus summa nimirum arcuum circa DE sit minor secundo nempè summâ arcuum circa EF (*prop.* 18.) constat ex eodem Greg. à S. Vincentio in eodem libro de progressionibus Geometricis, summam omnium terminorum, sive arcuum circa curvam DEFGA descriptorum esse majorem quacunque linea finita.

Scholion. Prima pars hujus propositionis poni meritò potest in earum numero quæ admirabiles in Geometria videntur, cùm enim tota curva spiralis BCDEF *sit infinita versus* B, *videtur intredibile omnes arcus per totam illius curvæ longitudinem dispersos si colligerentur adæquari lineæ finitæ.*

PROPOSITIO XX.

QUòd si spiralis DEF (*fig.* 2.) supponatur esse ordinis superioris sive talis ut ratio radiorum AD, AE sit major ratione arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ.

Dico summam indef. arcuum qui possunt describi à puncto quocunque F circa totam curvam FEDCB æquari lineæ infinitæ; summam autem arcuum à quolibet puncto D circa curvam DEFGA descriptorem æquari lineæ finitæ.

DEMONSTRATIO.

DEmonstrabitur hæc propositio eodem modo quo præcedens, nam in spiralibus ordinis superioris ubi ratio radiorum major est ratione

arcuum reciprocorum, ſumma arcuum circa DE major eſt ſumma arcuum circa EF (*prop.* 18.) ergo ſummæ arcuum circa DE, EF, EG conſtituunt progreſſionem geometricam decreſcentem: at verò ſummæ arcuum circa FE. ED, DC &c. deſcriptorum conſtituunt progreſſionem creſcentem, ergo &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Correſpondens ſpirali Hyperbolicæ primariæ ordinis inferioris eſt Hyperbola communis ſeu primi generis.

ESto (*fig.* 9.) ſpiralis Hyperbolica DEF ordinis inferioris, in qua quadrata radiorum AD, AE ſint ut reciprocè arcus EOPQE, EOPQ. *Vocetur autem talis ſpiralis primaria ordinis inferioris.*

Dico hujuſmodi ſpiralis DEF correſpondentem eſſe Hyperbolam communem.

DEMONSTRATIO.

SIt enim figura *drtf* correſpondens ſectori ſpirali ADF. Oſtendendum eſt curvam *df* eſſe Hyperbolam communem.

Quoniam enim figura *drtf* eſt correſpondens ſectori ſpiralis ADF, axis *rt* eſt æqualis ſummæ indefinitæ arcuum circa curvam DF deſcriptorum, (*prop.* 3.) & ordinatæ *dr*, *ft* ſunt æquales radiis reſpondentibus AD, AF, & ordinatâ *fe* æquali ipſi AE mediæ proportionali inter AD, AF. Summa indef. arcuum circa curvam DE, æquatur parti axis *rs*, ſumma autem arcuum circa curvam EF æquatur parti axis *ſt*: Quoniam autem in hac ſpirali quæ eſt ordinis inferioris, ſumma arcuum circa DE minor eſt quàm ſumma arcuum circa EF (*prop.* 18.) etiam recta *rſ*, minor eſt quàm recta *ſt*. Intelligatur modò progreſſio geometrica infinita decreſcens cujus primus terminus ſit *ts* ſecundus *ſr* & quæ terminetur in puncto *a* ex *a* ducatur *ab* perpendicularis ipſi *at*. His poſitis.

Quoniam *at* eſt ſumma omnium terminorum progreſſionis geometricæ *ts*, *sr* &c. *rs*, *st* ſunt inter ſe ut *ar*, *as* (*ut demonſtrat inter alios Greg. à S. Vinc. de progreſſ. Geom. prop.* 79.) eſt autem *rs* æqualis ſummæ arcuum circa AD ad *st* æqualem ſummæ arcuum circa EF in ratione compoſita AD, AE, & arcuum EOPQ. EOPQE. (*prop.* 17.) & ex natura hujus ſpiralis arcus EOPQ eſt ad arcum EOPQE (*hyp.*) ut quadratum AE ad quadratum AD ſive in duplicata AE, AD. Ratio

autem composita ex AD, AE, & duplicata AE, AD; eadem est cum ratione AE, AD, ergo ratio *r s*, *s t* sive illi æqualis *a r*, *a s*, eadem est cum ratione AE, AD sive cum æquali *s e*, *r d*. Igitur punctum *e* est ad Hyperbolam descriptam centro *a*, asymptotis *a b*, *a t* per punctum *d* similiter ostendetur alia puncta curvæ *a f* esse ad eamdem hyperbolam.

Et si duobus radiis AE, AF sumatur tertius proportionalis A G, & duabus ordinatis *e s*, *f t* tertia proportionalis *g u*, ostendetur pariter segmentum Hyperbolicum *f t u g* correspondere sectori spiralis AFG. Unde sequitur locum Hyperbolicum *drxh* in infinitum extensum versus *x*, *h*, correspondere summæ spatiorum omnium à puncto D ad centrum A protensorum, ex altera autem parte locum Hyperbolicum *a r d c b* correspondere spatio spiralis ADCB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

Spirales Hyperbolicæ secundariæ ordinis inferioris habent pro correspondentibus Hyperbolas secundi generis.

SUpponatur, (*fig.* 9.) DEF esse spiralem Hyperbolicam secundariam ordinis inferioris in qua verbi gratia cubi radiorum AD, AE sunt ut reciprocè arcûs EOPQE, EOPQ.

Dico *d r t f* figuram correspondentem sectori ADF, esse segmentum Hyperbolæ secundi generis.

DEMONSTRATIO.

POsitis cæteris ut in propos. præc. ostendetur *a r* esse ad *a s* in ratione composita AD, AE, & arcûs EOPQ ad arcum EOPQE. In hac autem spirali arcus est ad arcum in ratione triplicata AE ad radium AD, & ratio composita ex AD, AE & triplicata AE, AD est duplicata AE, AD, ergo ratio *a r*, *a s* est duplicata rationis AE, AD sive æqualium *e s d r*. Quare *d f* est Hyperbola secundi generis in qua abscissæ sunt ut reciprocè quadrata ordinatarum.

Sed jam supponamus spiralem DEF esse talem ut cubi radiorum AD, AE sint inter se ut reciprocè quadrata arcuum EOPQE, EOPQ. Sitque *d f* correspondens spirali DF & cætera ponantur ut antè.

Ut AD ad AE ita sit recta *m* ad rectam *n*; & duabus *m*, *n* sint tertia & quarta proportionales *o*, *p*. Erit ergo ut cubus *m* ad cubum *n* sive ut cubus AD ad cubum AE, ita recta *m* ad rectam *p*. Sit item ut arcûs EOPQE ad arcum EOPQ ita recta *m* ad rectam *q*. Quoniam cubus AD ad cubum AE (hoc est *m* ad *p*) est ut quadratum arcûs EOPQE

ad quadr. arcûs EOPQ (*Hyp.*) hoc est ut quadratum *m* ad quadratum *q*, erit *q* media proportionalis inter *m*, *p*. ac proinde inter *n*, *o*. Hoc posito.

Ostendetur ut in propos. præc. rationem *ar*, *as* componi ex rationibus AD, AE & arcûs EOPQ ad arcum EOPQE. Est autem ratio AD AE eadem cum ratione *m*, *n* & ratio arcûs EOPQ ad EOPQE, eadem cum ratione *q*, *m*, igitur ratio *ar*, *as* componitur ex rationibus *m*, *n*, & *q*, *m*. Ac proinde est eadem cum ratione *q*, *n*: Est autem ratio *q*, *n*, subduplicata rationis *o*, *n* sive *n*, *m*, sive AE, AD, sive æqualium *es*, *dr*. Ergo ratio *ar*, *as* est subduplicata rationis *es*, *dr*, sive quadratum *ar* est ad quadratum *as* ut reciprocè ordinata *es* ad ordinatam *dr*. Quare punctum *e* est ad Hyperbolam secundi generis centro *a*, asymptotis *ab*, *ar* per *d* descriptam in qua quadrata abscissarum sunt ut reciprocè ordinatæ.

Eodem modo ostendetur quamcunque spiralem secundariam ordinis inferioris habere pro correspondente Hyperbolam secundi generis. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. Porrò ut innotescat cujusnam gradus sit Hyperbola quæ datæ spirali ordinis inferioris correspondet, ex allatis exemplis, aliisque nonnullis quæ hìc non refero, adverti formari posse hunc Canonem.

CANON UNIVERSALIS quo assignatur Hyperbola correspondens cuicunque spirali tam primariæ quàm secundariæ ordinis inferioris.

Spirali cujuscunque ordinis inferioris correspondens est Hyperbola, in qua exponens potestatis abscissarum est idem cum exponente potestatis arcuum in spirali; exponens autem potestatis ordinatarum est differentia exponentium potestatis radiorum & potestatis arcuum.

PROPOSITIO XXIII.

Spiralis Hyperbolica primaria ordinis superioris habet correspondentem Parabolam communem.

ESto (*fig.* 10.) DEF spiralis Hyperbolica ordinis superioris, in qua radii AD, AE sint ut reciprocè quadrata arcuum EOPQE, EOPQ.

Vocetur autem talis spiralis primaria ordinis superioris.

Dico illi correspondentem esse Parabolam communem.

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

SIt enim sectori ADF correspondens figura *d r t f* ergo ut antè *d r f t* æquantur radiis AD, AF, & axis *r t* summæ arcuum circa curvam DF descriptorum. Et ordinatâ *e s* æquali ipsi AE mediæ proportionali inter AD, AE, recta *r s*, æquatur summæ arcuum circa curvam DE, & *s t* summæ arcuum circa EF. Quoniam autem in hac spirali major est (*Hyp.*) ratio radiorum AD, AE quàm reciprocè arcuum EOPQE, EOPQ; etiam summa arcuum circa DE major est summâ arcuum circa EF (*prop.*18.)ac proinde *r s* major est quàm *s t*. Duabus *r s*, *s t* adjungi intelligantur infinitæ proportionales, sitque omnium terminus in *a* erit *r s* ad *s t* ut *a r* ad *a s* (*Greg. à S. Vinc. lib: de progress. prop.* 79.)

Fiat ut AD ad AE, ita *m* ad *o* & ut arcus EOPQE ad arcum EOPQ ita *m* ad *n*. Quoniam ex hypothesi radii AD, AE sunt ut quadrata arcuum EOPQE, EOPQ, *m* est ad *o* ut quadratum *m* ad quadratum *n* quare *m*, *n*, *o* sunt in continua ratione. Quoniam igitur summa arcuum circa DE, ad summam arcuum circa EF (sive *r s*, ad *s t*) habet rationem compositam (*prop.* 17.) ex rationibus AD, AE & arcûs EOPQ ad arcum EOPQE, sive ex æqualibus (*constr.*) rationibus *m*, *o*, & *n*, *m*; ratio *r s*, *s t* est eadem cum ratione *n*, *o* quæ subduplicata est rationis *m*, *o*, sive AD, AE: Ergo ratio *a r*, *a s* æqualis rationi *r s*, *s t* ut antè ostensum est, subduplicata quoque est rationis AD, AE vel æqualium *d r*, *e s*. Quare quadratum *a r* est ad quadratum *a s*, ut *d r* ad *e s*. Ergo punctum *e* est ad Parabolam, cujus vertex *a*, tangens *a r* descriptam per punctum *d*.

Quemadmodùm autem ostensum est punctum *e* esse ad illam Parabolam, eò quod *e s* ordinata sit media proportionalis inter *d r*, *f t* æqualis nempe AE mediæ inter AD, AF. Ita ostendetur mediis assumptis inter *d r*, *e s*; *e s*, *f t*, & inter has aliis & aliis in infinitum omnia puncta curvæ *d f* esse ad eamdem Parabolam.

Atque hinc sequitur totam figuram *d r a* correspondentem esse toti spatio sub AD radio & curva spirali DEFGHA per infinitas revolutiones comprehenso.

Similiter ex altera parte ostendetur spatium comprehensum sub recta *r u* & curva Parabolica *d c* in infinitum productis correspondere spatio sub spirali DCB, radio AD, & recta AE in infinitum producta comprehenso. Quod erat demonstrandum.

O

PROPOSITIO XXIV.

Spirales Hyperbolicæ secundariæ ordinis superioris habent correspondentes Parabolicas secundi generis.

SIt verbi gratia spiralis DEF (*fig.* 10.) talis ut radii AD, AE, sint ut cubi arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ, vel talis ut quadrata radiorum sint ut cubi arcuum reciprocorum, &c. ostendetur his spiralibus correspondentes figuras esse Parabolicas.

Demonstratio eadem est quæ in præcedentibus.

Ut autem sciri possit cujus gradus sit Parabola quæ correspondet datæ spirali ordinis superioris.

Ecce Canonem similem ei quem tradidimus antè pro Hyperbolis correspondentibus.

CANON UNIVERSALIS.

Cuicunque spirali ordinis superioris correspondens est Parabola, in qua exponens potestatis abscissarum est idem cum exponente potestatis arcuum spiralis; exponens autem potestatis ordinatarum est differentia exponentium potestatis radiorum & arcuum.

Hactenùs investigavimus correspondentes figuras spiralibus Hyperbolicis secundi generis, nunc examinabimus earumdem spiralium, Tangentes, spatia, iter, magnitudinem, dimensionem, quemadmodum præstitum est in spiralibus primi generis. Tangentes autem hic ut antè per Analogarum tangentes inveniemus, ad quod intelligendum præmittendæ sunt duæ propositiones sequentes.

PROPOSITIO XXV.

Spiralium secundi generis Analogæ figuræ sunt Hyperbolæ ejusdem gradûs.

ESto verbi gratiâ (*fig.* 5.) spiralis DEF in qua sint cubi radiorum AD, AE ut quadrata arcuum reciprocorum EOPQE, EOPQ.

Dico Analogam huic spirali esse Hyperbolam ejusdem gradûs, nimirùm in qua cubi ordinatarum sunt ut reciprocè quadrata abscissarum.

DEMONSTRATIO.

CIrcumferentiæ EOPQE ſit æqualis recta HI, & radio AE æqualis ordinata IK. Centro H, aſymptotis HV, HI angulum rectum continentibus, per punctum K ſit deſcripta Hyperbola KM in qua cubi ordinatarum IK, LM ſint ut reciprocè quadrata abſciſſarum HL, HI. Oſtendendum eſt Hyperbolam KM eſſe analogam ſpiralis DEF.

Hoc autem conſtabit ex definitione Analogarum tradita ante prop. 5. Si oſtenderimus ducto quocunque radio ſpiralis AD eique ordinatâ LM æquali, arcum EQ rectæ IL æqualem eſſe.

Hoc autem ſic facilè probabimus.

Quoniam (*Hyp.*) radii AD, AE ordinatis LM, IK æquales ſunt, cubi radiorum AD, AE, ſunt ut cubi ordinatarum LM, IK. Ut autem cubi radiorum AD, AE ita ex natura ſpiralis hujus (*Hyp.*) ſunt quadrata arcuum EOPQE, EOPQ, & ut cubi ordinatarum LM, IK ita ex natura Hyperbolæ KM ſunt quadrata abſciſſarum HI, HL. Ergo quadrata arcuum EOPQE, EOPQ ſunt inter ſe ut quadrata abſciſſarum HI, HL, ergo arcus ipſi EOPQE, EOPQ ſunt ut abſciſſæ HI, HL, eſt autem arcus EOPQE æqualis abſciſſæ HI (*Hyp.*) ergo & arcus EOPQ æqualis eſt abſciſſæ HL. Quare & reliquus arcus EQ reliquæ rectæ IL æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVI.

Nova methodus ad inconveniendas tangentes omnium Hyperbolarum.

SIt 1. (*fig.* 11.) Hyperbola communis CF, cujus centrum A, aſymptoti AG, AH, ex puncto C tangens CX occurrens aſymptoto AG in X, ordinata CB ad eamdem aſymptotum, & alia quæcunque ordinata FE. Jungatur CF quæ producta occurrat in G aſymptoto AG.

Quoniam ex proprietate Hyperbolæ AE, AB : : BC, EF, aut BG, EG in triangulo BCG. per converſ. rationis AE, BE : : BG, BE. ergo AE, æquatur BG; deſinit autem AE in AB & BG in BX per acceſſum indefinitum puncti F ad punctum C. Ergo AB, BX æquantur, ſive AB intercepta inter centrum A & ordinatam BC eſt ad BX ſubtangentem ex C, ut 1. exponens poteſtatis abſciſſarum AB, AE eſt ad 1. exponentem poteſtatis ordinatarum EF, BC.

Sit ſecundò CF Hyperbola ſecundi generis in qua verbi gratia ſit quadratum AB ad quad. AE ut reciprocè EF ad BC, ductâ ut antè ſecante

CFG, duabus AB, AE ſit tertia proportionalis AI. Ergo AI, AB :: BC, EF :: BG, EG. Et per converſ. rationis AI, BI :: BG, BE. Et permutando AI, BG :: BI, BE. Deſinit autem in puncto B per acceſſum indefinitum E ad B ratio BE, EI ſive AB, AE (cùm tres AB, AE AI ſint proportionales) in rationem æqualitatis, ac proinde ratio BI, BE in rationem 2. ad 1. Ergo ratio AI, BG deſinit ibidem in rationem 2. ad 1. Deſinit autem recta AI in AB abeunte puncto E in punctum B, & puncto I in punctum E ac proinde in punctum B. Et ſubſecans BG deſinit in ſubtangentem BX. Ergo AB intercepta inter centrum A & ordinatam BC eſt ad BX ſubtangentem ex C, ut 2. ad 1. ſive rurſus ut exponens poteſtatis abſciſſarum in hac Hyperbola ad exponentem poteſtatis ordinatarum.

CANON UNIVERSALIS Similiter probabitur in quacunque Hyperbola interceptam AB *inter cenerum* A *& ordinatam* BC *eſſe ad ſubtangentem* BX *ex puncto* C, *ut eſt expenens poteſtatis abſciſſarum* AB, AE *ad exponentem poteſtatis ordinatarum,* EF, BC.

PROPOSITIO XXVII.

Tangentes ſpiralium Hyperbolicarum ſecundi generis.

ESto (*fig.* 5.) DEF ſpiralis Hyperbolica ſecundi generis & cujuſcunque ordinis, cujus circulus generator EOPQE, ex puncto D tangens DX quæ occurrat in X rectæ AX perpendiculari ad radium AD.

Dico ſubtangentem AX eſſe ad arcum EOPQ reſpondentem puncto D, in ratione compoſita radii ſpiralis AD ad AE radium circuli EOPQE, & exponentis poteſtatis radiorum ſpiralis ad exponentem poteſtatis arcuum reciprocorum.

DEMONSTRATIO.

SIt ſpirali DEF Analoga KM, hæc erit Hyperbola ejuſdem gradûs (*prop.* 25.) poteſtas ſcilicet ordinatarnm in Hyperb. erit eadem cum poteſtate radiorum ſpiralis, poteſtas autem abſciſſarum in Hyperb. eadem quæ in ſpirali poteſtas arcuum reciprocorum. Sit in Hyperbola KM ordinata LM æqualis radio ſpiralis AD, & ex puncto M tangens MZ quæ occurrat in Z aſymptoto HI. Erit ex deſcriptione figuræ Analogæ HL æqualis arcui reſpondenti EOPQ. (*Ut oſtenſum eſt in demonſtr. propoſitionis* 25.)

Hoc poſito. Subtangens AX eſt ad arcum EOPQ in ratione compoſita

ſita AX ſubtangentis ad ſubtangentem LZ, & ſubtangentis LZ ad arcum EOPQ ſive ad rectam HL illi æqualem. Eſt autem ratio ſubtangentis AX ad ſubtangentem LZ eadem quæ AD ad AE (*ex proprietate Analogarum figurarum demonſtratâ in prop.* 5. *ejuſque Coroll.*) Ratio autem ſubtangentis LZ in Hyperbola, ad HL interceptam inter centrum H & ordinatam LM eſt eadem (*prop.* 26.) quæ exponentis poteſtatis ordinatarum Hyperbolæ hujus, ad exponentem poteſtatis abſciſſarum, ſive cùm poteſtas abſciſſarum in Hyperb. ſit eadem quæ arcuum in ſpirali, & poteſtas ordinatarum in Hyperbola eadem quæ radiorum in ſpirali ut antè dictum eſt, ratio LZ ad HL eadem eſt cum ratione exponentis poteſtatis radiorum in ſpirali ad exponentem poteſtatis arcuum. Ergo ſubtangens AX eſt ad arcum EOPQ reſpondentem puncto D, in ratione compoſ. AD, AE & exponentis radiorum in ſpirali ad exponentem poteſtatis arcuum. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. In puncto E fine primæ revolutionis ſpiralis Hyperbolicæ DEF ſubtangens eſt ad circumferentiam EOPQE circuli genitoris ut exponens poteſtatis radiorum ad exponentem poteſtatis arcuum.

SCHOLION.

Poſſemus etiam harum ſpiralium Hyperbolicarum tangentes deducere ex tangentibus curvarum correſpondentium, quas oſtendimus eſse Hyperbolas vel Parabolas; ſed via quàm iniimus per Analogas figuras nobis commodior viſa eſt. Verùm ad dimetienda ſpatia ſpiralibus comprehenſa utemur figuris correſpondentibus, ad hoc autem neceſſaria eſt propoſitio ſequens.

PROPOSITIO XXVIII.

Datâ circuli quadraturâ cuicunque ſpirali Hyperbolicæ ſecundi generis correſpondens figura poſitione nota eſt.

SUpponimus hic quod ab aliis, Fermatio præſertim & Vvalliſio demonſtratum eſt, cujuſcunque Hyperbolæ ſecundi generis ejúſque ſegmentorum haberi abſolutè quadraturam. Hoc poſito.

Sit propoſita ſpiralis ſecundi generis DEF (*fig.* 9. 10.) in ea ſumptis pro arbitrio tribus radiis continuè proportionalibus AD, AE, AF. Quoniam ſectoribus ADE, AEF Analoga ſunt ſegmenta Hyperbolica ſecundi generis (*prop.* 25.) corúmque ſegmentorum habetur quadratura ut jam dictum eſt. Sequitur datâ circuli quadraturâ haberi rectam *r s* (*fig.* 8. 9.) æqualem ſummæ arcuum circa curvam DE, & *s t* æqualem

ſummæ arcuum circa curvam EF (*Corollarium propoſ.* 14.)

Quo poſito, ſi ſpiralis propoſita DEF (*fig.* 9.) ſit ordinis inferioris habeatur *a t* ſumma progreſſionis geometricæ in ratione *t s*, *s r* (quod facile eſt cùm ſit ſumma *a t* ad primum terminum progreſſionis *t s*, ut *t s* ad exceſſum quo ſuperat ſecundum terminum *s r*) atque ad *r* applicetur ad *a r* recta *r d* æqualis dato ſpiralis radio AD. Si igitur centro *a* aſymptotis *a b* , *a r* angulum rectum conſtituentibus per punctum *d* deſcribatur Hyperbola *d f*, ejus gradûs quem deſignavimus in Canone poſito in fine Coroll. prop. 22. Erit *d f* Hyperbola correſpondens ſpirali propoſitæ & ſegmentum *d r t f* correſpondens ſectori A D F , ut ibidem oſtenſum eſt.

Si autem ſpiralis propoſita DEF (*fig.* 10.) ſit ordinis ſuperioris, tunc habeatur *a r* ſumma infinitarum proportionalium decreſcentium in ratione *r s*, *s t*, & applicatâ ad *r* , *r d* æquali radio AD, vertice *a* tangente *a r* per punctum *d* deſcripta ſit Parabola *a d* ejus gradûs quem deſignat Canon appoſitus ad finem propoſ. 24. Erit parabola *a d* correſpondens ſpirali propoſitæ & ſegmentum *d r t f* ſectori ADF.

Ergo datâ circuli quadraturâ cuicunque ſpirali Hyperbolicæ ſecundi generis correſpondens figura poſitione nota eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Dimenſio ſpatiorum contentorum ſub ſpirali primaria ordinis inferioris.

SIt (*fig* 9.) DEF ſpiralis primaria ordinis inferioris, in qua nimirùm quadrata radiorum AD , AE ſunt ut reciprocè arcus EOPQE , EOPQ.

Dico 1. Sectoris cujuſcunque ADF quadraturam pendere ex circuli & hyperbolæ quadratura.

Datâ enim circuli quadraturâ habetur poſitione correſpondens illi ſectori ſegmentum *d r t f* (*propoſ. præc.*) eſt autem curva *d f* hyperbola communis (*prop.* 21.) cùm igitur ſector ADF ſit dimidium ſegmenti *d r t f* (*prop.* 3.) patet datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ , quadrari ſectorem ADF.

Dico 11. Si ſint in ſpirali DEF tres radii AD , AE , AF continuè proportionales, Duo ſectores ADE , AEF ſunt æquales inter ſe.

Sunt enim ut jam diximus dimidia ſegmentorum Hyperbolicorum correſpondentium *d r s e*, *e s t f*, quæ cùm habeant ordinatas , *d r* , *e s*, *f t* æquales radiis AD , AE , AF , continuè proportionales , ſunt inter

se æqualia ut ostendit Gregorius à S. Vincentio in lib. de Hyperbola.

Dico III. Spatium sub AD quocunque radio spiralis, & curvæ DEF &c. infinitis circulationibus usque ad centrum A comprehensum est infinitum sive majus quacunque figura data.

Constat enim infinitis sectoribus usque ad centrum A deinceps positis, qui omnes inter se æquales sunt si radii sint continuè proportionales, ut paulò antè ostensum est. Ergo &c.

PROPOSITIO XXX.

Dimensio spatiorum contentorum sub spiralibus aliis secundi generis.

SIt (*fig.* 9. 10.) sector ADF spiralis Hyperbolicæ secundi generis ordinis inferioris (non tamen DEF sit spiralis primaria ordinis inferioris de qua locuti sumus prop. præc.)

Dico sectoris illius quadraturam haberi ex sola circuli quadrat.

Hâc enim datâ habetur (*prop.* 28.) correspondens curva *d f* quæ est Hyperbolica (*prop.* 22.) cùm ergo segmentum *d r t f* quadretur cùm sit Hyperbolicum secundi generis, patet sectorem ADF qui est dimidium segmenti *d r t f* quadrari ex data circuli quadratura. Quod erat demonstrandum.

Magnitudinem eorumdem spatiorum tum intra circulum, tum extra determinabimus præmissâ propositione sequenti ad hoc necessaria.

PROPOSITIO XXXI.

SIt (*fig.*12.) Hyperbola secundi generis CEZ centro A, asymptotis AD, AG descripta, & talis ut ratio abscissarum AB, AD sit minor ratione ordinatarum reciprocarum DE, BC. Sit autem AB, minor quàm AD.

Dico locum Hyperbolicum BXZC esse infinitum seu majorem quâcunque figura.

Si autem ratio abscissarum AB, AD major fuerit ratione ordinatarum DE, BC. Dico locum BXZC esse finitum.

DEMONSTRATIO.

PEr punctum C, centro eodem A & asymptotis iisdem AD, AG descripta sit Hyperbola cõmunis CFY quæ secet in F ordinatam DE. Ex proprietate Hyperbolæ communis AB est ad AD, ut reciprocè DF ad

BC. Eſt autem (*hyp.*) ratio AB, AD minor ratione DE, BC. Ergo ratio DF, BC minor eſt ratione DE, BC. Quare ordinata DF Hyperbolæ communis CFY minor eſt quàm DE ordinata Hyperbolæ DEZ ſecundi generis. Idem oſtendetur de omnibus aliis ordinatis utriuſque hyperbolæ. Ergo locus BXZC continet locum BXYC, eſt autem locus BXYC hyperbolæ communis major quâcunque data figura cùm contineat infinita ſegmenta inter ſe æqualia ut demonſtratum eſt à Gregorio à S. Vincentio in libro de Hyperbola, ergo locus BXZC etiam major quacunque figura ſive infinitus eſt quoad aream. Quod erat demonſtrandum primo loco.

Corollarium. Hinc ſequitur ex altera parte locum BAGVC ejuſdem Hyperbolæ ſecundi generis ECV eſſe finitum quoad aream. Demonſtratum eſt enim à Fermatio, aliiſque unamquamque Hyperbolam ſecundi generis ex una parte locum habere quoad aream finitum, illiúſque quadratura tradita eſt.

Secunda pars propoſitionis nempe ſi ratio abſciſſarum AB, AD major fuerit ratione ordinatarum DE, BC,

Locum eſſe finitum ſic oſtendetur.

In Hyperbola ZCV ſumpto quocunque puncto H inter per C, V. Ex illo ducatur HK parallela aſymptoto AG, & GH parallela aſymptoto AB, ex C etiam ducatur CL parallela aſymptoto AB.

Quoniam (*hyp.*) ratio abſciſſarum AK, AB major eſt ratione ordinatarum BC, KH. Ratio AL, AG (æqualium ipſis ordinatis BC, KH) minor eſt ratione GH, LC (æqualium ipſis AK, AB) ergo ex prima parte hujus propoſ. Locus LCVG infinitus eſt, ac proinde & ABCVG. Quare ex altera parte locus BXZC finitus eſt. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium II. Si in Hyperbola CE exponens abſciſſarum AB, AD minor fuerit exponente ordinatarum DE, BC, tunc ratio AB minoris abſciſſæ ad majorem AD minor eſt quàm reciprocè ordinatæ DE ad ordinatam BC. Ita ſi ſit abſciſſa AB ad abſciſſam AD. ut quadratum DE ad quadratum BC, cùm ſit minor ratio quadrati DE minoris ad quadratum BC majoris quàm DE ad BC, erit ratio AB, AD minor quàm ratio DE, BC.

Itaque ſi in Hyperbola CE exponens abſciſſarum AB, AD aſymptoti AX ſit minor quàm exponens ordinatarum DE, BC ad eamdem aſymptotum AX, locus BXZC contentus illa aſymptoto AX infinitus eſt. Et locus ad alteram aſymproton AG eſt finitus. Quod ſi exponens poteſtatis abſciſſarum AB, AD major eſt exponente ordinatarum DE, BC locus ad aſymptotum AX finitus eſt, locus autem ad alteram aſymptoton infinitus.

PROPOSI-

PROPOSITIO XXXII.

Magnitudo ſpatiorum quæ continentur ſub ſpiralibus Hyperb. ſecundariis ordinis inferioris.

ESto (*fig.* 9.) ſpiralis DEF ordinis inferioris non tamen primaria de qua egimus in prop. 29. ſed alia.

Si exponens poteſtatis radiorum AD, AE major ſit duplo exponentis poteſtatis arcuum EOPQE, EOPQ, Dico totum ſpatium contentum ſub radio quocumque AD & ſpiralis DEFGA infinitis circulationibus intra circulum genitorem eſſe infinitum. Et ſpatium contentum ſub AD & ſpirali DCB atque AE productâ eſſe finitum.

Et vice verſa ſi exponens poteſtatis radiorum AD, AE minor ſit duplo exponentis poteſtatis arcuum EOPQE, EOPQ. Dico ſpatium ſub AD & ſpirali DEFGA intra circulum finitum eſſe; ſpatium autem ſub AD & ſpirali DCB atque AE producta contentum extra circulum eſſe infinitum.

DEMONSTRATIO.

SIt ſpirali DEF correſpondens Hyperbola *def* (*prop.* 21.22.) Si exponens radiorum AD, AE foret duplus exponentis arcuum EOPQE, EOPQ, quadrata AD, AE forent ut arcus EOPQE EOPQ. Ac proinde Hyperbole *def* illi ſpirali correſpondens eſſet Hyperbola communis ut oſtenſum eſt prop. 21. quod ſi exponens radiorum eſt major vel minor duplo exponentis arcuum tunc Hyperbola *def* correſpondens non erit Hyperbola communis & primi generis ſed ſecundi (*prop.* 22.)

Sit ergo 1. ſpiralis DEF talis ut exponens radiorum AD, EF ſit major duplo exponentis arcuum EOPQE, EOPQ. Igitur exponens arcuum minor eſt quàm differentia inter exponentes radiorum, & arcuum. Eſt autem in Hyperbola correſpondente *def* exponens poteſtatis abſciſſarum *ar*, *as*, æqualis exponenti arcuum EOPQE, EOPQ & exponens ordinatarum *dr*, *es* æqualis differentiæ inter exponentes radiorum & arcuum (*coroll. prop.* 22.) ergo exponens abſciſſarum *ar*, *as* minor eſt exponente ordinatarum *dr*, *es*. Ergo (*Coroll.* 2. *præc. propoſitionis*) Locus *drxh* eſt infinitus, Locus autem alter *drab* finitus,

Q

Eſt autem Locus *d r x h* correſpondens ſpatio ſub A D & ſpiralis DEFGA infinitis revolutionibus intra circulum contento (*propoſ.* 22.) & locus *d r a b* correſpondet pariter ſpatio ſub A D radio & ſpirali DCB extra circulum genitorem in infinitum producta (*eadem prop.* 22.) cùm ergo correſpondentia ſpatia ſint eorum quibus correſpondent dupla. Manifeſtum eſt ſpatium ſub A D & ſpirali DEFGA intra circulum contentum infinitum eſſe. Spatium autem ſub A D ſpirali DCB & AE productâ eſſe finitum.

Similiter oſtendetur ſecunda pars propoſitionis, nimirùm ſi exponens radiorum ſpiralis A D, AE fuerit minor duplo exponentis arcuum EOPQE, EOPQ; locum *d r x h* eſſe finitum, locum autem *d r a b* infinitum, ac proinde ſpatium ſub AD & ſpirali DEFGA intra circulum contentum finitum eſſe, ſpatium autem ſub AD & DCB ſpirali extra circulum excurrente atque AE productâ eſſe infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium. Hinc ſi exponens radiorum fuerit major duplo exponentis arcuum, ſpatium ſub AD & DCB ſpirali extra circulum protenſa atque AE contentum quadratur datâ circuli quadraturâ, cùm ſit æquale dimidio loci Hyperbolici finiti *d r a b* cujus habetur quadratura, cùm Hyperbola *d e* correſpondens ſpirali DE nota ſit poſitione ex circuli quadratura, (*prop.* 28.) & ſi exponens radiorum AD, AB fuerit minor duplo exponentis arcuum, ſpatium ſub AD & ſpirali DEFGA intra circulum pariter quadratur, cùm ſit dimidium loci Hyperbolici *d r x h* qui in hoc caſu finitus eſt.

PROPOSITIO XXXIII.

Dimenſio & magnitudo ſpatiorum quæ continentur ſub ſpiralibus Hyperbolicis ordinis ſuperioris.

ESto (*fig.* 10.) ſpiralis DEF ordinis ſuperioris in qua nimirùm ratio radiorum AD, AQ major eſt ratione arcuum reciprocorum.

Dico 1. Cujuſcunque ſectoris ADF, haberi quadraturam, datâ circuli quadraturâ.

Datâ enim circuli quadraturâ, habetur (*prop.* 28.) figura *d r t f* correſpondens ſectori ſpiralis. Eſt autem hæc figura Parabolica (*prop.* 23. 24.) vel primi vel ſecundi generis. Cùm ergo omnes figuræ Parabolicæ quadrentur, patet ſectorem ADF qui dimidius eſt figuræ *d r t f* quadrari datâ circuli quadraturâ.

Dico 2. Spatium contentum ſub AD radio ſpiralis & ſpirali DEFGA per infinitas revolutiones, & finitum eſſe & data circuli quadratura quadrari.

Oſtendetur enim eodem methodo qua uſi ſumus in præcedentibus propoſitionibus, illud ſpatium dimidium eſſe figuræ Parabolicæ *a d r.*

Dico 3. Spatium ſub AD radio & ſpirali D C B extra circulum producta verſus B infinitum eſſe.

Oſtendetur enim ei correſpondere ſpatium Parabolicum *d r u c* quod infinitum eſt.

PROPOSITIO XXXIV.

Iter ſpiralium Hyperbolicarum ſecundi generis & ordinis inferioris.

ESto (*fig.* 6.) ſpiralis EIKLO ordinis inferioris in quâ nimirum minor eſt ratio radiorum quàm arcuum reciprocorum.

Dico eam ſpiralem poſtquàm ex E, per I pervenit ad K ubi ſecat AK perpendicularem ad AE, ex puncto K redire verſus rectam ET, & in infinitum excurrentem verſus O, eidem AT eſſe aſymptoton.

DEMONSTRATIO.

SUmpto in KO quocunque puncto L, jungatur A L quæ ſecet circulum EF genitorem, in G. Tum ex G in AE, & ex L in AT ducantur perpendiculares GH, LM. Oſtendendum eſt rectam LM quæ metitur diſtantiam ſpiralis KLO à recta AT minui in infinitum ita ut fiat minor quacunque data, unde conſtabit KLO eſſe aſymptoton rectæ AT.

Sit exempli cauſâ ſpiralis EIK talis ut quadrata radiorum ſint inter ſe ut arcus reciproci.

Quadratum AK ad quadr. LM habet rationem compoſitam quadrati AK ad quadr. AL (hoc eſt arcûs EG, ad arcum EF) & quadrati AL ad quadr. LM (hoc eſt quadrati AG vel AF ad quadratum GH. Ergo quadratum AK ad quadr. LM habet rationem compoſitam ex his tribus. 1. EG, EF. 2. AF, GH. 3. AF, GH. Vel cum duæ priores æquivaleant duabus EG, GH, AF, EF. Ratio quadrati AK ad quadr. LM componitur ex tribus. 1. Arcûs EG ad ſinum GH. 2 Radii AF ad quadrantem EF. 3. AF ad GH. Prima autem ratio arcûs EG ad ſuum ſinum abit

in puncto E, in rationem æqualitatis. Secunda, radii ad quadrantem macet semper eadem. Tertia autem AF radii ad sinum GH fit major quæcunque data, puncto G accedente magis ac magis ad punctum E. Ergo ratio quadrati AK ad quadratum LM quæ componitur ex illis tribus fit major quacunque per accessum continuum puncti G ad punctum E, ergo & recta LM fit minor quâunque datâ (decrescente in infinitum arcu EG) quare KLO curva est asymptotos rectæ AT.

Idem eodem modo ostendetur in aliis spiralibus ordinis inferioris. Ergo &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Iter spiralium ordinis superioris.

ESto (*fig.* 6.) spiralis ENPQ ordinis superioris in quâ nimirum ratio radiorum est major ratione arcuum reciprocorum,

Dico eam postquàm ex E per N pervenit ad punctum P ubi secat rectam AP perpendicularem ad AE. Inde tendentem versus Q magis ac magis recedere à recta AT atque ad distantiam quacunque data majorem.

DEMONSTRATIO.

SIt exempli causa spiralis ENPQ talis ut ratio radiorum sit eadem cum ratione quadratorum arcuum reciprocorum. Sumpto quocunque puncto Q in curva PQ, junctâque AQ quæ secet in G circulum, & ductis GH, Qq perpendicularibus ad AT. Ratio AP ad Qq componitur ex rationibus AP, AQ (hoc est quadrati arcûs EG ad quadratum arcûs EF) & AQ, Qq (hoc est AG seu AF ad GH. Sive ex tribus 1. EG, EF. 2. EG, EF. 3. AF, GH. Sive ex tribus 1.EG, GH. 2. AF, EF. 3. EG, EF. Prima autem EG, GH desinit in E in rationem æqualitatis. Secunda AF, EF manet semper eadem. Tertia autem arcûs EG ad arcum EF fit minor quacunque data, decrescente in infinitum arcu EG. Ergo ratio AP ad Qq fit minor quacunque data. Quare Qq recta fit major quacunque data. Idem ostendetur in aliis spiralibus ordinis superioris. Ergo &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXXVI.

Dimensio & magnitudo spiralium secundi generis.

DIco 1. Cuicunque portioni spiralis DEF secundi generis (*fig.* 9. 10.) assignari posse (datâ circuli quadraturâ) curvam Hyperbolicam vel Parabolicam æqualem.

CUm enim spirali illi correspondens sit vel Hyperbolica (*prop.* 21. 22.) si spiralis sit ordinis inferioris; vel Parabolica (*prop.* 23. 24.) si fuerit ordinis superioris, atque hæc Hyperbolica & Parabolica correspondens nota sit positione, datâ circuli quadraturâ (*prop.* 28.) manifestum est datæ portioni DEF spiralis secundi generis assignari posse æqualem *def* vel Hyperbolicam vel Parabolicam.

Dico 2. Si spiralis DEF (*fig.* 9.) fuerit ordinis inferioris, non solùm illa infinita est extrorsum versus C, B, sed etiam introrsum versus E, F usque ad centrum A.

Pars enim DCB quæ extrorsum fertur habet pro curva correspondente Hyperbolicam curvam *dc* quæ in infiitum extenditur. Pars autem DEFGA correspondentem habet Hyperbolicam *defh* quæ pariter in infinitum extenditur versus *h*.

Dico 3. Si spiralis DEF (*fig.* 10.) fuerit ordinis superioris. Illa quidem infinita est extrorsum sed introrsum versus A est finita.

Pars enim DCB habet correspondentem Parabolicam *dc* quæ in infinitum versus *c* extenditur; Pars autem DEFGA habet correspondentem Parabolícam *da* ad verticem *a* Parabolæ terminatam, quæ omnia manifesta sunt ex præcedentibus.

SYNOPSIS

EORUM QUÆ IN HIS EXERCITATIONIBUS de lineis Logarithmicis, & Spiralibus Hyperbolicis demonstrata sunt.

DE LINEIS LOGARITHMICIS.

PRæmissâ lineæ Logatithmicæ descriptione per quotcunque puncta, illius elementares proprietates quæ ex ipsa generatione facilè deduci possunt, demonstrantur *num.* 1. 2. 3. & sequentibus. Et nova ejusdem lineæ generatio traditur ex duplici motu uno æquabili, altero proportionaliter accelerato aut retardato, *num.* 10.

PROPOSITIONES.

I. SEgmentorum Logarithmicorum proportio inter se & cum Loco integro Logarithmico.

II. Datâ Hyperbolæ quadraturâ, quadratur figura Logarithmica, & vicissim.

III. Datâ Hyperbolæ quadraturâ habetur Tangens curvæ Logarithmicæ & vicissim.

IV. Segmentum Logarithmicum æquatur rectangulo contento sub differentia maximæ & minimæ ordinatarum segmenti & subtangente.

V. Locus Logarithmicus æquatur rectangulo contento sub maxima ordinata & subtangente.

Unde tangens ducta ab extremo maximæ ordinatæ loci secat in duas partes æquales Locum Logarithmicum.

VI. Rotundi geniti ex segmento Logarithmico circa axem rotato, proportio ad cylindrum circumscriptum.

VII. Centrum gravitatis segmenti Logarithmici distat ab axe quarta parte maximæ & minimæ ordinatarum segmenti simul sumptarum.

VIII. Centrum gravitatis totius Loci Logarithmici distat ab axe seu asymptoto quarta parte maximæ ordinatæ loci.

IX. Rotundorum ex segmentis Logarithmicis circa axem, proportio inter se, & cum Rotundo ex loco integro circa asymptotum.

X. Rotundum ex Loco Logarithmico circa asymptotum æquatur semicylindro cujus altitudo est subtangens, basis autem semi-circulus cujus radius est maxima ordinata loci.

XI. Distantia centri gravitatis segmenti Logarithmici à basi seu maxima ordinata.

XII. Analogia centrorum gravitatis figuræ Logarithmicæ & Hyperbolicæ.

Ostenditur segmentorum Logarithmicorum & Hyperbolicorum quorumdam axes similiter secari ab ordinatis transeuntibus per centra gravita is.

XIII. Rotundi geniti ex segmento Logarithmico circa basin, proportio ad cylindrum circumscriptum.

XIV. Proportio inter subtangentem & distantiam centri gravitatis segmenti Logarithmici à basi.

XV. Distantia centri gravitatis totius loci Logarithmici à basi.

Ostenditur illam æqualem esse parti axis interceptæ inter tangentem & basin.

XVI. Datâ Hyperbolæ quadraturâ habetur centrum gravitatis segmenti & loci Logarithmici.

XVII. Rotundum ex loco Logarithmico circa basin rotato reducitur ad cylindrum.

XVIII. Proprietas insignis Tangentium Logarithmicam.

Ostenditur in Logarithmica subtangentes omnes esse æquales inter se.

XIX. Dimensio superficiei genitæ ex curva Logarithmica circa axem rotata. Ostenditur prædictam superficiem datâ Hyperbolæ quadraturâ ad circulum reduci.

XX. Dimensio curvæ Logarithmicæ. Ostenditur curvam illam reduci ad rectam, datâ Hyperbolæ quadraturâ, unà cum cubatura solidi quod fit ex ductu in se duorum quorumdam segmentorum Hyperbolicorum.

DE

DE SPIRALIBUS HYPERBOLICIS.

DEFINITIONES.

SPIRALES HYPERBOLICÆ ſunt lineæ curvæ in quibus radiorum poteſtates ſunt ut reciprocè poteſtates arcuum reſpondentium in circulo genitore.

Et ſi poteſtates radiorum atque arcuum fuerint ſimiles, *Spiralis* erit *Hyperbolica primi generis.* Si diſſimiles, erit *ſpiralis Hyperbolica ſecundi generis.*

Rurſus in ſpiralibus Hyperbolicis ſecundi generis vel ratio radiorum major eſt quàm ratio arcuum reſpondentium, vel minor. Si major eſt, *ſpiralis* erit *ordinis ſuperioris.* Si minor, *ſpiralis.* erit *ordinis inferioris.*

Denique in utroque ordine, una eſt Primaria, cæteræ omnes Secundariæ. *Spiralis primaria ordinis ſuperioris* eſt ea in qua radii ſunt ut reciprocè quadrata arcuum reſpondentium. *Spiralis primaria ordinis inferioris* eſt ea in qua quadrata radiorũ ſunt ut reciprocè arcus reſpondentes.

PROPOSITIONES.

QUæcunque de Spiralibus Hyperb. in hoc libro demonſtravimus ad octo capita reducuntur. Hæc autem ſunt. 1. Spiralium Tangentes 2. Figuræ Spiralibus Analogæ. 3. Figuræ Spiralibus correſpondentes. 4. Dimenſio ſpatiorum Spiralibus contentorum. 5. Eorundem ſpatiorum magnitudo. 6. Curvarum ſpiralium inter. 7. Earundem curvarum magnitudo. 8. Earundem curvarum dimenſio.

I. De Tangentibus ſpiralium Hyperbolicarum.

1. IN ſpirali hyperb. primi generis, ex qnocunque illius puncto ducatur tangens, Oſtenditur ſubtangentem eſſe æqualem circumferentiæ circuli genitoris. *Prop.* 7.
2. In ſpirali hyperbolica ſecundi generis ſubtangens eſt ad arcum circuli genitoris reſpondentem, in ratione compoſita radii ſpiralis ad radium circuli genitoris & exponentis radiorum ſpiralis ad exponentem arcuum. *Prop.* 27.

Quod etiam convenit ſpirali primi generis ut oſtenditur in Scholio *Propoſ.* 7.

II. De Figuris Analogis Spiralibus Hyperbolicis.

1. FIgurarum Analogarum generatio traditur ad finem prop. 5. Earúmque duplex insignis utilitas demonstratur, una (*prop.* 5.) ad inveniendas tangentes curvarum; altera (*propos.* 14.) ad inveniendam summam indefinitam arcuum circa easdem curvas descriptorum.
2. Cuicunque spirali Hyperbolicæ Analoga est Hyperbola ejusdem gradûs ac spiralis, in qua nimirum potestas ordinatarum ad asymptotum, æqualis est potestati radiorum spiralis, potestas autem abscissarum æqualis potestati arcuum in spirali, ut demonstratur pro spirali Hypebolica primi generis, *in prop.* 6. pro spiralibus secundi generis, *in prop.* 25.

III. De Figuris Correspondentibus Spiralibus Hyperbolicis.

1. COrrespondentium figurarum & curvarum generatio traditur, earúmque tres præcipuæ proprietates demonstrantur *prop.* 3.
2. Correspondens spirali Hyperbolicæ primi generis est linea Logarithmica. *Prop.* 4.
3. Correspondens spirali Hyperbolicæ primariæ ordinis inferioris est Hyperbola communis. *Prop.* 21.
4. Correspondens spirali Hyperb. secundariæ ordinis inferioris est Hyperbola secundi generis. *Prop.* 22.

Et universaliter *Spirali cuicunque ordinis inferioris correspondens est Hyperbola in qua exponens abscissarum est idem cum exponente arcuum in spirali; exponens autem ordinatarum est differentia exponentium radiorum & arcuum in spirali.* *Prop.* 22.

5. Correspondens spirali Hyperbolicæ primariæ ordinis superioris est Parabola communis. *Prop.* 23.
6. Correspondens spirali Hyperbol. secundariæ ordinis superioris est Parabola secundi generis. *Prop.*

Et universaliter *Spirali cuicunque ordinis superioris correspondens est Parabola in qua exponens abscissarum est idem cum exponente arcuum in spirali; exponens autem ordinatarum est differentia exponentium radiorum & arcuum in spirali.* *Prop.* 24.

IV. De dimensione Spatiorum Spiralibus Hyperbolicis contentorum.

1. IN spirali Hyperb. primi generis, quilibet sector æquatur rectangulo cujus basis est circumferentia circuli genitoris, altitudo au-

tem differentia inter maximum & minimum radium sectoris. Hujus præclari Theorematis triplex affertur demonstratio Prima per ea quæ de Logarithmica demonstrantur. Secunda per methodum indivisibilium; Tertia per methodum inscriptorum & circumscriptorum *prop.* 8.

2. In eadem spirali spatium unaquaque circulatione contentum est ad circulum genitorem ut unitas ad quadratum numeri denominantis circulationem, imminutum ipso numero. *Prop.* 10.

3. Summa spatiorum infinitis circulationibus contentorum, à quocunque puncto spiralis usque ad centrum, est ad circulum genitorem ut radius spiralis ductus ad illud punctum, est ad radium circuli genitoris. *prop.* 11.

4. In eadem spirali Hyperb. primi generis sectores deinceps positi & quorum radii sunt continuè proportionales, sunt etiam inter se continuè proportionales in ratione radiorum. *Prop.* 9.

5. In spirali primaria ordinis inferioris, quilibet sector quadratur datâ circuli & Hyperbolæ quadraturâ. *Prop.* 29.

6. In eadem spirali si sint tres radii continuè proportionales, sectores illis contenti sunt inter se æquales. *Eadem prop.* 29.

7. In aliis spiralibus secundi generis sive sint ordinis inferioris sive superioris, quilibet sector quadratur data solius circuli quadratura.

V. De magnitudine spatiorum contentorum spiralibus Hyperbolicis.

1. IN spirali Hyperb. primi generis. Spatium contentum sub quocunque radio & spirali introrsùm ab extremo illius radii ad centrum usque revoluta finitum est *Prop.* 11. Spatium autem contentum sub illo radio & spirali extrorsum excurrente est infinitum. *Prop.* 10.

2. In spirali primaria ordinis inferioris spatium sub quocunque radio & spirali, sive introrsum usque ad centrum revoluta, sive extrorsum excurrente infinitum est. *Prop. 29. n. 3.*

3. In aliis spiralibus ordinis inferioris. Si exponens radiorum major sit duplo exponentis arcuum, spatium contentum sub quocunque radio & spirali introrsum usque ad centrum revoluta est infinitum. Spatium autem sub eodem radio & spirali extrorsum excurrente in infinitum est finitum.

Et viceversa si exponens radiorum minor est duplo exponentis arcuum, spatium sub quocunque radio & spirali introrsum revoluta finitum est; spatium autem sub eodem radio & spirali extrorsum excurrente est infinitum. *prop.* 32.

4. In spiralibus Hyberb. ordinis superioris spatium sub quocunque ra-

dio, & ſpirali introrſum ad centrum uſque revoluta finitum eſt; ſpatium autem ſub eodem radio & ſpirali extrorſum excurrente eſt infinitum. *Prop.* 33. *num.* 2. *&* 3.

VI. De Itinere ſpiralium Hyperbolicarum.

PEr centrum ſpiralis & finem primæ circulationis ubi ſpiralis ſecat circulum genitorem ducatur linea recta atque in infinitum produci intelligatur. Hæc linea vocetur *Lineæ directrix.* Hoc poſito.

1. Spiralis Hyperbolica primi generis ita fertur in prima revolutione, ut ſemper magis recedat à linea directrice, non tamen ad diſtantiam quacunque majorem, ſed ad eam diſtantiam quæ ſit æqualis circumferentiæ circuli genitoris. Unde recta ad illam diſtantiam lineæ directrici parallela eſt aſymptotos ſpiralis in prima revolutione. *Prop.* 12.
2. Spiralis Hyperbolica ſecundi generis & ordinis inferioris ita fertur in prima revolutione, ut accedat magis ac magis ad lineam directricem, atque hæc illi eſt aſymptotos. *Prop.* 34.
3. Spiralis Hyperbolica ſecundi generis & ordinis ſuperioris ita fertur in prima revolutione ut à linea directrice recedat ad diſtantiam quacunque data majorem. *Prop.* 35.

VII, De Magnitudine ſpiralium Hyperbolicarum.

1. SPiralis Hyperbolica primi generis, à quocunque puncto, non ſolùm infinita eſt extrorſum, ſed etiam introrſum uſque ad centrum revoluta. *Prop.* 13.
2. Spiralis Hyperb. ſecundi generis & ordinis inferioris, eſt etiam à quocunque puncto infinita tam introrſum uſque ad centrum, quàm extrorſum. *Prop.* 36. *num.* 2.
3. Spiralis Hyperbolica ſecundi generis & ordinis ſuperioris, à quocunque puncto illius, infinita quidem eſt extrorſum, ſed introrſum finita. *Eadem prop.* 36. *num.* 3.

VIII. De Dimenſione ſpiralium Hyperbolicarum.

1. DAtâ circuli quadraturâ, habetur curva Logarithmica æqualis propoſitæ ſpirali Hyperbolicæ primi generis.

Unde cùm datâ Hyperbolæ quadraturâ, atque inſuper cubaturâ ſolidi quod fit ex ductu in ſe certorum ſegmentorum Hyperbolicorum habeatur curvæ Logarithm. recta æqualis (*de lineis Logarith. prop.* 20.)

iiſdem

iisdem datis & suppositâ circuli quadraturâ, habetur recta æqualis, propositæ spirali Hyperbolicæ primi generis. *Prop.* 15.

2. Datâ circuli quadraturâ, habetur curva Hyperbolica æqualis propositæ spirali secundi generis & ordinis inferioris. *Propos.* 21. 22.

Unde datâ circuli quadraturâ & insuper suppositâ reductione curvarum Hyperbolicarum ad rectas, spiralis Hyperb. proposita secundi generis & ordinis inferioris reducitur ad rectam lineam. *prop.* 36. *num.* 1.

3. Datâ circuli quadraturâ, habetur curva Parabolica æqualis propositæ spirali secundi generis & ordinis superioris. *prop.* 23. 24.

Unde cùm ex Hyperbolarum quadraturâ curvæ Parabolicæ reducantur ad rectas, ex circuli & Hyperbolarum quadratura, spiralis proposita secundi generis & ordinis superioris reducitur ad rectam.

Hæc sunt quæ circa Spirales Hyperb. sunt à nobis demonstrata. Majoris autem claritatis causâ, Exercitationem hanc in duas partes divisimus. quarum prior est de spiralibus Hyperbolicis primi generis, posterior autem in spiralibus Hyperbolicis secundi generis versatur.

FINIS.

illorum datis & hyperbolis circuli quadratura, habetur recta æqualis, proportra spiralis Hyperbolicæ primi generis. Prop. 19.

2. Data circuli quadratura, habetur curva Hyperbolica æqualis proportra spiralis secundi generis & ordinis inferioris. Prop. 21. 22.

Unde data circuli quadratura & insuper hyperbolis reductione curvarum Hyperbolicarum ad rectas, spiralis Hyperb. proportra secundi generis & ordinis inferioris reducitur ad rectam lineam. prop. 26. num. 1.

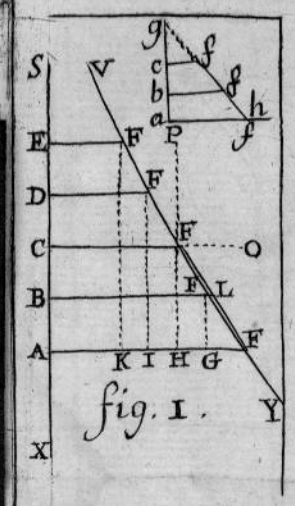
3. Data circuli quadratura, habetur curva Parabolica æqualis proportra spiralis secundi generis & ordinis superioris. prop. 23. 24.

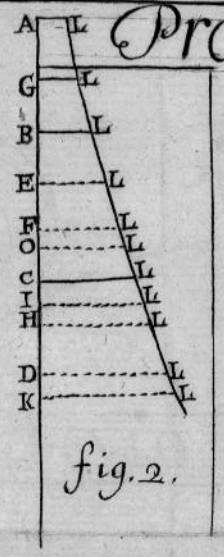
Unde cum ex Hyperbolarum quadratura curva Parabolica reducantur ad rectas, ex circuli & Hyperbolarum quadratura, spiralis proportra secundi generis & ordinis superioris reducitur ad rectam.

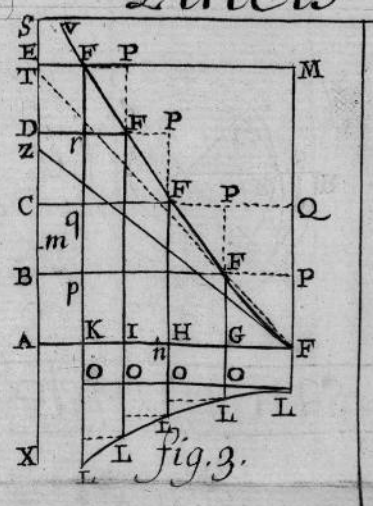
Hæc sunt quæ circa spirales Hyperb. sunt a nobis demonstrata. Maioris autem claritatis causa, Exercitationem hanc in duas partes dividimus. quarum prior est de spiralibus Hyperbolicis primi generis, posterior autem in spiralibus Hyperbolicis secundi generis versatur.

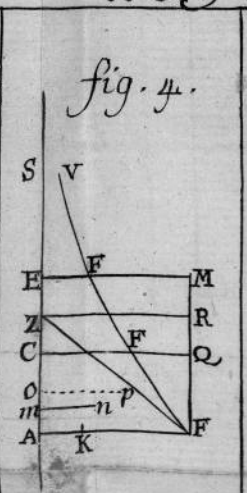
FINIS.

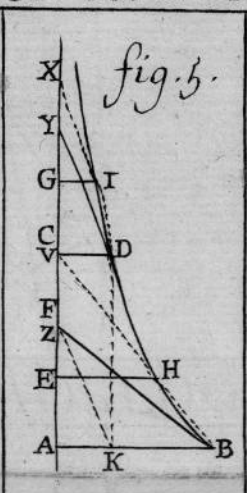
Pro Lineis Logarithmicis

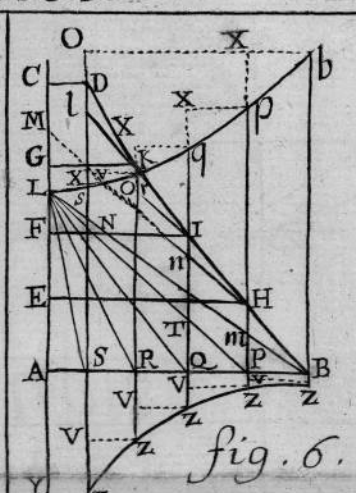




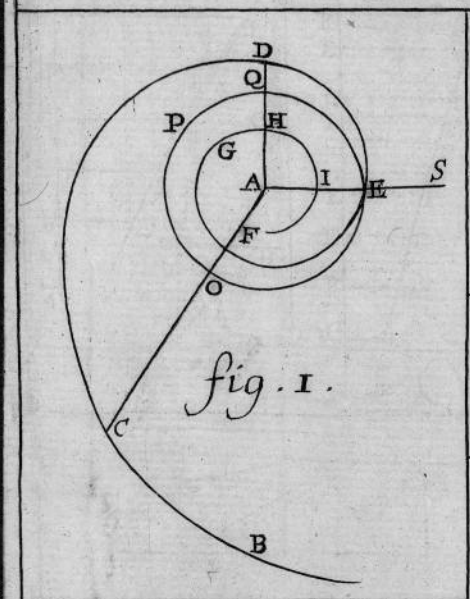


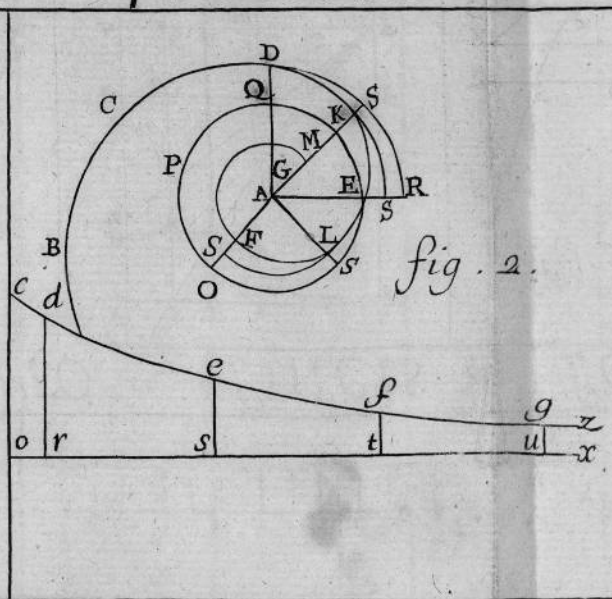


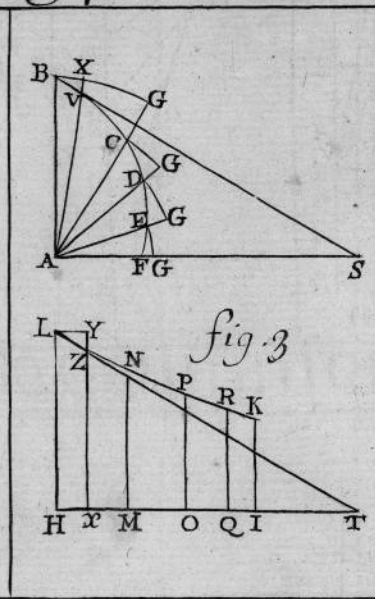


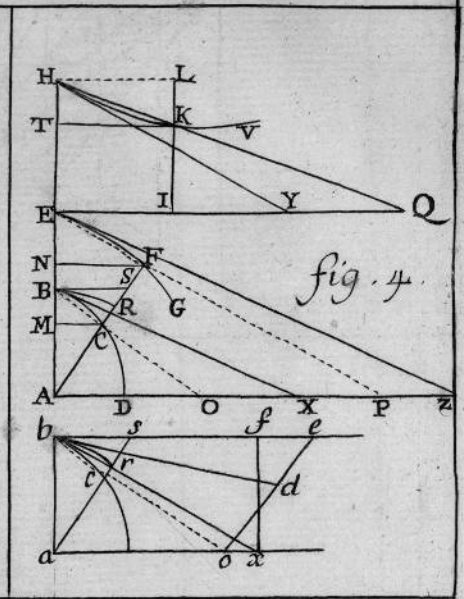


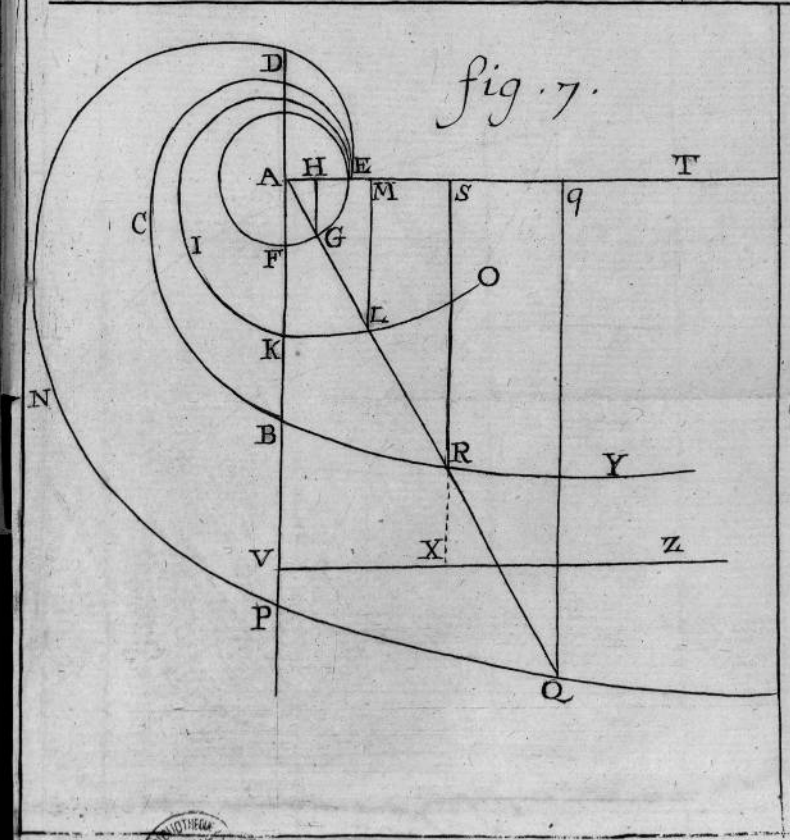
Pro Spiralibus Hyperbolicis

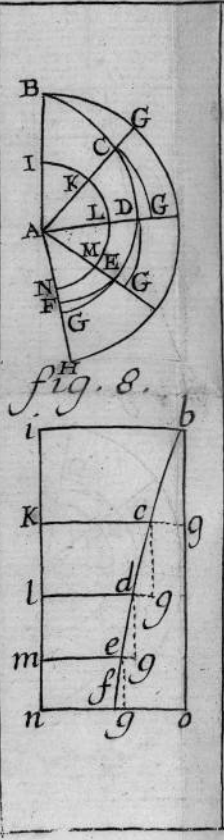


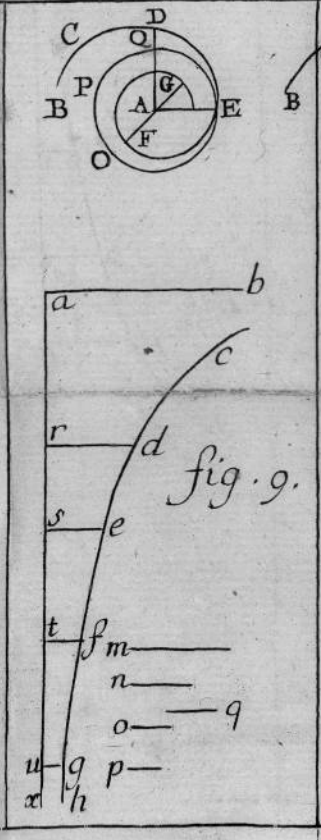


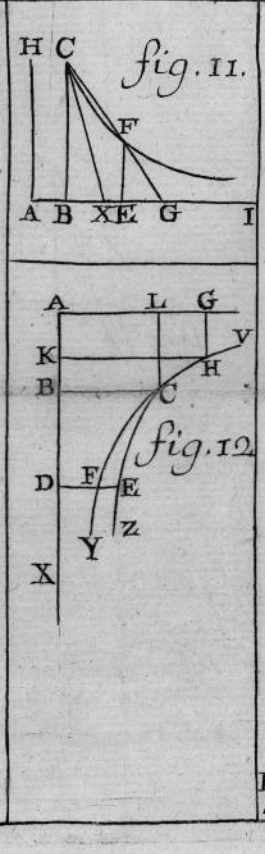












Beaujean Sculp.