+a

R. 20. Trible.

ex bibliotheca D. B. Monasterii B. M. Fulcensis

Res 1/2 10947.

IHS



EVCLIDIS POSTERIORES LIB. IX

ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV̄.
Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione:

OMNES PERSPICVIS DEMON-
strationibus, accuratisq; scholijs illustrati: nunc iterum editi, ac multarum rerum accessione locupletati:

AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI
È SOCIETATE IESV

ROMÆ APVD BARTHOLOMAEVM
Grassium. M D LXXXIX.
PERMISSV SVPERIORVM.

ANCHORIDES

EVCLIDES

Ex Bibliotheca Fulcentinorum Parisiensium.
D. Bernardi

EVCLIDIS

ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, ſecundū quam vnumquodq; eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.



ACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verum ante ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus differere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, vt abſque eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neque ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quod abſque eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quam ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vſum, neq; exprimi queãt, neq; intelligi. Nam non raro pleraque laterum ſunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel, ſi non ſunt Irrationales, longitudine certè inter ſe ſunt incommenſurabiles, atque adeo ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio,

atque intelligentia cum numeris eſt implicata, & connexa, vt abſque his nullo modo cognoſcantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ ſuus ordo, ratioq́ conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectioneſque, quantum ea rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more ſuo a principijs, definit initio vnitatem, docetque eam eſſe, ſecundum quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum eſſe dicitur. Nam ſecundum vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere ſolemus. Cæterum vnitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus cõpoſita, manifeſtum eſt, numerum quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes: Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipſo numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidẽ partes, nimirum in 8. vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum qualibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

EX his ſequitur, omnes numeros, quotcunque ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos vna eademque menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cum plurimæ earum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, vt clariſſime lib. 10. oſtendetur.

PARS

III.

PARS eſt numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON eſt diſſimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ expoſuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc ſolum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12.18.24.30.60 630.&c. quia ille ſingulos hos metitur. Similiter huius numeri 376. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum ſinguli hi metiantur, vt perſpicuum eſt.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen ſibi ſumit, per quem ipſa numerum, cuius pars eſt, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit ſeptima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, ſed partes appellari: cuiuſmodi eſt numerus 5. ſi conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, niſi per ſuas vnitates, pars ipſius dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars eſt numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido conſtat, Euclidem nomine partis intellexiſſe partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin ſuperuacanea eſſet hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum menſura vtrumque eorum metitur, & eum ſcilicet, qui partes

dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt ſi communis duorum numerorum menſura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes ſunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum menſura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus ſex decimas eiuſdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis menſura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD ſi roges, cur Euclides hoc loco non ſolum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars eſt, verum etiã illum, qui partes: non autem idipſum quinto lib. in magnitudinibus præſtiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; ſed tantũ eam, quæ maiorem metitur, partem. Reſpondemus, huius rei cauſam eſſe, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars eſt, aut partes, vt propoſ. 4. huius lib. oſtenditur; partẽ quidem, cum ipſum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter ſe res habet. Non enim, propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus, neceſſario minor aut pars, aut partes eſt maioris, cum ea perſæpe ſint incommenſurabiles, vt aperte liber decimus demonſtrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam ſolum in magnitudinibus commenſurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, ſi illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille ſolum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoq; ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, qui à minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor eſt pars, ſit viciſſim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars eſt numeri 30. & hic illius multiplex eſt, &c. Si vero maiorem minor non

non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex eſſet, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et viciſſim, ſi maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur. Nam ſi metiretur minor maiorem, eſſet per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus eſt, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, ſiue in duas partes æquales, cum eorum dimidia ſint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt a pari.

OMNES hi numeri 3. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perſpicue colligi pòteſt, vnitatem in numeris prorſus eſſe indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi poſſet. Nam huius imparis 11. dimidia pars eſſent quinque vnitates & ſemis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parē.

QVIA numerus par eſt, qui bifariam diuiditur, ſit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. Metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD ſi numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2 per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CÆTERVM ſi rectè dua proximæ definitiones expendantur, perſpicuum erit, fieri poſſe, vt vnus idemque numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdũ, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, ſecundum eos, ſit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propoſitus numerus par 24. neq; pariter par ſit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparẽ 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte

apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriuſque, vt conſtat. Itaque tria conſtituentur genera numeri paris inter ſe maxime diuerſa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibuſdam, pariter par & impariter appellatur. Verumtamen hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, vt perſpicuum eſt & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio iſta, tantum, quam illi apponunt, & ex propoſ. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeſte omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum deniq;, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonſtratque omnes numeros a binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantum, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, eſſe pariter impares tantum, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe, & pariter impares, vt ſunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonſtrationibus illarū propoſitionum, hos poſtremos numeros, altoſque ſimiles, vere eſſe, ſecundum traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi ſint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5 numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

PRIMVS

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus Primus; quales ſunt omnes iſti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatẽ, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15.8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem verò iſti 2.4. tamen nullus iſtorum vtrumque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter ſe dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quamquam poſtremi duo habeant communem menſuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quinis numerus, dici poſſunt, licèt improprie, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerũ quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quẽ numerus quiſpiam metitur.

NVME-

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, demptò binario, eſſe compoſitos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe compoſiti, inter non quilibet ſit compoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quiſpiam metitur, compoſitus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compoſiti inter ſe ſunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe compoſiti erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & ſe ipſum, & reliquos duos metitur, licet per ſe ſumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 8. multiplicare dicetur numerum 3. quando numerus

numerus 8. ſexie fuerit compoſitus, toties nimirum, quot ſunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque viciſſim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6 ſi numerum 6. octies ſumpſerimus, toties ſcilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimuſque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic ſumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel e contrario. Et ſic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus ſit, vt factat productum, quoties in altero multiplicantium eſt vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio ſiue ductus vnius numeri in alium ita quoque deſcribi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, eſt inuẽtio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quã alter multiplicantium ad unitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, ſiue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita ſe habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda eſt haec alia docens, quid ſit numerum diuidere numerum: quippe quæ neceſſaria omnino ſit ad ea, quæ nos in iis, quæ ſequuntur, ſumus demonſtraturi.

NVME-

NVMERVS numerũ diuidere dicitur, cũ numerus acceptus fuerit, qui ſuis unitatibus indicat, quoties diuidẽs numer⁹ in diuiſo cõtinetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum ſumptus fuerit numerus 8. qui octo ſuis unitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis unitatibus indicat, diuidentem numerum 8. in diuiſo 48. contineri ſexies.

HINC fit, numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad unitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis unitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; continebit numerus productus unitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad unitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque Diuiſio unius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

DIVISIO numeri per numerum, eſt inuentio numeri, qui ad unitatem habet eandem proportionẽ, quam numerus diuiſus ad diuidentẽ.

ITA vides ex diuiſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni ex ductu numeri C, in numerum B. A,48. B,8. C,6. D,1. *Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, vt C, ad unitatẽ D: Ex definitione autẽ diuiſionis, ita quoq; ſe habet A, ad B, vt C, ad unitatẽ D, perſpicuũ eſt, numerum ex C, in B, genitum eſſe numerum A; cum tam ille genitus, q̃ A, eandẽ proportionẽ habeat ad B, quã C, ad D, unitatẽ.*

HÆC

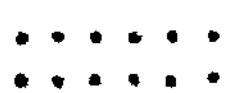
HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id eſt, Numerus fractus numerum fractũ, vel integer fractum, vel fractus integrum (ſine fracti adhæreant integris, ſine non) multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiſo continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuiſus ad diuidentem, Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compoſitus, quot ſunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per ſui ſemiſſem duntaxat eſt in $\frac{1}{2}$. ſumendus eſt numerus 20. per ſemiſſem quoq; ſui, qua eſt 10. Ita quoque viciſſim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. ſi $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit vicies, toties ſcilicet, quoties vnitas eſt in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem eſſe proportionem procreati numeri 10 ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita eſſe 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{5}$. ſe mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit per tertiam ſui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. ſumptus fuerit per ſui ſemiſſem, quia & $\frac{1}{2}$. ſemiſſem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars eſt numeri $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{3}{6}$. & ſemiſſis numeri $\frac{1}{3}$. ſiue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda ſit, in Arithmetica docuimus, demonſtrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum ſumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiſo numero 10. ita vt eadem proportio ſit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuiſi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{5}$. quando ſumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiſo $\frac{1}{5}$. ſed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem ſit qui $\frac{3}{6}$. liquido conſtat tertiam

tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. *contineri in* $\frac{1}{6}$. *Caterum quo pacto fiat diuiſio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuiſione & fractorum diximus, planiora fient.*

XVI.

CVM autem duo numeri mutùo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia ſecundum ſuas vnitates in longum, & latum diſpoſitas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera ſunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, & ipſum cõtinent, non ſecus, ac recta linea angulum rectũ ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24 productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius ſunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum diſpoſitæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiuſque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides ſolum definit planũ quadrangulare rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex

quorum

quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorum diſputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, ſimiles ſint, & æquales, ſiue ambitu, ſiue aream, capacitatemue ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. q^a^ ad ambitũ ſpectat: tamẽ ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, tum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2 in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

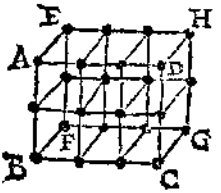
QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quòd quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum: Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem aliquando dici poſſe numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt

producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. ſolidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum diſpoſita referunt figuram quandam ſolidam, qua Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimenſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicates; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primũ multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. baſis ſolidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas: Et ſi hæc baſis in 3. multiplicetur, hoc eſt, ſi accipiatur ter, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At ſi numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur baſis 6. vnitatum, qua multiplicata in 4. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro baſe, qua bis ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & BF, latitudo, duas complectitur; ſuperponentur ei duæ aliæ baſes ſimiles, & æquales, vt totus numerus ſolidus contineat 24. vnitates, eiuſque altitudo B A, vnitates tres. Similiter, ſi baſis ſit A B F E, ſex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ tres baſes ſimiles, & æquales, fietque totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinem B C, habens quatuor vnitatum. Si denique baſis ſit ABCD, 12. vnitatũ, cuius longitudo BC, quatuor continet, & latitudo AB, tres, ſuperponetur illi alia baſis ſimilis, & æqualis EFGH, conſtabitq; totus numerus ſolidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinẽ dabũt AE, vel BF. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de aliis numeris ſolidis iudicandũ erit.



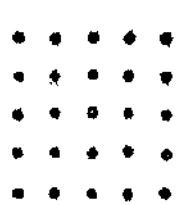
DENIQVE & unitas interdum ſolidus appellabitur numerus, etſi non proprie, quia eius latera ſunt tres unitates, ipſam unitatem ex mutua earum multiplicatione procreãtes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione datam; quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum unitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum.



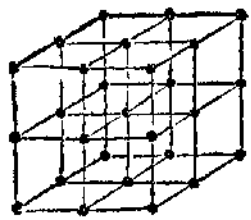
Huiuſmodi eſt numerus 25, contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius unitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque unitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

ALITER VTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero ab Arithmeticis, literisque appellatur.

CVBVS

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æquàliter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoque illum numerũ vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius unitates in longum, latum, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eędem

partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, comprehẽdit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicique, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; æque multiplex eſt, neque eadem pars, neque eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nimirũ triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Item 3. & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 8. 24. 16. ſunt numeri proportionales.*

Nam

Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum ſemel, & inſuper eãdem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo deniq; primus ſecundum, & tertius quartum bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes, vel deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes, nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

QVOT IGITVR ESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, q primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur; Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et e contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habẽt. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundẽ ad æquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionẽ, vel ad quos idẽ eandẽm habet proportionẽ, æquales eſſe. Cũ enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundẽ æqualiter cõtineant, eandemq;

inſuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium ſit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque inſuper eorum partem, vel partes; perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; inſuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque inſuper illorum partem, vel partes, ſecundum hanc eandem definitionem; manifeſtũ eſt, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quam minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem eſſe: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi rectè hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, ſiue integri numeri ſimul adſint, ſiue non. Nam quatuor hi numeri ſunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. quia primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt, nimirum duplus, vt patet, ſi priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. & poſteriores quoque ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales ſunt $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. cum primus ſecundi, & tertius quarti ſit eadem pars, nimirum ſeſſis, vt conſtat, ſi priores duo ad hos eiuſdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}$. $\frac{19}{8}$. & poſteriores duo ad hos $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$. atque ita de cæteris.

SIMI-

XXI.

SIMILES plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero ſit ſimilis, non neceſſe eſt, qualibet duo illius latera quibuſuis duobus lateribus huius eſſe proportionalia; ſed ſatis eſt, illum habere aliqua duo latera, quæ ſint proportionalia quibuſdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, ſi ſecundum ſuas vnitates in formam planam rediguntur, prout latera aſſumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. ſimiles ſunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia ſunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eiſdem non ſint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo, vt duo numeri ſolidi ſimiles ſint, non requiritur, vt quatuor tria vnius latera proportionalia ſint tribus quibuslibet lateribus alterius; ſed ſufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, ſi ſecundum vnitates in formam ſolidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri ſolid 192. & 24. ſunt ſimiles, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. ſunt proportionalia, licet his eiſdem nequaquam proportionalia ſint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE poſſunt duo numeri plani, vel ſolidi, eſſe ſimiles, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. ſimiles, vt dictum eſt; & tamen ſi latera prioris ſumantur 3. & 8. nulla reperientur in poſteriori illis proportionalia. Sic etiam ſolidi ſimiles ſunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris aſſumptis 3. 4. 16. nulla repertantur proportionalia in poſteriori.

HÆC porro ſimilitudo planorum, & ſolidorum reperitur quoque in fractis numeris, ſive in integris cum fractis. Nam ſi ſumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tã duo priores, quàm duo poſteriores inter ſe multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri ſimiles, &c.

Dixi, plerunq;, quia fieri poteſt, vt interdum integri numeri gignantur. Nam ſi duo latera ſint $\frac{2}{3}$. 6. & alia duo $1\frac{1}{2}$. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. poſteriora vero numerum 16.

XXII.

PERFECTVS numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes ſuæ partes ſimul ſumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales ſunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiuſmodi ſunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ ſimul ſumptæ conficiũt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ ſunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum ſumma conſtituit ipſum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam ſummam collectas componere numerum 496. perſpicuum eſt. Qui autem numeri perfecti ſint, & qua via, ac ratione procreentur, (ſunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonſtrabitur ab Euclide propoſ. vltima lib. 9.

QVOD ſi partes omnes aliquotæ alicuius numeri ſimul acceptæ maiores ſint ipſo numero, dici ſolet numerus ille, Abundans: ſi vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide ſumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus eſſet perfectus, cum ſuis ipſius partibus ſit æqualis, ſi quilibet numerus minor numeri maioris pars dici poteſt, ſiue eum metiatur, ſiue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propoſitis adimmgenda mihi videntur ex Campano, alijſq; ſcriptoribus nonnulla alia, quibus proxime ſuccedent poſtulata, & communes animi notiones, præſertim ea, quibus in demonſtrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

NVME-

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero vt propos. 16 huius lib. ostendimus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3 in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. pr creari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerũ $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterũ, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirũ quintuplus, dicetur hæc coparatio, habitudoue, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est, & sic de reliquis.

QVÆ

QVÆ cum ita ſint, perſpicuum eſt, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes, vt ſupra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, ſiue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadē proportione minores ſumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum: Er ſemper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copioſe explicata eſt defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc tranſferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum com-

poni

poni dicitur ex propottionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita ſe habere, pluribus verbis à nobis demonſtratum eſt ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuerſaque; de compoſitione, diuiſione, & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero ſumi poſſe maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione conſurgit.

AXIO-

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem ęque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

QVORVM idē numerus ęque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quę in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſum met numerum metitur.

NAM

NAM vnitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito vnitates, ipſum conſtituit. Quamobrem ipſum metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum ex ſuis vnitatibus conſtitutum.

VI.

OMNIS numerus ſe ipſum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquẽ produxerit, metietur multiplicãs productum per multiplicatũ, multiplicatus autem eundem per multiplicantẽ.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A, vnitates; perſpicuum eſt B, metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonſtrabitur propoſ. 16. huius lib.

A .... B . . .
C .....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente ſunt, vnitates, hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

VT

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum a B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum producere ipſum C.

A .... B ...
C .....

X.

NVMERVS quotcúnque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipſis compoſitum BD. Cum enim A, metiatur ipſos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo BC, in partes BE, EC, ipſi A, æquales,

æquales, & ipſo
C D, in partes
CF, F G, G D, eidem A, æqua-
les; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E,
E C, C F, F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A.
Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

A . . . .
B . . . E . . . C . . . . F . . . . G . . . . D

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B, metitur. Cum enim
B, metiatur ipſum C D; erit
C D, ipſius B, multiplex. Di
uiſo ergo C D, in partes C E,
E D, ipſi B, æquales; metie-
tur A, ipſos numeros C E, E D; quandoquidem numerum
B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur.
Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D,
ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.

A . . . .
B . . . . . .
C . . . . . E . . . . . D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quam B D, ipſius A, multiplex, aut certè E D, ipſi A, æqualis erit.

Diuiſo

A . . .
B . . . . . D . . . C
B . . . . . D C
E . . . D C

Diuiſo ergo tam BC, quam BD, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum DC. Quod eſt propoſitum.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio ꝓpoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erũt.

A . . . . . E . . G . B
C . . . F . . D
H -----

SINT duo numeri propoſiti inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB. Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars ſit ipſius AE, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipſum AE; At H, metitur quoque totum AB. [b] Igitur & reliquum

[a] 11. *prop.*
[b] 12. *prop.*

quum EB, metietur. Metitur autem EB, ipſum CF.[a] Igitur & H ipſum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur,[b] metietur quoq; reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipſum EG;[c] metietur etiam H, ipſum EG: Metiebatur autem & H, totum EB.[d] Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.
[c] 11. pron.
[d] 12. pron.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas.

SINT duo numeri inter ſe primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequã ad vnitatẽ detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus GB, præcedetem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipſum EG,[e] metietur quoque GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſe ipſum metiatur,[f] metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF.[g] Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipſum FD, poſitus ſit metiri;

A . . . . . E . . G -- B
C . . . . . F . . D

[e] 11. pron.
[f] 10. pron.
[g] 11. pron.

C metietur

a 10. pron. b 11. pron. *metietur quoque ipsum CD, ex CF, F D, compositum. At vero CD, metitur ipsum AE.*[b] *Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipsum EB, metiatur, vt ostensum est;* c *metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.*

A . . . . . E . . G -- B
C . . . . . F . . D

c 10. pron.

EODEM modo & hoc verum est.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad unitatem usque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, essent propositi numeri inter se primi,[d] *vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.*

d 1. septimi.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi,[c] *vt Euclides demonstrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.*

1. septimi.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

2.

DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidē peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB; & EB, ipſum CF; [b] metietur quoque FD, ipſum CF; atq; adeo cum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipſum EB, [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A . . . . . E . . . . . B
C . . . . . F . . D
G ——

[a] 31. ſeptimi.

[b] 11. pron.
[c] 10. pron.
[d] 11. pron.
[e] 10. pron.

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quam FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoque G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At vero EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem.

[f] 11. pron.
[g] 12. pron.
[h] 11. pron.
[i] 12. pron.

Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum AB, CD.

QVOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.



COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.

HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademque ratio eſt de cæteris.

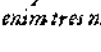
SCHOLIVM.

EX iis quæ dicta ſunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi. Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.



*SI vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, * ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numerum D, communem menſuram.*

* 2. ſeptimi.



QVOD

QVOD ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter ſe primi, vel non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita vt habeant numerum communem menſuram, metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, per coroll. huius propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſim. Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti. [a] Inuenta enim numerorũ C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B; [b] metietur quoque E, eoſdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.

A .....
B .....
C .....
D . . .
A .....
B .....
C .....
D .... E ..

[a] 2. ſeptimi.
[b] 11. prop.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

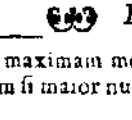
TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. [c] Sit D, maxima menſura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipſum C, perſpicuum eſt D,

esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem; per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B C, inter se compositi metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B; Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. [a] Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur: Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipsos A, & B; [b] metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

[a] 2. septimi.

[b] 11. pron.



QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll propos 2 huius lib. numerum D; maximam eorum mensuram communé. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem; quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quá E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum; Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum menſuram communem: Eademque in cæteris eſt ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter ſe, maximè eorum communis menſura inuenietur, locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium numerorum: ſi quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis menſura, &c. Reliqua uero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B.

Sint enim primum A, & B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars eſt numeri B, perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B, tot nimirum, quot ſunt in A, vnitates.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, non primi inter ſe, ſed inter ſe compoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito, manifeſtum eſt A, partem eſſe numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A .....
B .....

SED iam A, non metiatur ipſum B, [a] inuenta autem maxima eorum menſura communis ſit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. [b] Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cum ipſum metiatur; erit quoque A D, pars eiuſdem B, ſimiliter & D E, & E F; Ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B, tot

[a] 2. ſeptimi.

A . . D . . E . . F
B .....
C . .

[b] 3. defin.

videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ eſt numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, ſimul vtriuſq; numeri B C, & E F, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt vel A, ipſius B C, vel D ipſius E F.

A . . . . . | D . . .
B ..... G ..... C | E .... H ....F

Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F propterea quod eadem pars eſt A, ipſius B C, quæ D, ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, ſimul æquales ipſis B G, & E H, ſimul: Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C, & H F, ſimul æquales: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, ſimul vtriuſque B C, & E F, ſimul, quæ eſt A, ipſius B C, vel D, ipſius E F. Si ergo numerus numeri pars fuerit &c. Quod erat oſtendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: ut in hoc exẽplo apparet, vbi numerus A, numeri BC,

$A, \frac{2}{9}$ $D, \frac{3}{7}$
$B, \frac{2}{9}$ $G, \frac{2}{9}C$ $E, \frac{4}{7}$ $H, \frac{3}{7}F$

& numerus D, numeri EF, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A, D, vtriuſque BC, EF, ſimul eadem pars oſtendetur, quæ A, ipſius BC: ſi nimirum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, D, æquales, &c.

QVOD ſi quando contingat, numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquivalens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. ſecũda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adſunt integra, vocanda prius erũt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. ſecandus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in ſequentibus quoque propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſæpe nomine fractionum intelligendi quoque ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.

EODEM modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus

ſimul

ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

HOC autem perſpicue in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A.	D.	A.	D...
B. G. C	E. H. F	B. G. C	E... H... F

POSSVMVS etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorũ, eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, ſinguli ſingulorum eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omnium numerorum DE, FG, HI, ſimul eandem eſſe partẽ, quæ eſt A, ipſius DE.

A....	B...	C..
D.... K.... E	F... L... G	H.. M.. I

Diuiſis enim numerũ DE, FG, HI, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tã numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales ſunt, ſi illis addantur æquales E, & FL, erunt A, B, ſimul æquales ipſis DK, FL, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales C, & HM; erunt quoque A, B, C, ſimul æquales ipſis DK, FL, HM, ſimul. Simili ratione erunt A, B, C, ſimul æquales ipſis KE, LG, MI, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, ſimul ipſorum DE, FG, HI, ſimul, quæ A, ipſius DE.

IDEM ſequitur, ſi loco vnius numerorum A, B, C, ſumatur

ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

A.	*B.*	*C...*	*A.*	*B.*	*C.*
D.K.E.	*F..L..G*	*H...M...I*	*D.K.E*	*F.L.G*	*H.M.I*

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam ſi quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonſtrabitur: etiamſi aliqui numerorum ſint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	*B*, $\frac{1}{2}$.	*C*, $\frac{3}{4}$.
D, 1 *K*, 1 *E*	*F*, $\frac{1}{2}$ *L*, $\frac{1}{2}$ *G*	*H*, $\frac{3}{4}$ *M*, $\frac{3}{4}$ *I*

THEOREMATI quoque primo quinti lib. ſimile propoſuimus, in hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic eſt, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonſtrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, A..... B..... C.... ſinguli ſingulorum. Dico D.... E... F.. & omnes A, B, C, ſimul omnium D, E, F, ſimul tam multiplices eſſe, quam eſt A, multiplex ipſius D. Cum enim tam ſit multiplex A, ipſius D, quæ eſt B, ipſius E, & C, ipſius F; erit e contrario D, eadem pars ipſius A, quæ E, ipſius B, & F, ipſius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonſtrata ſunt, erunt D, E, F, ſimul eadem pars ipſorum

ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, E, C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.

SI numeri A, B, C, fracti ſint, & ipſorum D, E, F, fractorum æquemultiplices: quàm multiplex eſt vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonſtratione liquet.

QVOD ſi loco vnius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonſtrabitur, vt ex ſequentibus figuris apparet.

A .. B .... C ..... | A .. E .. C ..
D . E .. F ... | D . E . F .

6. ## THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, ſimul vtriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt AB, ipſius C, vel DE, ipſius F; Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE numero tũ C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quod eædem partes eſt numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt AG, numeri C, eadem eſt DH, numeri F; erit vterque AG, DH, ſimul eadem pars vtriuſque C, F, ſimul, quæ AG ipſius C, vel DH, ipſius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, ſimul eadem pars vtriuſq; C, F,

A ... G ... B | D ... H .... E
C ..... | F .....

ſ. ſp ima.

C,F, ſimul, quæ GB, ipſius C, vel HE, ipſius F: Et ſic de inceps, ſi plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars eſt numerorum C, F, ſimul, quæ pars eſt AG, ipſius C; quot partes eædem eſt numerus AB, ipſius C, vel DE, ipſius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, ſimul, vtriuſque numeri C,F, ſimul, quæ AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EADEM hæc propoſitio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonſtratione: vt hoc exemplum demonſtrat.

$A, \frac{1}{9}\ G, \frac{1}{9}\ B$ $\quad$ $D, \frac{2}{7}\ H, \frac{2}{7}\ E$
$C, \frac{3}{9}$ $\quad$ $F, \frac{6}{7}$

SED & hanc propoſitionem ad quotcunque numeros ſiue integros, ſiue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtrauimus in ſcholio præcedenti; vt hic perſpicuum eſt.

A.. K..B	*C... L...D*	*E....M....F*
G.....	*H.....*	*I.....*

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadē pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD.

A . . . E . . B
G . . . . C . . . . . F . . . . D

Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; 5. *septim.* erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{8}$ E, $\frac{3}{5}$ B
G, $\frac{4}{5}$ C, $\frac{6}{8}$ F, $\frac{4}{5}$ D

LOCVM etiam habet hac propositio, vnà cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A . E . . . B	A . . . E . B	A. E. B
G . . . . . C . . F . . . . . D	G . . C . . . . . F . . D	G..C..F..D

CÆTERVM & ex his theorematis quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tàm in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD

QVOD quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita eſſe multiplicem, vt eſt totus AB, totius CD. Cum enim AB, ipſius CD, ſit æque multiplex, atque AE, ipſius CF; erit e contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, qua totus CD, totius AB; Ac proinde e contrario EB, ita multiplex erit ipſius FD, vt AB, ipſius CD, eſt multiplex. 7. ſeptimi

A.....E.....B
C.....F.....D

QVOD ſi ex CD, ablata fuerit vnitas CF; vel reliqua ſit vnitas FD: vel denique in integris & ablata ſit vnitas CF, & alia reliqua FD; idem demonſtrabitur, vt hac exempla commonſtrant.

A...E.....B	A...E..B	A...E....B
C.F..D	C..F.D	C.F.D

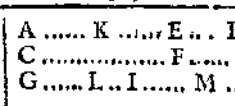
THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eaſdem eſſe partes reliqui FD, quæ totus AB, eſt totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipſi AB; erit GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, hoc eſt, quæ AE, ipſius CF. Diuiſo ergo GH, in partes GI, IH numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF, erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam

A.....K.....E....B
C.....F.....D
G.....L..I.....M..H

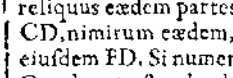
GI,



GI, quam IH, ipſius CD, quæ tam AK, quam KE, ipſius CF. Cum ergo CD, numerus maior ſit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipſius CD, maior tam numero AK, quam KE parte ipſius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipſis AK, KE; erit GL, eadem pars ipſius CF, quæ AK, eiuſdem CF, hoc eſt, quæ GI, ipſius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, ſit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, *a* erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento oſtendemus MH, eandem eſſe partem ipſius FD, quæ eſt totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem eſt pars ipſius CD, quæ eſt tam LI, quam MH, ipſius FD; erit vterque GI, IH, ſimul eædem partes ipſius CD, quę vterque LI, MH, ipſius FD. Eſt autem GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, ſimul eædem partes erit ipſius FD, quæ AB, ipſius CD. Quia vero ſi ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, ſimul æquales ſunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, ſimul erat eiuſdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

a 7. *ſeptimi.*

SCHOLIVM.



IN numeris fractis eadem hac propoſitio eodem prorſus modo demonſtrabitur, vt hic manifeſtum eſt.

NON demonſtrauit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non conſtabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri eaſdem eſſe partes, quæ eſt numerus AE, numeri CF, ibi vero perſpicuum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem eſſe partem, cuius eſt AE, ipſius CF. Licet enim ipſius EB, duplum

duplum aſſumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, ſit ita ſubmultiplex numeri aſſumpti GC, vt AE, eſt ſubmultiplex ipſius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, ſintque A, BC, minores ipſis D, EF, ſinguli ſingulis. De his enim propoſitio intelligenda eſt. Dico & viciſsim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D, qualis eſt, aut quales BC, ipſius EF. Diuiſis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter ſe ſunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipſius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipſius HF; [a] ac propterea & vterque BG, GC, ſimul, nimirum BC, ſecundus vtriuſque EH, HF, ſimul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipſius EH, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

A ....
B .... G C
D ....
E ..... H ..... F

[a] 5. vel 6. ſeptimi.

D SCHO-

SCHOLIVM.

$A, \frac{3}{11}$
$B, \frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C
$D, \frac{7}{22}$
$E, \frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

IN numeris fractis propoſitio hæc, vnà cum eius demonſtratione locum etiam habet, vt hic perſpicuum eſt.

QVOD ſi loco primi numeri vnitas accipiatur, qua numeri alicuius pars ſit, qua alter numerus alterius: Erit viciſſim vnitas tertij numeri eadem pars, qua ſecundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, ſi loco partium aſſumamus partem in demonſtratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A
B . G . C
D .....
E ..... H ..... F

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, ſintque AB, C, ipſis DE, F, minores, ſinguli ſingulis. De his enim etiã intelligenda eſt hæc propoſitio, ſicut & antecedens. Dico & viciſſim, numerum AB, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri DE, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipſius C, quæ tam DH, quam HE, ipſius F. [a] Viciſſim ergo eadem pars erit, aut partes AG, ipſius

A..G..B
C.....
D.....H.....E
F.....

[a] 5. ſeptimi.

ipſius DH,& GB,ipſius HE,quæ C, ipſius F; Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG,ipſius DH,quæ GB, ipſius HE. [a] Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB,eadem pars erit,aut partes vtriuſque DH, HE, ſimul,nimirum DE,tertij,quæ AG,ipſius DH,hoc eſt,quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 5. vel 6. ſeptimi.

SCHOLIVM.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

A, $\frac{2}{15}$ *G*, $\frac{2}{15}$ *B*
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{3}{10}$ *H*, $\frac{3}{10}$ *E*
F, $\frac{6}{10}$

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB,ad totum CD, ita ablatus AE,ad ablatum CF.
Dico & reliquum EB,ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB,ad totum CD.

A.....E.....B
C.....F...D

Cum enim ſit, vt AB,ad CD, ita AE,ad CF; [b] erit AB, ipſius CD,& AE, ipſius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB,ipſum CD, & AE,ipſum CF,æqualiter continebit,eandemque inſuper illius partem,vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD,& AE,ipſius CF,æque multiplex. Quo poſito, erit e contrario CD,totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF,ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipſorum CD,CF. [c] Igitur & reliquus FD,reliqui EB, eadem pars erit,quæ totus CD,totius AB; Ac propterea

[b] 20. defin.
[c] 7. ſeptimi.

e contrario AB, ipſius CD, & EB, ipſius FD, æque multiplex erit. [a] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[a] 20. defin.

SIT deinde AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo poſito, [b] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [c] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

[b] 7. vel 8. ſeptim.

A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

[c] 20. defin.

CONTINEAT tertio AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quo poſito, erit e contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonſtrabimus. [d] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eæ-

[d] 8. ſeptim.

I

A . . . . . E . . . B | A . . . . . E . . . . . B
C . . . . F . . D | C . . . . . F . . . . . D

dem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, e contrario AB, ipſum CD, & EB, ipſum FD, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes, vt mox oſtendemus. [e] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[e] 20. defin.

QVOD ſi AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perſpicuum eſt reliquum EB, quoque eſſe æqualem reliquo FD. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, ſunt æqualia. Itaque ſi fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

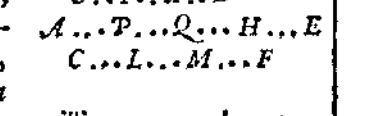
EODEM modo demonſtrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò conſtat in his exemplis, quæ exemplis tertij caſus demonſtrationis reſpondent.

$A, \frac{6}{9} E \frac{4}{10} B \quad | \quad A, \frac{14}{21} E \frac{28}{29} B$
$C, \frac{4}{9} F \frac{2}{10} D \quad | \quad C, \frac{4}{21} F \frac{10}{29} D$

LEMMA.

LEMMA.

QVOD autem, ſi AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem illius vel partes; e contrario CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, ſit eædem partes: Et ſi CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, ſit eædem partes; e contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqua



liter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonſtrabimus. Contineat primum AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, nimirum ſemel, vel bis, vel ter, &c. eandemque inſuper partem; GB, quidem ipſius CD, & HE, ipſius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, ſint vel æquales ipſis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuiſis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipſis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipſius CD, ſit eadem pars, quæ HE, ipſius CF. Similiter diuiſis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eiſdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cum enim AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel

certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; propterea aque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo vna pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ vna pars numeri C F, eſt numeri A E. Quare cum multitudo partium numeri C D, æqualis ſit multitudini partium numeri C F; erit C D, eadem partes numeri A B, quæ C F, ipſius A E.

CONTINEAT deinde AB, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter, videlicet ſemel, bis, ter quaterue, &c. eaſdemque inſuper partes illius; numerus quidem A B, partes G B, numeri C D, & numerus A E, partes H E, numeri C F: ita vt reliqui numeri A G, A H, ſint rurſum vel æquales ipſis C D, C F, vel eorum æquemultiplices. Diuiſis igitur numeris G B, H E, in partes G I, I B, & H K, K E, numerorum C D, C F, erit multitudo partium ipſius G B, multitudini partium ipſius H E, æqualis. Simili modo, diuiſis numeris C D, C F, in partes C L, L M, M D, & C N, N O, O F, partibus G I, I B, & H K, K E, æquales, erit quoque multitudo partium ipſius C D, multitudini partium ipſius C F, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri G B, eadem pars eſt numeri C D, quæ vna quæque partium

A . P . Q . G . I . B
C . L . M . D
A . R . S . H . K . E
C . N . O . F

partium numeri H E, eſt numeri C F. Denique diuiſis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eiſdem partibus GL, LB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipſius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipſius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partiũ numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partiũ numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atq; adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipſius AE. Quod eſt primo propoſitum.

IAM vero ſit CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, eadem partes. Dico e contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continere, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Diuiſis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter ſe æquales. Item diuiſis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter ſe æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, ſupereritque eadem pars, vel partes ipſius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in A E, & quæ pars, aut partes ipſius C F, ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum C D, C F, & A B, A E. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum A B, A E, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum C D, C F, & inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum C D, C F, multitudine æquales. Quam ob rem A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.

13. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SINT quotcunq; numeri proportionales A, B, C, D, E, F; hoc eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico eſſe quoq; omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, vt eſt A, ad B.

A .... C .. E ...
B ..... D .... F .....

Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem,[a] eadem pars eſt, aut partes A, ipſius B, quæ C, ipſius D, & E, ipſius F; [b] erit quoque vterque A, C, ſimul vtriuſq; B, D, ſimul eadem pars, aut partes, quæ A, ipſius B, vel E, ipſius F. Rurſus quia vterque

[a] *20. defin.*
[b] *5. vel 6. ſeptimi.*

vterque A,C, ſimul, tanquam vnus, vtriuſq; B, D, ſimul, tanquam vnius, eadem pars eſt, aut partes, quæ E, ipſius F; [a] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, ſimul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, ſimul eadem pars, vel partes, quæ A, ipſius B. [b] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

[a] 5. ſeptimi.

[b] 20. defin.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo poſito, erit e contrario E, ipſius A, eadem pars, quę D, ipſius C, & F, ipſius E; Atq; adeo vt prius, [c] erunt omnes B, D, F, ſimul, omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æque multiplices. [d] Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hic apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius lib.

A.... C..... E..... | A.... C... E..... | A... C... E...
B. D.. F... | D. D. F.. | B. D. F.

[c] 5. ſeptimi.

[d] 20. defin.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. [e] Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; Erit per lemma precedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, [f] erunt omnes B, D, F, ſimul omniũ A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario cõtinebunt omnes numeri A, C, E,

A..... C.... E.....
B..... D... F .....

[e] 20. defin.

[f] 6. ſeptimi.

A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes.
[a] 20. defin. [a] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiût A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C... E.....
B.... D... F.....

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nâ ſint primum A, & C, minores quã B, & D; & A, quoq; minor, quam C.

A... C.....
B.... D.....

Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes.
[b] 9. vel 10. ſeptimi. [b] Viciſsim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: [c] Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.
[c] 20. defin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes.
[d] 9. vel 10. ſeptimi. [d] Viciſsim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit,

erit, vel partes: Atque adeo e contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. [a] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C...
B.....D....

[a] 20. d. fin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo poſito, erit ob eãdem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo e contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [b] Viciſsim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes, [c] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A....C.....
B...D.....

[b] 9. vel 10. ſeptimi
[c] 20. deſin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [d] Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea e contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A....C....
B...D....

[d] 9. vel 10. ſeptimi.
[e] 20. deſin.

SINT quinto A, & C, ipſi B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; [f] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A...C...
B...D....

[f] 20. deſin.

SINT

SINT ſexto A,& C,ipſis B,& D,æquales,at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C,& D,vel æque multiplices ſunt, vel certe illi hos æqualiter continent,eandemque inſuper partem, vel partes;[a] erit vt A,ad C,ita B,ad D.

A .... C ...
B .... D ...

[a] 20.defin.

SINT ſeptimo ac vltimo A,& C, inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint quam B,& D,ſiue minores,ſiue æquales.[b] Quoniam igitur,ob eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes;vel certe A,ipſum B,& C,ipſum D,æqualiter continet,eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca, ſi quatuor numeri proportionales ſint, & viciſſim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

A ..... C .....
B ... D ...

[b] 20.defin.

SCHOLIVM.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas,demonſtrabis eodem modo propoſitionem hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari,etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere,eoſque demonſtrationibus certiſſimis confirmare,vna cum lemmate propoſ.11. vt earũ veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim,& nonnulli alij interpretes,illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium,vt perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus,vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum,& ab Euclidis inſtituto alienum,cum partes appellarit

larit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15.

SI ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, ſitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniã. n. eſt, vt A, ad B, ita D, ad E; [a] erit viciſsim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eãdem ob cauſam, cum ſit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit viciſsim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cũ enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem ſit proportioni B, ad E, vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, vt mox oſtendetur.) [b] Ac proinde viciſsim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A ..... D .....
B ..... E .....
C .... F ...
G ..... H .....

[a] 13. ſeptimi.

[b] 13. ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiã quemadmodũ C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe, vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C,

vt C,ad G,ita F,ad H;erunt tres numeri A,C, G, & alij tres D,F,H,qui bini in eadem ratione ſumuntur. Exæqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa,rurſus erit vt A,ad G,ita D,ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris,per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres,& ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,&c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

A. D...
B.. E.....
C... F.....
G. H...

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſint

A ..... B ..... C ....
D ..... E ..... F ...

eedem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſiue numeri ſint integri, ſiue fracti; ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel

partes

partes. [a] *Quare numeri* A, D, C, F, *proportionales ſunt, vt quidem* A, *ad* D, *ita* C, *ad* F. *Quod eſt propoſitum*. [a 20. d. fin.

HOC idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. *de proportionibus magnitudinum, propoſ.* 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 16.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico viciſsim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiſo enim numero

BC, in vnitates BG,	A.	D.
GH, HC, & numero	B.G.H.C	E..I..K..F

EF, in partes EI, IK, KF, ipſi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metietur q; æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipſum EI, atque vnitas GH, ipſum IK, & vnitas HC, ipſum KF: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, ſimul numerorum EI, IK, KF, ſimul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compoſitus, numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compoſitum æque metietur. Si

vnitas

vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quòd erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris, propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, aque metitur, atque numerus D, numerum EF; erit vnitas A, eadem pars numeri BC, qua numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, qua numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, aque metietur.

HÆC propoſitio fractis numeris conuenire non poteſt. Nã ſi vnitas numerum quempiam metiatur, aque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur viciſſim aque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & ſecundus integer quartum fractum;
a 15. defin. *ſed ſolum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam ſecundus ad quartum.*

17. ## THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mùtuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

E.
A . . . B . . . .
D . . . . . C . . . . . .

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipſum B, multiplicans faciat C;
* 15. d. fin. [b] erit C, ex B, toties compoſitus, quot ſunt in A, vnitates; atque adeo vnitas

vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. [a] Viciſsim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rurſus eodem modo, quia B, multiplicans ipſum A, facit D; [b] erit D, ex A, toties compoſitus, quot ſunt in B, vnitates; atq; adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerũ C, æque. Aeque igitur numerus A, vtrumq; numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter ſe æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo ſe ſe multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 15. ſeptimi.
[b] 15. defin.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propoſitio ita demonſtranda eſt. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque eſt D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propoſ. 14. ac proinde æquales inter ſe erunt C, & D. Quod erat oſtendendum.

	E.
A,	$\frac{2}{3}$.
B,	$4\frac{1}{2}$.
D,	$3\frac{1}{2}$.
C,	$3\frac{1}{2}$.

POTEST hæc eadem propoſitio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipſum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, ſi B, ipſum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipſum B, facit C, oſtendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, ſi numerus B, ipſum A, multiplicet, [c] etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur.

	E.
A	... B ....
C	.....

[c] 15. defin.

E Idem

Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipſum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipſum B.

QVOD ſi numeri A, & B, ſint fracti ambo, vel vnus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo.

E .
A ... B ....
C .....

Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.

18. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compoſitus toties, quoties vnitas F, eſt in A: ſimiliterque toties E, compoſitus erit ex C, quoties eadem vnitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æque metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c.

Quod oſtendendum erat.

F .
A . . .
B . . C . . . .
D..... E .....

[a] *15. defin.*
[b] *20. defin.*
[c] *13. ſeptimi.*

SCHO-

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem oſtendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propoſ. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico eſſe vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [a] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipſos A, & B, facit D, & E; [b] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . B . . . . .
C . . .
D . . . . . E . . . . . .

[a] *16. ſeptimi.*

[b] *17. ſeptimi.*

SCHOLIVM.

LIQVIDO conſtat, eandem hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari, ſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propoſitionem, & præcedentem, ad quotcunq; numeros cum Campano accommodabimus, ſiue numeri omnes ſint integri, ſiue non; hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multipli cet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eaſdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E ..... F ..... G .....

B, C, D, habent: hoc eſt, eſſe, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nã cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; [a] *erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.*

[a] *17. vel 18. ſeptimi.*

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C.

in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc eſt, vt A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propoſ. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. ſcripſimus.

A...
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

[a] 17. ſeptimi.

[b] 18 ſeptimi.

SED iam ſit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipſi F, producto ex B, ſecundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales eſſe, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipſi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rurſus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædē ſint proportioni G, ad F, eædem inter ſe erunt, per lemma propoſ. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 17. ſeptimi.

[d] 18. ſeptimi.

SCHOLIVM.

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſ. locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiã ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

IT A enim oſtenſum eſt numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, conſequentem, æqualem eſſe numero F, qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.

SED ſequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propoſ. 19. demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundũ, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus; ſiue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propoſ. 19. lib. 9. oſtendemus ſi numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quàm E, ad B: ac proinde A, maior erit, quã E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quàm ex E, in eandem D: [a] *At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.*

A ..... E .....
B ....
C .....
D .....

[a] *19. ſeptimi.*

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (ſiue E, numerus ſit integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] *At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.*

[b] *19 ſeptimi.*

QVOD

QVOD ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam oſtendi poteſt. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quàm C, ad D: hoc eſt, maior eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, ſiue ex B, in C, quàm ex D, ſecundo in A, tertium, ſiue ex A, in D, vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quàm ex B, in C. quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quàm ex B, in C: hoc eſt, maior ex B, in C, ſiue ex C, in B, quàm ex A, in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum, vt iam eſt demonſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . E . . . . . B . . . . C . . . D . .

THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui a medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, erit vt

B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C; numeruſque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . .

[a] 19. ſeptimi.

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 19. ſeptimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundũ, quam ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſ. liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . . .

A . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . . . .

habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appoſitis exemplis apparet, etiamſi numeri ſint fracti, vel partim fracti, partim integri.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt ſit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, æque metiri ipſos E, F; maiorem quidem AB, ipſum maiorem E, at minorem CD, ipſum minorem F: hoc eſt, antecedentem, ipſum antecedentem, & conſequentem, ipſum conſequentem.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . . . ,
F . . . . . ,

Cum enim ſit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit viciſsim, vt AB, ad E, ita CD, ad F; Atque adeo cum AB, CD, minores ſint, quam E, F; [b] erit AB, ipſius E, & CD, ipſius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuiſis namque, ſi fieri poteſt, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG, ipſius E, & CH, ipſius F, eadem pars. [c] Erit ergo, vt AG, ad E, ita CH, ad F; [d] & viciſsim, vt AG, ad CH, ita E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem habebunt proportionem, quam AB, CD. Quod eſt abſurdum; cum AB, CD, in ſua proportione ponantur minimi. Nõ ergo AB, ipſius E, & CD, ipſius F, eædem partes ſunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB, ipſum E, & CD, ipſum

[a] 13. ſeptimi.
[b] 20. diffi.
[c] 20. deſim. [d] 13. ſeptimi.

ipſum I, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos. Hoc enim poſito, oſtendetur eodem modo, primum metiri ſecundum, & ſecundum, tertium, vt in hoc appoſito exemplo apparet, vbi tertius numerus ſecundo

A ----- G --- B
C ..... H ..... D
E .....
F .....

æqualis eſt. Quamuis autem dari non poſſint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in ſua proportione ſint minimi, niſi primus ſit vnitas; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod tacitò dixerim, vt propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

PARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit

A ... K ... B C .. L . D E .... M .... F
G ..... H ..... I .....

proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, ſiue non; ita vt non poſſint

poſſint reperiri alij numeri ipſis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, vt A B, ad C D; & ſecundus ad tertium, vt C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione dictarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4 & 5. vel in 12, & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G. ad H, vt A B, ad C D; & H. ad I, vt C D, ad E F. Dico A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, metiri æquè. Cum enim ſit vt A B, ad C D, ita G, ad H; [a] erit viciſſim vt A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cum ſit vt C D, ad E F, ita H, ad I; [b] erit quoque viciſſim, vt C D, ad H, ita E F, ad I. [c] Quare A B, ipſius G, & C D, ipſius H, & E F, ipſius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A E, quot in C D, & in E F: atque adeo A K, ipſius G, & C L, ipſius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt A K, ad G, ita C L, ad H; [e] & viciſſim vt A K, ad C L, ita G, ad H, vel A B, ad C D. Eodemque modo erit, vt C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quam A F, C D, E F. Quod eſt abſurdum, cum ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, æque metientur. Quod eſt propoſitum.

[a] 13. ſeptimi.
[b] 13. ſeptimi.
[c] 20. deſin.
[d] 20. deſin.
[e] 13. ſeptimi.

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionũ, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F,

A .. B ...., C ...
D ..... E ..... F .....

æque

A .. B ..... C ...
D .... E ..... F ....

æque metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipſos D, E; eademque ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, æque metiatur, ac B, ipſum E; metientur æque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

CÆTERVM hæc propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus alijs propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Alia autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod ſatis eſt ſemel hoc loco monuiſſe.

19.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim ſit vt A, ad B, ita E, ad F;

erit

a erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, b erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. c Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

A.....	H...
B...	D....
C.....	E.....
G.....	F..

a 19. septimi.

b 19. septimi.

c 19. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

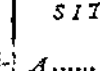
EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et inuerſa ratione, ſiue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, ſiue inuerſa ratione, eſſe vt B, ad A, ita D, ad C.



Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D, [a] *erit vicißim A, ad C, vt B, ad D. Rurſus quia eſt B, ad D, vt A, ad C,* [b] *erit vicißim B, ad A, vt D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

[a] 13. ſeptimi.
[b] 13. ſeptimi.

II.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diuiſi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo eſſe, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum



enim ſit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit vicißim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde,* [d] *vt totus AB, ad totum DE, ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc eſt, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* [c] *Vicißim erit erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.*

[a] 13. ſeptimi.
[d] 11. ſeptimi.
[c] 13. ſeptimi.

EADEM ratione demonſtrabimus Diuiſionem rationis conuerſam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuiſionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuiſionem rationis contrariam, eſſe quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim eſt, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE;

DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.

III.

SI diuiſi numeri proportionales ſint: Hi quoque compoſiti proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo eſſe, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim ſit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [a] erit viciſſim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF; [b] Ac proinde AB, BC, ſimul ad DE, EF, ſimul, vt BC, ad EF: [c] Et viciſſim AB, BC, ſimul, hoc eſt, totus AC, ad BC, vt DE, EF, ſimul, hoc eſt, totus DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.

A ..... B ... C
D .... E .. F

[a] 13. ſeptimi. [b] 12. ſeptimi. [c] 13. ſeptimi.

SIMILITER Compoſitio rationis conuerſa, & contraria oſtendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit rurſus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis contrariam eſſe quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

IIII.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.

SIT

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuerſionem rationis eſſe quoque, vt AE, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] erit vicißim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE; [b] Ac proinde, vt totus AE, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF. [c] Vicißim igitur, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

A ..... C ... B
D .... F .. E

[a] 13. ſeptimi.
[b] 11. ſeptimi.
[c] 13. ſeptimi.

RVRSVS ex his facile demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 14. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.

SIT vt AE, primus ad C, ſecundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, ſecundum, ita EH, ſextus ad F, quartum. Dico ita eſſe AG, compoſitum ex primo & quinto, ad C, ſecundum, vt eſt DH, compoſitus ex tertio & ſexto, ad F, quartum. Cum enim ſit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad FH. Quoniam igitur eſt vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rurſus ſit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod eſt propoſitum.

A ..... B .. G | D ..... E ... H
C .... | F .....

EODEM

EODEM modo & hoc Theorema oſtendamus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquũ GB, eſſe ad C, vt eſt reliquus HE, ad F. Cũ enim ſit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rurſus ſit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex æqualitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . G . . B D . . . . . H . . . E
C . . . . F . . . . . .

ITEM & hoc demonſtrabimus.

VII.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.

SIT vt primus A, ad ſecundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintũ CG, ita tertius D, ad ſextum FH. Dico ita eſſe A, primum ad BG, compoſitũ ex

ſecundo & quinto, vt eſt D, tertius ad E H, compoſitum ex quarto & ſexto. Cum enim

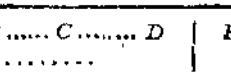
ſit, vt A, ad B C, ita D, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad A, ita E F, ad D. Quota igitur eſt vt BC, ad A, ita EF, ad D, & vt A, ad C G, ita D, ad FH, erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad F H, & componendo, vt BG, ad CG, ita E H, ad FH, & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo eſt, vt A, ad CG, ita D, ad FH, & vt C G, ad B G, ita F H, ad E H, erit ex æqualitate, vt A, ad B G, ita D, ad E H. Quod eſt propoſitum.

D E N I Q V E ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebũt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

H A B E A N T quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K. Hoc eſt, ſit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe FI, habet ad K. Cum enim ſit, vt AB, primus ad E, ſecundus, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt B C, quintus ad E,



ad E, ſecundum, ita GH, ſextus ad K, quartum; erit quoq; vt AC, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FH, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt AC, primus ad E, ſecundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, ſecundum, ita HI, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FI, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, ſi plures fuerint.

SED habeat tam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc eſt, ſit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad FI. Cum enim ſit, vt E, primus ad AB, ſecundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, ſextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad AC, ſecundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM vero, his demonſtratis, oſtendentur nouem vltima propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuere; ſi pro magnitudinibus intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5 ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati: Vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eademq; prorſus demonſtrationes adhibeantur.

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quâ ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æque, atque adeo ſecundum eundem numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur, [b] metietur & viciſsim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur, [c] metietur quoque viciſsim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B. Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B. Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... B ....
C ------ D ---
E ----

[a] 21. ſept.

[b] 15. ſept.

[c] 15. ſept.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

SINT

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cũ ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi mẽſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem menſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At vero ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties cõpoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [a] fit, vt D, & E ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [b] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cum D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A ..... B .....
C——
D ——— E ———

[a] 3. pron.
[b] 18. ſept.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarũ proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari nõ poſſint, quamuis proportio



duorum in minoribus numeris reperiuntur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æque per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus; atque adeo ſecundum vnum eundem numerum, qui ſit G, ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æque metitur; a metietur quoque viciſſim æque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metitur & ipſum B, & ipſum C, æque, atque vnitas ipſos E, F; Atque ideirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.

15. ſept.

I A M vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communis menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties, quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F; ſit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

24. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT

SINT inter ſe primi A, & B; & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C; metiatur eos communi menſurâ, ſi fieri poteſt, numerus D.
Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipſum A; a metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cum habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... B ....
C .... D ----

a 11. prop.

THEOR. 24. PROPOS. 26. 25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundē primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi; ſit eorum communis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; b fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; c & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idē D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; d erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; e erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum ſint inter ſe primi, f in ſua proportione minimi

A ..... B ...
C .....
D .....
E ---- F ---

b 9. prop.
c 6. ſept.
d 19. ſept.
e 21. ſept.
f 23. ſept.

a 21. sept. erunt. a Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habẽtes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiã primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

26. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquũ primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt,

A.... B.....
C.....
b 26. sept. D ....

b erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

27. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumq; C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit ad

ad C; [a] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad eundem C, primus. Rurſus cum vterque A, & B, ad D, ſit primus, erit eodem modo E, ipſis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus eſt ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E primus. Si ergò duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat oſtendendum.

A..... B...
E.....
C... D..
F.....

[a] 26. ſept.
[b] 26. ſept.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 28.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt: Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dicò E, F, quoque eſſe inter ſe primos. Cũ enim A, B, ſint inter ſe primi, [c] erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter ſe erunt.

A.... B..
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.
C..... D....
E..... F.....

[c] 27. ſept.

RVRSVS

[a] 27. *sept.* RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, [a] erit & C, factus ex A, in ſe, ad B; & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [b] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, *primi* ſint

[b] 28. *sept.*

[c] 26. *sept.*

A...	B..	ad B, [c] erit quoque E, ex
C.....	D....	ipſis genitus, ad B, pri-
E	F	mus: Eademque ratione
G, 81.	H, 16.	& F, ad A, primus erit.
I, 243.	K, 32.	Quia igitur vterque A,

E, ad vtrumque B, F, primus eſt; [d] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, *primus*. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, [e] erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A, [f] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, ſit primus. *Si* duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

[d] 28. *sept.*

[e] 26. *sept.*

[f] 28. *sept.*

29.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, *numeri* primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi AB, BC. Dico & vtrumque ſimul AC, primũ eſſe & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC, & ablatum AB; [g] metietur quoque reliquum BC.

[g] 12. *prop.*

BC. Non igitur primi inter ſe ſunt AB, BC, cũ eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad B C, oſtendemus eundem eſſe primum.

A . . . . . B C
D -----

SED iam vterque AB, BC, ſimul, primus ſit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & AB, BC, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC, [a] metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compoſitum; Ac proinde AC, AB, non ſunt inter ſe primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Sunt igitur A B, BC, inter ſe primi. Eodemque argumento oſtendemus A B, BC, inter ſe primos eſſe, ſi AC, ad BC, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 10. prop.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim AC, ad A B, primus eſt, erunt AB, BC, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & AC, ad BC, primus erit, per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. 32.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos,

primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos, præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A ..... B .....
C ---

33. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciãt C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem vnũ ipſorum A, & B, ſi non vterumque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur vero ipſum C, toties quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, ſecũdum, ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia vero primus D, ad A, primus eſt, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in ſua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſe ſe mutuo

[a] 19. ſept.
[b] 31. ſept.
[c] 23. ſept.
[d] 21. ſept.

mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad unum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoque ad vnum ipſorũ A, B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterque A, & B, ad D, primus. [a] *Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur vel metiri ipſum C, vel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad vtrumque.*

A ... B ....
C .....
D .....

[a] 26. ſept.

PROBL. 31. PROPOS. 33. 30.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerũ primũ eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si vero cõpoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel cõpoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; [b] metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſi-

[b] 11. pron.

tus

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia vero numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, [a] metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

A ..... B..... C...

[a] 11. *pron.*

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; [b] metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A ..... B... C--

[b] 11. *pron.*

31. THEOR. 32. PROPOS. 34.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si vero compositus; [c] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

A .....

[c] 33. *sept.*

34. PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire

perire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdē proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti; Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Si vero non ſunt inter ſe primi, [a] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per E, F, G, [b] fit, vt D, ipſos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A..... B.... C.....
D..
E... F.. G....
H---- I---- K----
L-----

[a] 3. ſept.

[b] 9. pron.

QVOD vero E, F, G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propoſ 21. huius lib oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [c] fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K producat numeros A, B, C; [d] & vicissim L, ipſos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A, & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [e] erit, vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipſos A, B, C, metiatur; non erit D, ma-

[c] 9. pron.
[d] 8. pron.
[e] 19. ſept.

D, maxima menſura communis numerorum A, B, C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, ſed ipſi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E, F, G, per quos D, maxima menſura numerorum A, B, C, ipſos A, B, C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque eſt in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continue proportionales. Vt ſi proponantur continue proportionales A, B, C, D, E,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione ducrum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis menſura eos metitur.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum

A . . . B . . . . . C	A . . . . B . . C . . . . .
D . . .	D . .
E. F . . G . . .	E . . F. G . . .

E, F, G, per hanc propoſ. inuentorum eſſe vnitatem; quando ſcilicet

ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A, B, C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc inuentos E, F, G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſeſeque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [a] metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, [b] tam ex A, in E, quam ex B, in F, & e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium; [c] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter ſe, [d] & ob id, in ſua proportione minimi) æque metientur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [e] erit C, ad D, vt B, ad E. Ac propterea cum B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B,

A . . . . B . . . . .
C . . . . . .
D ----------
E ------ F ----

[a] 7. pron.

[b] 9. pron.

[c] 19. ſept.

[d] 23. ſept.
[e] 21. ſept.
[f] 17. ſept.

metientur alium numerum minorem ipſo C; atq; adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. [a] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, numerus A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, [b] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cũ tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus a C, ipſum E, producat; [c] metiuntur tam A, quam B, ipſum E. Quod vero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, [d] fiet F, tam ex A, in G, quã ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, ſit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium; [e] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [f] metientur ipſos H, & G, æque; nimirum C, ipſum H; & D, ipſum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [g] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem; atque adeo E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

[a] 35. ſept.
[b] 19. ſept.
A .... B .....
C .. D ...
E .....
F ----------
G ----- H ---
[c] 7. prom.
[d] 9. prom.
[e] 19. ſept.
[f] 21. ſept.
[g] 17. ſept.

COROLLARIVM.

HINC ſit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, productum numerum minimum, quem illi metian-

metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Cambanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, ſitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum CD, metiri. Si enim E, ipſum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidã minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties poteſt, numerum, ſi fieri poteſt, FD, minorem ſe, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipſum E, metitur, & E, ipſum CF; a metietur quoque tam A, quam B, ipſum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; b metientur & reliquum FD. Eſt autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur.

A . . B . . .
C . . . . . F ----- D
E . . . . . .

a 11. prop.

b 12. prop.

Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare E, ipſum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerũ quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerũ.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [a] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipſum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipſum D, metiuntur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt A, B, C, alium numerum E, ipſo D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo, cum A, & & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur; [b] metietur quoque D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum.

A ... B .... C.....
D.....
E ----------

[a] 36. ſept.

[b] 37. ſept.

SED iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. [c] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtendetur. Cũ A, & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E; [d] metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E, ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt,

A .. B... C....
D.....
E.....
F---------

[c] 36. ſept.

[d] 11. prop.

potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; [a] metietur quoque eundem F, numerus D minimum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D metiantur. Quod est absurdum & contra hypothesim. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; [b] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

[a] 37. sept.

[b] 37. sept.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E; sitque F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D G, relinquatque numerum G E, se minorem.

A .. B ... C ....
D ..... G —— E
F .....

Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum DG; [c] metientur quoque A, B, C, eundem DG; Ac proinde, tum & totum D E, ponantur metiri; [d] metientur & reliquũ

[c] 11. pron.

[d] 12. pron.

G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum D E.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam a B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque metitur; [a] & viciſsim vnitas æque ipſum B, & C, ipſum A, metietur; atque adeo eadem pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

A . . . . . B
B . . . . C . . .

[a] 15. ſep.

THEOR.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cum B, pars denominetur a C; ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque. Viciſsim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . . .
B . . . C . . . . .

[a] 15. ſept.

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, ſiue qui ipſas denominent, D, E, F; [b] minimusq; quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cum D, E, F, ipſum G, metiantur, [c] habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod vero G, ſit minimus illas partes habens, perſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt,

D . . A, *Secunda*
E . . . B, *Tertia*
F . . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H———

[b] 38. ſept.

[c] 39. ſept.

D.. A, *Secunda*
E.... B, *Tertia*
F.... C, *Quarta*
G.....
H ----------

H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, a metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor ſit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, ſed ipſe G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum ſit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

a 20. ſept.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipſius G, denominatæ ſcilicet à

A, Secunda D.. I.....
B, Tertia E... K....
C, Quarta F.... L...
G.....

D, E, F. Cum enim D, E, F, ipſum G, metiantur per I, K, L, metietur æque unitas ipſos I, K, L, & numeri D, E, F, ipſum G. b *Vicißim ergo metietur quoque unitas ipſos D, E, F, & numeri I, K, L, ipſum G; atque adeo unitas ipſorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipſius G. Cum ergo unitas ſit pars ipſorum D, E, F, ob ipſis denominata; erunt & I, K, L, ipſius G, partes denominatæ à D, E, F.*

b 15. ſept.

EX his autem ſequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Oſtenſum enim eſt, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum eſſe, qui habeat partes A, B, C, cuiuſmodi ſunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, ſi inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur

habebitur ſecundus numerus poſt minimum, tertius, quartus, &c. eaſdem partes continens. Inuento enim G, minimo, quas habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F; ſit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerum, qui eaſdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt nullus inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas ſcilicet à D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur

G . . . . . A, D.
H . . . . . B, E...
I . . . . . C, F....
K ---------- M ------ L
N ---------- P ----- O

ipſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ipſius G; [a] metientur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & reliquos multiplices ipſius G. [b] Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C. [a] 11. prop. [b] 39. ſept.

QVOD autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus eas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius K L, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipſo G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; [c] metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimi, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, ſibi æqualem. [d] Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt huiuſmodi partes habens. [c] 40. ſept. [d] 12. prop.

NON

*NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet N O, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipſo G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C, *metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſam N P, ablatum ipſi H, duplo æqualem. †Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, eadem partes habet A, B, C, datas; Ac proxime I, tertius eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.*

* 40. ſept.

† 12. pron.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendus, ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fratq; G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine ſua, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H; erit G toties in H, quot ſunt vnitates in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . . . .
H . . . . . .
. Vnitas
I ----------
K ----------
L ----------
M ----

eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atque adeò H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine cõtinens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ith vt K, ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] Atq; adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq; cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propoſ. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autẽ H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

[a] 15. defin. 7.

[b] 19. ſept.

SI verò plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac altam a 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

QVOD

QVOD ſi numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habētium. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunq; numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini sumuntur, & in eadem ratione, erit, ex æquali- 14. sept.

A	E ---
B	F -----
C	G -------
D	H ----------

æqualitatę, vt A, ad D, ita E, ad H: [a] Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur. [b] Igitur tam A, ipſum E, quàm D, ipſum H, æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 23. ſept.

[b] 21. ſept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint, ſiue A, B, C, D, ſint continue proportionales, vt vult Euclides, ſiue non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diuerſa ſunt, quemadmodum in ſuperiori eadem ſemper proportio reperitur.

A .... E ---
B ..... F ----
C ..... G -----
D ..... H ------

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſerit quiſpiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, ſeipſum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C, D, E, eſſe tres minimos in proportione A, ad B; hoc eſt, eſſe vt C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales ſint in data proportione A, ad B, ſic oſtendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; [c] erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rurſus cum ex B, in A, & B, fiant D, &

[c] 17. ſept.

D, & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos [b] sunt autem A, & B, inter se primi, quòd minimi sint in sua proportione; [c] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [d] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A..... B...
C..... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

[a] 17. sept.
[b] 24. sept.
[c] 29. sept.
[d] 1. octau.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, eadem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; [e] erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [f] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; minimum F, ex A, in C, & I, ex B, in E; [g] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [h] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

[e] 18. sept.
[f] 24. sept.
[g] 29. sept.
[h] 1. octaui.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c.

Quod faciendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, [a] numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.

[a] 18. sept.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inuenietur sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrant enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A.. B..
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione

catione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex deſin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri aly ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verũ quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt ijs, qui per hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hãc propoſ. Si vero dati, maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi. quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales:

A--- B-----C-----
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

ſumptiſq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atq; ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eadẽq; ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, ſingulis ſingulis, æquales erũt. Eadẽq; ratio eſt de quatuor, aut pluribus.

Quòd ſi A, dicatur minor, quàm F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt. quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si vero A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non ſunt. quod eſt contra hypotheſim. Cum ergo A, minor non ſit, aut maior, quàm F; æqualis omnino erit; ideoq; vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitũ.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum ſunt de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonſtratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones a numero A, horum vero a B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium ſint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris data rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extre-

extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe qua ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inuenièdorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, qua denominatur a 2. hoc modo 1.2.4.8.16.32.64.128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128.192.288.432.648.972.1458.2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicăt, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione sit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquin-

ta, ſumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. eſt primus quinque numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet; 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non poſſunt inueniri (quod mirum videri poſſit) plures numeri continue proportionales, quam propoſiti ſunt. Neque enim poſt 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neq; in priori exemplo poſt 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

3. ## THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandẽ cum eis rationem habentium; Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

SINT numeri A,B,C,D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A,& D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E,F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G,H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K,L,M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K,L, M,N, æqualis ſit multitudini A, B,C, D. Quoniam igitur A,B,C,D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometricè demon-

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2. propoſ. præcedentis K, & N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inuenirí non poſſent, ex precedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Imò ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi 6 & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc Theorema primi eſt conuerſum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſunt in ſua proportione, vt conſtat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, velut hic demonſtratum eſt. At vero primum theorema, prout ſpectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, vt ex ſcholio propoſ. 1. huius lib. liquet; Tamen non ſemper e contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, vt manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. 4.

RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. [a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, [b] A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli in eisdem rationibus. sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [d] ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

A, 6. B, 5. C, 4 D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I —— K —— L ——

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. [a] Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ip-

a 36. sept.
b 9. pron.
c 18. sept.
d 21. sept.
e 37. sept.
a 36. sept.

E, ipſum I, metitur, totics F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,5. F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.
L---- M------ N---- O-----

Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipſos G, & I, quàm E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; [a] ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metiantur; [b] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

[a] 21. ſept.

[b] 37. ſept.

SED iam E, non metiatur ipſum I. [c] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipſum K, metitur, totics quoque G, ipſum L; & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M, L, K, æque metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipſos H, G; & C, D, ipſos G, I, metiantur æque. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,3.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O------ P---- Q--- R----

[c] 36. ſept.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. H,24. G,20. I,15. M,48. L,40. K,30. N,105. O---- P---- Q---- R---- eſt K, ad N, cum E, F; æque ipſos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si namque non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt; [a] ipſi æque metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes, nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atq; adeo cum B, & C, ipſum P, metiantur; [b] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia vero oſtenſum eſt, eſſe vt G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q. Atque idcirco, cum metiatur G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [c] quod E, F, in ſua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiuſdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipſum Q; [d] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipſi M, L, K, N, minimi ſunt.

[a] 21. ſept.

[b] 37. ſept.

[c] 21. ſept.

[d] 37. ſept.

QVOD ſi quatuor rationes datæ fuerint; inuenienda prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipſum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,3. T,2. M,48. L,50. K,30. N,105. O,70.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7 S,9. T,2. M,48. L,40. K,30. N,105. R,144. Q,120. P,90. O,315. V,70.

tionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipſum N, non metiatur; ſumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipſum O, metitur, toties metiatur K, ipſum P; & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties vero S, eundē O, metitur, toties T, ipſum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

* 36. ſept.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliqua data fuerint in numeris nō minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibenda erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorū numerorū deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtū eſt.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, illā vt quilibet intermedius ſit & antecedens, & cōſequens, licet proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, ſi ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eiſdem rationibus deinceps proportionales, vt conſtat ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

SINT

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23 lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [b] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

[a] 17. sept.

[b] 27. defin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; [c] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [d] Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. F. 16. E, 3.

[c] 17. sept.

[d] 27. defin.

SCHOLIVM.

ESSET hoc loco disputandum de compositione proportionum, quemadmodum in expositione defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in scholio propos. 23. lib. 6. facturos nos hoc loco recepimus.

recepimus. Sed quia res hæc accuratè explicari non potest ſine fractorum numerorum operationibus, quas ad finem lib. 9. demonſtrabimus; differendam eam eandem in locum cenſuimus. Hoc Lectorem commonere volui, vt ſciat, vbi res hæc pertractetur à nobis, & cur eam hic, vt polliciti ſumus, non exponamus.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neq; alius quiſquam vllum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè inſequétem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipſum B, non metiatur; neque B, ipſum C, neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quod vero nec alius quiſquam illorum vllum metiatur, ſic demonſtrabimus. [a] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A. ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero eſt vt A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipſum G, metietur, cum vnitas omnem numerum metiatur. [b] Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; nō metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium a ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtra-

[a] 2 octaui.

[b] 3. octaui.

monſtrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quod enim nullus proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C, C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neque D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neq; alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur e contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et F, primus ſecundum D, non metitur, [a] neq; alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare e contrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus.

[a] 6. octau.

SED & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundum metiatur; & quicun-

quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. perſpicuum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum B; & B, ipſum C; & C, ipſum D; & D, ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D; [a] metietur quoque B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur; [b] metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.

[a] 11. pron.
[b] 11. pron.

SED iam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: ſit autem A, ipſius B, multiplex; erit & B, ipſius C; & C, ipſius D; & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3. proxime inſequentis multiplex eſt. Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex; metietur e contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, vt demonſtratum eſt; Ac propterea e contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema, quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

SI

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum a ſecundo metiatur; neque primus ſecundum metietur. Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius a ſecundo ſit multiplex: neque primus ſecundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quiſque nullum à ſecundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, ſecũdum. Si enim A, primus ſecundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunque alius quemlibet ſequentium. Quod eſt abſurdum, cum neque primus, neque alius quiſquam vllum a ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, ipſum B, metietur.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16. *IAM vero A, primus, vel alius quiſquam nullius a ſecundo B, ſit multiplex. Dico neq; A, primum multiplicem eſſe B, ſecundi. Si namque A, primus multiplex eſſe dicatur B, ſecundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet ſequentium, ex iis, quæ ſecundo theoremate huius ſcholij demonſtrauimus. Quod eſt abſurdum. Neque enim primus, neque alius quiſquam vllius a ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A, ipſius B, multiplex erit.*

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur ſecundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus

primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: neq; alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atque idcirco, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. *6. octaui.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod ſecundo loco in ſcholio precedentis propoſ. demonſtrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propoſ. hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquã cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neque alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſ. 6, & 1. theoremate ſcholij precedentis.

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad B, atq; adeo vt E, ad F, ita G, ad K. [a] Quare cum G, & K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorũ numerorum; [b] ac propterea in ſua proportione minimi; [c] æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos. [d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F, producũt; in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque ideirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 24. C, 36. D, 54. B. 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

[a] 3. huius.
[b] 23. sept.
[c] 21. sept.
[d] 9. pron.

SCHOLIVM.

NON ſolum ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F, quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B. Igitur

Igitur & E, L, M, F, tandem habent quam A, C, D, B.

EADEM hac propoſito vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas, exiſtentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalẽ. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; ſuperparticularis vero inter numeros ſola vnitate differentes; ſuperbipartiens denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neque inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros ſola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interuicitur ſolum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri AB, CD, (ſiue CD, vnitas ſit, & AB, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus EF, minor vnitate quam AB, maior vero quam CD, vnitate quoque. Dico EF, non eſſe medium proportionalẽ inter AB, CD. Si enim dicatur eſſe AB, ad EF, vt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipſi EF, æquali, vt reliqua ſit vnitas GB; & ex EF, numero EH, ipſi CD, æquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum, ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipſis EF, CD, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum HF, hoc

A .. G . B	A ..... G . B
E . H . F	E .... H . F
C . D	C ..... D

HF, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo EF, medius proportionalis eſt inter AB, & CD.

ITA QVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt. quod fieri non poſſe, proxime demonſtrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt ſit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniã vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ſenarium AE. Igitur D, metitur totum AE, & ablatum AB:

A.....B.E
D.. D...
C.

[a] 11. prop. *ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatẽ BE. Quod eſt abſurdum.*

CAD AT deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergo, vt prius, D, metiri quinariũ AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE:

A....E.B
D ....
C.

[b] 11. prop. *ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem EB, metietur. Quod eſt abſurdum.*

EX quibus fit, neque illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; neque illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu vulgo Secunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco

proportio

proportio quadrupla bifariam diuiſa eſſe dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo oſtenſum ſit, inter numeros duplæ proportionis, & ſuperpartticularis, qualis eſt ſeſquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perſpicuum eſt, Diapaſon, & Tonum, bifariam ſecari non poſſe. Vnde Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapenten, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc vero in ſeſquitertia conſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inæquales. Ita quoque Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, ſecari ſolet. Sed de his plura apud Muſicos reperies.

RVRSVM ex his demonſtrari poteſt, proportionem diametri cuiuſuis quadrati ad latus eiuſdem, numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus, quadratum diametri duplum ſit quadrati ex latere deſcripti; quadratorum vero proportio ſit duplicata proportionis laterum; ſit, vt proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quòd inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam ſecet, vt oſtendimus; manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt, diametrum eſſe lateri incommenſurabilem. quæ de re plura ad 9. & vltimam propoſ. lib. 10. ſcribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac

vnitatem

vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, intet ſe primos medij continue proportionales C, D Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; ſumantur in eadé proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo aſſumptorum æqualis ſit multitudini A, C, D, B.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas. 1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

[a] 2. octaui.

[b] 1. octaui. Quoniam ergo A, B, extremi inter ſe primi ſunt; [b] erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex conſtructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipſis A, C, D, B, æquales ſunt, ſinguli ſingulis, vt K, ipſi A; & N, ipſi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. E, ſeipſum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipſum G, fecit K, [c] metietur E, ipſum G, per E; & G, ipſum K, per eundem E: [d] Metitur autem & vnitas ipſum E, per E. Aeque igitur metietur vnitas ipſum E, & E, ipſum G, & G, ipſum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius E, & E, ipſius G, & G, ipſius K. [e] Proportionales ergo ſunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifeſtum ſit ex eadem demonſtratione propoſ. 2. huius lib. quòd F, ſe ipſum multiplicans producat I, multiplicans vero ipſum I, faciat N; [f] metietur F, ipſum I, per F, & I, ipſum N, per eundem F: [g] Metitur autem & vnitas ipſum F, per F. Aeque igitur metietur vnitas ipſum F, & F, ipſum I, & I, ipſum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius F, & F, ipſius I, & I, ipſius N. [h] Proportionales ergo ſunt cõtinue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis ſit multi-

[c] 7. pron.
[d] 5. pron.
[e] 20. defin.
[f] 7. pron.
[g] 5. pron.
[h] 20. defin.

multitudini K,L,M,N,vel A,C,D, B; (vt perſpicuũ eſt ex propoſ.2.huius lib Nam duo E,F,ſunt ſecundi ab vnitate:& tres G,H,I,tertij; & quatuor K,L,M, N, quarti,&c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem,& K,numerum,ſeu A, ſibi æqualem;& inter vnitatem,& numerum N,ſiue B,ſibi æqualẽ, quot inter numeros A, B.Si duo ergo numeri ſint inter ſe primi,& inter eos medij,&c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM

PERSPICVVM autem eſt,numeros,qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A,ad C;hoc eſt,quas habẽt E,& F, numeri ad vnitatem;id quod in ſcholio propoſ.2.huius lib. quoque aſſeruimus.

CONSTAT etiam ex demonſtratione hac,ſi numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit; & rurſum multiplicet productum, & ſic deinceps:omnes productos eſſe continue proportionales ab vnitate. Oſtenſum enim eſt & E,G, K,& F, I,N,qui hac ratione ſunt procreati, ex demonſtratione propoſ.2.huius lib.continue eſſe proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A,B,& vnitatem,quotcunq; numeri medij continue proportionales;inter A,quidẽ & vnitatẽ,numeri C,D,E:At vero inter B,& vnitatẽ,numeri F,G,H,illis multitudine æquales. Dico totidẽ medios continue proportionales cadere inter A,& B,quot inter vtrumque A, B, & vnitatem.

Multiplicantes enim ſe mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rurſus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot ſũt inter vtrumque A, B, & vnitatẽ. Quoniam igitur eſt, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æque metietur vnitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A: [a] Metitur autem vnitas ipſum C, per C. Igitur & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur. [b] Quare C, ſeipſum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, ſeipſum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rurſus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc eſt, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Poſtremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex iis, quæ a nobis ſunt demonſtrata ad propoſ. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc eſt, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [f] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca ſi inter duos numeros,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

a 3. prom.
b 2. prom.
c 17. ſept.
d 17. ſept.
e 18. ſept.
f 18. ſept.

numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EX his conſtat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F.

PATET etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratum enim eſt, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales ſunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I.

SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem &

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

vnitatem, numerus A; At inter F, & vnitatem numerus E; * cadet quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: æque adeo, per ſcholium huius propoſ. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & ſit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui ſint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Eſt autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata eſt proportionis C, ad K; & eſt vt G, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationẽ habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & ſic de cæteris.

* 10. oct.

HOC idem demonſtrabimus, ſi fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

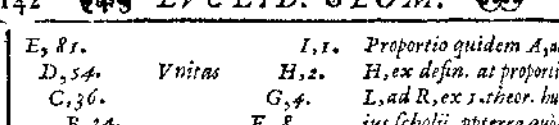
SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rurſum, proportionis B, ad E, eſſe duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, tri-

H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in ſe fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Poſtremo ex F, quoq; in ſe fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab vnitate, vt cõſtat ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata eſt rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius ſcholij: Eſt autem, ex defin. eiuſdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate eſt ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiuſdem, ex defin. duplicata eſt ratio A, ad G. Quare cum ſit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata eſt rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius ſcholij; quòd tam B, N, quam F, Q, ſint ab vnitate cõtinuè proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdẽ argumẽtis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata eſt rationis B, ad A; quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. & eiuſdẽ triplicata eſt ratio D, ad A, ex defin. Igitur eſt D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo eſt A, ad H, vt L, ad R: quòd utraque proportio triplicata ſit proportionis A, ad F:

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

Proportio



Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius ſcholij, propterea quòd tam A, K, L, quam F, Q, R, cõtinuè proportionales ſunt ab vnitate, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eſt ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata eſt rationis B, ad F, ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, ſunt continuè proportionales ab vnitate ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata eſt eiuſdem rationis E, ad F. Non ſecus demonſtrabimus rationem E, ad I, eſſe quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonſtrabitur, ſi numeri vnius ordinis deſinant in vnitatem, vt ex hac ſubiecta figura eſt manifeſtum, in qua I, eſt vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propoſ. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonſtratis effitiemus propoſitionem hanc 10. Euclidis magis vniuerſalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, continue proportionales eciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & aſſumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C,

& C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc eſt, D, ad G: Sed per theor. 2. huius ſcholij, ratio quoque E, ad H, duplicata eſt eiuſdem rationis D, ad G. Igitur eſt vt K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L; cadet quoque vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quatuor minimi numeri, oſtendemus, inter F, & I, duos medios cadere, ſicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quinque numeri minimi.

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

[2] 8. octani.

HOC etiam verum eſt, ſi loco alterius numeri, nimirum B, vnitas aſſumatur, veluti perſpicuum eſt in hac ſubiecta figura in qua numer⁹ B, vnitas eſt, caduntque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot ſcilicet inter A, & B, cadunt, &c.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

EX his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero aſſumpto C, propinquiores.

THEOR.

11. THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationẽ.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, eſſe duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans ſeipſum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati; & ipſum D, multiplicãs fecit E, ex conſtructione; [a] erit vt A, 9. E, 21. B, 49. C, ad D, ita A, ad E. Rurſus, quia D, C, 3. D, 7. multiplicans C, fecit E, ex conſtructione; & multiplicans ſeipſum, ex [b] 17. ſept. defin. quadrati, fecit B, quadratum; erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quod vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales ſunt numerus A, ad B duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem ſit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 17. ſept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continuo

nua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonſtratum eſt.

PARI ratione liquet, numerũ mediũ proportionalem E, & vtrũlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, E, B, proportionales ſint oſtenſi in ratione C, ad D, hoc eſt, eſſe A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipſum E, antecedens antecedentem; quandoquidem eſt E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A. Igitur E, & A, menſuram communem habent C; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum E, conſequens conſequentem. Quare cum & latus D, metiatur ſuum quadratum B; habebunt E, & B, communem menſuram D; Ideoque compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A; poſteriorum vero E, B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

A, 9. E, 21. B. 49. C, 3. D, 7.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionẽ A, ad B, cubi ad cubũ, tripli-

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

triplicatam eſſe proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, ſeipſum faciat E; & D, ſeipſum multiplicans faciat F; At C, & D, ſe mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes vero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, ſeipſum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, [b] cum D, multiplicans C, & ſeipſum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; proptereaque E, G, F, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D. Rurſus, quia ex defin. cubi, C, ipſum E, multiplicans fecit A; & ex [c] conſtructione multiplicans ipſum G, fecit H; [c] erit vt E, ad G, hoc eſt, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipſum G, multiplicans fecerit, ex conſtructione, numerum I; multiplicans vero ipſum F, ex defin. cubi, fecerit [d] cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F, hoc eſt, vt C, ad D, ita [e] I, ad B: [e] Eſt autem & H, ad I, vt C, ad D; quod C, & D, ipſum G, multiplicantes fecerunt ex conſtructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue ſunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus cum ſit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri, &c. Quod erat oſtendendum.

a 17. ſept.
b 17. ſept.
c 17. ſept.
d 17. ſept.
e 18. ſept.

SCHOLIVM.

HIC quoque manifeſtum eſt, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo conſtat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, H, I, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione

ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens cõ-

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64. E, 9. G, 12. F, 16. C, 3. D, 4.

ſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo & ipſum H, quòd H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atque adeo inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt, priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum verò trium H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 12.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F, multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & rurſum multiplicãtes ipſos G, H, I,

G,H,I,faciant K,L,M,& ita deinceps. Dico quoque D, E,F,& G,H,I,& K,L,M,continue eſſe proportionales. Multiplicantes enim A,& B, ſe mutuo faciant N; & B, C,ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A,multiplicans N,E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O,F,

A, 2. B, 4. C, 8.
D,4. N,8. E,16. O,32. F, 64.
G,8. P,16. Q,32. H,64. R,128. S,256. I,512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y,512. Z,1024. a,2048. M,4096.

faciat R,S Simili modo A,multiplicans P, Q, H,faciat T,V,X;& B,multiplicans R,S,I,faciat Y,Z, a.Quoniam igitur A,multiplicans ſeipſum,& B,fecit D,& N; [a] erit vt A,ad B,ita D,ad N.Eodem modo,quia B,multiplicãs A,& ſeipſum,fecit N,& E;erit etiam,vt A, ad B, ita N, ad E.Sunt igitur D,N,E,continue proportionales in ratione A,ad B.Rurſus,quia B,ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E,& O; [b] erit vt B,ad C,ita E,ad O. Eademque ratione,cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O,& F; erit, vt B,ad C,ita O,ad F; propterea q; & E, O, F,continue proportionales ſunt in ratione B, ad C,ſeu A,ad B Quare cum D,N,E,in eadem ratione ſint continue proportionales,in qua E, O, F;erit ex æquo D, ad E, vt E,ad F; atque adeo D,E,F,continue proportionales ſunt.

DEINDE, quia A,multiplicans D, N, E, fecit G, P,Q; erunt ex ijs,quæ ad propoſ.18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione,in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A,ad B proportionales. Item quia A,& B,multiplicantes E fecerunt Q, & H; [c] erit quoque, vt A,ad B,ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A ad B. Similiter, quia B, multiplicans E,O,F,fecit H,R,S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18.lib.7.H,R,S,proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt,B,ad C,ſeu A,ad B. Et eodem modo,cum B,C,multiplicantes F,fecerint S,& I; [d] erit vt B,ad C, hoc eſt, vt A,ad B,ita S,ad I;propterea que & H,R,S,I, proportionales ſunt in ratione A,ad B.Quo circa,cũ G, P, Q, H, eandem

*17. ſept.
b 17. ſept.
c 18. ſept.
d 18. ſept.

eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales.

NON diſsimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorũ A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionẽ duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionẽ totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeri G, H, I; & rurſum ex eiſdẽ in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales. Nã ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & D, F, I, M, continue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, cõtinue ſunt ꝓportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodẽ modo oſtẽdemus G, H, I, eſſe proportionales cõtinue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

	A, 2.	B, 4.	C, 8.
	D, 4.	E, 16.	F, 64.
	G, 8.	H, 64.	I, 512.
	K, 16.	L, 256.	M, 4096.

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione datorum numerorum; ſecundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eadem tamen propositionem demonstrabimus, etiamsi plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciant E, F, G, H; postea vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, ex demonstratis, proportionales sunt in ratione A, ad B; Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc est, in eadem ratione A, ad B, cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in se ipsos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in se ipsos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M; & aly deinceps eodem modo producti.

A, 2. B, 4. C, 8. D. 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

13. PROBL. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; [a] metietur quoque A, primus secundum E. Quare cum sit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

[a] 7. eod. 3. ad.

METIA-

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt demonſtratum eſt propoſ. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, ſecundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. ſcholij propoſ. 6. huius lib. Si quadratus ergo, numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, ſe ipſum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem ſe mutuo faciant G. Multiplicantes demique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonſtratione propoſ. 12. huius lib tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; metietur quoque idem A, primus H, ſecundum. Cum ergo ſit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

* 7. Bazi.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales ſunt in ratione G, ad D, vt oſtenſum eſt propoſ. 12 huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipſum H; atque idcirco & extre-

mum B, cubus cubum, ex ij 8. quæ ad propoſ. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaque ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

15. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Nō metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur
A, 16. B, 81. C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati
C, 4. D, 9. A, metitur D, latus quadrati B;
[a] 14. octa. [a] metietur & quadratus A, quadratū B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A,
[b] 14. octa. metiri dicatur ipſum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus

alterius

alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

a 15. octa.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim nō metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 15. octa.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. [a] Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit. [a] 14. & 15. octaui.

QVOD ſi latus C, lateris D multiplex

A, 36. B, 9. C, 6. D, 3.

ſit; metietur latus D, latus C. [b] Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur; Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.

A, 64. B, 8. C, 4. D, 2.

AT vero ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non ſit multiplex; non metietur B, ipſum A, quadratus quadratū, aut cubus cubum. [c] Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.

A, 49. B, 9. C, 7. D, 3.

A, 125. B, 8. C, 5. D, 2.

[b] 14. & 15. octaui.

[c] 16. & 17. octaui.

SIMILITER ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex; non metietur D, latus latus C. [d] Igitur nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.

[d] 16. & 17. octaui.

16. THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, ſe mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo ſe multiplicantes faciant B; ſitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, eſſe duplicatam proportionis

portionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; erit A, ad G, vt C, ad E; hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A. 12. G. 18. B. 27. C. 6. D. 2. E. 9. F. 3.

a 17. ſept.

b 17. ſept.

QVIA vero, cum A, G, B, ſint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVIA oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, manifeſtum eſt, inter duos ſimiles plános A, & B, cádere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, aſſumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; mettantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentẽ, quòd ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, laterà metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent tam C, quam D, Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cum ſit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F; metiatur autem C, D, latus ſuum planum A, antecedentem

antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoque erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſteriotis B.

18. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorũ duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionẽ A, ad B, eſſe triplicatam eius, quã habẽt latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Itẽ D, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicãtes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, &

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

[a] 17. ſept.

D, & G, fecit L, & K; [a] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [b] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [c] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [d] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

[a] 17. ſept.
[b] 17. ſept.
[c] 17. ſept.
[d] 18. ſept.

QVONIAM vero, cum A, M, N, B, ſint proportionales continue; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

Ex iis, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiã eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ra-

in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem; quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cum enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L; metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K, ipſum B, quod B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I;

a 11. pron. a Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quam D, quam E; Ideoque compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D; ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A; antecedentes antecedentem;

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240. metientur quoque F; G;
I, 6. L, 12. K, 24. H, ipſum M; conſequentes
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10. conſequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipſum N;

(Cum enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F; G, ipſum N; atque adeo F, G, H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At vero F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

QVI A verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſive primum latus ducatur

catur in ſecundum, & numerus procreatus in tertium; ſive primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſive denique ſecundum in tertium, & productus numerus in primum: Quin etiam, propoſitis quotuis numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunq; ordinem inter ſe permutent. Qua quidem res magnum uſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

SINT primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E, erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [a] ita quoque eſt F, ad A, quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, [c] ita eſt A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex aqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus F, aqualis erit numero facto ex B, in F, producta ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, ſit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.

A,	3.	B,	5. C, 8.
D,	15.	E,	120. F, 24. G, 40.
E,	F,		[a] 15. defin.
D,	A,		[b] 15. defin.
B,	vnitat.		[c] 15. defin.
			[d] 19. ſept.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [f] ita etiam eſt G, ad B, eò quòd G, factus ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita eſt B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus eſt ex A,

E,	G,		[e] 15. defin.
D,	B,		[f] 15. defin.
A,	vnitat.		[g] 15. defin.

ex A, in B. Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [a] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id
[a] 19. ſept. eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod eſt ſecundum.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atq; ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundē E, gign ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Itē ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. Itē ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Itē ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Itē ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Itē ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Itē ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Itē ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt prater primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter ſe, fiant 11. multiplicationes diuerſæ producentes eundem ſemper numerum. Quoniam enim vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus fit, ſiue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, ſiue prius in D, deinde hic productus in C, conſtat id, quod primo loco proponitur.

A, 1. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

DEINDE quia vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perſpicuum eſt, eundem numerū gigni tū ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. quod eſt ſecūdū.

TERTIO quoniam, vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus procreatur, ſiue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D, ſiue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundē generari numerū tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cū ergo ille ſit æqualis proxime oſtenſus primo producto, erit & hic æqualis eidē, q eſt tertiū.

QVARTO quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idē numerus fit ex

fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B, gignetur quoq; idē numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

QVINTO quoniã, vt demonſtratũ eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idē numerus ex A, in C, & ex producto in D, et ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cũ ergo ille ſit oſtenſus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintũ.

SEXTO, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quàm ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod eſt ſextũ.

SEPTIMO quia, vt in tribus oſtẽdimus, idē numerus gignitur, ſiue ꝓductus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, ſiue prius in D, deinde hic ꝓductus in A; cõſtat eũdē numerũ fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in A, qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex ꝓducto in D. Sed hic proximè oſtẽſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille ꝙ eſt ſeptimũ.

OCTAVO quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A, gignetur quoq; idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

NONO quia, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex ꝓducto in C, & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

DECIMO

DECIMO quoniam, vt in triſus eſt demonſtratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco eſt oſtenſum, æqualis eſt ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in B. Igitur & hic. Quod eſt decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

POSTREMO quoniam, vt oſtenſum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod eſt vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum eſt in quinq; vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinq; aſſumatur id quod tam in quatuor demonſtratum eſt; & in ſex, quod in quinque, &c.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, appareat, quorum ordinem ter immutauimus, idemque ſemper numerus ex continua eorum multiplicatione inter ſe procreatur. Nam producti ex A, in B, cum C, D, E, conſtituunt quatuor numeros. Ergo quemodocunque inter ſe ordinem permutent, eundem ſemper gignent numerum: ac proinde tam ſecundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorſus numerum procreet, quem primus, & ſic de cæteris.

17. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C; [a] metientur D, & E, ipsos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: [c] Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B; [d] erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G; & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 21. sept.
[b] 9. pron.
[c] 9. pron.
[d] 17 sept.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E, & G, plani similes: sint ipsius E, latera H, I; ipsius vero G, latera

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.
A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 24. K, 3. L, 3. N, 54.

[e] 20. octa

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

[a] 21. *sept.* A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D, [a] æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis; metiantur per M. Eo-

[b] 21. *sept.* demque modo, [b] quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [c] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M, & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicantes E, faciunt C, & D,

[c] 9. *prop.*

[d] 18. *sept.* vt ostendimus; [d] erit C, ad D, vt M, ad N: [e] Sunt autem

[e] 17. *sept.* C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quòd N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rem, si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani minimus. Si enim vnitatem a numeris planis excludamus,

non

non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cum Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamque ſine vlla exceptione demonſtret.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 20.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum inter A, & C, cadat medius B, 9. 54. C, 324. proportionalis; [a] erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 20. octauæ

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij A, 27. B, 45. C, 75. D, 125, proportionales B, C; eruntA, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quã ob ré, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendũ.

[b] 21. octauæ

SCHOLIVM.

HAEC eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio præcedentium duarum propoſitionum, quam qui diligẽter examinare velit, inueniet ſane mãcam eſſe, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunque lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibuſdam lateribus vnius proportionalia ſint quædam alterius, Iure optimo quis inficiari poterit, ſi duorum planorum ſimilium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum eſſe, & ſi duorum ſimilium ſolidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubum: quod tamen in demonſtratione pro conceſſo, atque omnibus perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36. & 64. ſimilibus, ſatis eſt, vt duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris, numerum 4 & 16. proportionalia. Vnde etiamſi prior ſit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis poſſit, immo omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera bis proportionalia, hoc eſt, inter ſe quoque æqualia, atque adeo eſſe quadratum: quemadmodum etiam manifeſtum eſt, bisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non reſpondere alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur hu lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles, cur ſine demonſtratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter ſe æqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A, cum D, ex defin. in ſe faciat A; erunt D, & A, ex ſcholio propoſ. 9 huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem, atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
vni-tas

cadant medij proportionales multitudine æquales, numerum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, numerum vnus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri sunt continuè proportionales, producatur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C, metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, æque, ex iis, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniã extremi D, F, minimorũ trium numerorũ, per corell. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati. Est autem & A, quadratus, ex hypothesi, [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F, & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F, [b] cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, numerus H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum, [c] metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F, metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur, ita vt H, ad F, & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. [d] Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F, erit I, ad F, vt C, ad F, Ac proinde I, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

A, 36.	B, 48.	C, 64.	
G, 18.		H, 32.	[a] 11. octaui
D, 9.	E, 12.	F, 16.	
L, 64.	K, 8.	I, 4.	

[b] 8. octaui

[c] 7. octaui

[d] 11. octaui

ALITER. [e] Quoniam A, & C, similes plani sunt, sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A, at F, G, ipsius C, ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, [f] erunt D, H, E, continuè proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E, cadatque inter D, & E, medius

A, 36.	B, 48.	C, 64.	
H, 6.		I, 8.	
D, 3.	E, 12.	F, 4.	G, 16.

[e] 20. octaui

[f] 20. sept.

[a] 8. octaui. dius proportionalis H,[a] cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui ſit I. Quare cum F, I, G, ſint continue proportionales; uidelicet numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in ſe ipſum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in ſe ipſum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.

[b] 20 ſept. SINT rurſum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, ſit cubus. Dico & D, quarum, cubum eſſe. Sumpto enim E, latere cubi A, fiat ex E, in ſeipſum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in ſe facit F, & in F, facit A; erunt, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab unitate, atque adeo circa communem dimidiorum proportionalem quæque erunt numeri A, F, E, & unitas. Itaque cum inter numerum D, & unitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo, cadent, ex theorem. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. eosdem medij inter unitatem, & numerum D, qui ſint G, H. Itaque quia unitas, & numeri G, H, D, continue ſunt proportionales: fiet H, ex G, in ſe, & D, ex G, in productum H, vt ad propoſ. 12. huius lib. a nobis eſt demonſtratum. Quare D, cubus, eſt, ex definitione, cuius latus G.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
unitas.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, meminerit E, ipſum A, & H, ipſum D, æque, per ea, quæ ad propoſ. 21. lib. 7. demonſtrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor numerorum, cubi ſunt, ex 1. coroll. propoſ. 2. huius lib. Eſt autem & A, cubus, ex hypotheſi,

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16. L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P, 1000. O, 10. N, 5.

[c] 12. octaui ſi, [c] cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui ſint I, K. Quoniam autem, ex æquo, eſt vt A, ad D, ita E, ad H, & per-

& permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; [a] *cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui ſint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum,* [b] *metietur idem & L, ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H, metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O. Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata; quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H, vt P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.*

[a] 8. octaui

[b] 7. octaui.

[c] 12. octaui

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; ſitque A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratũ. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D; [a] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, vt delicet E; [c] cadet quoque inter A, & B, medius vnus qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt continue proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus; erit & B, tertius, quadratus. Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendũ.

A, 36. F, 48. B 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

[a] 11. octaui

[c] 8. octaui

[d] 22. octaui

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum

exhiberi nullo modo poſſe in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, [a] eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionem exhibita, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum: Si enim haberent, eſſent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. exiſtente quadrato, [b] eſſet & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & c. quod eſt abſurdum. [c] Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis ſi eſſent quadrati: cum tamen in ſcholio propoſ. 8. huius lib. demonſtratum ſit, inter numeros duplæ proportionis quoſuis non poſſe cadere medium proportionalem.

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, [d] caderet inter eos medius proportionalis. [e] Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non poſſe, demonſtratum a nobis eſt in ſcholio propos. 8. huius lib.

[a] 24. octaui

[b] 24. octaui

[c] 11. octaui

[d] 11. octaui

[e] 8. octaui

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus, & ſecundus cubus erit.

SIT enim A. ad B, vt C, cubus ad D, cubus; ſitq; A, cubus. Dico & B cubum eſſe. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D; [f] cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui ſint E, F; & cadent quoque

A. 8. G. 12. H. 18. B. 27.
C. 64. E. 96. F. 144. D. 216.

[f] 12. octaui

[g] 8. octaui

quoque inter A, & B, duo medij, qui ſint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, ſunt continue proportionales, & A, primus eſt cubus; [a] erit & B, quartus cubus. Quocirca, ſi duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat. [a] 23. octaui

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, [b] *eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperti, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus.* [b] 23. octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani ſimiles A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendã quadratum. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles; [c] cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione cõtinua A, G, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1 propos. 2. huius lib. Quare cum ſit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, vt eſt quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

[c] 18. octaui

A, 320.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

similes plani numeri ratione inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. [a] *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita A, ad B,* [b] *cadet quoque medius proportionalis inter A, & B.* [c] *Quare A, & B, plani similes sunt.*

A, 8. B, 18. C, 16. D, 36.

[a] 11. octaui
[b] 8. octaui
[c] 20. octaui

EX hoc perspicuum est planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, sunt solidi similes; [d] cadent inter eos duo medij proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erũt extremi E, H, ex coroll. 1 propos 2 huius

[d] 13. octaui

huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A,240. C,360. D,540. B,810.
E,8. F,12. G,18. H,27

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad E, vt C, ad D, [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medy proportionales; [b] cadent quoque inter A, B, duo medij. [c] Sunt ergo A, & B, solidi similes.

A,16. B,54.
C,24. D,216.

[a] 12. octaui
[b] 18. octaui
[c] 27. octaui

EX hu omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbs partientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, [a] caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, tam diudum ostensum est in scholio propos. 8 huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medy proportionales. Nam alias caderent quoque duo medy inter minimos earũdem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, vt in scholio praedicto traditum est, inter quos certum est, non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

[a] 18. octaui

[a] 8. octaui

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit nume-

rus

rus primus, latera habet ſolummodo vnitatem, & ſeipſum, quamuis impropriè. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ conſtat non eſſe proportionalia. Quinis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit, latera tantum habet duas vnitates, & ſe ipſum. Vt hi numeri ſolidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt, ea non poſſe eſſe proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi. (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo huiuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani vel ſolidi ſimiles, [a] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter ſe primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poſſit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in ſcholio propoſ 24. lib. 7. demonſtrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi, quod abſurdum eſt. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi.

[a] 21. & 19. octaui

EX his ſequitur, ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minorem numerare maiorem. Nam ſi eum non numeraret, [b] eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi: ac proinde, vt proximè oſtendimus, non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. quod abſurdum eſt, & contra hypotheſim. Verum hoc oſtenſiuè quoque ita demonſtrabimus. Sint primum duo numeri plani ſimiles A, B, ſitq; A, minor, primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint C, vnitas, & numerus D, ipſi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem, metiatur primum numerum A: ſint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt ſit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur per mutando C, ad D, vt E, ad F. [c] Igitur numerus

[b] 31. ſept.

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

[c] 19. ſept.

vus factus ex C, primo in F, quarium æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertiũ: Fit autem ex C, unitate in F ipse met numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. [a] Quare D, ipsum F, metietur: [b] Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F. [c] Igitur & D, id est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum. [a] 4. prom. [b] 4. prom. [c] 11 prom.

HINC Perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi. quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A, B, sitque A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri; Nam cum A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint B, C, unitates, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter unitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G.

A, 3. B, 24. E, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2 G, 6.

Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. [d] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quarium æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, unitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. [e] Quare D, ipsum G, metietur. [f] Metitur autẽ G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. [g] Igitur & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum. [d] 19. sept. [e] 4. prom. [f] 4. prom. [g] 11. prm.

AT QVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem; vt proximè ostendimus. Cum ergo & se ipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi, quod est contra hypothesim.

ITA QVE facilis ad modum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel super particularem, vel superbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus;

erunt

erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani ſeu ſolidi non ſimiles.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter uero non quadratus, plani ſunt non ſimiles, quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles, [a] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, [b] eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum. ponitur enim non quadratus.

[a] 26. octaui

[b] 24. octaui

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter uero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, ut 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles, [c] haberent proportionem, quã cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, [d] eſſet & 40. cubus. quod eſt abſurdum. ponitur enim non cubus.

[c] 27. octaui

[d] 23. octaui

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani ſimiles A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C Dico C, quadratum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum ſint plani ſimiles [b], vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt ſint continue proportionales D, E, C. Itaq; cũ tres D, E, C, continue ſint proportionales, ſitq; primus D, quadratus, ex conſtructione; [d] erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

[a] 17. ſeptimi.
[b] 18. octaui
[c] 8. octaui
[d] 22. octaui

THEO-

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; ſimiles plani erunt.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratũ. Dico A, B eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratũ.

A, 6. B, 54. D, 36. C, 324.

Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B fecit D, & C; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter A, & B vnus medius proportionalis cadet; [d] Ac propterea A, & B, ſimiles plani ſunt. Quare ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes, &c. Quod demonſtrandũ erat.

17 ſept. 11. octani

a. octani

20. octani

SCHOLIVM.

EX his demonſtrabimus quatuor inſequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, ſe mutuo multiplicãtes faciãt C. Dico C, eſſe quadratum.

A, 4. B, 25. C, 100.

Cum enim A, & B, ſint ſimiles plani, inter ſe quadrati; [a] erit C, ex eis producta, quadratus,

1. noni

II.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant

ciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus.
Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratũ: a erunt A, & B, similes plani: b atque adeo inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D. c Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

A, 9. D, 12. B, 16.
C, 144.

a. noni
b. octaui
c. 22. octaui

III.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum, sitque A, quadratus.
Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholy, Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20
C, 80.

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholy, quadratus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20.
C, 180.

THEO-

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, ſeipſum multiplicans numerũ B, Dico B, eſſe cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in ſe fiat D, & idcirco ex C, in D, ipſe cubus A, gignatur. Quia igitur C, ſeipſum multiplicãs fecit D: metietur C, ipſum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipſum C, per C. Igitur eadem pars eſt vnitas ipſius C, quæ C, ipſius D, nimirum denominata a C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rurſus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipſum A, per C, Metiebatur autem & C, ipſum D, per C. Eadem ergo pars eſt C, ipſius D, quæ D, ipſius A; [e] ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: ſed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipſum B, metitur per A, quòd A, ſe ipſum multiplicans fecerit B; [g] metitur vero & vnitas ipſum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipſius A, quæ A, ipſius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirũ E, & F. Cũ ergo quatuor numeri A, E, F, B, ſint continue proportionales, & A, primus ſit cubus, [k] erit quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus ſe ipſum multiplicans, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20 defin.
d 7. pron.
e 20. defin.
f 7. pron.
g 5. pron.
h 10. defin.
i 8. Octaui.
k 23. Octaui.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multi-

multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; eritq. D, cubus. Quoniá vero A multiplicans A, & B, fecit D, & C; [b] erit vt A, ad B, ita D ad C. [c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [e] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubũ numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 3. noni. A, 8. B, 27. D 64. C, 216.
[b] 17. sept.
[c] 12. octaui
[d] 8. octaui.
[e] 23. octaui

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, [f] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [g] erit vt A, ad B, ita D, ad C, [h] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [k] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

[f] 3. noni. A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.
[g] 17 sept.
[h] 12. octaui
[i] 8. Octaui
[k] 23. Octaui

SCHOLIVM.

EX his & hoc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I

SI cubus numerus non cubum numerum

multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; [a] *& multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.*

A,8. B,20. C,160.

[a] 5. noni

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, [b] *& factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim.*

A,8. B,17. C,136.

[b] 9. noni

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubū. Dico & A, cubū esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur; atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C, erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A,8. B,64. C,512.

[c] 5. noni

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco

loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt. [a] Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. [b] Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quòd A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit, [c] cadent quoque inter A, & E, duo medij proportionales. [d] Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio breuior est, & planior, vt perspicuum est.

A, 8. B, 64. C, 512.

[a] 12. octaui
[b] 17. sept.
[c] 8. octaui
[d] 23. octaui

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit compositus, [c] metietur eum, præter vnitatē, numerus aliquis metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [f] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicās fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorū D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

[c] 13. defin.
[f] 9 pron.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittētes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittētes omnes.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M. Dico tertiũ quidẽ B, ab vnitate eſſe quadratũ, & vnũ intermittẽtes

Vnitas. A,3 B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561 I,19683.I,K.59049. L,177147. M,531441.

omnes, quales ſunt D,F,H,K,M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiuſmodi ſunt F,I, M: ſeptimum vero F, cubũ ſimul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M Quoniam enim eſt vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B. [a] Metitur autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipſum B, per A, metietur; [b] Atque adeo A, multiplicans A, ipſum B, producet. Quare B. quadratus eſt. Quia vero tres deinceps proportionales ſunt B,C,D, & eſt B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadem ratione aſſumptis tribus deinceps proportionalibus D,E,F, cum D, ſit quadratus, [d] & F. quadratus erit; Nec non & omnes vnum intermittentes.

[a] 5. pron.
[b] 9. pron.
[c] 23. octaui
[d] 23. octaui

RVRSVS quia eſt vnitas ad A, vt B, ad C; æque metietur vnitas numerũ A, & numerus B, numerũ C; [e] Metitur autem vnitas ipſum A, per A. Igitur & B, ipſum C, per A, metietur; [f] atque adeo B, ipſum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, ſeipſum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt eſt oſtenſum; erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales ſunt C,D,E,F, & eſt C, cubus; [g] erit & F, cubus. Eodem argumento, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus I,G,H,I, cum F, ſit cubus; [h] & I, cubus erit; atque omnes ſemper duos intermittentes.

[e] 5. pron.
[f] 9. pron.
[g] 23. octaui
[h] 23. octaui

POSTREMO quia F, ſeptimus ab vnitate oſtenſus eſt & quadratus, & cubus: ipſe erit cubus ſimul & quadratus: Atque eodem modo M, ſeptimus ab F, intermiſſis nimirũ quinque G, H, I, K, L, cubus erit ſimul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

HOC theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quę ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus; decimusſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes vero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimooctauo, vigeſimoquarto, & alijs, quę metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigeſimus quintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate, Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem ſit quadratus, Et reli-

qui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, ſitque primum A, proximus

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256, E, 1024. F, 4096.

vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, [a] iam demonſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue propor

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F. 4096.

[b] 22. octaui tionales ſint A, B, C, ſitque A, quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue pro-
[c] 22. octaui portionalibus C, D, E, cũ C, ſit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati ſunt. Idẽ oſtẽdemus, ſi plures numeri ſint cõtinue proportionales.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes

Vnitas. A, 8 B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi,
[d] 8. noni iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque, metietur vnitas numerum A, & numerus A, nume-
[e] 5. proni rum B: [e] Metitur autem vnitas numerũ A, per ipſummet A Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur. [f] Atque adeo cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B,
[f] 9. pron. procreabit. [g] Quare B, cubus eſt. Quoniam vero quatuor
[g] 3. noni continue proportionales ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus,
[h] 23. octaui [h] & D, cubus erit. Eademq; ratione, aſſumptis quatuor

tuor deinceps proportionalibus B,C,D,E, cum B, cubus sit; [a] & E, cubus erit. Omnes igitur A,B,C,D,E,F. cubi sunt. Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 23. octaui

SCHOLIVM.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 20. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B, erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

que A, B, quadrati, erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, quadrati; erit ex eodē scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps; cum ex illo scholio propos. 10. lib. A, multiplicans D, producat E, & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seip-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

sum multiplicans facit B, [b] erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntq; A, B, cubi; [c] erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio, A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, cubi; [d] erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E, & multiplicans E, procreet F, &c.

[b] 8. noni
[c] 4. noni
[d] 4. noni

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcũq; numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati nõ sit quadratus. Dico nec aliũ vllũ esse quadratũ, præter tertiũ ab vnitate, & vnũ intermittẽtes omnes, hoc est, præter B, D, F, H, &c. Si enim præter hos alius

Vnitas. A, 2. B, 4 C, 8 D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256, I, 512. K, 1024 L, 2048. M, 4096.

a 8. noni

est quadratus, sit quadratus E. a Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: sed B, tertius ab vnitate est quadratus. Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum; ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos, quadratum esse.

b 8. noni 24. octani

SED iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos

& duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I &c. Nam ſi præter hos alius poteſt eſſe cubus, ſit D, cubus. Cũ ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quã tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: Sed C, eſt cubus, cum ſit quartus ab vnitate. Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod eſt contra hypotheſim. Non igitur D, cubus eſt. Quod ſi E, credatur eſſe cubus; cum & C, cubus ſit, ſitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; exiſtente C, cubo, erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non eſſe, ita quoque eadem ratione oſtendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, eſſe cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 8 noni.

b 8 noni

c 23. octaui

d 8 noni

e 23. octaui

SCHOLIVM.

NON eſt autem neceſſe, ſi numerus, qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul, & quadratum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus poſſit eſſe cubus ſimul, & quadratus, non exiſtente primo ab vnitate cubo ſimul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui poſt vnitatem, cubus quidem, non autem ſimul & quadratus.

Dico B, tertium eſſe cubum ſimul & quadratum; cubum quidem, quod primo exiſtente cubo, omnes cubi ſint, quadratum vero, quod tertius ſit ab vnitate.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

SIT deinde A, poſt vnitatem quadratus quidem, non autem ſimul & cubus. Dico quartum C, eſſe cubũ ſimul & quadratũ; Cubum quidem, quod quartus ſit ab vnitate; quadratum vero,

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

f 8. noni

g 8. noni

8. noni

[a] 9. noni

ro, [a] quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, praeter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

[b] 10. noni

enim primo non existente quadrato, [b] nullus alius quadratus sit, praeter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, [c] nullus alius sit cubus, praeter

[c] 10. noni

quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimusextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de caeteris. Nam in haec loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A,B,C,D,E,F,G. Dico quemlibet numerum, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

quem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim ſit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat oſtendendum.

[b] 20. defin. 7.

[c] 5. prop. 7.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus a minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum per quem metitur minor maiorem, vt

Vnitas. A, 3: B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

ex demonſtratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſe ipſum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſe ipſum multiplicet; producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtet, quantum ipſe ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore diſtet; quantum minor ab vnitate; propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, [c] producatur ille; quem metitur. Ergo C, ſe ipſum multiplicans gignet F, cum F, tantum abſit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque

que B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

11. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namque non metitur ipſum A; [a] erit E, cum primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe primi ſunt. Metiatur E, ipſum D, per F, [b] atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præcedẽtis propoſitionis oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium, [c] Quare erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, ſint inter ſe primi; [d] ac proinde in ſua proportione minimi; [e] metietur æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, [f] atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B, [g] atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, ſecundum, ita G, tertius

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

a 31. ſept.
b 9. prop.
c 19. ſept.
d 23. ſept.
e 21. ſept.
f 9. prop.
g 9. prop.
h 19. ſept.

tertius ad B, quartum. Quapropter cum A, & E, ſint inter ſe primi, ac propterea in ſua proportione minimi; metietur æque A, ipſum G, & E, ipſum B. Metiatur E, ipſũ B, per H: ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A, atque idcirco A, ſe ipſum multiplicans facit B, vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertiũ, & ex A, medio in ſeipſum. Quare erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter ſe primi ſint, ac proinde in ſua proportione minimi; æque metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum. Metitur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus quoſcunque alios numeros primos ipſum D, metientes metiri quoque ipſum A; Eademque erit ratio ſi C, vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

a 33. ſept.
b 21. ſept.
c 9. pron.
d 20. ſept.
e 23. ſept.
f 21. ſept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipſum A, metiri. Si enim nõ metiatur, g erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicãs faciet B, vt ex ſcholio propoſ. prędentis conſtat, h erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi ſunt, fit autem C, ex A, in B, per idem ſcholium præcedentis propoſ. i erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi ſunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. k erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſim. Metitur ergo E, ipſum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

g 31. ſept.
h 27. ſept.
i 26. ſept.
k 26. ſept.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui

maior

maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum unitati non metiens, metiri poteſt vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonſtratum eſt. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propoſitionis demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demõſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod uidetur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, quod non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium uideatur afferre: Ctis tamen non abſimile quid facium hic eſt in numeris ab Euclide, & in alys nonnullis propoſitionibus, quæ ſequẽtur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturque ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum nõ dicturum fuiſſe, ſi diligentius ſum huius demonſtrationis expendiſſet, vel certe, ſi expendit, eam in memoriam reuocaſſet, quandoquidem ipſo longe prior Euclides vſus eſt hoc etiam demonſtrãdi modo, vt ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demoſtrandi vſus eſt Theodoſius lib. 1. ſphæricorum propoſ. 12. vt ibidem monuimus.

CAETERVM ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcumque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipſum. [a] Cum enim metiatur proximum vnitati, hic autem omnes ſubſequentes, [b] quod ſemper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris; [c] manifeſtum eſt, quod & ille omnes metiatur.

[a] 12. noni
[b] 11. noni
[c] 11. prop.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui ve-

ro poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcũque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum autem eſt, E, non eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, & metiatur extremum D; [a] metietur quoque ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt, ſed compoſitus; [b] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium eſſe non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; [c] metietur quoque ille alius primus eundem D, [d] atq; adeo & ipſum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipſum E, metitur. Metiatur iam E, ipſum D, per F. Dico F, diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipſum D, per aliquem ipſorum A, B, C; [e] & viciſſim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,) metietur D, per E. [f] Cũ ergo quilibet ipſorũ A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipſorũ A, B, C; erit E, idẽ qui aliquis ipſorũ A, B, C, qđ eſt cõtra hypotheſim. ponitur. n. E, nõ idẽ, qui aliquis ipſorũ A, B, C. Nõ igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniã vero E, metitur D, per F; [g] metietur viciſſim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus: ſi enim ſit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; [i] atque adeo eum aliquis

[a] 12. noni
[b] 33. ſept.
[c] 11 pron.
[d] 12. noni
[e] 8. pron.
[f] 11. noni
[g] 8. pron.
[h] 12. noni
[i] 23. ſept.

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.
E.... H.... G.... F....

aliquis numerus primus metietur, quem rursus dicô nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quâ A, metiatur F; cum F, metiatur D, extremum; [a] metietur quoque ille alius primus eundem D; [b] atque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est, quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam verò quoniâ E, metitur D, per F; [c] fiet D, ex E, in F. Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11 huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; [d] Ac proinde erit vt A primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E; vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & nô primum, sed compositum, quê solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturq; F, ipsum C, per G, metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B; [e] & vicissim aliquis ipsorum A, B (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B. quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniâ autem F, metitur C, per G; [f] metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C; metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum, quod est absurdum. Non ergo G primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G; cum G; metiatur C, vltimum; [k] metietur quoque ille alius

[a] 11. prop. [b] 12 noni. [c] 9. prop. [d] 19. sept. [e] 8. prop. [f] 11. noni. [g] 8. prop. [h] 12. noni. [i] 33. sept. [k] 11. prop.

alius primus eundem C; atque adeo & ipſum A, vnitati proximum, qui primus eſt, quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, ipſum G, metitur. [b] Iam vero quia C, fit ex F, in G; quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in ſcholio propoſ. 11. huius lib Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, ſecundo in G, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G tertius ad B quartum Metitur autem A, ipſum F, vt demonſtratũ eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur. metiatur per H Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, vltimũ (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A; quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F & G.

NAM ſi H, idem ſit qui A; metiatur que G, ipſum B, per H; metietur vtique G, ipſum B, per A, Et vicißim A, ipſum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A ipſum B per A, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 11. huius lib erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. [e] Iam vero quia B, fit ex G, in H; quod G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in ſe ipſum. [f] Quare erit vt H primus ad A, ſecundum, ita A ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur, & H, ipſum A, metietur, numerum primum Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c Quod erat oſtendendum.

[a] 12. nom

[b] 9. pron.

[c] 19. ſept.

[d] 8. pron.

[e] 9. pron.

[f] 20. ſept

THEOR. 14. PROPOS. 14.

14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim, si fieri potest, primus numerus E, diuersus à B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [a] multiplicans E, ipsum F, faciet A. [b] Quare singuli B, C, D, alterum ipsorũ E, F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....
B.. C... D.....
E---- F------

[a] 9. pron.
[b] 32. sept.

SCHOLIVM

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoq; alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compositum esse. Sit enim H, non primus, sed compositus: [c] *Et sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E.*

[c] 2. octaui

Quoniam

Quoniam igitur, vt conſtat ex modo proueniendi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A,

A, 16. *B*, 24. *C*, 36. *D*, 54. *E*. 81.
M, 8. *N*, 12. *O*. 18. *P*, 27.
I, 4. *K*, 6. *L*, 9.
H ---- *F*, 2. *G*, 3.

ſit ex F, in M; mettur autem H, ipſum A, erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum; ſi vero ad M, qui quidem ſit ex F, in I, vt eóſtat ex demóſtratione propoſ. 2. lib. 8. erit, ex ſcholio eiuſdē propoſ. 32. li. 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi vero ad I, cum I, gignatur ex F, in ſe ipſum, erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. lib. 7. Quòd ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.

DEINDE metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo E, ſit ex F, in N, erit vt prius H, compoſitus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad N, qui quidem ſit ex F, in K, erit H, eodem modo compoſitus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compoſitus vel ad F, vel ad G. Quòd ſi H, ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propoſ. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C, qui cum fiat ex F, in O, erit H, compoſitus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad O, qui quidem ſit ex F, in L, erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad L, cum L, gignatur ex G, in ſe, compoſitus quoque erit H, ad G. Quòd ſi H, ſit primus, probabimus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.

PRAETEREA metiatur H, non primus quartum D, qui cum fiat ex F, in P; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad P, qui quidem ſit ex G, in L, erit etiam H, compoſitus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propoſitum; ſi vero ad L, cum L, producatur ex G, in ſe; erit quoque H, ad G, compoſitus. Quod ſi H, primus ſit, oſtendemus eodem modo ex propoſ 32. lib. 7 eum metiri ipſum G.

EODEM modo ſi H, non primus metiatur vltimum E, oſtendemus H, compoſitum eſſe ad G, Si vero H, primus

ſit, eum metiri ipſum G; atque ita in cæteris eadem ſemper erit demonſtratio.

ITAQVE ſi H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipſum F, vel ad eum compoſitus erit: Si vero H, metiatur vltimum E, metietur idem ipſum G, vel ad eum compoſitus erit: Si denique, H, metiatur alterum, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipſum F, vel ipſum G, aut ad alterutrum erit compoſitus, Id quod perſpicuum eſt ex ipſa demonſtratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis ſecundo libro Euclides demonſtrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema ſequens demonſtrandum Theon quædam aſſumit in numeris, quæ demonſtrata ſunt de lineis libro ſecundo, perinde ac ſi eadem in de numeris eſſent oſtenſa, non alienum inſtituto noſtro duximus, nonnulla ex his, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonſtrata ſunt de lineis, hoc loco de numeris demonſtrare. Quod idē & Barlaam monachum feciſſe a nonnullis eſt traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in ſecundo libro tenuiſſe conſpicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, ſeceturque ipſorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & qualibet parte numeri diuiſi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B, ſitque F, ex C, in A B. Item G H, ex C, in A D, & H I, ex C, in D E, & I K, ex C, in E B.

Dico

Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex GH, H I, I K, composito. *Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F;* [a] *metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I, & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eandem nimirum, quæ A B, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totius totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F,* [b] *Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum.*

A ... D .. E . B C ..
F .....
G ..... H ... I .. K

[a] 2. prom.

[b] 4. prom.

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, effecitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B, erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.

D .....
A ... C .. B

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quam in duas secetur, ut ex appositis secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B

E .....
A ... C .. D. B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & vna parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub partibus continetur, numero, & illi, qui a prædicta parte effi citur, quadrato.

SIT numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem eſſe ei, qui ſub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, æqualis ſit, erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex, AC, in AB; vel (quod idem eſt) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc eſt, ex AC, in CB, & ex D, hoc eſt, ex AC, in AC, quadrato ſcilicet ipſius AC. Quod eſt propoſitum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

SIT numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem eſſe quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui ſit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2 theorem. numerus quadratus ipſius AB, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Eſt autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero gemino ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius AC: Item numerus,

A . . . . . C . . . . B

rus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, vna cum quadrato ipſius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium A C, C B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod eſt propoſitum.

V.

SI numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, n. AB, ſecetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum ſub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem AC, vel CB,) & alterutram partium inæqualium AD, DB. eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipſius CB, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium CD, DB, vnà cum plano numero bis cõprehenſo ſub CD, DB, numero vero comprehenſo ſemel ſub CD, DB, vna cũ quadrato ipſius DB, æqualis ſit, per 3 theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, vt ſi hic numerus factus ex CB, in DB, ſumatur pro quadrato ipſius DB, vna cum numero facto ex CD, in DB, numerus quadratus ipſius CB, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius CD, vna cum reliquo numero facto ex CD, in DB, ſemel, & numero ex CB, hoc eſt, ex AC, in DB, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis eſt numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipſius CB, æqualis erit quadrato ipſius CD, vna cum numero qui fit ex AD, in DB; hoc eſt, numerus factus ex AD, in DB, vna

A ..... C ... D .. B

cum quadrato ipſius C D, æqualis erit quadrato ipſius C B. Quod eſt propoſitum.

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim A B, ſecetur in partes æquales A C, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, nimirum ex A D, in adiectum B D, vna cum quadrato dimidij numeri C B, æqualem eſſe quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam vno, hoc eſt, quadrato ipſius C D. Cum enim quadratus ipſius C D, per 4 theorema, æqualis ſit quadratis partium C E, B D, vna cum numero bis comprehenſo ſub C B, B D, hoc eſt, quadratis partiũ C B, B D, vna cum numero ſub C B, B D, & ſub A C, B D, comprehenſis; numeris autem contentis ſub C B, B D, & ſub A C, B D, & ſub B D, B D, hoc eſt, quadrato ipſius B D, æqualis ſit ex 1 theorem. numerus factus ex A D, in B D; fit, vt ſi hic numerus factus ex A D, in B D, ſumatur pro quadrato partis B D, vna cum numeris factis ex C B, in B D, & ex A C, in B D, quadratus ipſius C D, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C B, vna cum numero facto ex A D, in B D; hoc eſt, numerus factus ex A D, in B D, vna cum quadrato ipſius C B, æqualis ſit quadrato ipſius C D. quod eſt propoſitũ.

A . . . . C . . . . B . . D

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus

dratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, una cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC.

A ..... C .... B

Cum enim, 4. theorem. quadratum totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, una cum numero; qui fit bis ex AC, in CB: si quadratis ipsius CB, addatur communiter quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, CB, una cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, una cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit di-

A .... C ... B .. D

A . . . . C . . . B . . . D

ctæ parti C B; cum quadratus totius A D, compositi ex A B, & B D, siue dicta parte C B, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vna cum numero qui fit bis ex A B, in B D, hoc est, quadratis numerorum A B, C B vna cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum A B, C B, simul æquales numero bis comprehenso sub A B, C B, vna cum quadrato numeri A C; fit, vt si pro quadratis numerorum A B, C B, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B, vna cũ quadrato ipsius A C, quadratus factus ex A D, æqualis sit numero, qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

IX.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS fit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos esse quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D, æqualis sit, ex 4. theorem quadratis numerorum A C, C D, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex C B, in C D. Atqui quadrato ipsius D B, vna cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc est, ex A C, & C D. Vtitur, si pro quadrato ipsius D B, vnà cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, sumantur quadrati ipsorum A C, C D, erunt

A . . . . C . . . D . . B

qua

quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium A D, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod eſt propoſitum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero compoſito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus AB, diuiſus in partes duas æquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compoſiti ex toto AB, & adiecto B D, & quadratũ adiecti numeri B D, utroſque ſimul, duplos eſſe quadratorum, quæ fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, compoſito ex C B, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, C D, una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc eſt, ex CB, in CD; ſi communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium AC, CD, BD, una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipſius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales ſunt quadrati numerorũ CB, C D, & quadrato ipſius C B, æqualis eſt quadratus ipſius A C. Igitur ſi pro quadrato ipſius B D, una cum numero, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc eſt, numerorum A C, C D: erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorum A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

A.... C.... B.. D

JAM

QAM vero theorema 11. lib. 2. non poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, vt ibi monſtrauimus, ita demonſtrabimus.

DIVIDATVR, ſi fieri poteſt, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC. Quia igitur humerus contentus ſub extremis AB, CB, æqualis eſt quadrato numeri medij AC;

A D E C B

a 20. ſept. *erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Eſt autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior eſt quam CB Ablato tam CD, quæ ipſi CB, ſit æqualis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, eſt vt AC, ex toto AD, detractus ad CD, ex toto AC,*

b 11. ſept. *detractum; b erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, reſiduus, hoc eſt, CD, ipſi CB, æqualis, ad AD, ex AC, reſiduũ. Quia igitur eſt vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & eſt AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, quæ ipſi AD, ſit æqualis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia eſt, vt totus*

c 11. ſept. *AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum; erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, reſiduus, hoc eſt, DE, ipſi AD, æqualis, ad EC, ex CD, reſiduum. Quare cum ſit vt CD, ad DE ita DE, ad EC; ſit autem CD, maior, quam DE, erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipſi EC, æqualis; & ſic deinceps, nec unquam finis erit factæ detractionis. Quod eſt abſurdum: cum numerus non poſſit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidatur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Quoniam numerus AB, in C, ita diuiſus eſt, vt is qui fit ex AB, in CB, æqualis ſit quadrato reliquæ partis AC; erit numerus, qui quater ſit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipſius AC; Ac proinde numerus,

qui

qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, una cum quadrato ipſius A C, quadratus, quippe cum æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 4 theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur ſub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, ut conſtat ex 20. roll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, dividitur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

A C B

VERVM hæc eadem clarius demonſtrabimus ad 3 antepenult. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erũt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, nimirũ A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35 lib. 7 manifeſtũ eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſũ multiplicantẽ facere A; multiplicantẽ vero ipſum E, facere B; atq; E, ſeipſum multiplicantẽ facere C. Quia igitur D, E, minimi ſunt in ſua proportione inter ſe primi ſunt; & erit & vtrq; D, E, ſimul ad quẽlibet illorũ primus. Itaq; cũ tã cõpoſitus ex D, E,

A, 9 B, 12.
C, 16.
D, 3. E, 4.

a 24. ſexti.
b 30. ſexti.

[a] 26. ſept. D,E,quam ipſe D,ad E,primus ſit; [a] erit quoq; numerus factus ex D,E,tanquam vno, in D,ad eundem E,primus: Qui autem fit ex D,E,tanquam vno,in D,æqualis eſt per 3.theorema ſcholij præcedẽtis,& numero A,facto ex D, in ſe,& numero B,facto ex D,in E.Igitur & A,B,compoſiti, primi ſunt ad E; [b] Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

[b] 27. ſept.

[c] 30. ſept. DEINDE quia, vt prius, [c] vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorũ D, E; efficitur, (cum tam cõpoſitus ex D, E, quam ipſe E, primus ſit ad D,) [d] numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D:Qui autem fit ex D,E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3.theorem.ſcholij antecedẽtis,& numero C,facto ex E,in ſe,& numero B,facto ex D,in E.Igitur & B,C,ſimul cõpoſiti,ad D,primi ſunt, [e] atq; adeo & ad ipſum A, qui factus eſt ex D,in ſe,primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

[d] 26. ſept.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

[e] 27. ſept.

[f] 30. ſept. POSTREMO quia, vt prius, [f] vterque D,& E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt; atq; adeo e contrario, quilibet ipſorũ D,E,primus eſt ad compoſitum ex D, E, [g] erit quoq; qui fit ex D, in E, ad compoſitũ ex D,E, primus; Ac proinde & idem qui fit ex D,in E, ad eũ qui fit ex D,E, tanquã vno,in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D,E,tanquam vno,in ſe, [h] æqualis eſt, per 4.theorem.antecedentis ſcholij,eis qui fiunt ex D, & E,in ſe ipſos, vna cum eo qui ex D,in E, bis. Igitur & factus ex D, in E,primus erit ad eos, qui fiunt ex D,& E,in ſe ipſos,& ex D,in E,bis. Quoniã ergo duo numeri ſimul,videlicet compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D,& E,in ſe ipſos,& ex eo,qui fit ex D,in E,atq; is qui fit ex D,in E,primi ſunt ad aliquẽ ipſorũ,nimirũ ad eũ,qui fit ex D, in E, vt oſtenſũ eſt, [i] erunt etiam duo illi,nimirum compoſitus ex ijs,qui fiũt ex D,& E, in ſe ipſos,& ex eo,qui fit ex D, in E,atque is,qui fit ex D, in E,inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul,videlicet compoſitus ex ijs,qui fiunt ex D,& E,in ſe ipſos,atq; is, qui

[g] 26. ſept.

[h] 27. ſept.

A, 9. C, 16. B, 12 D, 3. E, 4.

[i] 30. ſept.

is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum, nimirum ad eũ qui fit ex D, in E, primi ſunt, vt oſtenſum eſt; erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cum igitur ex D, & E, in ſe ipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quam ob rem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum. * 30. ſept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipſum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipſis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes ſimul compoſitos, eſſe primos; Videlicet A, B, C, ſimul ad D; & A, B, D, ſimul ad C; & A, C, D, ſimul ad B; & B, C, D, ſimul ad A. Si enim A, B, C, ſimul non ſunt primi ad D, erunt A, B, C, ſimul, atque D, compoſiti inter ſe; atque adeo eos aliquis numerus communis menſura metietur. Metiatur eos numerus E, ſi fieri poteſt; A, 8. B, 12. C, 18. D 27. *ſumãturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D,* E --- F, 2. G, 3. H --- *numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales ſunt, & minimi; metitur autẽ E, aliquẽ eorũ, nimirũ D metietur quoq; E, alterum ipſorum F, G, vel certe compoſitus erit ad alterum ipſorum F, G, ex ſcholio propoſ. 14. huius libri. Atque idcirco ipſum E, & alterũ ipſorum F, G, alijus numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur F; & E,*

A, 1, B, 2, C, 3. D, 27.
E ---- F, 2. G, 3. H, ----

& E, ponatur metiri compoſitum ex A, B, C, & ipſum D; [a] 11. prop. metitur quoque H, eundem compoſitum ex A, B, C, & ipſum D. Quia vero H, metitur quoque a terum ipſorum F, G, & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. [b] 11. prop. 3. propoſ. 2. lib. 8. [c] 12. prop. metietur quoque H, medios B, G; ac propterea & compoſitum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totũ compoſitum ex A, B, C, & detractum compoſitum ex B, C, vt demonſtrauimus; [d] 12. prop. metietur quoque idem H, reliquum A. Metiebatur autem & ipſum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter ſe compoſiti. [e] 3, 8. Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur compoſiti inter ſe ſunt compoſitos ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter ſe primi.

RVRSVS, ſi A, B, D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad C, metiatur eos aliquis numerus. Metiatur eos E, & ipſum ex ſubtilitate, ſi fieri poteſt, ſecundum. Metietur ergo E, & alterum ipſorum F, G, vel compoſitus erit ad alterum ipſorum F, G. Metiatur ergo H, ipſum E, & alterum ipſum F, G. Itaque cum H, metiatur E, & E, compoſitum ex A, B, D; [f] 11. prop. metietur etiam H, eundem compoſitum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipſorum F, G, qui ſecundum ſuppoſitionem per coroll. [g] 11. coroll. 3. propoſ. 2. lib. 8. medios B, C, [h] 12. prog. metietur quoque H, ipſos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compoſitum ex A, B, D, & detractum B, metietur quoque H, compoſitum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F, G, quorum F, ipſum A, & G, ipſum D, metitur, [i] conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. [k] 11. prop. metietur etiam H, alterum ipſorum A, D. [l] 14. prop. Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter ſe compoſiti. [m] 13. coroll. Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur A, B, D, ſimul compoſiti, ad C, compoſiti ſunt. Ergo primi. Quod eſt propoſitum.

NON aliter oſtendemus & A, C, D, compoſitos eſſe ad B, vnitas nec non, & B, C, D, ſimul ad A. Et demque ratio eſt de quotlibet numeris continuè ſe ſecundibus.

17. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter ſe fue-

rint

rint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SINT primi inter ſe A, & B Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C.

Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, [a] atque adeo in ſua proportione minimi; [b] ipſi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes, nimirum A, ipſum B, & B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A B, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . .
B . . . . . [a] 23. ſept.
C ——— [b] 21. ſept.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi, [c] minimi in ſua proportione. [d] Igitur æque metientur ipſos B, & E; nimirum A, ipſum

A 8 B 12. C 18. D 27. E ——
[c] 23. ſept. [d] 21. ſept.

ipſum B, & D, ipſum E. At
A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E---- qui eſt vt A, ad B, ita B, ad
C: Ergo cum A, metiatur
[a] 11. pron. ipſum B; & B, ipſum C, metietur; [a] atque ob id & A,
ipſum C, metietur. Et quia eſt vt B, ad C, ita C, ad
D; metitur autem B, ipſum C; metietur & C, ipſum
[b] 11. pron. D. Quare A, metiens ipſum C, [b] metietur quoque
ipſum D. Metitur vero & A, ſe ipſum. Igitur A, me-
titur ipſos A, D, inter ſe primos. Quod eſt abſurdum.
Non ergo eſt vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eo-
dem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad
alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

19. PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſiderare, an inueniri poſsit tertius ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam
A, 4. B, 7. numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter ſe ſunt, aut non. Si ſunt
[c] 16. noni inter ſe primi [c] perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si vero non ſunt A, & B, inter ſe primi; multiplicans B, ſe ipſum faciat C. Aut igitur A, metitur ipſum C, aut non. Metiatur primum A, ipſum C, per
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. D. Dico ipſis A, B, inueniri poſſe tertium proportionalem, immo ipſum D eſſe tertium proportionalem. Cum
[d] 9 pron. enim A, metiatur C, per D, [d] fiet C, ex A, in D: Fit autè ex conſtructione, idem C, ex B, in ſe ipſum. Igitur, qui
[e] 20. ſept. continetur ſub extremis A, D, æqualis eſt ei, qui ex medio B, deſcribitur; [e] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus eſt tertius proportionalis ipſis A, B.

SED

SED non metiatur A, ipſum C. Dico ipſis A, B, nō poſſe reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri poteſt, inuentus ſit D, ita vt
ſit A, ad B, quemadmodum A, 6. B, 4. D —— C, 16.
B, ad D Quoniam igitur eſt,
vt A, ad B, ita B, ad D; [a] erit numerus contentus ſub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe ipſum, hoc eſt, ipſi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; [b] metietur A, ipſum C, per D: ſed & non metiri ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, ſecundo in ſe ipſum. Eadem via conſiderabimus, an ipſis B, & A, inueniri poſsit alius tertius numerus, ad quem ita ſit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis conſiderauimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] 20. ſept.
[b] 7. prop.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, ſiue deinceps proportionales, ſiue non; oporteatque conſiderare, an poſſit reperiri quartus ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit C, ad aliquem alium nu
merum, vt A, ad B. A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
Multiplicans B, ipſum C, faciat D. Aut A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.
igitur A, ipſum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipſum D, per E. Dico ipſis A, B, C, inueniri poſſe quartum proportionalem, immo ipſum E, eſſe quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E, fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per conſtructionem. Igitur qui ſub extremis A, E, continetur, æqualis eſt ei, qui ſub B, C, ſecundo, & tertio cōtinetur; [d] Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuētus eſt E, ipſis A, B, C, quartus proportionalis.

[c] 9. prop.
[d] 19. ſept.

SED iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalé. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E, ita vt ſit quemadmodum A, ad A, 4. B, 6. C, 9. E---- D, 54. B, ita C, ad E. Quia ergo A, 3. B, 4. C, 10. E---- D, 40. quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt,

[a] 19. ſept. [a] erit numerus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi D. Quare

[b] 7. prop. cum D, fiat ex A, in E; [b] metietur A, ipſum D, per 1. ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſsit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis conſideranimus, an poſsit, &c. Quod erat faciendũ.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19 demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primũ, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. ſi quadratus numerus ſecundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis 21 $\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. Quia enim diuiſis 64. per 1. ſit numerus 21 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 $\frac{1}{3}$. per diuiſorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8. in ſe; [c] *erunt 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. continue proportionales.*

[c] 20. ſept.

DATIS autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertiũ genitus diuidatur per primum 9. reſultabit quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$.

Cum

Cum enim diuiſis 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{3}$ producetur numerus diuiſus 120 ex multiplicatione Quotientis 13 $\frac{1}{3}$. per diuiſorem 9. ex iis, quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autè idem numerus diuiſus ex ſecundo in tertium. [a] *Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$ proportionales ſunt.* [a] 19. ſept.

EX his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus commandinus, quatuor membris hoc problema abſoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; Aut non deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quo nam modo diligentiſſimi Euclidis interpretes, & in alijs quidè demonſtrationibus vigilantiſſimi, in ſecundo membro huius problematis demonſtrando dormitarint, & quaſi ſui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati non ſint deinceps proportionales, ſed eorum extremi inter ſe primi, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa. Nam falſitas huius rei perſpicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. ſunt inter ſe primi, & nihilominus eis adiungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, eſſe vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio ſit ſub-dupla? Idem videri poteſt in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum terminum ſunt inter ſe primi, cum tamen ipſis adiungatur poſt inter quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartum proportionalem. Quod autem vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare contendunt, perſpicuum fiet, ſi demonſtrationem ipſam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter ſe primi. Dico ipſis inueniri nullo modo poſſe quartum proportionalem. Si enim poteſt inueniri, ſit ille D, ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed ſunt A, C, inter ſe primi, [a] *& ob id minimi.* [b] *Igitur metientur æque ipſos C, E, nimirum A, ipſum C, & C, ipſum E. At vero & A, ſe ipſum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter ſe. Quod fieri non poteſt. Ipſis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

[a] 23. ſept.
[b] 21. ſept.

HÆC eſt eorum demonſtratio, in qua aſſumunt eſſe vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri poſſe, nuſquam demonſtrarunt: Immo hoc ipſum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis poſſit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc conſtet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro conceſſo aſſumant, vt hic idem fieri non poſſe oſtendant; liquido conſtat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonſtrando. Quin etiam, quotieſcunque quatuor numeri dantur proportionales, ſed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter ſe ſunt, quales ponuntur eſſe A, B, C, D; nulla ratione fieri poteſt, vt detur alius, ad quem ita ſe habeat quartus, ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquam conceſſum, atque probatum aſſumunt; quandoquidem ſine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeant quartus D, vt B, ſecundus ad C, tertiũ. Hoc vero non poſſe fieri, facile demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, ſintque A, & C, primus, & tertius, inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, vt ſit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, ſi poteſt fieri, vt B, ad C, ita

ita D, ad E. Eſt ergo ex æquo, vt A, ad C, A,4. B,12. C,3. D,9. E —— ita C, ad E; Atque adeo vt ipſi oſtenderunt; metietur A, duos A, & C, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo fieri poteſt, vt D, ad E, ſit, quemadmodum B, ad C. Quare apertiſſime falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.

PRIMVM vero membrum perſpicuè & aperte oſtendunt. Nam ſi tres numeri deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; [a] manifeſtum eſt, ex demonſtratis, non poſſe ipſis quartum proportionalem inuenire. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſoluimus. [a] 17. noni

THEOR. 18. PROPOS. 20. 21.

PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorũ numerorũ.

SINT propoſiti primi numeri quotcunque A, B, C. Diço ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros.[b] Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus eſt, aut non primus. ſit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures propoſita multitudine A, B, C. [b] 38. ſept.

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D ——— E . F

SED iam non ſit primus D F. [c] Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Diço G, primum nulli ipſorũ A, B, C, eundẽ eſſe. Si namque G, ſit idẽ, qui vnus ipſorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipſum D E; & G, eundẽ D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, [d] metietur quoq; E F, reliquũ, numerus vnitatẽ. Quod eſt abſurdum. Ergo G, primus non eſt idem, qui vnus ipſorum A, B, C; Ac pro- [c] 33. ſept. [d] 11. prop.

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D ——— E. F
53
G ———

inde inuenti ſunt primi numeri A, B, C, G, plures propoſita multitudine primorum numerorũ A, B, C. Eademq; via plures inuenientur quam A, B, C, G, ſi ſumatur minimus, quem ipſi metiatur, &c. Quocirca primi numeri plures ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema inſtar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propoſitis, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum.

NAM ſi primi quotcunque propoſiti ſint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuerſum, videlicet D F, ſi primus eſt, vel certe G, qui ipſum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium ſextum inueniemus; & ſic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

22. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compoſitum A D, parem eſſe. Cum enim A B, B C, C D, ſint pares, habebunt ſinguli ſingulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipſius A B; & F, ipſius B C; & G, ipſius C D. Quoniam igitur eſt vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod ſemper ſit proportio dupla:) erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G.

A.....B....C.....D
E...F,.G....

a 12. ſept.

E,F,G,simul. Est autem AB,ipsius E,duplus Igitur & totus A D, compositi ex E,F,G,duplus erit; Ac propterea A D,dimidiam partem habens numerum ex E, F,G,compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsornm sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB,BC,CD,DE. Dico & totum compositum AE, parem esse. Cum enim AB, BC,CD,DE,sint impares; differet A...B.....C.....D.....E quilibet vnitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [a] Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. [b] Igitur & totus AE, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 21. noni

[b] 22. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorũ multitudo impar est, AB, BC, CD, componantur. Dico & totum AD, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata

ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. a Est autẽ & A C, compoſitus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. b Igitur & A E, compoſitus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod oſtendendum erat.

A . . . . B . . . C . . . . . E . D

a 22. noni

b 21. noni

SCHOLIVM

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate. c Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rurſus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari ſola vnitate differat. Quod eſt propoſitum.

c 21. noni

25.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem eſſe. Aut enim C B, par detractus dimidia pars eſt ipſius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor. Sit primũ dimidia pars. Cum igitur ipſi C B, pari æqualis ſit A C, reliqua pars dimidia, erit & A C, numerus par.

A . . . . . C . . . . . B

SED iam C B, par detractus maior ſit, vel minor dimidia parte ipſius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; ſit D B, dimidia pars ipſius A B; & E B, dimidia ipſius C B. Itaque cum ſit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium;

midiũ; erit permutando vt A B,
ad C B, ita D E, ad E B; & diuidẽ
do vt A C, ad D E, ita C B, ad
E B; Rurſuſque permutando, vt
A C, ad D E ita C B, ad E B. Atqui C B, ipſius E B, duplus eſt: Igitur & A C, ipſius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, ſit eius pars dimidia) par erit Si ergo a pari numero par detrahatur, &c. Quod erat oſtendendum.

A..... C. D... E.....B
A..... D... C.. E.. B

THEOR. 23. PROPOS. 25. 26.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus ſit numerus D B, par. Quia igitur A ....,... C. D .... B
& totus A B, ponitur par;
, erit & reliquus A D, par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 24. noni

THEOR. 24. PROPOS. 26. 27.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem eſſe.
Detracta enim D B, vnitate ex A.... C.....D. B
imparibus A B, C B; erunt re-
liqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; erit & reliquus A C par. Quare ſi ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demõſtrãdũ.

b 24. noni

THEOR.

28. ## THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

EX impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem esse. Detracta enim A D, vnitate ex impare A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus DC, par quoq; erit; Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni

A . D . . . . C . . . . . B

29. ## THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit:

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates Quare cum B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; b Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . B . . . .
C . . . . . .

b 21. noni

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, aequalibus, quot in A, continentur unitates, &c.

A . .
B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur aequales.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, impare esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, aequalibus, quot sunt unitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, aequalibus, quorum multitudo impar est, nimirum aequalis multitudini unitatum, quae in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum. *a 23. noni*

A . . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur aequales.

EX

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [a] *erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.*

A . . . C . . . .
B . . . . . .

[a] 29. noni

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] *erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.*

A . . . C . . . . .
B . . . . . .

[b] 28. noni

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoque demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraque pars A C, C B, impar est, aut maior A C, impar, & minor C B, par, aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraque pars A C, C B, par. Sit primum vtraque pars A C, C B, impar, [c] *ideoque totus numerus A B, par.* [d] *Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui vero ex A C, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cum ergo numerus ex A B, in C B,*

A ------ C ---- B
D — E —

[c] 23. noni
[d] 28 noni.

C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in ſe; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non poteſt.

DEINDE ſit A C, impar, & C B, par, ideoque ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus A B, impar. [a] *Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par eſt: & numerus ex impare A C, in ſe genitus, impar, ex coroll. huius propoſ. 29. erit rurſus ille par huic impari æqualis. quod eſt abſurdum.* [a] 28. noni

TERTIO ſit A C, par, & C B, impar; ideoque ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus A B, impar. [b] *Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar eſt: & numerus ex pare A C, in ſe genitus, par, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. erit rurſus ille impar huic pari æqualis. quod abſurdum eſt.* [b] 29. noni

QVARTO ſit vtraque pars A C, C B, par. Inuenteris igitur, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B; [c] *erunt D, E, inter ſe primi: ac proinde ambo pares non erunt, ſed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia eſt, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D:* [d] *Eſt autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, æqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoque vt totus D E, ad D, ita D, ad E,* [e] *ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipſius D. Totus ergo numerus D E, ſecius eſt in partes D, E, quarum vel vtraque impar eſt, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, æqualis ſit quadrato alterius partis D. quod fieri non poſſe, iam demonſtratum eſt in numero A B, quando vtraque pars A C, C B, vel impar eſt, vel vna impar, & altera par. Conſtat ergo propoſitum.* [c] 24. ſept. [d] 20. ſept. [e] 20. ſept.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiũ quoq; ipſius B, metiri. Metiatur A, ipſũ B, per C. Erit ergo,

ergo, ex ijs, quæ in antecedente propoſ. ex Campano demonſtrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiã
[a] 8. pron. partem habebit. Itaque cum A metiatur B, per C, a metietur quoque C, ipſium B, per A;

A... C...
B .....

Ac proinde C, pars erit ipſius B, denominata ab A, vt ad 3 definitionẽ lib. 7 docuimus. Quoniam vero eſt vt C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B. Eſt autem C, pars ipſius B, denominata ab A, vt oſtenſum eſt; erit & dimidium ipſius C, dimidij
[b] 40. ſept. ipſius B, pars ab eodem A, denominata, [c] Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendũ.

34. THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C. Dico A, ad C, quoque primum eſſe. Si enim A, C, non ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis numerus, qui ſit D; qui

A ..... B.....
C..... D

neceſſario impar erit. Nã ſi ſit par, cũ metiatur imparem A; [c] erit A factus
[c] 28. noni ex D, pari in eum numerũ, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metitur; (eſt enim C, par, cum dimidium habeat B.) [d] metietur quoque numerum B, eius dimidium:
[d] 30. noni Metitur autem & A. Igitur D, ipſos A, B, primos inter ſe metitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt. Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad aliquem numerum primus ſit, &c. Quod erat oſtendendum.

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus eſt, primum quoque eſſe non ſolum ad eius duplum, vt Euclides demonſtrauit, ſed etiam ad eius quadruplum, octuplum, ſedecuplum, & ſic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam ſi primus eſt ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus eſt: Et ſimiliter ad octuplum, qui quadrupli duplus eſt, &c.

[a] 31. noni

THEOR. 30. PROPOS. 32. 35.

NVMERORVM à binario duplorum vnuſquiſque pariter par eſt tãtum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque ſint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, eſſe pariter pares tantum. Quod enim ſint pariter pares, perſpicuum eſt. Nam expoſita vnitate, cum A, ſit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [b] Quare A, quilibet ipſorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem ſequentem metietur per aliquem ipſorum A, B, C, D, E; qui cum omnes ſint pares, vtpote dupli a binario; metietur quemlibet ipſorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

[b] 11. noni

QVOD autem ijdem numeri ſint pariter pares tantum, liquido etiam conſtat. Cum enim A, B, C, D, E, ſint ab vnitate continuè proportionales, ſitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirũ binarius; [c] nullus alius quemlibet ipſorum metietur, præter ipſos A, B, C, D, E;

[c] 13 noni

qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum.

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.
I ---- H ---- G ----

Sint.n.A,B, C,D,E,F, à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo si ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantũ inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autẽ, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, præter eos, qui a binario sunt dupli.

36. THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, eſſe pariter imparem tantum. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniã A, dimidium habet imparem; metietur binarius numerus par ipſum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar eſt. Quod autem idem A, ſit pariter impar tantum, hoc modo demonſtrabimus. Sit B, dimidia pars ipſis A; & C, binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantum; ipſe erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur ſit A, ex D, in E: ſed idem A, ſit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartũ æqualis eſt ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium. [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipſum B, metietur, par imparem. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca ſi numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . . . .
B . . . . . C . .
D ——— E ———

[a] 9. prop.

[b] 19. ſept.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi omnium numerorum imparium dupli ſumantur, inuenientur omnes numeri, qui ſunt pariter impares tantum.

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	*Quod enim quilibet illorum ſit pariter impar tãtum, conſtat ex hac propoſitione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi ſoli ſint pariter impares tantum, perſpicuum erit ex ſequenti theoremate, in quo demõſtratur, omnes pares, qui nec a binario ſunt dupli, neque dimidios habent impares, eſſe pariter pares, & pariter impares. Cum ergo*
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.	

nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum; manifeſtum eſt, nullum alium, præter ipſos, eſſe pariter imparem tantum; ſed vel eſſe pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparem.

37. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.

PAR numerus A, neque ſit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, ſed parem. Dico A, & pariter parem eſſe, & pariter imparem. Quod enim ſit pariter par, liquet, A ..... Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par eſt.

QVOD autem idem A, ſit etiam pariter impar, ita oſtendemus. Diuiſo A, bifariam, & eius dimidio rurſus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam ſi in binarium incideremus, eſſet A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod eſt abſurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipſum A, per numerum parem: Alias ſi per imparem metiretur, * cum impar imparem multiplicans faciat imparem; eſſet A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod eſt abſurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicißim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur eſt & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque a binario duplus ſit, &c. Quod oſtendendum erat.

* 29. noni

SCHO-

SCHOLIVM.

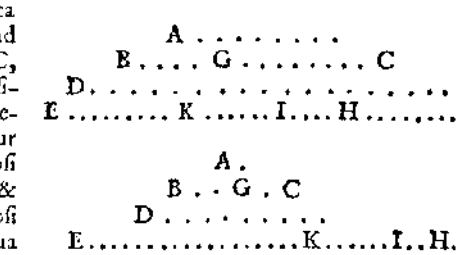
FACILE ex hic inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares ſint, & pariter impares. Reliquis enim omnibus illis, qui a binario ſunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propoſ. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

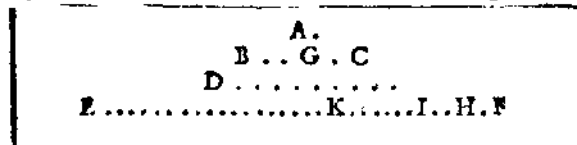
PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. ſcripſimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo: Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, ſecundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico eſſe vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, ſimul. Detrahatur F I, ipſi B C, & F K, ipſi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis eſt ipſi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero eſt vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque





eſt K F, ipſi D, & I F, ipſi B C, & H F, ipſi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc eſt, totus E H, ad D, B C, A, ſimul, (quibus ſumpti ſunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc eſt, vt B G, ad A; ſunt enim B G, & A, ipſis I H, & H F, æquales. Quare ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

12. ſept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam ſummæ quotcunque numerorum cõtinue proportionalium, ſi modo primus, ſecundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim ſit vt exceſſus ſecundi ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes; Si primus a ſecundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus ſecundi ad primum, ita reliquus vltimi ad aliũ: Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijcia tur vltimus, habebitur tota ſumma. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuida tur in exceſſum ſecundi: vt liquet ex ſcholio propoſ. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus eſt, ſunt, exceſſus ſecundi, primus, & exceſſus vltimi: Vt in exemplo appoſito, ſi primus numerus, nimirũ vnitas, detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui exceſſus, 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe vt 2. ad 1. ita 2186. ad ſummã omniũ, excepto vltimo, ſi ſecũdus numerus 1. multiplicetur per tertiũ 2186. fiet numerus 2186 qui ſi diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187, qui ſi addatur ſummæ inuentæ 1093. procreabitur ſumma omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

THEOR.

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem : Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A,B,C,D, dupli,quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E,multiplicans D,ultimum faciat F.Dico F,eſſe numerũ perfe

Vnitas. A,1. B,4. C,8. D,16.
E,31. G ——— 62. H,124. I,248. F ——— 496.
K,31.M,31. L,31.N,465.
O ——— P ———

ctum. Quot enim ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ab E, dupli, nimirum E,G,H,I. Quia igitur A,B,C,D, eandem rationem habent,quam E,G,H,I;erit ex æquo, vt A,ad D,ita E,ad I;[a] Ac propterea numerus factus ex A,primo in I, quartum æqualis eſt facto ex D, ſecundo in E,tertium:Factus eſt autem F,ex D, in E. Igitur idem F,fiet ex A,in I;[b] ideoque I,ipſum F,metietur per A,binarium; & ob hoc F,ipſius I.duplus erit. Quare E, G, H,I,F,deinceps dupli ſunt.Detrahantur ex G,ſecundo, & ex F, vltimo numeri K,L,primo E,æquales,ſintque reliqui exceſſus M,N.[c] Erit igitur vt M,ad E, ita N,ad E, G,H,I,ſimul : Eſt autem M, æqualis ipſi E. (Cum enim G, duplus ſit ipſius E, ablatusque ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E,G,H,I,ſimul. Additis igitur æqualibus,nimirum numero L,(qui æqualis eſt ipſi E,ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris;(qui

[a] 19.ſept.
[b] 7.pron.
[c] 35.noni.

compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex L N, diuiſorum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, ſimul. Quare cum vni-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 32. G ——— 64. H, 128. I, 248. F ——— 496
K, 31. M, 31. L, 31. N. 465.
O ——— P ———

tas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipſum F; (Cum enim F, factus ſit ex E, in D; [a] metietur D, ipſum F; [b] atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, [c] qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cum I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, [d] metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, [e] qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, vt mox oſtendemus; Erunt vnitas & numeri A, B C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cum æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

[a] 7. *prop.*
[b] 11. *prop.*
[c] 11. *noue*
[d] 11. *prop.*
[e] 11. *noui*

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; [f] atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium; [g] ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cũ A, B, C, D, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [h] vltimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E ipſum P, metietur. Cum ergo E, primus ſit, [i] erunt E, & P, inter ſe primi; [k] ideoq; in ſua proportione minimi: [l] Ac proinde æque metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. [m] Nullus vero alius præter A, B, C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorũ A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B, C, D, tot ab E, ſumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; [n] Ac proinde idem numerus

[f] 9. *prop.*
[g] 19. *ſep.*
[h] 13. *octaui*
[i] 31. *ſept.*
[k] 23. *ſept.*
[l] 21. *ſept.*
[m] 23. *octa.*
[n] 19. *ſept.*

rus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt abſurdum. ponitur enim O, diuerſus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipſum F, metitur, ſed ipſum ſoli A, B, C, D, E, G H, I, metiuntur. Quam ob rem, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 19. ſept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam ſummã colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus, Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorũ, perfectus. Quod ſi ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continue dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab vnitate, excluſa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipſa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facile ex ſubiectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1. 2. primus eſt; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 3. Item, quia compoſitus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 7. in 4. eſt perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. hoc eſt, 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inuenietis.

LVBET hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam propor-

proportionalitatis Geometrica, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. ſeptimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, expoſuimus. hinc exordientes.

I

QVOLIBET numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuiſus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiſo A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in E, tertium; erit vt B, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod eſt propoſitum.

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

* 19. ſept.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales,

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico eſſe, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifeſtum eſt ex theoremate 1. proxime demonſtrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Itē cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

ita H, ad Q. Item cum duo D, E, dividentes A, faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse.

A, 15.	
B, 1. *C*, 2. *D*, 4. *E*, 8.	
F, 15, *G*, $7\frac{1}{2}$. *H*, $3\frac{3}{4}$. *I*, $1\frac{7}{8}$.	

Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

IIII.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum summa D: Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A, B, C, sigillatim, ita H, ad

A, 3. *B*, 6. *C*, 20.	
D, 29.	
E, 6. *F*, 12. *G*, 40.	
H, 58.	

E, F, G,

E, F, G, ſigillatim. Cum enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G. quod eſt propoſitum.

QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod eſt propoſitum.

DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdē proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq; proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quæq; per ſuum, diuidatur. Eademq; ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſ.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes;

Et

Et horum ſecundorum Quotiẽtum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitũ: procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT cõtinue proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorũ ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eande continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A, B, C, D: Et Quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quæ

A, 1.	*B*, 2.	*C*, 4.	*D*, 8	
		E. 15.		
F, 15.	*G*, $7\frac{1}{2}$.	*H*, $3\frac{3}{4}$.	*I*, $1\frac{7}{8}$.	
		K, $28\frac{1}{8}$.		
L, $1\frac{7}{8}$.	*M*, $3\frac{3}{4}$.	*N*, $7\frac{1}{2}$.	*O*, 15.	

numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cũ ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L. &c. quod eſt propoſitum.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorũ ab extremis æqualiter diſtantium, vel deniq; (ſi Quotientum nu-

meri

merus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D, E, F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum ſumma O. Dico ſumma O, aqualē eſſe numerū qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, ſunt continue proportionales cōuerſo ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H. [a] *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M, Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H, I, K, L, M, N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N; producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32. G, 63.
H, 63. I, 31½. K, 15¾. L, 7⅞. M, 3 15/16. N, 1 31/32. O, 124 1/2.

[a] 19. ſept.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè proportionales A, B, C, D, E, quorū ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum ſumma M. Dico ſummam M, aqualem eſſe numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in ſeipſum. Quod enim aqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, cōtinue proportionales ſunt; [b] *erit numerus ex H, in K, genitus, id eſt, ſumma M, aqualis numero, qui ex I, in ſeipſum ducto generatur. quod eſt propoſ.*

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 31. G, 31. H, 15½. I, 7¾. K, 3⅞. L, 1 15/16. M, 60 1/16.

[b] 20. ſept.

HINC fit, quando numerus terminorum eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius latus, ſiue radix, eſt medius terminus.

ITAQVE

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri continuè proportionales in data proportione, quorũ summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant: accipiendi ſunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam ſi eorum ſumma per ipſos ſigillatim diuidatur; erunt Quotientes quæſiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perſpicuum eſt. Quod ſi deſiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum ſumma ſit numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix ſit medius terminus: ſumendi ſunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumq; ſumma per eos ſigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæſiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile ſanè eſt, poſſe reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium ſumma æqualis ſit productõ ex primo in vltimum; & ex quibuſlibet duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant, inter ſe multiplicatis; & denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio termino in ſeipſum multiplicato.

SIC etiam ſi quis optet duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero productõ ex vno in alterum, ſumat duos numeros in data proportione quoſcunque, eorumq; ſummam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæſitos, vt oſtenſum eſt: quia videlicet eorum ſumma æqualis eſt numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc eſt, in ſecundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione ſeſquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque ſumma 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. ſunt numeri quæſiti. Habent enim proportionem ſeſquiquintam datam, & eorum ſumma, quàm numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{30}$.

MINV-

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum

DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator fit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem, & numerator C, sit vnitas. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quòd minutia A B, diuiditur in tot minutias minutia C B, æquales, quot vnitates sunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. 20. defin. *Igitur eadem pars est vnitas C, numeri A, quæ minutia C B, minutia A B; ac proinde est, vt vnitas C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B, quod est propositum.*

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

QVONIAM vero minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusuis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT

SINT ergo data minutia $\frac{6}{11}$. *&* $\frac{1}{11}$. *particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius* $\frac{1}{11}$. *eſt 4. &* $\frac{6}{11}$. *ſunt 24 perſpicuum eſt, ita eſſe 4. ad 24. vt eſt numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.*

HANC porrò propoſitionem demonſtrabimus propoſ. 4. in vniuerſum de quibuſcunq; duabus minutijs eiuſdem denominationis, etiamſi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiuſuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia.

SIT minutia quæcunque A B. Dico eſſe numeratorem A, ad denominatorem B, vt eſt minutia AB, ad ſuum integrũ. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis ſit eidem denominatori B, ita vt ſuo integro ſit æqualis. Quando enim numerator denominatori eſt æqualis, minutia ſuo integro æquiualet; quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipſum integrum diuiſum eſt, ac proinde totum integrum contineat. Quoniã igitur eſt, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam CB: Et vt C, ad D, ita minutia CB, ad minutiam DB; erit ex æquo vt A, ad D, hoc eſt, vt numerator A, ad denominatorem B, ipſi D, æqualem, ita minutia AB, ad minutiam D B, hoc eſt, ad integrum. quod eſt propoſitum.

$A, \frac{3}{5}$ $C, \frac{1}{5}$ $D, \frac{5}{5}$
$B, 5.$ $B, 5.$ $B, 5.$

[1] 1. huius

ALITER. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia ſit pars aliquota integri C, ſiue C, ſit vnitas, ſiue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipſi AB, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas eſt in E, denominatore. Cum ergo & vnitas A, ſit pars numeri B, ab ipſo B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; eadem pars erit vnitas

$A, 1.$ $C, 1.$
$B, \frac{5}{30}$ $C, 30.$

[a] 20. defin. tas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. [a] Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod eſt propoſitum.

DEINDE non ſit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ A B. [b] Et quia eſt, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proxime demonſtrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod eſt propoſitum.

A, 3. D, 1. C, 1.
B 5. B, 5. C, 30.

[b] 1 huius

ITAQVE ſi data minutia $\frac{3}{5}$. ſit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita eſſe 18. ad 30. vt eſt 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata.

SIT qualibet minutia A B. Dico eam eſſe partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. [c] Quoniam enim eſt, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad ſuum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrũ C, ſit pars denominatoris B, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore B.) ab ipſo denominatore B, denominata; (Cum enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrum toties acceptum, quoties vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore) erit quoque minutia A B, numeratoris A, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

[c] 2. huius

quoties eſt vnitas in numeratore A.) eadem pars a denominatore B, denominata. quod eſt propoſitum.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. *eſſe huius integri 30. cuius* $\frac{3}{5}$ *ſunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia* $\frac{3}{5}$ *ſumitur reſpectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) liquido conſtat, 18. eſſe quintam partem numeratoris, hoc eſt, trium vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquã, a denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.*

IIII.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propoſitione oſtenſum eſt de duabus minutijs, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonſtratur hic de quibuſuis minutijs. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt A, ad C, numerator ad numeratorem. [a] *Quia enim eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam* [b] *cum ſit, vt C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B. quod eſt propoſitum.*

A, 6. C, 5.
B, 7. B, 7.

[a] 2. huius

[b] 3. huius

DATAE minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. *ſint huius integri 28. cuius* $\frac{6}{7}$. *ſunt 24 &* $\frac{3}{7}$. *ſunt 12. vbi perſpicuum eſt, ita eſſe 24. ad 12. vt eſt numerator 6. ad numeratorem 3:*

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, ſiat F; & ex C, in B, ſiat G. Dico eſſe minutiam AB, ad minutiam CD, vt eſt F, ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H; [a] *erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B,* [b] *ita eſt minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rurſus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H;* [c] *erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D. ad C, ita eſt integrum ad minutiam CD.* [d] *(Nam cum ſit, vt G, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiam CD. quod eſt propoſitum.*

F. 10. G. 12.
A. 2. C. 4.
B. 3. D. 5.
H. 15.

F. AB.
H. Integrum.
G. CD.

[a] 18. ſept.
[b] 2. huius
[c] 18. ſept.
[d] 2. huius

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. *ſint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiuſdem, 24. Perſpicuum autem eſt, ita eſſe 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati ſunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.*

ITAQVE ſi productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia AB, minutiæ CD, æqualis: ſi minor, minor: Et ſi maior, maior; propter eandem pro-

proportionem F, ad G, & minutia ad minutiam. Atque hæc eſt demonſtratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoſcendum, vtra duarum minutiarum maior ſit.

VI.

INTEGRVM ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita eſſe integrum ad ſummã minutiarum AB, CD, vt eſt H, ad ſummam numerorum F, G. [a] *Quoniam enim eſt, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita F, ad G; erit componendo, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita ſumma numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita eſt G, ad H, (Nam* [b] *vt minutia CD, ad ad integrum, ita eſt C, ad D. Et vt C, ad D, ita eſt G, ad H: propterea quòd C, D, ipſum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt ſumma minutiarũ AB, CD, ad integrum, ita ſumma numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad ſummam minutiarum AB, CD, ita H, ad ſummam numerorum F, G. quod eſt propoſitum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B 3. D, 5.
H, 15.

AB, CD. F, G.
CD. G.
Integrum. H.

[a] 5. huius
[b] 2. huius
[c] 18 ſept.

SINT rurſus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$, ſunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem 24. ac proinde ſumma minutiarum 44. Vbi vides, ita eſſe integrum 30. ad hanc

ſummam 44. vt eſt 11. ex denominatoribus productus ad 22. ſummam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita eſſe minutiam AB, ad minutiam AC, vt eſt denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, fecit D, E, [a] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt aut D, ad E,* [b] *ita eſt minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod eſt propoſitum.*

D, 105. E, 35. A, 5. B, 7. — A, 5. C, 21.

[a] 17. ſept.
[b] 5. huius

DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. ſint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$ ſunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiuſdem 10. Manifeſtum autè eſt, ita eſſe 30. ad 10. vt poſterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior

maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [a] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ AB, CD. quod est propositum.*

A, 3. C, 9.
B, 4. D, 12.

[a] 2. huius

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [b] *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

[b] 2. huius

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorem esse minutiam AB, quàm CD. [c] *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum; & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AB, ad integrum, quàm minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quàm minutia CD. quod est propositum.*

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

[c] 2. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior, quàm minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quàm minutia CD, minoris ad idem integrum. [d] *Cum ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod est propositum.*

[d] 2. huius

MINVTIARVM $\frac{1}{4}.\frac{9}{12}$. *integer numerus sit 24. cuius tã* $\frac{1}{4}.\frac{9}{12}$. *sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ* $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. *At* $\frac{2}{3}$ *eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, numerum*

rum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. *maiorem esse minutia* $\frac{2}{3}$.

I X.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores: sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator.

SINT duas minutiæ AB, C D, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] *ac proin de minutiæ æquales erunt. quod est propositum.*

a 8. huius

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

SED sint iam minutiæ æquales AB, & CD Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. [b] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propos.*

b 8. huius

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D, [c] *ac propterea maior erit minutia AB, quàm C D. quod est propositum.*

c 8. huius

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5.

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. [d] *Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.*

d 8. huius

SINT duas minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. *partes integri numeri 90. vbi*

vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. *hoc eſt, 60. æqualem eſſe minutiæ* $\frac{2}{3}$. *id eſt, numero 60. At vero minutiam eandem* $\frac{6}{9}$. *id eſt, 60. maiorem eſſe minutia* $\frac{3}{5}$ *hoc eſt, numero 54.*

X.

DVAS minutias diuerſarum denominationum ad alias duas eiuſdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ AB, CD, habeant diſſimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarũ numeratores E, F & denominator idem G, eſſe æquales minutijs AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G;

E, 10. A, 2. B, 3. × F, 9. C, 3. D, 5. G, 15.

[a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. [b] Quare minutia AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, [c] erit vt C, ad D, ita F, ad G. [d] Igitur minutia CD, FG, æquales erunt. quod eſt propoſitum.

[a] 18. ſept. [b] 8. huius [c] 18. ſept. [d] 9. huius

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiã BC, vnitati A, æqualem eſſe. [e] Quia enim eſt, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Eſt autem B, ipſi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id eſt, vnitati, erit æqualis. quod eſt propoſitum.

A, 1. B, 6. C, 6.

[e] 2. huius

DEINDE ſit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator.

tor. Dico minutiã BC, integro A, aqua-
A, 7. B, 42. lem esse. Suppenatur enim integro A, uni-
D, 1. C, 6. tas D, vt fiat minutia AD, tot vnitatibus aqualis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarum AD, BC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandẽ
[a] 8. huius proportionem habeant, [a] ipsa inter se aquales erunt. Quare cum minutia AD, sit integro A, aqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoque minutia BC, eidem integro A, aqualis. quod est propositum.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B:
A, 3. C, 6. A, 3. vel denominator B, quando par
B, 8. B. 8. D, 4. est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam esse minutiæ AB. Cum enim minu-
[b] 4. huius tia AB, CB, eundem habeant denominatorem; [b] erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.

RVRSVS quia minutiæ AB, AD, eundem habent
[c] 7. huius numeratorem; [c] erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Duplctur denominator B, vt fiat denomina-
A, 6. A, 6. D, 3. tor C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat
B, 11. C, 22. B, 11. numera-

numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtraq; minutiam A B, D B, dimidium esse minutiæ A B. Cum enim minutia A B, A C, eundem habeant numeratorem; [a] *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.* [a] *7. huius*

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denominatorem; [b] *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.* [b] *4. huius*

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutiæ sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B.

Et

[a] 2. huius

[b] 18. sept.

[c] 2. huius

[d] 17. sept.

[1] huius

Et quoniam eſt, vt A, ad B, ita minutia AB, ad ſuum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum eſt E: [b] *Item vt A, ad B, ita eſt F, ad H; quòd A, B, ipſum C, multiplicantes faciãt F, H: Erit quoque, vt minutia AB, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rurſus* [c] *quia eſt, vt C, ad D, ita minutia C D, ad ſuum integrum E:* [d] *Item vt C, ad D, ita eſt H, ad G; quod B, ipſos C, D, multiplicans fecerit H, G: Erit quoq; vt C D, minutia ad ſuum integrum E, ita H, ad G. Quoniã igitur eſt, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrũ, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E; quòd ſimplex minutia K, æqualis poſita ſit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cum eius valorem reſpectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia ſimplex K, ad integrum E.* [1] *Cum ergo quoque ſit, vt F, ad G, ita minutia FG, ad idem ſuum integrum E; æquales erunt minutiæ ſimplices K, & FG: ac proinde cum minutia K, æqualis ſit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque ſimplex minutia FG, æqualis datæ minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod eſt propoſitum.*

A,	2.	C,	3.
B,	3.	D,	4.
		E,	24.
G,	12.	K,	$\frac{1}{2}$.
A B.	F.		
C D.	H.		
E.	G.		

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. ſunt 12. qui numerus eſt $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquiualet qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam

tiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

SIT primum AB, minutia minutiæ CD. Ex A, in C, fiat E; & ex B, in D, fiat F. [a] *Et quoniam minutia EF, exprimit valorem minutiæ AB, reſpectu minutiæ CD; reducta erit data minutia minutiæ ad ſimplicem minutiam EF. quod eſt propoſitum.*

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

[a] 13. huius

DEINDE ſit AB, minutia minutiarum CD, EF, ita vt CD, ſit minutia minutiæ EF; & AB, minutia minutiæ CD. Fiat G, ex A, in G; & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam IK, cuius numerator I, & denominator K, data minutiæ minutiarum æqualem eſſe. [b] *Nam minutia GH, æqualis eſt minutiæ AB, minutiæ CD, reſpectu minutiæ EF, tãquam integri cuiuſdam.* [c] *Item minutia IK, æqualis eſt minutiæ GH, (hoc eſt, minutiæ AB, minutiæ CD.) minutiæ EF, reſpectu integri, cuius EF, eſt minutia; & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia IK, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum. quod eſt propoſitum.*

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

[b] 13. huius

[c] 13. huius

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutijs, alterutram earum

rum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductę in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductę, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Itē ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicās A B, facit G, H;[a] erit vt A, ad B, ita G, ad H,[b] ac proinde minutiæ A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,[c] metietur C, ipsum F, per D:[d] Metitur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunt quæ numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;[e] constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, quas minutias G, F, M, (sursum scripsimus) respectu eiusdem integri G; cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus

G, 24. K, 8.
A, 2. / B, 3. F, 12. C, 3. / D, 4.
H, 36. L, 9.
C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$. M, $\frac{1}{8}$.

a 17. sept.
b 8. huius
c 7. prin.
d 5. prin.
e 13. huius

quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus eſt numerus K,) conſtituet minutia C, minutiæ F, reſpectu integri G, minutiã ſimplicẽ eiuſdẽ integri G, cuius numerator eſt unitas, & denominator numerus K, qualis eſt minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ data C D, qui conſtituit C, minutiam minutiæ F, reſpectu integri G, pars erit ipſius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipſum G, metietur per K; toties nimirum ſumptus, quoties vnitas eſt in K, numero. Eadem prorſus ratione demonſtrabimus, D, metiri ipſum H, per L, numerum. Quod eſt propoſitum.

XVI.

DVAE minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſsim ducti gignũt numeros æquales, æquales ſunt: Et minutiarũ æqualium numeratores in denominatores viciſsim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: ſintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales eſſe. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quarum æqualis eſt numero F, facto ex C, ſecundo in B, tertiũ; [a] *erit vt A, primus ad C, ſecundũ, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem,* [b] *Quare minutiæ A B, C D, æquales ſunt. VEL ſic.* [c] *Quoniam eſt, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, ipſi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod eſt propoſitum.*

E, 24. A, 2. B, 3. — F, 24. C, 8. D, 12.

a 19. ſept.
b 6. huius
c 5. huius

SED

SED ſint iam æquales minutia AB, CD. Dico numerũ E, æqualem quoque eſſe numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [a] *erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem.* [b] *Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, ſecundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri.* [c] *VEL ſic. Quoniam eſt, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod eſt propoſitum.*

DEINDE ſit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque AB, maiorem eſſe minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, ſit ex G, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in B, tertium, [d] *erit vt G, primus ad C, ſecundum, ita B, tertius ad D, quartum: Eſt autẽ maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; & A, maior ſit quã G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D;* [e] *ac proinde minutia AB, maior erit, quàm minutia CD.* [f] *VEL ſic. Quoniam eſt, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; eſt autem E, maior quàm F; erit quoque minutia AB, maior quàm minutia CD. quod eſt propoſitum.*

E, 24, F, 21
G, 1 3/4 A, 2 / B, 3 × C, 7 / D, 12.

VERVM ſit iam minutia AB, maior quàm minutia CD. Dico & numerum E, numero F, eſſe maiorem. Cum enim maior ſit minutia AB, quàm minutia CD, erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quàm A, habebit ad C, eandẽ proportionem, quam B, ad D, qui ſit G. [h] *Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartũ, qui ex C, ſecundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quàm ex G, in D, propterea quòd A, maior eſt quàm G, erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus. VEL ſic.* [i] *Quoniam eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: eſt autem AB, minutia maior quàm minutia CD; erit quoq; E, maior quàm F. quod eſt propoſitum.*

ATQVE hæc eſt quoque demonſtratio eius regulæ, quam in Arithmetica præſcripſimus ad dignoſcendum, vtra duarum

[a] 9. huius
[b] 19. ſept.
[c] 5. huius
[d] 19. ſept.
[e] 9. huius
[f] 5. huius
[g] 9. huius
[h] 19. ſept.
[i] 5. huius

duarum minutiarum propoſitarum maior ſit. Id quod etiam ad 5. propoſitionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, ſint inter ſe primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, ſed ipſa iam in minimis erit terminis conſtituta. Reducatur enim ſi fieri poteſt, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, ſit æqualis. [a] Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque C, D, numeri minores numeris AB, non erunt A, B, minimi termini in ſua proportione; [b] ſunt autem & minimi, cum primi inter ſe ſint. quod eſt abſurdum.

A, 11. C
B, 12. D,

[a] 8. huius

[b] 23. ſept.

SI vero A, B, non ſint inter ſe primi; [c] ſit eorum maxima menſura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem eſſe datæ minutiæ AB, & in minimis terminis conſtitutam. Quoniam enim C, metietur A, B, per D, E; [d] producentur A, B, ex C, in D, E. [e] Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, [f] ac propterea minutia AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima menſura numerorum A, B, metitur ipſos per D, E; erũt ex coroll. propoſ. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod eſt propoſitum.

A, 36. D, 3
B, 48. E, 4.
C, 12.

[c] 2. ſept.

[d] 9. pron.

[e] 17. ſept.

[f] 8. huius

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri poteſt, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam,

cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [a] fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. [b] Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; [c] ideoque minutia A B, EC, æquales erunt. quod est propositum.

A, 3. E, 9
B, 4. C, 12.
D, 36.

[a] 9. pron.
[b] 19. sept.
[c] 7. huius

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutia A B, E C, æquales sunt; [d] erit vt A, ad B, ita E, ad C. [e] Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. [f] Igitur B, metiatur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.

A, 3. E, —
B, 4. C, 10.
D, 30.

[d] 8 huius
[e] 19. sept.
[f] 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorẽ diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. [g] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad dividentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

[g] 2. huius

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum

numerum minorem, aliquid superſit; Quotienti integro inuento addendam adhuc eſſe minutiam, cuius numerator ſit numerus ex diuiſione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui neceſſario minor eſt numero diuidente, diuidendus adhuc eſt per eundem numerum diuidentem, qui maior eſt. Verbi gratia. Diuiſo numero 23. per 4. Quotiens integer eſt 5. & ſuperſunt 3. adhuc diuidenda per 4. [a] *Fit ergo minutia* $\frac{3}{4}$. *ita vt totus Quotiens ſit* $5\frac{3}{4}$.

[a] *19. huius*

X X.

MINVTIAS plures in vnam ſummam colligere.

SINT primum addendæ duæ minutiæ A B, C B, eiuſdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat ſumma D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam D B, eſſe ſummam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominatorem; [b] *erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et componendo, vt A, C, ſimul ad C, ita minutiæ A B, C B, ſimul ad minutiam C B.* [c] *Vt autem C, ad D, ita quoque eſt minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A, C, ſimul ad D, ita minutiæ A B, C B, ſimul ad minutiam D B. Cum ergo A, & C, ſimul æquales ſint ipſi D, ex conſtructione; erunt quoque minutiæ A B, C B, ſimul æquales minutiæ D B. quod eſt propoſitum.*

[b] *4. huius*

[c] *4. huius*

$$\begin{array}{ccc} A, \frac{3}{B, 10.} & C, \frac{4}{B, 10.} & D, \frac{7}{B. 10.} \end{array}$$

DEINDE ſint addendæ duæ minutiæ A B, C D, diuerſarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem poſterioris; & C, numerator poſterioris in B, denominatorem prioris, collectaque ſit ſumma E, ex duobus illis productis, cui ſupponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorũ B, D, procreatus. Dico minutiam

$$\begin{array}{ccccc} A, \frac{2}{B, 3} & \times & C, \frac{3}{D, 4.} & E, \frac{17.}{F, 12.} \end{array}$$

A, 2 / B, 3 ✕ C. 3 / D, 4. E, 17. / F, 12.

minutiam E F, esse summã ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam.[a] Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis; erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F:[b] Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, æqualis erit minutiæ E F: ac proinde minutia E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum. VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex multiplicatione denominatorum inter se, sunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, æquales, vt ex demonstratione propos. 10. cõstat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summa minutiarũ A B, C D, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reducta sunt, vt intio huius propositionis est demonstratum.

[a] 6. huius

[b] 2. huius

IAM vero datis pluribus minutijs, addenda primum erunt duæ primæ: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. unitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{21}{27}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

MINV-

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX *maiore minutia* A B, *detrahenda sit minor* C B; *sintque primum hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore* C, *minoris minutiæ ex* A, *numeratore maioris, reliquus sit numerus* D, *cui idem denominator* B, *supponatur. Dico minutiam* D B, *reliquam esse post detractionem minutiæ* C B, *ex minutia* A B. *Quia enim* C, *ex* A, *subtractus reliquit* D; *componetur* A, *ex* C, *&* D. *Minutia ergo* A B, *cuius numerator* A, *ex numeratoribus* C, D, *collectus est, summa est duarum minutiarum* CB, DB, *vt in prima parte antecedentis propositum est. Quare detracta minutia* C B, *ex minutia* A B; *reliqua fiet minutia* DB. *quod est propositum.*

A, 7 C, 3 D, 4
B, 10. B, 10. B, 10.

DEINDE *minutiæ* AB, CD, *habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor* CD, *ex maiore* A B. *Ex* C, *numeratore minoris in* B, *denominatorem maioris fiat* F, 15. E, 8. *Et ex* A, *numeratore maioris in* D, *denominatorem minoris fiat* F: *atque* E, *ablatus ex* F, *relinquat* G, *cui*

A, 3 C, 2 G, 7
B, 4 D, 5 H, 20.

supponatur denominator H, *ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam* G H, *esse reliquam post detractionem minutiæ* C D, *ex minutia* A B. *Quoniam enim* D, *multiplicans* A, B, *facit* F, H; [a] *erit vt* A, *ad* B, *ita* F, *ad* H: [b] *vt autem* A, *ad* B, *ita est minutia* A B, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* F, *ad* H, *ita minutia* A B, *ad integrum. Rursus quia* B, *multiplicans* C, D, *facit* E, H; [c] *erit vt* C, *ad* D, *ita* E, *ad* H: [d] *Vt autem* C, *ad* D, *ita est minutia* C D, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* E, *ad* H, *ita minutia* CD, *ad integrum. Quia igitur est, vt* E, *primus ad* H, *secundum, ita minutia* C D; *tertius numerus ad integrum,*

[a] *17. sept.*
[b] *2. huius*
[c] *17. sept.*
[d] *2. huius*

a 2. huius

grum, quartum numerum; & Et vt G, quintus ad eundem ſecundum H, ita minutia G H, ſextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. ſcholij propoſ. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus ſimul, ad H, ſecundū, ita minutiæ C D, G H, tertius & ſextus numerus ſimul, ad integrum. Vt autem E, G, ſimul ad H, ita eſt F, ipſis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutiæ C D, G H, ſimul ad integrum. Cum ergo oſtenſum ſit, vt eſt F, ad H, ita eſſe minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrum, iia minutiæ C D, G H, ſimul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutia A B, & minutiæ C D, G H, ſimul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod eſt propoſitum. VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim, & ex ductu denominatorum inter ſe, gignuntur duæ minutiæ eiuſdem denominationis minutijs datis æquales, vt ex demonſtratione propoſ. 10. conſtat; ſi E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, ſupponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propoſ. oſtenſum eſt.

b 11. huius

I A M vero ſi dentur integra vna cum minutijs, ſubtrahenda erunt integra ſeorſum ab integris, & minutia à minutia. Quòd ſi minutia detrahenda, maior ſit, quàm ea, à qua fieri debet ſubtractio, b reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit ſubtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærētis. Vt ſi ſubtrahēda ſint 6 $\frac{2}{5}$. ex 10 $\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{4}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit 4 $\frac{7}{20}$. At ſi ſubtrahenda ſint 4 $\frac{6}{7}$. ex 20 $\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cū $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt q; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua eſt minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit 15 $\frac{25}{28}$.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{2}{5}$. id eſt, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt,

ex

ex 30. ſuperſunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: Eritq; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia vero *C, multiplicans A, F, facit E, H,* [b] *erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F,* [c] *erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D:* [d] *Et vt A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. quod eſt propoſitum.*

	H, 60.	G, 40.
A, 2.	C, 4	E, 8
B, 3.	D, 5	F, 15.

[a] 25. huius

[b] 17. ſept.

[c] 17. ſept.

	A.	G.
	E.	F.
	B.	H.

[d] 2. huius

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo ſit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quòd vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

[a] 11. huius

SI vero integris minutia adhæreant, reuocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator conſtitui. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{3}$. *per* $4\frac{1}{2}$. *fient ha dua minutia multiplicandæ,* $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accõmodemus, nõ erit minutia producta cũ integro numero aſſumpto conferenda, vt in additione, ac ſubtractione factũ eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti: quia cum comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc eſt, cum eius quadrato. Itaque ſint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. *minutia huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia* $\frac{8}{15}$. *Neceſſe eſt ergo, vt* $\frac{2}{3}$. *numeri 60. in* $\frac{4}{5}$. *eiuſdem faciãt numerum, qui conſtituat* $\frac{8}{15}$. *quadrati, qui ex 60. in ſe producitur: Id quod liquido conſtat. Nam* $\frac{2}{3}$. *numeri 60. ſunt 40. &* $\frac{4}{5}$. *eiuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit* $\frac{8}{15}$. *numeri 3600. hoc eſt, quadrati ipſius 60.*

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam E F, eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [b] *gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F.* [c] *Igitur minutia A B, producta eſt ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia*

A, 12	C, 3	E, 4.	
B, 16.	D, 8.	F, 2.	
A, 6	C, 3	E, 2.	[b] 9. pron.
B, 8.	D, 8.	F, 1.	[c] 22. huius
A, 3	C, 3	E, 1	
B 8.	D, 4.	F, 2.	

nutia EF, ad 1. Quotrca cum ſit, vt AB, minutia diuiſa ad CD, minutiam diuidentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex defin. Diuiſionis minutia EF, Quotiens diuiſionis minutiæ AB, per minutiam CD. quod eſt propoſitum.

DEINDE numeri C, D, minutiæ CD, non metiantur numeros A, B, minutiæ AB. [2] Reducatur minutia AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quæ quidem fiet, ſi K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propoſ. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, Quotiens diuiſionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propoſ. demonſtratum eſt. quod eſt propoſitum.

[2] 15. huius

E, 24. A, 2 K, 12. C, 3. G, 8
F, 36. B, 3. D, 4. H, 9.

E, 90 A, 6 K, 15. C, 3 G, 20
F. 135. B, 9. D, 5. H. 27.

QVIA vero G, H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum eſt, ſatis eſt ad diuiſionem cuiuſuis minutiæ per quamlibet minutiam, ſi numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & poſterior H, denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum eſt in omnibus minutijs, ſiue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, ſiue non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda ſecundum doctrinam propoſ. 15. reuocatur, vt ex eius propoſ. demonſtratione liquet, atque in hoc appoſito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B,

E, 48. A, 8. K, 6. C, 2. G, 4 H, 24
F, 54. B, 9. D, 3. H, 3. L, 18.

metiuntur

metiũtur per G, H; & numeros E, F, procreatos ex A, B in K, producẽtum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiũtur per K, L: atque adeo tam minutia G H, quàm K L. Quotiens eſt minutiæ A B, per minutiam C D, diuiſæ.

IAM vero ſi numerus integer diuidendus ſit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, ſupponenda eſt ei vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet

$\frac{8}{1.}$ $\frac{1}{2.}$ $\frac{16}{1.}$

Quotiens $\frac{16}{2}$. vt in appoſito priori exemplo perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda ſit per integrum numerum 8. fiet

$\frac{1}{2.}$ $\frac{8}{1.}$ $\frac{1}{16.}$

Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in poſteriori exemplo apparet.

QVOD ſi minutia adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſ. diximus.

VERVM quia non facile eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; fatius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{7}{2}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens

$\frac{3}{4.}$ $\frac{7}{2.}$ $\frac{21}{8.}$

erit $\frac{21}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ ſemper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{5}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum

cum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{5}{8}$. *id eſt, minutiam* $\frac{21}{8}$, *quæ proximè inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſupra fuit, ex diuiſione 8. per* $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inſerere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inſerenda, ſitque primum ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiã CD: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$. *vnius ſeptimæ ad* $\frac{6}{7}$. *Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F. cui addatur A, numerator prioris, & compoſito numero G, ſubponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo ſenſu, quem diximus, hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe minutiæ AB, reſpectu vnius particulæ minutiæ CD, additæ ad minutiam CD.*

F, 24.

A, 3 C, 6 G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

Quoniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ CD, [a] *reducitur ad ſimplicem minutiam AH, cuius numerator idem eſt, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appoſito hoc exemplo apparet. Item minutiæ FH, minutiæ CD, æqualis eſt, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat F, H;*

A, 3 1 A, 3
B, 4. D, 7. H, 28.

[a] 14. huius

[a] 17. ſept.
[b] 8. huius

F, H; [a] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [b] ac propterea minutia C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, ſummam eſſe minutiarum F H, A H, vt initio propoſ. 20. oſtenſum eſt; hoc eſt, ſummã ex minutia A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia C D, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D; id eſt, æqualis eſt minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, ſimul. quod eſt propoſitum.

I A M vero ſi plures minutiæ A B, C D, E F, G H, ſint inferendæ, hoc eſt, ſi minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore poſtremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiuſdẽ penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiuſdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adijciatur A, numerator eiuſdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur ſemper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiuſdem proximè antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; poſt

P, 119. M, 59. K, 14.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

poſt hac N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex inſitione datarum minutiarum produci in eo ſenſu, quem expoſuimus. Nam vt in duabus minutijs oſtenſum eſt, minutia KL, producitur ex inſitione minutiæ EF, in minutiam GH, hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia GH, collectæ. Deinde minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, [a] *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis poſitam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus,* [b] *æqualis eſt minutiæ KL:* [c] *quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtrauimus, minutia MN, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia MN, ſummæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, atque ex minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH. Rurſus minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH,* [d] *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus,* [e] *æqualis eſt minutiæ MN,* [f] *quod numeratores harũ minutiarum ad denominatores eãdem proportionem habeãt, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propoſ. 20. monſtratum eſt;*

[a] *14. huius*

[b] *8. huius*
[c] *17. ſept.*

[d] *14. huius*

[e] *8. huius*
[f] *17. ſept.*

eſt; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ C D, quod eſt propoſitum. Eademque ratio eſt de pluribus.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, ſenſu; hoc eſt, minutiam G H, æqualē eſſe ſummæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [a] *reducitur ad minutiam ſimplicem E H, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat:* [b] *Minutia quoque F H, æqualis eſt minutiæ C D;* [c] *quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quę ex iis, quæ ad initium propoſ. 20. oſtendimus, æqualis eſt ſummæ minutiarum E H, F H,) æqualis ſummæ collectæ ex minutia C D, (hoc eſt, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutiæ C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideo minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc poſteriori ſenſu. quod eſt propoſitum.*

E, 18. F, 24.

A, 3 C, 6 G, 42
B, 4. D, 7. H, 28.

A, 3 C, 6 E, 18
B, 4. D, 7. H, 28.

[a] 14. huius

[b] 8. huius

[c] 17 ſept.

QVOD ſi plures ſint minutiæ inferendæ A B, C D, E F, G H, hoc eſt, minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ

tia G H ; & minutia E F , minutia G H , addenda ſint ad minutiam G H, ita agendum erit . Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q. ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q. produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam, vt in duabus minutijs demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſumma collecta ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus G, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus ; [b] æqualis eſt minutiæ K L ; [c] quòd numeratores harũ minutiarũ ad denominatores habeant proportionẽ eandẽ: quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cũ minutia M N, cuius numerator M, cõflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt,

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

[a] 14. huius

[b] 8. huius
[c] 17. ſept.

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1 C, 3 E, 2 G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, & denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, ſummæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutia GH; & ex minutia CD, minutia EF, minutia GH. Rurſus minutia AB, minutia CD, minutia EF, minutia GH, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autē Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autē eſt idem Q, ex B, in N, procreatus, [b] æqualis eſt minutiæ MN; [c] quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis ſit, ex iis, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q; atque ex minutia cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoque erit ſummæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutia GH; & ex minutia CD, minutia EF, minutia GH; & ex minutia AB, minutia CD, minutia EF, minutia GH. quod eſt propoſitum. Eademq; de pluribus eſt ratio.

[a] 14. huius

[b] 8. huius

[c] 17. ſept.

DE PROPORTIONVM compoſitione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonſtrationes pertinent, reliquum eſt, vt compoſitionem proportionum explicemus: id quod ad propoſ. 5. lib. 8. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in iis propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut

aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatave: Item vt proportio ex pluribus proportionibus cõpoſita ſit verè totũ quippiã, cuius partes ſint proportiones, ex quibus cõponi dicitur, vt plerunq; interpretes Eucl. exiſtimant, ex hoc perſpi cuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cũ hæc compoſitio intelligẽda ſit, ſiue maior quantitas cũ minore, ſiue minor cũ maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5 oſtẽdimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolũ duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt, partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorẽ eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partẽ æqualem eſſe totiſ? Sic etiã, ſi, poſitis his tribus terminis nõ cõtinuè proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8, verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdẽ auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quam totũ, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundũ, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimũ. Id quod cogunt omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2.

Poſterioris vero 3. & 16. Quoniã igitur 24. 48.
Euclides ibi demonſtrat, proportionẽ 24. 12. 2. 3. 16.
ad 48. compoſitã eſſe ex proportionibus
laterum, hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componẽs, (ſi hæc cõpoſitio eſt vera additio.) nimirũ proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportionẽ videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. vere totũ eſt, & eius partes componẽtes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harũ ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirũ proportio quadru

pla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quòd ſi poſteriores numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentiũ, nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior eſt quàm totiũ, hoc eſt, quàm proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totũ non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12 ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis cõtinuentur adhuc alij tres termini hoc modo. 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadẽ proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. addite tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorũ. Huc accedit, quòd ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplã, non autem nonuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquã nõcupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in his numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiã communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla conflari proportionem octuplã, propterea quòd duo mouẽtia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autẽ ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationẽ compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorũ agentiũ vires nõ poſſe dimidiari, eo quòd inter duos numeros, qui proportionẽ agentis ad patiens exprimant, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. nõ poſſet habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem

nou

non ſtatim intelligat: agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiuſmodi compoſitionem proportionũ non eſſe additionem, ſed proportionũ continuatione, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita propter terminorum cõtinuationem, quemadmodũ & ad defin. 10 lib. 1. explicauimus, cur, poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorũ proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirũ additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio fieri debent per proportionũ denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cũ denominatori cuiuſlibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit vnitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab vnitate denominata.) quarũ qualibet æqualis eſt fractioni, quã conſtituũt duo quicunq; numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedẽte fiat numerator, & ex cõſequente denominator: manifeſto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorũ numerorũ nõ differre, ſiue per proportionũ denominatores, ſiue per numeros earundẽ proportionũ quoſcunq;, poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarũ, inſtituãtur, vt egregiè Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM. n. ſint in vnã ſummã colligẽdæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniã denominatores ſũt 3. & 5. ex quorũ additione fit ſũma 8. coacer 3 × 5 12 × 40.
uabitur octupla proportio ex illis: qua 1 1. 4 8.
ſũma etiã colligitur, ſiue denomina- 8 256
tores, ſuppoſita prius vnitate cuilibet il- 1. 32.
lorũ, inſtar minutiarũ addatur, ſiue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent

facti numeri, positis terminis consequẽtibus sub antecedentibus, in unã sũmã colligãtur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autẽ 256. ad 32. quarũ vtraq; octupla est. Sic etiã ex proportione dupla superquadrupartiete septimas, & sesquialtera, quarũ denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4 reperiuntur, sit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quado per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factũ est. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligendum est.

18	3	54	6
7	2	21	4.
57		342	
14.		84.	

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Ite ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est.

8	3	256	12	57	3	342	6
1	1.	32	4.	14	2.	84	4.
5		640		72		864	
1.		128.		28		336.	

TERTIO si multiplicanda sit prorortio tripla per 2. vel quod idem est, per proportionẽ duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur q; ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3—2	6	12—10	120	3—8	24	9—16	144
1—1.	1.	4—5.	20.	2—5.	10.	6—10.	60.

QVARTO & vltimo si proportio sextupla diuidẽda proponatur per proportionẽ tripla: Itẽ proportio dupla superbipartiens quintas per proportionẽ sesquialtera, si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

VIDES

6	1	6	120	4	480	24	2	48	144	6	864
1	3.	3.	20	12.	240.	10	3.	30.	60	9.	540.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quòd in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutiis.

IAM vero multiplicationem proportionũ à nobis præscriptam, quam auctores additionem falsò nũcupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defi. 5. lib. 6. egit, conuenire, atq; adeo compositionẽ illam Euclidis verè esse multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducaturq; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex cõsequente verò B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione

producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin 10. lib. 5 si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G;	A, 6.	C, 12.	E, 72.	F, 8.	G, 24.
	B, 2.	D, 4.			
	A, 3	C, 6	F, 18.	F, 10.	G, 12.
	B, 2.	D, 5.			

[a] *erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F;* [b] *erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autẽ proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eadẽ sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cũ enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplicatione denominatorum nõ differat, liquido constat, compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.*

[a] 18. sept.
[b] 17. sept.

EADEM ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam iidem auctores docent, non eſſe aliud, quàm diuiſionem à nobis explicatam, eſſeque compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem eſt, ac ſi termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, qua ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eam, qua relinquitur, ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [a] erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G ad F, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (qua eadem eſt, qua G, ad F,) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt, C, ad D, & E, ad F: ac proinde ſubducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis nõ videt, hoc potius eſſe diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit? Atque hæc de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conſcriptum.

A, 9.	C, 3	A, 4.	C. 6.
B, 1.	D, 1.	B, 2.	D, 3,
E, 9.	F, 3.	E, 8.	F, 12.
G, 27.		G, 24.	

[a] 18. ſept.
[b] 17. ſept.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

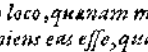
ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantum ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad diſputationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium, quarum cauſa numerorum tractationem ab eo ſuſceptam eſſe ſuperius diximus. Nam ſine cognitione harum linearum complures magnitudines cum ſolidæ tum planæ, neque perfectè intelligi poſſunt, neq; cum res tulerit, in uſus atque uſum conferri; propterea q plerunq; latera earũ incõmenſurabilia ſunt: Id qđ & de pla

nis ipſis atque ſolidis dici poteſt, quippe cum & hæc incommẽ ſurabilia ſæpenumero exiſtãt, vt ad finem huius libri demonſtrabimus. Quoniam vero hic liber multis obſtrictus eſt difficultatibus, ob linearum, de quibus differit, obſcuritatem; omnes neruos induſtriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide ſunt demonſtrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt ſine multo labore a quouis, qui præcedentiũ tamen librorum demonſtrationes recte intellexerit, poſſit percipi. Neque enim in eorum poſſum ſententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam eſſe neceſſariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, ſermonem inſtituit: Immo contra perſuaſum mihi prorſus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abeſt, vt exiſtimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quod ille demonſtrationes ad vſum poteſt reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de cauſa & nos priora decem theoremata ſecundi lib. numeris accõmodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vſurpaſti, vt ea res & maiori voluptati eſſet, & commodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adiberentur, tenebras potius effuſuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perſpicuitatis, quippe ita ingenia ſtudioſorum pro adiumẽto, ac luce, quam his noſtris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minuſq; demonſtrationes iſtas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſola neceſſaria tibi fuerunt, nemo fere ſit, qui ignoret. Hinc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſe ipſos, quan-

do volunt,

do uolunt, præſertim cum iam hoc ipſum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accurate.

ITAQVE, vt ad inſtitutum redeamus, inchoans rem ipſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commenſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadē menſura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mēſura C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B,) dicuntur commenſurabiles. Eodem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorū & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quā dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commēſurabiles dicuntur ſuperficies, quas vna, & eadem ſuperficies metitur; Item corpora, ſolidaue commenſurabilia, quæ metitur idem corpus, ſeu ſolidum.



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES magnitudines ſunt, diameter quadrati cuiuſuis, & latus eiuſdem; quoniam nullam habent menſuram communem, vt propoſitione vltima huius lib. demonſtrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommenſurabiles, quibus ſcilicet menſura aliqua communis dari nullo modo poteſt, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri poſſint. Rurſus, ſuperficies dicentur incommenſurabiles, & ſolida incommenſurabilia, quæ nullam admittunt menſuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commē-

ſurabiles

ſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas in expoſitione defin. 1. commẽſurabiles ſimpliciter diximus: quædam vero longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linearum, quæ ſunt incommẽſurabiles longitudine, alia ſunt eiuſmodi, vt earũ quadrata ſint commenſurabilia; alia vero ita ſe habent, vt & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Linea ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt commẽ ſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt, ſecundum earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiuſque linea, quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.

QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia commenſurabiles, non autem commenſurabiles longitudine; reſpondendum eſt, lineas longitudine commẽſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione commenſurabilium magnitudinum, cũ huiuſmodi lineas una communis menſura metiatur, vt dictũ eſt: At vero quoniã lineas potentia commenſurabiles nulla communis menſura metiri poteſt, ſed tantummodo earum quadrata idem ſpatium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, quarum

rum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.

HABENT autem lineæ cõmenſurabiles tã lõgitudine quàm potentia, hanc quaſi conuenientiã inter ſe, & cõnexionem, vt lineæ longitudine cõmenſurabiles, ſint etia commenſurabiles potentia, ita vt nulla linea dari poſſint commenſurabiles lõgitudine, quin earum quadrata commẽſurabilia quoque ſint; quoniam quadratum ex communi earũ menſura deſcriptum metitur tanquã menſura communis earum quadrata, vt in ſubiecta figura apparet: ſicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoq; quadratũ AG, quadrata CH, EI, metitur: Non aute, vt omnes lineæ potentia cõmenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles longitudine; multæ enim lineæ ſunt potentia commenſurabiles, hoc eſt, quadrata habent commenſurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommenſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur, Rurſus inter lineas incommenſurabiles tam longitudine quàm potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint etiam incommenſurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommenſurabiles, cum tamen potentia, hoc eſt, ſecundum earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. huius libri.



V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunq; rectæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erit omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum: Item quædam illi incommenſurabiles longitudine tantum; quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quamquàm eius verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdã dici poſſe propoſita recta linea commenſurabiles longitudine, & potentia, quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa propoſita, ratione cuius aliæ commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non ſemper notæ ſunt, quamuis ſingulæ ſeorſum ſumptæ exiſtant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunque partes æquales poſſit diuidi.

VI.

ET huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex poſitione, vt illa, ſed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex ſententia Euclidis, ratio quadrati huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem eſt, linea recta, cuius quadratum eſt 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali, (eſt enim tam numerus 20. quàm 1000. commenſurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine ſit eidem

eidem incommenſurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non poſſit exprimi.

VII.

HVIC vero incommenſurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti doſin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum ſunt commenſurabiles propoſitæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido conſtat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propoſitæ rectæ Rationali incommenſurabiles ſunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifeſtum eſt, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. ſeu (quod idem eſt) lineam, cuius quadratũ eſt 20. vel 1000. &c. non poſſe appellari Irrationalem, cum non ſit longitudine, & potentia, ſed longitudine tantum Rationali lineæ propoſitæ incommenſurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a propoſita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea deſcriptum, Rationale vocatur, quia & ipſum certum eſt, ac notum, comparationeque illius aliæ ſuperficies, commenſurabiles, incommenſurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commenſurabiles quidem, Rationalia.

OMNES

OMNES plana ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex poſitione, vt illud, ſed quia cum eo collata reperiũtur ei vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potẽtia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies plana quadrato à Rationali lineæ deſcripto incommenſurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatijs incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidẽ quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia; ſi uero non fuerint quadrata, ſed alia quacunque figura rectilinea, appellentur recta, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COL-

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis linex, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia commenſurabilia eidem quadrato Rationalis linea, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturque in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis linea, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potẽtia, atq; potentia tãtum: apponere fere ſemper vocibus iſtis: commenſurabiles, ac incõmenſurabiles: Vix autem, & rariſſimè his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus uero recte Rationales longitudine & potentia, uel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, vt uarie, & obſcure in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibuſque, nec non Rationalibus, Irrationalibuſque ſint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus poſtulatum unum, & nonnulla pronuncIata, quorum uſus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPO-

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cum maior infinita non ſit, minor vero infinite poſſit augeri, perſpicuum eſt, minorem totes poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem. Cõſtat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5. ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum cenſeri eiuſdem magnitudinis, cum alterutra ita poteſt multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuerſi eſſe generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib 7. Quare cum ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quod fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quod ad verbum

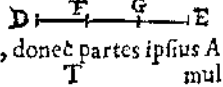
bum huc poſſint transferri, mutata ſolum voce numeri in vocem magnitudinis.

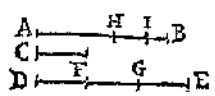
CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendũ nobis fuit a numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus; vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autè Campani ſeriem demoſtraret. Quod ſi vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

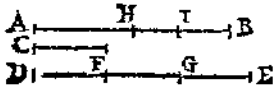
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quędam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarũ AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tãdem magnitudinẽ quandam, quæ minor ſit quã C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit quã AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quã AB. Diuiſa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipſi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quã dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidiũ HI; atq; hoc ſemper fiat, donec partes ipſius AB,





multitudine æquales ſint partibus ipſius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot ſunt ipſæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior eſt quã A B; At ex DE, ablatũ eſt DF, minus quã dimidiũ, vel certe dimidiũ, ſi DE, ipſius C, ſit duplex; ex AB, vero *maius* quã dimidiũ AH: Erit reliquum FE, reliquo H B, maius. (Cum enim DE, maior ſit quam AB, ſi ex D E, dimidium auferretur, necnon & ex A B, dimidium, eſſet quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex A B, Si ergo ex D E, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rurſus quoniam FE, maior eſt quàm HB, auferturq; ex FE, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, ſi F E, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo I B: atque ita procedendo oſtẽdemus tandem poſtremam partem ipſius DE, qualis hic eſt GE, maiorem eſſe poſtrema parte ipſius A B, qualis hic eſt IB. Dum ergo G E, poſtrema pars ipſius D E, æqualis ſit ipſi C; erit quoque C, maior quam I B, poſtrema pars ipſius AB. Relicta igitur eſt I B, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonſtrandum.

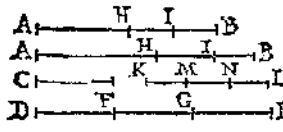


IDEM demonſtrabitur, ſi ex A B, auferatur dimidium A H, & ex reliquo H B, rurſus dimidiũ HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo H B, nec non & reliquum G E, maius reliquo I B; cum ex maiori D E, ablatum ſit D F, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori A B, dimidium A H, &c.

ALITER. Facta conſtructione, vt prius, ſumatur K L, ita multiplex ipſius I B, vt eſt multiplex D E, ipſius C. Diuiſa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipſi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam

vero

vero A H, maior eſt quam H B, vel certe illi æqualis, ſi ablatum ſit dimidium ex A B; & H B, maior eſt, quam I B; erit quoque A H, maior quam I B, hoc eſt, quam K M. Rurſus quia H I, maior eſt quam H B, vel certe illi æqualis; eſt autem I B, ipſi M N, æqualis: erit quoque H I, maior quam M N, vel illi æqualis; atque adeo tota A I, maior, quã tota K N. Additis ergo æqualibus I B, N L, erit tota A B, maior quam tota K L: Eſt autem D E, maior adhuc, quam A B. Multo ergo maior erit D E, quam K L. Quare cũ ſit, vt D E, ad C, ita K L, ad I B; (Sumpta enim fuit K L, ipſius I B, tam multiplex, quam multiplex eſt D E, ipſius C,) erit quoq; C, maior quam I B. Ac proinde relicta eſt I B, minor quam C. Quod erat demonſtrandum.



[a] 14. quinti

SCHOLIVM.

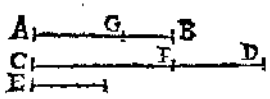
LVCE clarius ex demonſtratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propoſitas debere eſſe tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem poſſit ſuperare. Id quod ad propoſ. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propoſitis A B, C D, quarũ minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B; & ſic deinceps, alterna quadam

detractione, auferatur ſemper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommenſurabiles eſſe. Si enim non ſunt incommenſurabiles, metietur eas aliqua menſura communis. Metiatur eas ſi fieri poteſt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipſi AB, vel minor. Detracta autē AB, ex CD, quoties poteſt, relinquat FD, ſe minorē, ita vt AB, ipſam CF, metiatur. Rurſus detracta FD, ex AB, relinquat ſe minorē GB, ita vt FD, metiatur ipſam AG; atq; hoc ſemper fiat. [a] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, ſe minorē, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipſius CD; alias ſi eſſet dimidia, vel minor quam dimidia, poſſet adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipſius AB: Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cum ſemper auferatur maius, quam dimidiū, [b] relinquetur tādem magnitudo quædam minor quā E.) Sit ergo iam relicta GB, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB; & AB, metitur CF; [c] metietur quoque E, ipſam CF: Metitur autem E, & totam CD, [d] igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG: [e] quare & E, ipſam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB: [f] ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] *1. decimi*

[b] *1. decimi*

[c] *2. pron.*

[d] *3. pron.*

[e] *2. pron.*

[f] *3. pron.*

SCHOLIVM I.

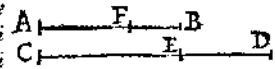
HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor

de

de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommenſurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturq; minor AB, ex CD, & reliqua ſit ED. Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur FB, præcedentem ED. Quoniam igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [a] metietur quoque FB, ipſam AF: Metitur autem & ſe ipſam: [b] Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipſam CE. [c] Igitur & FB, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipſam ED: [d] Igitur & FB, totam CD, metietur. Oſtenſa eſt autem & FB, ipſam AB, metiri. Quare FB, vtramq; AB, CD, metitur, quod eſt abſurdum. ponuntur enim AB, CD, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.



[a] 2. pron.
[b] 1. pron.
[c] 2. pron.
[d] 1. pron.

SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM ſi nunquam reliqua metietur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim commenſurabiles.

ITA QVE facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nã detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem: erunt magnitudines propoſitæ commẽſurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt cõſtat ex

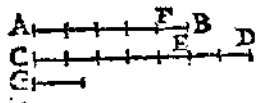
demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur precedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si uero nunquam reliqua magnitudo precedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

3

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam A B, C D, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor A B, ex maiore C D, detracta, quoties poteſt, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B, & hoc ſemper fiat alterna quadã detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iã F B, reliqua præcedentem ED. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, ita oſtendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur A F; metietur quoque FB, ipſam A F: At metitur F B, & ſe ipſam: Igitur FB, totam A B, metietur; atque adeo & ipſam C E, quam A B, metitur. Cum ergo, & ipſam ED, metiatur; metietur quoq; F B, totam CD. Metitur ergo FB, utramque A B. CD. Quare vtriuſque A B, C D, communis menſura eſt FB.



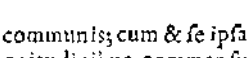
a 2. pron.
b 1. pron.
c 2. pron.
d 1. pron.

QVOD autem FB, ſit maxima earum communis mẽſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quam F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem

autem & AB, ipſam CE; [a] metietur quoq; G, ipſam CE: At metitur quoq; totam CD. [b] Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipſam AF. [c] Ergo & G, ipſam AF, metietur. Quare cum G, totam etiam AB, metiatur; [d] metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis menſura eſt ipſarum AB, CD. Quare FB, maxima earum communis menſura eſt.

[a] 2. pron.
[b] 3. pron.
[c] 2. pron.
[d] 3. pron.

QVOD ſi minor magnitudo AB, metiatur maiorẽ CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipſa AB, ambarum maxima menſura communis; cum & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.



COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt FB, eſſe maximam menſuram communem ipſarum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoque maximam menſuram FB. Eademque eſt ratio de cæteris.

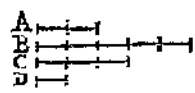
SCHOLIVM.

EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propo. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuũ eſt, omnes tres A, B, C,

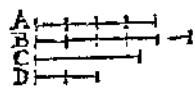


eſſe incommenſurabiles, quod nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A, & B.

SI vero A, & B, fuerint commenſurabiles, ſit earum maxima communis menſura inuenta D; qua ſi metiatur quoque magnitudinem C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cum habeant communem menſuram D.



QVOD ſi D, maxima menſura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commenſurabiles, vel non. Si ſunt incommenſurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommenſurabiles. Si enim credantur eſſe commenſurabiles, metietur earum maxima cõmunis menſura ipſam D, maximam menſuram magnitudinũ A, & B, per coroll. huius propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommenſurabiles. Quod eſt contra hypotheſim.



SI vero C, & D, ſint commenſurabiles, erunt quoque tres A, B, C, cõmenſurabiles. [a] *Inuenta enim E, maxima menſura ipſarum C, & D; cũ E, metiatur D; & D, ipſas A, & B;* [b] *metietur quoque E, ipſas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.*

[a] *3. decimi*

[b] *2. pron.*

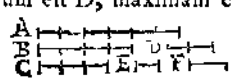
SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, ſint commenſurabiles, nec ne. Nam ſi data ſint quatuor, experiemur id primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commenſu-

menſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C, quarum maximam mẽſuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima menſura ipſarũ A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perſpicuum eſt D, maximam eſſe menſuram omnium trium A, B, C. Nam ſi maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadẽ, per coroll. propoſ. 3. huius lib. maximam menſuram ipſarum A, B, nempe ipſam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non poteſt. Si uero D, non metiatur C, erunt ſaltẽ D, C, commenſurabiles. Cum enim A, B, C, ſint commenſurabiles, metietur qualibet menſura earum cõmunis ipſam D, maximam menſuram ipſarum A, B, per coroll. præcedentis propoſ. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoq; ipſam D; erunt D, & C, commenſurabiles. [b] Sit igitur E, maxima menſura ipſarum inuenta. Dico E, maximam menſuram eſſe datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoq; E, ipſas A, & B. Metitur autem & ipſam C: Igitur E, menſura eſt communis ipſarum A, B, C, quemadmodum aſſeruimus.



QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit F, maior quam E, ſi fieri poteſt, earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximã mẽſuram D, per coroll. præcedẽtis propoſ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E, ex eodem corol. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

[a] 3. decimi

[b] 3. decimi

[c] 2. pron.

COROL-

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt ratio.

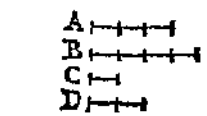
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, quam tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua vero omnia abſoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

LEMMA.

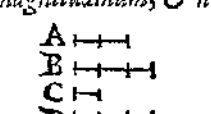
SI ſint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eiſdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo eſſe, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam.n. ex ijs, quæ ad defi. 5. lib. 6.

lib. 6. a nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perſpicuum eſt, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe vt A, ad D, ita E, ad H. Quod eſt propoſitum.



IDEM ſequitur, ſi magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo eſt, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.



SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in aliis multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cum non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituũt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa tantum eſt in quãtitatibus eiuſdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cum omnes demonſtrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

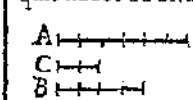
THEO.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5. **COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.**

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eos habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima menſura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas reperita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Eſt autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipſam B, atq; vnitas numerum E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationem habent, &c. Quod erat dqmonſtrandum.

a 3. derim.



SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum, Hæ enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atq; adeo in eis demonſtratio locum habet.

QVOD ſi lineæ ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quam

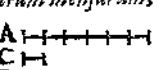
numerus

numerus ad numerum, quia commenſurabilia ſunt, atque idcirco menſuram habent communem, ipſiſque demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, cõmunis menſuræ ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat, commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E, per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quãcumque communem earum menſuram, nihilominus hoc theorema demõſtrabimus eodem argumẽto. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionẽ cum illis, vt ex appoſita figura apparet. Quoniã vero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omniũ eandem cum ipſis proportionẽ habentiũ, propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam communem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.

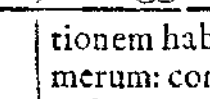


THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

SI due magnitudines inter ſe proportionem

tionem habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

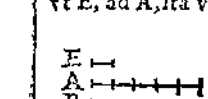
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines eſſe commenſurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuiſa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis ſit magnitudo E. Deindequoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C; continebit æqualiter A, ipſam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Eſt autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipſam F, & vnitas ipſum D, æque metiatur. Igitur per lemma propoſ. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiã vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter ſe ſunt. Quocirca cum E, ipſam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipſam B: Metiebatur autem & ipſam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; Ac proinde A, & B, magnitudines commenſurabiles inter ſe ſunt. Si igitur duę magnitudines inter ſe proportionẽ habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 9. quinti

b 1. defin.

ALITER. Quot ſunt unitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuiſa magnitudo A, quarum partium uni æqualis ſit magnitudo E. Quoniam igitur eſt vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipſam A, & vnitas ipſum C, æque metiãtur; poniturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idẽ lemma ſuperius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magni-

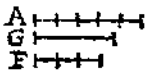


magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, ſ commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum. 1 1. *dan.*

COROLLARIVM.

EX priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates ſunt in C; et ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonſtratum eſt.

HINC rurſus apparet, quanam arte poſsit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius data recte, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum linea data A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex iis, quæ modo diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D: [b] *Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres recta A, G, F, ſint continue proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta.*



[b] 13. *ſexti*

SCHO-

SCHOLIVM

IN hoc etiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tãtum; quoniam habent, vt ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

7. 0. THEOR. 5. PROPOS. 7.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommenſurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum, erũt ipſæ commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommẽſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat.

*6. decimi

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue longitudine tantum, ſemper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias, vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

8. 0. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duæ magnitudines inter ſe proportio-

portionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incõmenſurabiles eſſe. Si enim A, & B, credantur eſſe cõmenſurabiles; * erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, &c. Quod erat oſtendendum.

A
B

* 5. decimi

SCHOLIVM.

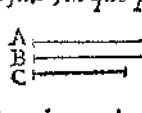
QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendũ eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſario & potentia incommenſurabiles eſſe, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; immo nullo modo talem proportionem habere poſſunt, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

SI ſint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportio-

nales ; ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam : Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundã.

SINT continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non; ſitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque eſſe vt A, ad B, ita D, ad E.



Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales ſunt.

IDEM ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quã tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

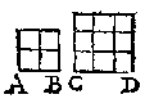
7. THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commẽſurabilia. Quæ

vero

vero a rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine ſunt commẽſurabiles, [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerũ: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, numerus ad numerũ F: [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Itẽ & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratũ ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerũ quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitũ.



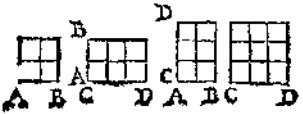
E, 2. F, 3.
G, 4 H, 9.

[a] 5. decimi

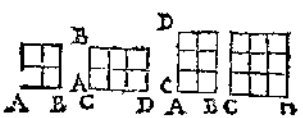
[b] 20. ſexti

[c] 11. octa.

ALITER. Poſita eadẽ conſtructione, cõtineatur rectangulum BD, ſub rectis AB, CD. Et E, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt



E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.

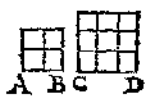


H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib 8 atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdē propos.

[a] 1. sexti Quoniam igitur est A B, ad C D, vt E, ad F: [a] Vt autem A B, ad C D, ita est quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandem altitudinem A B, si C D, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est A B, ad

[b] 1. sexti C D, vt E, ad F, [b] Vt autem A B, ad C D, ita est rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandem altitudinem C D, si A B, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum B D, ad quadratum ex C D, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum B D & quadratum ex C D, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

SIT secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas A B, C D, esse longitudine cōmēsurabiles. Sint. n. numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt quadratus numerus G, ad quadratū numerū H:



[c] 20. sexti [c] Habet aūt quadratū ex A B ad quadratū ex C D, proportionē duplicatam lateris A B, ad latus C D;

[d] 11. octaui [d] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant

habeant, quam numeri E, F, a ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum. *a 6. decimi*

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. [b] Quia igitur eſt vt AB, ad CD ita quadratũ ex AB, ad rectangulũ BD; ltẽ vt AB, rurſum ad CD, ita rectãgulũ BD, ad quadratũ ex CD, vt ſupra diximus; erũt quadratũ ex AB rectangulũ BD, & quadratũ ex CD, continue proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineã CD: Sunt autẽ & numeri G, I, H, cõtinue proportionales in rõne numeri E, ad numerũ F, vt ſupra oſtendimus; poniturq; quadratũ ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratũ numerũ H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc eſt, vt E, ad F; ideoq; AB, CD, rectæ, proportionẽ habẽtes quã numeri E, F, cõmenſurabiles ſunt lõgitudine Qđ eſt propoſitũ. [b] 1. ſexti [c] 6. decimi

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ; erunt A, B, longitudine cõmenſurabiles, vt iã eſt demonſtratũ. Quod eſt abſurd. ponũtur enim longitudine incõmenſurabiles. Non ergo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, proportionem habet, quã numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quod eſt propoſitũ.

A
B

QVARTO, ac poſtremo quadratũ ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Dico eas longitudine eſſe incõmenſurabiles. Si enim longitudine cõmenſurabiles credãtur; habebũt earũ quadrata, vt eſt demõſtratũ, proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. qđ eſt abſurdũ. ponuntur. n. non habere. Nõ ergo longitudine cõmenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitũ. Igitur quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia com-

menſurabiles eſſe: Quæ vero potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ vero potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

QVONIAM n. quadrata linearum longitudine commẽſurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonſtratum eſt, hoc eſt, ſimpliciter
[a] *6. decimi* *quam numerus ad numerum;* [b] *ipſa commẽſurabilia erũt;* [b] *Ac propterea & latera ipſorum potentia commenſurabilia exiſtent. Quare lineæ longitudine commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt.*
[b] *3. defin.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed tamẽ, quam numerus ſimpliciter ad numerum, [c] *potẽtia quidem commenſurales ſunt,* [d] *cũ earum quadrata commẽſurabilia ſint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum; perſpicuum eſt, lineas potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine commenſurabiles eſſe. Solum enim eæ lineæ potentia commenſurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque ſunt commenſurabiles, vt conſtat ex ſecunda parte huius theorematis.*
[c] *3. defin.*
[d] *6. decimi*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ſed tamen, quam numerus ad numerum, incommenſurabiles quidem ſunt longitune, at potentia commenſurabiles, vt modo diximus; liquido conſtat, lineas longitudine incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles

eſſe.

eſſe. ſolum enim ea linea longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [a] *potẽtia quoque incommenſurabiles ſunt,* [b] *cum earum quadrata incommenſurabilia ſint.*

[a] 4. defin.
[b] 2. decimi

POSTREMO lineas potentia incommenſurabiles, eſſe omnino & longitudine incommenſurabiles, perſpicuum eſt. Nam ſi longitudine eſſent commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim potentia incommenſurabiles. Quam ob rem linea potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt.

SCHOLIVM.

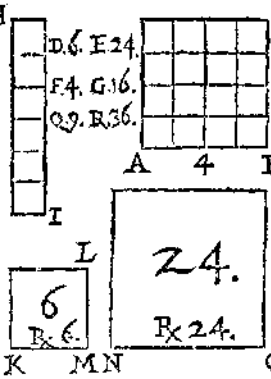
VT autem ſcopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiuſq; percipiatur, diligenter conſiderãda ſunt hæc, quæ ſequuntur. Primum lineas rectas longitudine commenſurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non ſolum eſſe eas, quæ numeris expri mi poſſunt, ſi cũ linea Rationali propoſita comparentur; quales ſunt illæ, quæ in demonſtratione ſunt poſitæ: (eſt enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis poſſunt numeris efferri, ſi cum Rationali linea propoſita conferantur: Deinde econtrario, quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorũ lineæ, ſeu latera, ex ſecunda theorematis parte, longitudine ſunt commenſurabilia, non ſolum ea eſſe intelligenda, quæ continent totidem quadratas menſuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis linea reſoluitur, quot ſunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipſis proportionem habentibus; cuiuſmodi ſunt quadrata in demonſtratione deſcripta: (continet enim quadratum ex AB, quatuor menſuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates ſunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures menſuras quadratas complectuntur, quæ

ſunt unitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe numero enim lineæ datæ cõmenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Rationali lineæ propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratæ menſuras, vel plures continent, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expreſſa numero 4. cuius quadratum AC, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, [a] vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectangulum HI, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [b] atq; ipſi HI, quadratum æquale conſtituatur KL, cuius latus KM. Poſtremo per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inuenietur recta NO, ad cuius quadratum NP, ita ſe habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniã igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratũ KL, ad quadratum NP, per conſtructionem; Continet autem quadratum KL, 6. mẽſuras quadratas, quia latus 16. continet quadratũ Rationale AC: (conſtructum enim eſt quadratum KL, æquale rectangulo HI, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris.) continebit quadratum NP, earundem menſurarum quadratarũ 24. ac propterea

[a] 16. octaui

[b] 14. ſecũdi



Preterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erũt Rad 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntq; lineæ Rationali AB, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeãt, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6 duplicatam laterum KM, NO, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla uidelicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. [a] *Quare longitudine commenſurabiles ſunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi cõſiderentur eædem lineæ KM, NO, ſimpliciter, & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum. n. proportionem habeant ſubduplam, ſi KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiuſdem magnitudinis partes 4 ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.*

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerũ G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor unitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadẽ proportione ſumantur Q, R, pauciores talis menſuras complectuntur quadrata KL, NP, quam ſint vnitates in numeris quadratis Q, R, cũ alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus cõſtituatur; manifeſtũ eſt, in hoc theoremate intelligenda quoq; eſſe quadrata proportionẽ habentia, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, quæ pauciores quadratas mẽſuras, vel plures cõtrahẽdũt, quã vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur

cum

[a] 6. decimi

cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadē quadrata KL, NP, conſiderentur abſolutè, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nā ſi recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum KL, quatuor menſuras quadratas, & quadratum NP, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eadem lineæ ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quā quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITA QVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis lō gitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur a rectis lineis longitudine inter ſe commē ſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpe numero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplū eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus;

Nulla

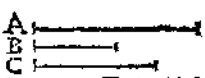
Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum nu- *um, quod inter numeros duplã proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera, nempe diameter, & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabilia. Hoc etiam nos demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. Quod tamen clarius oſtendet Euclides propoſ. vltima huius lib.*

THEOR. 8. PROPOS. 10.

II. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, ſitque A, prima ſecundæ B, commenſurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commenſurabilem eſſe. Quoniam.n. A, & B, inter ſe commenſurabiles ſunt,[a] habebit A, ad B, proportionem quã numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F.[b] Quare C, & D, commenſurabiles inter ſe ſunt.



[a] 5. decimi

[b] 6. decimi

SED ſit iam A, ipſi B, incommenſurabilis. Dico & C, ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Quoniam.n. A, & B, incommenſurabiles ſunt,[c] non habebit A, ad B, proportionem

[c] 7. decimi

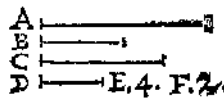
tionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [a] Quare C, & D, incommenſurabiles ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 8. decimi

SCHOLIVM.

QVOD ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commenſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus poſteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.

SI autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commenſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cõmenſurabilis eſt potentia ipſi B, [b] *erunt earum quadrata commenſurabilia,* [c] *ac propterea proportionem habebunt, quã numerus ad numerum.* [d] *Eſt autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propoſitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earum quadrata figuræ ſimiles ſimiliterq; deſcriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ.* [e] *Quare commenſurabilia erunt;* [f] *Ac propterea lineæ C, D, potentia commenſurabiles.*



Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt; non erit earum proportio, qua numerus ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ 8. huius lib. Sunt autem potentia commenſurabiles, vt oſtendimus: Igitur potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitũ.

[b] 3. defin. [c] 5. decimi [d] 22. ſexti [e] 6. decimi [f] 3. defin.

EA-

EADEM ratione, ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommenſurabilis. Nam ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles; erunt ipſarum potentiæ commenſurabiles; ac propterea ipſæ potentia tantum commenſurabiles erunt. Igitur, vt nunc oſtendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commenſurabiles; ac idcirco longitudine tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS ſi quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida; ſequitur nihilominus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines commenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ longitudine ſint commenſurabiles, erit earum proportio, qua numeri ad numerum, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandē, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [a] atque adeo commenſurabiles erunt. Si vero lineæ lōgitudine incommenſurabiles ſint, ſiue potentia commenſurabiles exiſtant, ſiue non; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, qua numeri ad numerum. [b] Quare incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

[a] 6. decimi

[b] 8. decimi

EODEM modo, ſi priores duæ magnitudines fuerint ſuperficies, vel ſolida, poſteriores vero duæ, lineæ, demōſtrabimus, ſi plana, vel ſolida commenſurabilia ſint, vel incommenſurabilia, lineas longitudine commenſurabiles eſſe, vel incommenſurabiles. Si enim plana, ſolidaue commenſurabilia ſint, [c] habebunt ipſa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cū ipſis rationē habentes, proportionem habebunt, quā numerus ad numerū; ac propterea longitudine commenſurabiles erunt, vt diximus in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Si vero plana, vel ſolida ſint incommenſurabilia, nō habebūt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipſis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommenſurabiles erunt per ea, qua docuimus in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Quod eſt propoſitum.

[c] 5. decimi

LEMMA

LEMMA.

DVOS numeros planos innenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non ſimiles, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. *A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus.*

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EX-

EXPONANTVR quatuor numeri A,B,C,D, ita vt non ſit ſicut A,ad C,ita B, ad D;& fiat ex A,B, numerus E; & ex C,D,numerus F.Perſpicuũ igitur eſt E,F,numeros planos eſſe, planos autem diſſimiles;quoniam latera proportionalia non ſunt, quod facere oportebat.

A, 2.	C, 3.
B, 6.	D,16.
E, 12.	F,48.

HÆC eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errãt autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpe numero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti, 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4 proportionalia lateribus poſterioris 6. & 8. vt conſtat; quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & 6. noua ſint proportionalia lateribus poſterioris accepta 3. & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſimiles, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunq; duobus lateribus alterius; quæ de re plura ſcripſimus in defin. 21. lib. 7. & in ſcholio propoſ. 23. lib. 8.

PROBL. 3. PROPOS. 11. 10. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta propoſita A, cui primum inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantum.Inueniantur,per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum

dratum numerum: Deinde ex corollario propoſ. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerũ C. Dico D, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; ergo quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quod autem tantum longitudine ſint incommenſurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C, ipſa commẽſurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantum incommenſurabiles ſunt.

A
E
D
B, 10.
C, 6.

a 9. decimi

b 6. decimi

SIT iam eidem rectæ propoſitæ A, inuenienda linea incommenſurabilis lõgitudine, & potẽtia. Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incõmenſurabiles, media proportionalis. Dico E, ipſi A, incommenſurabilẽ eſſe longitudine, & potẽtia. Quoniam enim eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum erit & quadratum ex A, incommenſurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potẽtia ſunt incõmenſurabiles; ac proinde ex coroll. propoſ. 9. huius lib. & omnino lõgitudine incõmenſurabiles ſunt. Eſt igitur E, ipſi A, incommenſurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propoſitæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 13. ſexti

d 10. deci.

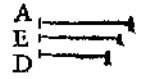
SCHOLIVM.

SI igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, ita vt ab ea menſuræ cæterarum ſumantur; erit & rectæ D, per de-

finitionem

fin. 6. Rationalis, quia potentia illi eſt commenſurabilis, licet eidem longitudine incommenſurabilis ſit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommenſurabilis ſit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demonſtratione huius theorematis liquido conſtat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commenſurabiles, vel quod idem eſt, inter duas longitudine tantum incommenſurabiles, eſſe vtrilibet illarum incommenſurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. Ex eo enim quod recta A, D, ſunt longitudine tantum incommenſurabiles, vel commenſurabiles potentia tantum, demonſtrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine, & potentia: Eodemque argumento oſtendemus eandem longitudine, & potentia ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, ſint continuè proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Eſt autem recta D, recta A, incommenſurabilis longitudine. [a] Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommenſurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin. incommenſurabiles ſunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propoſ. 9. huius lib.



[a] 10. deci.

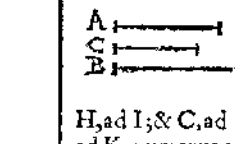
IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propoſitio à Theone propoſitioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum eſſe puto, cum ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitione decima demõſtretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

12. 8.

QVAE eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe commenſurabiles. Cum enim A, & C, ſint commenſurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerũ E. Rurſus quia C, B, commenſurabiles ſunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] ſumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; ſitque H, ad I, vt D, ad E, hoc eſt, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc eſt, vt C, ad B. Quoniam igitur eſt A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, [c] inter ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini commenſurabiles ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.



D. 10. E, 8.
F, 2. G, 3.
H, 5. I, 4. K, 6.

[a] 5. decimi

[b] 4. octaui

[c] 6. decimi

SCHOLIVM.

QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, atq; A, & B, ipſi C, longitudine commenſurabiles exiſtant, erunt quoq; A, & B, inter ſe longitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commenſurabiles erunt, vt ad propoſ. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipſi C, potentia commenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo & A, B, inter ſe commenſurabiles potentia. Cum enim A, & C, ſint potentia commenſurabiles, [d] *erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirũ vt F, ad G.* [e] *Sumptis ergo in eiſdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps pro-*

[d] 5. decimi

[e] 4. octaui

por-

portionalibus; erit rursum ex æquo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, vt numerus H, ad numerum K.[a] Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ lõgitudine inter se cõmensurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantũ sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se cõmensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commẽsurabiles, quas quidem inuenietmus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

[a] 6. decimi

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitq; A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

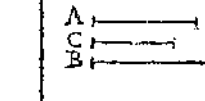
A ----------
C --------
B ----------

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantũ sint cõmensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantũ, colligemus quidẽ eodem argumento, reliquã B, eidem C, potentia esse commensurabilẽ; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est cõmensurabilis ex hypothesi. Non autẽ colligere licebit, si A, ipsi C, cõmensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidẽ C, longitudine commensurabilẽ esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine cõmensurabilis est, sed C, quidẽ longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

12. 0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommẽsurabiles esse. Si enim B, dicatur esse cõmensurabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 12. deci.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [b] *ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

[b] 11. deci.

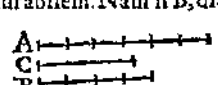
QVONIAM *vero hæc propositio 13. apud Theonem lemma*

lemma eſt, ſit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac ſertem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

THEOR. 11. PROPOS. 14. 13. 8.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommẽſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cũ & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.



[a] 12. deci.

SCHOLIVM.

HIC quoque, ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, [b] eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (Cum hoc poſito, vtraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, ipſi C, longitu-

[b] 12. deci.

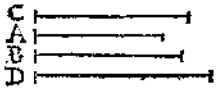
dine incommenſurabilis. Quod ſi A, & B, cõmenſurabiles ſint potentia tantum, & A, ipſi C, potentia incommenſurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipſi C, potentia incommenſurabilem eſſe. Alias ſi B, C, potentia eſſent commenſurabiles; & A, C, potentia commenſurabiles eſſent. (cum hoc poſito, vtraque A, C, ipſi B, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod non ponitur.

[a] 12. deci.

COLLIGVNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis ſequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonſtrantur, perutile.

QVAE incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommẽſurabiles A, B, quibus commenſurabiles ſint C, & D, nempe C, ipſi A, & D, ipſi B. Dico C, & D, inter ſe incommenſurabiles eſſe. Quoniam enim A, & C, commenſurabiles ponuntur, & eſt A, ipſi B, incommenſurabilis; [b] erit quoque reliqua C, eidem B, incommenſurabilis. Rurſus quia D, & B, commenſurabiles ponuntur, & eſt B, oſtenſa ipſi C, incommenſurabilis; [c] erit & D, reliqua eidem C, incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.



[b] 14. deci.

[c] 14. deci.

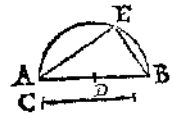
SI autem magnitudines A, B, C, D, ſint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommenſurabiles, vel longitudine & potentia; ſint autem C, D, ipſis A, B, longitudine commenſurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incõmenſurabiles. Si vero A, & B, incõmenſurabiles ſint potẽtia, & ipſis potẽtia tantũ cõmenſurabiles C, & D; oſtendemus ſimiliter C, & D, potentia eſſe incõmẽſurabiles; vt perſpicuũ ẽ.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inęqualibus, inuenire id, quo maior plus poteſt, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, oſten-

oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex ijs, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatque inuenire, quo AB, plus poſſit quam C. Diuiſa AB, bifariam in D, deſcribatur



ex centro D, & interuallo DA, vel DB, ſemicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ EB. Cum enim angulus E, in ſemicirculo rectus ſit; erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc eſt, quam C, quadrato rectæ EB. Quod eſt propoſitum. Similiter

[a] 1. quarti
[b] 31. tertij
[c] 47. primi

DVABVS datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam aliter tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ AE, EB, quæ ſi coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, quippe cum quadratum ex AB, æquale ſit quadratis ex AE, EB.

[d] 47. primi

THEOR. 12. PROPOS. 15. 14. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit

quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quã quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quã ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incõmenſurabilis lõgitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, poſitque A, prima plus quam B, ſecunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus poſſit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si vero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilẽ eſſe. Quoniam, n. eſt vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autẽ quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotheſim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A,



[a] 22. ſexti

[b] 22. ſexti

eſt

eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quòque C, ipſi F, longitudine commẽſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

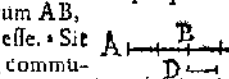
EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantũ commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

15. 9.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilem eſſe. [a] Sit enim ipſarum AB, BC, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, [b] metietur quoque D, totam A C, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commẽſurabiles. Similiter cum D, metiatur A C, & B C; erunt & A B, BC, commenſurabiles; Ac propterea A C, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.



[a] 3. decimi

[b] 1. pron.

SED



SED iam tota AC, ex AB, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi AB. Dico & AB, BC, inter ſe commenſurabiles eſſe. Sit enim D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commenſurabiles erunt AB, BC, inter ſe. Eodē argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi AC, ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines cōmenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

a 3. decī.

b 3. pron.

COROLLARIVM.

HINC ſequitur, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ commenſurabilem eſſe. Vt ſi AC, ipſi AB, ſit commenſurabilis, eſſe quoque eandem AC, reliquæ BC, commenſurabilem. Nam vt in poſteriori parte theorematis oſtenſum eſt, ſemper D, communis menſura totius AC, & ablatæ AB, cum metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commenſurabiles ſunt AC, BC. Quod eſt propoſitum.

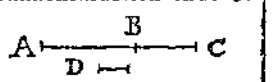
16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quę a principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incōmenſurabiles

rabiles A B, B C. Dico totam quoq; magnitudinem A C, vtrique ipſarum A B, B C, incommenſurabilem eſſe. Si enim non eſt vtrique incommenſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt,



nempe ipſi A B, [a] ſitque D, communis menſura ipſarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; [b] metietur quoque D, reliquam B C; Ac propterea cum D, metiatur vtramque A B, B C erunt A B, B C, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commẽſurabilis eſt A C, ipſi A B; Eademque ratione neque ipſi B C, commenſurabilis erit. Quare vtrique ipſarum A B, B C, incommenſurabilis eſt.

[a] 3. decimi

[b] 3. ſecun.

SED iam tota A C, compoſita ex A B, B C, incommẽſurabilis ſit vni ipſarum componentium, nempe ipſi A B. Dico quoque A B, B C, incommenſurabiles eſſe. Si enim ſint commenſurabiles, [c] erit quoque tota A C, vtrique ipſarum A B, B C, commenſurabilis Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A C, alteri ipſarum, nempe ipſi A B, incommenſurabilis. Non ergo commẽſurabiles ſunt A B, B C. Eodem argumento oſtendemus A B, B C, incommenſurabiles eſſe, ſi A C, ipſi B C, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 16. d. ti.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliqua incommenſurabilem eſſe. Nempe ſi A C, incommenſurabilis ſit ipſi A B, eſſe quoq; eandem A C, reliqua B C, incommenſurabilem. Si enim A C, ipſi B C, foret commenſurabilis, eſſet quoque A C, ex coroll. præcedentis propoſ. reliqua A B, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. ponitur enim incommenſurabilis. Non eſt ergo A C, ipſi B C, commenſurabilis, ſed incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.

SCHO-

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

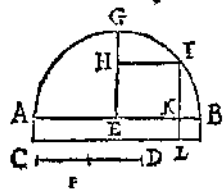
HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

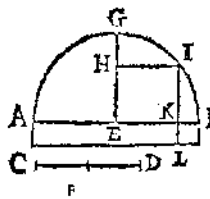
QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidium maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum.

ptum,(quod quidem quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti,ex ſcholio propoſ.4.lib.2.) minus ſit quadrato ex dimidiata parte maioris deſcripto; (quod quidem applicatum eſt ad dimidium maioris,deficitq; figura quadrata.) Quamuis,inquam, abſolui hoc poſſit per propoſ. 28.lib 6. libet tamen idipſum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori.Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB,maior ſit, oporteatque ad AB,applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata,quod quidē parallelogrammum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta C D, deſcripti. Sectis rectis AB, CD,bifariam in E,& F,deſcribatur ex centro E, & interuallo EA,vel EB,ſemicirculus AGB;& ex E,perpendicularis ad AB, ducatur EG.Et quia tota AB,maior ponitur quam tota CD,erit quoque A E, dimidia ipſius AB, hoc eſt E G,ipſi A E, æqualis, maior quam C F, dimidia ipſius C D.Poſita igitur E H,æquali ipſi C F, agatur per H, ipſi A B, parallela H I,demittaturque I K L,ad A B, perpendicularis, & ſit K L, ipſi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum B L.Dico parallelogrammum A L,applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata B L,æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ C D.Quoniam.n. K I,media proportionalis eſt inter AK,KB,vt in ſcholio propoſ.13.lib.6.tradidimus;[a] erit rectangulum ſub A K,K B,hoc eſt, rectangulum A L, æquale quadrato ex K I,hoc eſt,quadrato ex E H;[b] (eſt enim K I,ipſi



[a] 17.ſexti

[b] 34.primi



KI, ipſi EH, æqualis, ob parallelogrammum E I,) hoc eſt, quadrato ex C F: Eſt autem quadratum ex C F, quarta pars quadrati ex CD; quod quadratum ex C D, perſcholiũ propoſ. 4. lib. 2. quadruplũ ſit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectam A B, applicatum deficienſque quadrato B L, æquale eſt quartæ parti quadrati ex C D, deſcripti. Quod eſt. propoſitum.

SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate abſoluemus & hoc problema, quod ſequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectãgulum ſub partibus contentum, æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quam quadratum a dimidia linea deſcriptum.

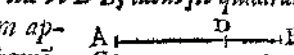
SIT enim recta data A B, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex C F, non maius quam quadratum ex dimidia A E, ita vt latus C F, non maius ſit latere A E. Educta ergo ad A B, perpendiculari E G, ſit E H, æqualis ipſi C F. Deinde acta H I, parallela ipſi A B, demittatur I K, perpendicularis ad A B. Quibus peractis oſtendemus, vt prius, rectangulum ſub partibus A K, K B, æquale eſſe quadrato ex I K, hoc eſt, quadrato ex C F, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale eſt poſitum quadratum ex C F. Quod eſt propoſitum. Diximus autem, rectilineum datum non debere eſſe maius, quam quadratum ex dimidia linea deſcriptum; quia ſi maius eſſet, eſſet quoque recta C F, maior quam recta E G. Quare ex E G, abſcindi non poſſet recta ipſi C F, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

LEMMA

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales A *B*, *& C*; *& ad maiorem* A *B*, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt* D *B, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmẽta* A *D*, *D B*, *inæqualia esse. Si enim* A *D*, *D B*, *segmenta dicantur esse æqualia; cum ex* 1. *lemmate parallelogrammum applicatum ad* A *B*, *deficiensque figura quadrata ex* D *B*, *descripta, æquale sit rectangulo sub* A *D*, *D B*; *sit autem quod sub æqualibus* A *D*, *D B*, *quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* A *D*, *dimidio ipsius* A *B*, *descriptum; atque adeo ex scholio propos.* 4. *lib.* 2. *quadratum ex* A *B*, *quadruplũ erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C, per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex* A *B*, *& C, æqualia sunt, atque rectæ* A *B*, *& C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, &* A *B, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta* A *D*, D *B. Quod est propositum.*



HOC facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per

ſit per conſtructionem, E H, æqualis dimidiatæ parti ipſius C D, nempe ipſi C F, ductaque H I, parallela ipſi A B, & tandem demiſſa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione ſint A K, K B; manifeſtum eſt A K, K B, ſegmenta eſſe inæqualia, cum A B, in E, ſecta ſit bifariam. Immo hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

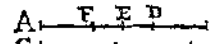
17. 13.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſsit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

SINT

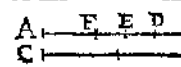
SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, deſcripti, per lemma ſecundum præcedentis propoſ. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum ſub A D, B D, faciatque ſegmenta AD, DB, longitudine commenſurabilia. Dico AB, plus poſſe quã C, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quoniã. n. per 3. lẽma præcedentis propoſ. AD, maior eſt, quam DB; diuidatur AB, bifariam in E, & ipſi E D, æqualis ſumatur E F. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales ſint, & ablatæ quoque EF, ED; erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuiſa eſt bifariam in E, & non bifariam in D; [a] erit rectangulum ſub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli ſub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex EB: Eſt autem quadruplo rectanguli ſub AD, DB, æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum ſub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale eſt quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum eſt ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum F D, dupla ſit ipſius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale eſt quadratum ex AB. (quod quadratum ex AB, quadruplum ſit per ſcholiũ propo. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipſius AB.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia ſunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus poteſt quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur FD, demonſtrare oportet longitudine commenſurabilem eſſe ipſi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commenſurabiles; [b] erit quoq; tota AB, parti DB, commenſurabilis longitudine. Eſt autem & ipſi DB, compoſita ex DB, AF, longitudine commenſurabilis: (quod compoſita ex DB, AF, dupla ſit ipſius D B) Igitur cum vtraque A B, & compoſita ex D B, A F, longitudine ſit commenſurabilis ipſi D B; [c] erunt quoque AB, & compoſita ex D B, A F, longitudine inter ſe commenſurabiles; Ac propterea cum A B, compoſita ex AF, DB,



[a] 5. ſecũdi

[b] 16. deci.

[c] 12. deci.



DB, tanquam una, & ex FD, cõmẽſurabilis ſit longitudine cõpoſitæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. commenſurabilis lõgitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus poteſt quam C, quadrato rectæ FD, longitudine ſibi commenſurabilis.

SED iam AB, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammũ applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine eſſe commenſurabiles. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus AB, plus poſſe, quam C, quadrato rectæ FD. Quare cũ, AB, ponatur plus poſſe, quam C, quadrato rectæ lõgitudine ſibi cõmenſurabilis; erit recta AB, ipſi FD, lõgitudine cõmenſurabilis. Igitur cũ tota AB, cõpoſita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commenſurabilis ſit longitudine ipſi FD; erit eadem AB, longitudine cõmenſurabilis reliquæ compoſitę ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Eſt autem & compoſita ex AF, DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis, cum ipſius ſit dupla: Igitur cũ vtraque AB, DB, longitudine ſit cõ-
[a] 12. deci. menſurabilis compoſitæ ex AF, DB; [a] erunt quoq; AB DB, longitudine inter ſe commenſurabiles: Atque adeo cum tota AB, compoſita ex AD, DB, commenſurabilis
[b] 16. deci. ſit longitudine ipſi DB; [b] erunt ipſæ AD, DB longitudine quoque inter ſe commenſurabiles. Quocirca ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonſtrandum.

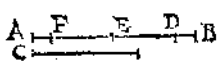
18. 14. THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammũ ad maiorẽ applicetur deficiẽs figura quadrata, & in partes incõmenſurabiles lõgitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit,

quam

quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB; quartæ autem parti quadrati ex C, minore deſcripti applicetur ad AB, per 2. lemma propoſ. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incõmenſurabiles. Dico AB, plus poſſe quã C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur demonſtrare oportet ipſi A longitudine eſſe incommenſubilem. Quoniam rectæ AD, DB, ponuntur longitudine incommenſurabiles; [a] erit quoque tota AB, parti DB, longitudine incommenſurabilis. Sed DB, longitudine commenſurabilis eſt compoſitæ ex DB, AF, cum hæc illius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commẽſurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipſa DB, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ AB: [b] erit quoque reliqua compoſita ex DB, AF, eidem AB, longitudine incommenſurabilis: Ac propterea cum AB, compoſita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex AB, DB, erit eadem AB,

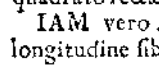


[a] 17. decimi.

[b] 14. decimi.

per coroll.propoſ.17. huius lib.& reliquæ F D,longitudine incommenſurabilis.Ergo A B,plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D,longitudine ſibi incommẽſurabilis.

IAM vero A B, plus poſsit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommẽſuraBilis;& quartæ parti quadrati ex C,æquale parallelogrãmum applicetur ad A B, deficiẽs figura quadrata,faciatque in recta AB,partes AD,DB.Dico & rectas AD, DB, eſſe incommenſurabiles longitudine.Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus vt prius,rectam AB,plus poſſe quam C,quadrato rectæ FD.Quare cum AB,ponatur plus poſſe,quã C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; erit AB,ipſi FD,incommenſurabilis longitudine.Igitur cum tota AB,compoſita ex FD,& ex AF,DB, tamquam vna,longitudine incommenſurabilis ſit ipſi F D; erit eadem AB,per coroll.propoſ.17.huius lib.& reliquæ compoſitæ ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis : Eſt autem compoſita ex AF,DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis,cum illa huius ſit dupla. Igitur cum duarũ linearum commenſurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur,& DB, ipſa compoſita ex A F,DB,longitudine incommenſurabilis ſit rectæ A B; [a] erit & reliqua DB,eidem AB,longitudine incõmenſurabilis ;Ac proinde cum tota AB,compoſita ex AD,DB, incommenſurabilis ſit ipſi DB, longitudine ; [b] erunt & ipſę A D, D B, longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales,quartę autem parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] *14. deci.*

[b] *17. deci.*

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus;nunc ad Rationales & Medias tranſit in ſequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonſtratum eſt, lineas longitu-

dine

dine commenſurabiles, omnino & potentia cõmenſurabiles eſſe, potentia vero commenſurabiles, nõ omnino & longitudine, ſed poße & longitudine commenſurabiles eße, & incommenſurabiles; manifeſtum eſt, ſi expoſitæ Rationali aliqua linea cõmenſurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si vero expoſitæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quod ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis; dicetur & ſic Rationalis, potentia tantum ipſi commenſurabilis.

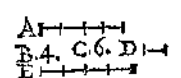
LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolum cõmenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum: Et ſi quidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur, etiã potentia commenſurabiles eſſe; Si vero potentia inter

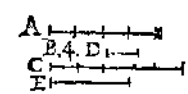
ſe ſolum ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſæ quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearũ Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe cõmenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali, ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia. Hæc autem tria genera inuenientur hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes, quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliã E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cum habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarũ vna, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.



IAM vero D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cum ergo & inter ſe



ſint

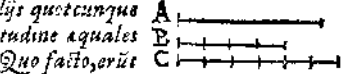
ſint longitudine commenſurabiles; inuenta erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

POSTREMO expoſitæ Rationali A, [a] inueniatur recta B, longitudine tantum incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erũt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolum eſſe cõmenſurabiles. Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeo & potentia; [b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolum potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.

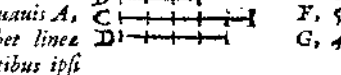
[a] 11. deci.

[b] 12. deci.

[c] 14. deci.



QVOD ſi quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe cõmẽſurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mẽſura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipſi A, æqualibus, quot ſunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem menſuram A, longitudine commenſurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe eſſe commenſurabiles, facile hoc modo demonſtrabimus. [d] *Quoniã Rationales lineæ*

[d] 6. defin.

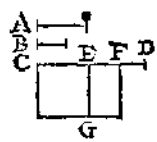
sunt, quæ expoſitæ Rationali ſunt commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] *quæ autem eidem commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt; manifeſtum eſt, Rationales lineas quaſcunque inter ſe commenſurabiles eſſe.*

[a] 12. deci

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum ſub A, & B, comprehenſum. Ex quantacunque n. linea recta CD, abſcindatur C E, ipſi A, æqualis, & EF, ipſi B. Deinde ſuper CE, deſcribatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum G F, contentum ſub C E, & E F, hoc eſt, ſub A, & B. [b] *Quoniam igitur eſt vt CE, ad EF, hoc eſt, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc eſt, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, ſub A, & B, comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, vt quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.*



[b] 1. ſexti

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod eſt propoſitum.

LEMMA

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit nãq; C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia, quod nimirum ab ex poſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur B, Rationale eſt, [a] *erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B,* [b] *inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile,* [c] *Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.*



[a] 9. defin.

[b] 12. deci.

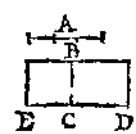
[c] 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

19.
15.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulũ BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorũ. (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorũ, quos in ſcholio 2. antecedẽtis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarũ



BC,



BC, CD, Rationali expoſitę A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei vtraque commenſurabilis ſit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale eſſe. Deſcribatur. n. ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expoſitæ A, commenſurabilis eſt vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum; [a] erit quoque quadratum BE, ex BC, deſcriptum quadrato ex A, commenſurabile: [b] Eſt autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia uocantur, vel Irrationalia. [c] Igitur & BE, illi commenſurabile, Rationale eſt. Quia vero BC, hoc eſt, EC, & CD, longitudine commenſurabiles ſunt; (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter ſe longitudine commenſurabiles.) [d] & eſt vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; [e] erunt quoque EB, BD, commenſurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedętis propoſ. BD, Rationali BE, commẽſurabile, Rationale eſt. Quod igitur ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis, &c. Quod erat demonſtrandum.

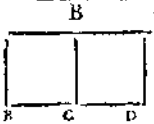
a 3. *defin.*
b 8. *defin.*
c 9. *defin.*
d 1. *ſexti*
e 10. *deci.*

20.
16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

SIT rurſum expoſita Rationalis A, & alia Rationalis BC, ſecundum aliquem modorum, quos in ſcholio 2. propoſitionis 19. expoſuimus, hoc eſt, ſiue BC, æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non, commenſurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantum. Applicetur autẽ ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalẽ eſſe, & ipſi BC, commenſurabilẽ longitudine. Deſcribatur. n. ex BC, quadratũ BE; quod ſimili-



ter,

ter, vt in antecedenti propoſ. oſtendemus Rationale eſſe. Quia igitur B E, B D, Rationalia ſunt, [a] ipſa commenſurabilia erũt quadrato ex linea Rationali expoſita A, deſcripto; [b] Ac propterea & cõmenſurabilia inter ſe erũt: [c] Eſt autẽ vt B E, ad B D, ita E C, hoc eſt, B C, ad C D. Igitur & B C, C D, cõmenſurabiles ſunt longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. docuimus. Eſt ergo C D, ipſi B C, cõmenſurabilis lõgitudine: [d] ſed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expoſitæ A, commenſurabilis ſit, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demõſtrauimus. Quare latitudo C D, Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis ipſi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinẽ efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. defin.
[b] 11. deci.
[c] 1. ſexti
[d] 6. defin.

LEMMA.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe.

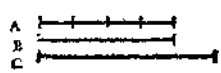
Si enim dicatur Rationalis; erit eius A——— *quadratum* Rationale *quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.*

HOC idẽ conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potẽtes ſpatia Irrationalia, vocãtur Irrationales.

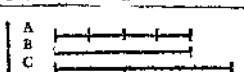
LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium *potentia tantum inter ſe commenſurabiliũ. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ*



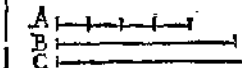
Ra-



Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, [a] *inueniatur C, longitudine tantũ incõmenſurabilis, ſeu (quod idẽ eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt; (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum commenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.*

[a] 11. deci.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantũ incommenſurabilis [b] *inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraque B, C, expoſitæ Rationali A, ſit potentia commenſurabilis;* [c] *erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles.*



[b] 11. deci.

[c] 6. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si inuenienda sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

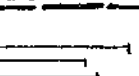
SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur nempe, A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantũ commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; similiterq; quadratũ ex E, ad quadratũ ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D,) erunt ipsa inter se commẽsurabilia, ac propterea & rectæ ipsæ potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. [b] *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.*

A 5. E
B 7. F
C 3. G
D 2. H

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

QVOD si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus



C, 10. D, 6, E, 7.

omnibus illis commenſu rabilis ſit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autẽ alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, [a] commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus; (quòd D, & E, qui ambo non ſint quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoque plani non ſimiles, ac proinde ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) [b] erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

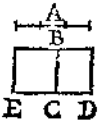
21. 19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et

Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum BD, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi BD, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ uocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus. [a] Et quoniam eſt vt EC, hoc eſt, BC, ad CD, vt BE, ad BD. Eſt autem BC, ipſi CD, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipſi BD, incommenſurabile. [b] Quare cum BE, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A; ſit autem BE, ipſi BD, incommenſurabile; [c] erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A, eidem BD, incommenſurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expoſitæ incommenſurabile exiſtens, [d] Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum BD, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.



VOCETVR autem hæc linea potens ipſum BD, Media, [e] propterea quod media proportionalis ſit inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratũ æquale ſit rectangulo BD, ſub ipſis BC, CD, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 1. *ſexti.*

[b] 9. *defin.*

[c] 14. *decī.*

[d] 10. *defin.*

[e] 17. *ſexti*

SCHO-

SCHOLIVM.

*17. sexti

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur.[a] Cum enim eius quadratum æquale sit rectãgulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hæc linea Media hoc loco appellatur.

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est, vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint cõtinue proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22 lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaq; non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus

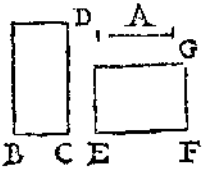
rabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23. 22. 20.

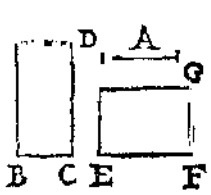
QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; appliceturque ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato



æquale

[a] 45. pri.



æquale eſt, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi B C, longitudine incommenſurabilẽ. Quoniam. n. A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum inter ſe commẽſurabilibus contentum; alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, ſub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commenſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt
[a] 14. ſexti etiam ipſum BD; æqualia erunt B D, & E G, [a] lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D; [b] Ac propterea
[b] 22. ſexti quoque vt quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratũ ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F ponantur Rationales; atque adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantum.) [c] Igitur & quadratum ex F G, commenſu-
[c] 10. deci. rabile erit quadrato ex C D; propterea que & rectæ F G, CD, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expoſitę Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa non eſt expoſita Rationalis; erit quoque C D, expoſitæ Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommenſurabilis ipſi BC. Quoniã. n. EF, FG, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt EF, ad F G, ita quadratum ex EF ad rectangulum EG, ſub E F, FG, contentum, ex
[d] 10. deci. lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. [d] erit quadratum ex E F, incommenſurabile rectangulo E G, atque adeo rectangulo B D, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex EF, commenſurabile eſt quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales ſint, atque idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commenſurabile ſit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem
[e] 13. deci. quadrato ex EF, incommenſurabile; [e] incommenſurabi-

lia

lia erunt quadratum ex CD,& rectangulum BD. Eſt autem ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex CD,ad rectangulũ BD,vt recta CD,ad rectam BC. [a] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine CD,& BC. Rationalis ergo eſt CD, & Rationali B C, longitudine incommenſurabilis. Quamobrem, quod a Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonſtrandum erat. [a] 10. deci.

SCHOLIVM.

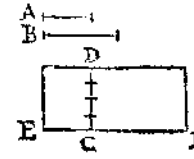
FACILIVS quam ex propoſ. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, ſi ipſis B C, & A, [b] ſumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim BC, A, & CD, proportionales ſint; [c] erit rectangulum B D, ſub extremis B C, C D, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A. [b] 11. ſexti [c] 17. ſexti

HAC arte vtendum erit & in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuſpiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifeſtũ eſt, omne Medium, hoc eſt, ſpatium, quod linea Media poteſt, æquale eſſe cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus. Nam ſi illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommenſurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium cõtentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24. MEDIAE cõmenſurabilis, Media eſt. 23. 21.

SIT Mediæ A, recta B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, Mediam eſſe. Expoſita enim ſit Rationalis C D, [d] ad quam applicetur rectãgulũ DE, æquale quadrato ex A, Media. [d] 45. primi



Quoniam igitur DE. Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit CE, latitudinem; [a] erit CE, Rationalis ipſi CD, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus ad CD, Rationalem [b] applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erũt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, DE, DF, commenſurabilia. [c] Eſt autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. [d] Igitur EC, CF, longitudine ſunt commenſurabiles. Sed EC, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi CD, incommenſurabilis. [e] Igitur & CF, longitudine eidem CD, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ CD, ſit commenſurabilis; (Nam cum EC, CE, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & EC, ipſi CD, commenſurabilis ſaltem potentia, quod Rationalis ſit; erit & CF, eidem CD, commenſurabilis potentia, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commenſurabiles, (Ac proinde recta B, poteus rectangulum DF, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, Media eſt. Mediæ igitur commenſurabis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

[a] 23. deci.
[b] 45. primi
[c] 1. ſexti
[d] 10. deci.
[e] 14. deci.
22. deci.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſſe. Poſtquam enim demonſtratum eſt DF, commenſurabile eſſe Medio DE, oſtenſum ex eo mox fuit DF, eſſe quoque Medium. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

SIT ſpatium DF ſpatio Medio DE, commenſurabile. Dico & DF, Medium eſſe. Poſsit enim A, Media ipſum DE, Medium, (Nam cum DE, Medium ſit, poterit ipſum recta, qua Media dicitur, vt

in

in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipſum D F. Quoniam igitur D E, D F, commenſurabilia ſunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipſis æqualia, commenſurabilia. Quare A, B, rectæ potentia ſaltē ſunt cōmenſurabiles; Atq; idcirco ex. ſtante A, Media, erit & B, illi commenſurabilis Media, vt in hoc theoremate oſtenſum eſt. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim ſpatium, quod poteſt Media, Medium appellatur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus.

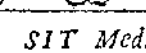
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius lib. de Rationalibus dictum eſt, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commenſurabilem, dici Mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed & potentia; Vniuerſe enim quæ longitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui ſi inueniantur duæ rectæ commenſurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum; [a] *erit vtraque B, C, Mediæ A, commenſurabilis, Media. Cum ergo A, B, ſint longitudine commenſurabiles; & A, C, potentia tantum; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commenſurabiles; & A, C, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*



[a] *24. deci.*

SCHOLIVM.

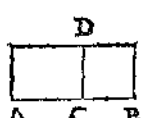
QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commenſurabilis, Mediæ ſit; nõ tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis; cum duæ Mediæ dari poſſint prorſus incommenſurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ ſint duæ Mediæ longitudine & potentia incommenſurabiles.

24.
23.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

CONTINEATVR rectangulum AD, ſub Medijs AC, CD, longitudine cõmenſurabilibus. Dico AD, Medium eſſe. Deſcribatur ex CD, Media quadratũ BD, quod erit Medium. [b] Et quoniam eſt vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autẽ AC, CB, hoc eſt, AC, CD, longitudine cõmenſurabiles; [c] erunt AD, DB, cõmenſurabilia. Quare ſpatium AD, Medio DB, cõmenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. præcedentis propoſ.



[b] *1. ſexti*

[c] *10. deci.*

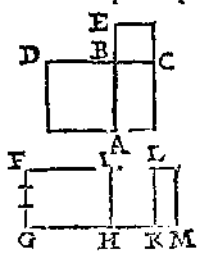
propoſ. Quod ergo ſub Medijs longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

25. 23.

QVOD ſub Medijs potentia tantũ commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehenſum ſub Medijs AB, BC, potentia tantum commẽſurabilibus. Dico AC, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, deſcripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, deſcripto; eritque totũ FM, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero AD, CE, Media ſũt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Mediaque cum applicentur ad Rationales FG, KL, [b] eſt enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, [c] erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipſi FG, ſeu KL, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo & ipſis æqualia rectangula FH, LM, commenſurabilia: [d] Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad KM. [e] Igitur GH, KM, longitudine inter ſe commenſurabiles ſunt. Quare GH, KM. Rationales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali vero FG, ſolum commenſurabiles



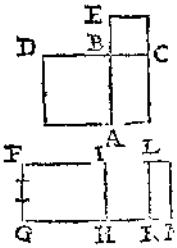
[a] 45. primi

[b] 34. primi

[c] 23. deci.

[d] 1. ſexti

[e] 10. deci.



potentia, cum ei ostensæ sint longitudine incommẽsurabiles; Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, KM, Rationale est. Et quoniam est, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE, (quod DB, B C, ipsis AB, BE, sint æquales, vtraque vtrique) & vt DB, ad BC, ita AD, ad A C; & vt AB, ad BE, ita A C, ad C E: erit quoque vt A D; ad AC, ita A C, ad C E; atque adeo A D, A C, C E, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia FH, H L, L M, proportionalia erunt: [c] Habent autem rectæ G H, H K, K M, easdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales sunt, [d] propterea que rectangulum sub GH, KM, quadrato ex HK æquale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensum Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale est; ideoque & recta HK, Rationalis erit; [e] & ob hoc ipsi FG. Rationali expositæ, hoc est, ipsi H I, commensurabilis vel longitudine, & potẽtia, vel solũ potẽtia. Et si quidẽ HK, ipsi HI, longitudine sit cõmensurabilis; [f] rectangulũ H L, sub Rationalibus HI, HK, lõgitudine comensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipsi H I, potentia solum commensurabilis sit; [g] erit rectangulum HL, sub Rationalibus H I, H K, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, Medium. Est ergo AC, rectangulum sub Medijs A B, B C, potentia tantum commensurabilibus contentum, vel rationale, vel Medium. Quocirca quod sub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 20. deci.
[b] 1. sexti
[c] 1. sexti
[d] 17. sexti
[e] 6. defin.
[f] 20. deci.
[g] 22. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad H I, rectangulum ipsi A C, æquale, [h] *si tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalis sumatur pro latere H K.* [i] *Nam rectangulum sub extremis H I, H K, æquale erit rectangulo sub medijs A B, B C.*

[h] 12. sexti
[i] 16. sexti

HAC

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVGNIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Medijs potentia tantum commenſurabilibus eſſe vel Rationale, vel Mediũ; docebit Euclides propoſ. 28. quanam ratione inuenienda ſint duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propoſ. vero 29. duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.

ITA QVE habemus ex his, [a] rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale; [b] Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum rectãgulum eſſe Irrationale, appellarique Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat, [c] rectangulum comprehenſum ſub duabus Medijs longitudine commenſurabilibus eſſe Medium; [d] Rectangulum autem ſub duabus Medijs potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.

[a] 20. deci.
[b] 22. deci
[c] 25. deci.
[d] 26. deci.

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere; nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulũ AC, comprehenſum ſub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico AC, neque Rationale eſſe, neq; Mediũ, &c. Conſtructis.n. eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH, KM, Rationales eſſe, & ipſi FG, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponũtur incommenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo ipſis æqualia rectangula FH, LM, incommenſurabilia: [e] Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad rectam KM. [f] Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare GH, KM, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles, [g] Ac propterea

[e] 1. ſexti.
[f] 10. deci.
[g] 22. deci.

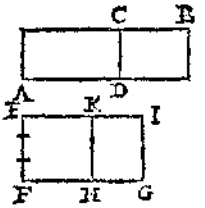
pterea rectangulum ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ
a 27. ſexti dicitur Media. a Poteſt autem rectangulum ſub ipſis GH, KM, recta HK: (Nam, vt prius, oſtendemus tres GH, HK, KM, eſſe proportionales) Igitur HK, Irrationalis eſt, & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationale
b 21. deci. eſſet, b faceret ipſum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, Medium
c 23. deci. eſt; Si enim eſſet Medium, c faceret ipſum applicatum ad Rationalẽ HI, latitudinẽ HK, Rationalẽ, & ipſi HI, longitudine incommenſurabilẽ. quod eſt abſurdũ. oſtenſa eſt. n. HK, Irrationalis, & Media. Itaque cũ IK, neq; Rationale ſit, neq; Medium; neceſſario neq; AC, illi æquale, Rationale erit, neq; Medium, ſed tertium quoddã genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi IK, quod ſub Rationali, & Media, cõtinetur, cũ HI, Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectã quæ poteſt ſpatiũ ſub duabus Medijs lõgitudine & potentia incommenſurabilibus) quales ponuntur AB, BC, cõprehenſum, poſſe quoq; rectangulũ ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentũ. Quod eſt propoſitũ.

26. 22.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri poteſt, DB, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea EF;
d 45. primi d ad ipſam applicetur rectangulũ EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt ſit reliquũ HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Medijs AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationa-
e 23. deci. nalem EF, ſunt applicata; e erunt rectæ FG, FH, Rationales



nales,& ipſi E F,incommenſurabiles longitudine. Rurſus, quia Rationale HI,applicatum eſt ad Rationalem HK; (a eſt enim recta HK,Rationali E F,æqualis) b erit recta HG,Rationalis,& ipſi EF, longitudine commenſurabilis.Quare cum HG,EF,longitudine ſint commenſurabiles; & EF,ipſi FH,longitudine incommenſurabilis, vt eſt oſtenſum; c erit & H G,eidem F H, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt F H, ad HG,ita quadratum ex FH,ad rectangulũ ſub F H,H G, ex tertio lemmate propoſ.19.huius lib.d Igitur quadratum ex F H, incommenſurabile eſt rectangulo ſub F H, HG.Sed quadrato ex F H, commenſurabile eſt quadratũ ex HG;(quod ſint ambo ex lineis Rationalibus F H, H G, deſcripta) e atque adeo & duo quadrata ex F H, HG,ſimul,quadrato ex F H,commenſurabilia ſunt: Et rectangulo ſub F H, H G,commenſurabile eſt id, quod bis continetur ſub FH, HG,(quia hoc illius eſt duplũ.) Igitur per ea,quæ in ſcholio propoſ.14.huius lib.oſtendimus,& duo quadrata ex FH,H G,ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo ſub FH,HG,bis.f Quare & compoſitũ ex quadratis rectarũ FH,HG,& ex rectãgulo bis ſub FH,HG,incõmenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarũ FH,HG.g At quadratis ex FH,H G,vna cum rectãgulo bis ſub F H, H G,æquale eſt quadratum ex FG. Igitur & quadratũ F G, incommenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarum F H,H G:Eſt autem compoſitum hoc Rationale,ex lemmate 4.propoſ.19 huius lib.quod oſtenſum ſit cõmenſurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cũ huic cõpoſito, quod Rationale eſt,incõmenſurabile ſit quadratũ ex FG,h erit quadratũ ex F G,Irratio nale;i ac propterea & recta FG,Irrationalis erit. Quod eſt abſurdũ. oſtenſa enim eſt F G, Rationalis longitudine ipſi EF,incõmenſurabilis.Nõ ergo D B,quo Medium AB,ſuperat Mediũ A C,Rationale eſt.Quã ob rem Mediũ nõ ſuperat Mediũ Rationali. Quod erat oſtẽdendũ.

a 34. pri.
b 21. deci.
c 14. deci.
d 10. deci.
e 16. deci.
f 17. deci.
g 4. ſecũdi
h 10. defin.
i 11. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC, ſpatio DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale. Quoniã.n. AB, AC, Rationalia ſũt; [a] *erunt AB, AC, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ;* [b] *atque adeo & inter ſe commenſurabilia. Quare cum totum AB, compoſitũ ex AC, DB, commenſurabile ſit ipſi AC; erit quoque idem AB, reliquo DB, commenſurabile, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4 propoſ. 19. huius lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.*

9. defin. 12. deci.

27. o.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2 propoſ. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles [c] inter quas media proportionalis ſumatur C; [d] fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, eſſe Medias potentia tantum commẽſurabiles, quæ Rationale cõprehendant. Quoniam.n. A, B, Rationales ponũtur potentia tantum commenſurabiles; [e] erit rectangulum ſub ipſis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo [f] cum ipſum poſsit recta C, erit C, Media. Et quoniam eſt vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque A, B, potentia tantũ commenſurabiles; erunt quoque C, D, ſolum commenſurabiles

c 13. ſexti d 12. ſexti e 22 deci. f 17. ſexti

ſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus. [a] Eſt ergo & D, Media C, commenſurabilis, Media. Quare inuentæ ſunt Mediæ C, D, potentia tantũ commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Rationale. Quoniam enim eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita eſt C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [b] poterit rectangulum ſub ipſis C, D, comprehenſum. Eſt autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

[a] 24. deci.

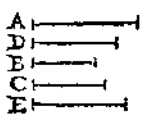
[b] 17. ſexti

PROBL. 5. PROPOS. 29.

28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.

EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles; [c] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [d] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe, potentia tantum commẽſurabiles, quæ Medium cõtinent. Quoniam enim A, B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, atque adeo & quadratum ex D, [e] quod illi æquale eſt, [f] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E; ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erũt quoque D, E, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D, Media ſit, [g] erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis,



[c] 13. ſexti

[d] 12. ſexti

[e] 17. ſexti

[f] 22. deci.

[g] 24. deci.

rabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum cõmenſurabiles. Dico iam ipſas continere Mediũ. Quoniam.n.eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A;
[a] 16. ſexti erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [a] Rectangulum igitur ſub D, E, æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autẽ quod ſub A, C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus,
[b] 22. deci. [b] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem ſe mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

A, 6.	C, 12.	
B, 4.	D, 8.	
E, 24.	F, 96.	

QVONIAM autem in lib. 9.
[c] 28. & 29 noni. *oſtenſum eſt, ſi impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem vero, ſi impar multiplicet imparem; perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorum vterq; par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera ſumpta, ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus, impar; horum vero par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.*

LEMMA

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

INVENIANTVR per ea, quæ in ſcholio proximo dicta ſunt, duo plani ſimiles AB, & C, quorum vterque vel par ſit, vel impar.[a] *Et quoniam, ſiue a pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto BD, ex AB, qui æqualis ſit ipſi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiſo bifariã in E; Dico numerum factum ex AB, in BD,*[b] *qui quidem quadratus eſt, compoſitum cum quadrato numeri ED, facere quadratũ. Quoniam n. numerus AD, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theo remate eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compoſiti faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod eſt propoſitum.*

A .... E .... D ..... B
C .. ..

[a] 24. & 26 noni.

[b] 1. noni

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, quando AB, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum exceſſus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus ſit.

QVOD ſi numeri ſumãtur AB, & C, nõ ſimiles, vterq; tamẽ par, vel impar; inuenti erunt eodẽ modo duo

duo quadrati numerorum B E, E D, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui ſit ex A B, in B D, non eſt quadratus. Si enim quadratus eſſet, a numeri A B, B D, hoc eſt, A B, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

a 2. noni.

SCHOLIVM II.

ITAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadrates numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, deſcripti ſunt illi, quos quarimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratũ ex E D, numero, qui producatur ex A B, in B D, qui etia quadratus eſt.

A ..... E ..... D .....B
C .....

SI vero inueniendi ſint duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non ſimiles, quorũ vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragẽda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex B E, aquale eſſe quadrato ex D E, vna cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare exceſſus quadratorum ex B E, E D, eſt numerus factus ex A B, in B D, qui cum non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent A B, B D, plani ſimiles quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A ... E ... D ..... B
C .....

HOC poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA.

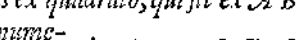
LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

SINT duo numeri plani ſimiles AB, & C, pares, vel impares, vt in lemmate precedẽti, fiatque eadem conſtructio, ita vt rurſus quadratus, qui fit ex multiplicatione ſimilium numerorum AB, DB, inter ſe, vna cum quadrato ex DE, æqualis ſit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe fit, compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel æqualis, vel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipſius maius latere BF. Erit ergo latus ipſius vel æquale numero BE, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE, BF, ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur; Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quam BF, minus vero quam BE.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex BE, æqualis ſit quadratus numerus

A..H..I.E.F.G..D.....B
C .....

compoſitus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cũ eidem quadrato ex B E,



ſit oſtenſus in præcedenti lẽmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo ſcilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, inſe fit, æquale eſt numero B E. Sed neque maius. Sit enim, ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quam B F, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, inſe fit, (cum hic cõpoſitus æqualis ponatur quadrato ex E I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D. vna cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter fit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neque æquale, neque

neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

SIT iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex ijs, quę ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex H E, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F. Sed eidem quadrato ex B F, æqualis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato D F: Igitur qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis eſt ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F: & detracto communi quadrato ex D F, relinquetur, qui fit ex H B, in B D, ei qui fit ex A B, in B D, æqualis. Quare cum H B, A B, multiplicantes eundem B D, producant æquales numeros; [a] *habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipſi A B, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, quadrato ex B F, æqualis.*

[a] *18. ſepti.*

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F, ac propterea & latus eius latere B F, minus, quod ſit B G, ita vt qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ſit quadrato ex B G. Sumatur

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . . B
C . . . . . .

autem ipſius E G, duplus A I. Quoniam igitur totus A D, totius F D, duplus eſt, & ablatus A I, ablati E G; erit rurſus & reliquus I D, reliqui G D, duplus; ac propterea I D, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis quadrato ex B G: ponitur autem eidem quadrato ex B G, æqualis qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Igitur qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis eſt ei, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex D G, minor eſt, remanebit qui ex I B, in B D, maior eo, qui ex A B, in B D, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F. Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma precedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratũ in duos non quadrates partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

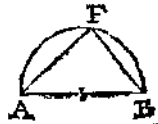
PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

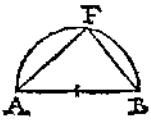
EXPONATVR linea Rationalis A B, & inueniantur ex ijs, quæ *in ſcholio 2. propoſ.* præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum exceſſus D E, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. fiat vt C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in ſemicirculo A B F, circa diametrum A B, deſcripto: ac denique connectatur recta F B. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; [b] erit quadratum ex A B, æquale duobus quadratis ex A F, & F B; hoc eſt, recta A B, plus poterit quam A F, quadrato rectæ F B. Et quia eſt quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, vt numerus C D, ad numerum D E; [c] erunt quadrata ex A B, A F, commenſurabilia; atque adeo cum quadratũ ex A B, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali A B, deſcriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, propterea q; & recta A F, ipſum deſcribẽs, Rationalis. Rationales ergo ſunt A B, A F; atq; adeo cõmenſurabiles ſaltẽ potentia. Quia vero quadratũ ex A B, ad quadratũ ex A F, proportionẽ non habet, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; (cũ neq; quadratus numerus C D, ad non quadratũ D E, proportionem habeat, quã quadratus ad quadratũ; alias & D E, quadratus eſſet, [d] vt in Arithmeticis eſt demonſtratũ. qđ nõ ponitur) [e] erũt rectæ A B, A F, longi-



[a] 31. tertij
[b] 47. pri.
[c] 6. decimi
[d] 24. deci.
[e] 9. decimi

longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur A B, A F, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles.

IAM vero, quoniam eſt vt C D, ad D E, ita quadratũ ex A B, ad quadratum ex A F; erit per conuerſionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratum numerum C E, ita quadratũ ex A B, ad quadratum ex F B (ſicut. 9. CD, ſuperat DE, quadrato CE, ita etiã quadratum ex AB, ſuperat quadratum ex AF, quadrato ex FB.). Quare rectæ A B, F B, longitudine commenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tãtum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſſit, quam minor A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.



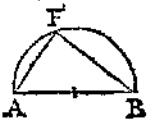
9. decimi

30. 18.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propoſ. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compoſitus C D, non ſit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, ſecetur i duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD. ad neutrum ipſorũ CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratũ, alias ſecundum priorem modum, eſſet totus C D, etiam quadratus:



dratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, [a] vt in Arithmeticis ostensum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturq; AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quam AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propos. [Quoniã vero rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratũ ex FB: Non habet autem CD, ad CE, proportionẽ quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. [b] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum cõmensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

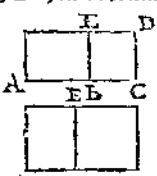
[a] 24. octaui

[b] 9. decimi

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarũ AB, maior sit. Dico esse, vt AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur n. ex BC, quadratũ BD, compleaturq; rectangulũ AD; eritque rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis: [c] perspicuum autem est, esse vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.



[c] 1. sexti

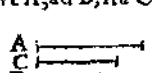
EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum maioris, vt in ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua AB, *minor eſt, quam* BC.

31. 24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

130. deci. a REPERTAE ſint duæ Rationales A,B, potẽtia tantum commẽſurabiles, ita vt A, maior plus poſſit quã B, minor quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis; ſitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniã igitur A, B, ſunt Rationales potentia ſolum commenſurabiles;



b 22. deci. b erit rectangulum ſub A,B, Irrationale, & recta C, ipſum potens, linea Media. Et quia eſt vt A, ad B, ita C, ad D; ſunt autẽ A, & B, potentia tantũ commenſurabiles, erũt quoque C, & D, potentia ſolum commenſurabiles, vt in

c 24. deci. ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus. c Quare D, Mediæ C, commenſurabilis, Media quoque eſt. Inuentæ ergo ſunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim ſit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; ſit autẽ vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C,

d 17. ſexti ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulũ ſub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale ſit; erit & rectangulũ ſub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commenſurabiles, Rationale. Quoniam

niam vero eſt vt A, ad B, ita C, ad D: poteſt autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, ex conſtructione; poterit quoque C, plus quã D, quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus poſsit quam minor D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendũ erat. ª 15. deci.

QVOD ſi repertæ ſint A, B, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſsit quam B, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, oſtendemus eodem modo, inuentas eſſe duas Medias C, D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus poſsit quam minor D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis.

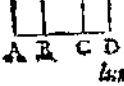
SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonſtrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem ſine ipſo oſtendimus, vt facile iudicabunt, qui eum eorum demonſtratione hanc noſtram contulerint. Imo rectas C D, Medias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic oſtendimus, ac in propoſ. 28. huius lib.

LEMMA.

SI ſint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum conſtitutæ. Dico eſſe vt AB, ad CD, ita rectangulum ſub AB, BC, *ad rectangulum ſub BC, CD. Deſcribatur enim ex BC, quadratũ* BCDE, *perficiaturque rectangu-*



lum

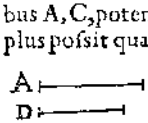
lum AF; *Eritque* A E, *contentum ſub* A B, B C; *&* C F, *ſub* B C, C D; *quod* B E, C D, *ipſi* B C, *æquales*
a 1. *ſexti* *ſint*. a *Perſpicuum autem eſt eſſe* AB, *ad* C D, *vt* AE, *ad* CF. *Quod eſt propoſitum*.

32. 26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

SINT inuentę tres Rationales A, B, C, potentia tãtum commenſurabiles, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc au-
b 30. deci. tem fiet in hunc modum. b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commenſurabilibus, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia ſolum commenſurabilis, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demõſtrauimus.) c Et ipſarum A, B, ſumatur media proportionalis D; d a fiatque vt D, ad B, ita C, ad E.



c 13. *ſexti*
d 12. *ſexti*

Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt vt A, ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C:
e 17. *ſexti* e Eſt autem rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex
f 16. *ſexti* D; f & rectangulo ſub B, C, æquale rectangulũ ſub D, E, quòd proportionales ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolum commenſurabiles. Ergo & D, E, potentia ſolũ commenſurabiles ſunt, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib.

lib. oſtendimus. [a] Quia vero D, potens ſpatium ſub A, B, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Irrationalis eſt, & Media; [b] erit quoque E, ipſi oſtenſa commenſurabilis, Media. Inuctæ ergo ſunt duę Mediæ D, E, potentia ſolum commenſurabiles. Et quia oſtenſum eſt rectangulo ſub B, C, [c] quòd Mediũ eſt, (quòd B, C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles,) æquale eſſe rectangulum ſub D, E; erit rectangulum ſub D, E, Medium. Denique quia oſtendimus eſſe vt A, ad C, ita D, ad E; poteſt autem A, plus quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ex conſtructione; [d] poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine ſibi commẽſurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quod erat faciendum.

[a] 22. decì.
[b] 24. decì.
[c] 22. decì.
[d] 15. decì.

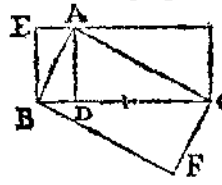
QVOD ſi repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, reliqua autem conſtruantur, vt prius, demonſtrabimus ſimiliter, inuentas eſſe duas Medias D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus poſſit quam minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facile apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, a quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum ſub CB, BD, æquale eſſe quadrato ex AB: contentum autem ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC: & contentum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum denique ſub BC, AD, æquale contento ſub AB, AC.

QVO-

QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis eſt inter CB, BD; [a] erit rectangulum ſub CB, BD, quadrato ex AB, æquale.



EADEM ratione erit rectangulũ ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniã per idem coroll. AC, media proportionalis eſt inter BC, CD.

RVRSVS quia ex eodẽ coroll. AD, inter BD, DC, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectãgulum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

POSTREMO, [b] quia triangula ABC, ABD, ſimilia ſunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD. [c] Quare rectangulum ſub BC, AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, AC. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum ſub BC, AD: Item rectangulũ AF, ſub AB, AC, contentũ. [d] Quoniam igitur rectangulum CE, duplum eſt trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula CE, AF. quod eſt propoſitum.

[a] 17. ſexti

[b] 8. ſexti

[c] 16. ſexti

[d] 41. primi

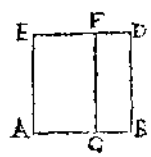
LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, ſitque maior pars AC. Dico eſſe vt AC, ad CB, ita rectangu-

lum

ium ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AB, CB. Deſcribatur enim ipſius AB, quadratum ABDE, ducaturque CF, ipſi AE, parallela; eritq; AF, contentum ſub AB, AC, & CD, contentum ſub AB, CB; quod AE, CF, ipſi AB, æquales ſint. [a] *Quoniam igitur eſt vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; conſtat propoſitum.*



[a] 1. ſexti

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum ſub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum ſub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum conſtituentes ABC, ſeceturque minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum ſub AB, BC, duplum eſſe rectanguli ſub AB, BD. Compleatur enim rectangulum AC, ſub AB, BC; ducaturq; DE, ipſi AB, parallela; eritq; BE, contentum ſub AB, & BD, dimidia minoris. [b] *Quoniam igitur AC, ipſius BE, duplum eſt, quod & baſis BC, dupla ſit baſis BD; conſtat propoſitum.*



[b] 1. ſexti

EODEM

EODEM modo, ſi BC, ſecta bifariam, ſit maior, erit quod ſub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur ſub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex ſecunda figura apparet.

33. 27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Medium.

a 31. deci. 2 REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia ſolum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſsit, quã minor CD, quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; ſeceturq; CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & ſit illud, quod ſub AF, FB, continetur. Poſtremo deſcripto ſemicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus poteſt, quam CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, applicatumque eſt ad AB, rectangulum ſub AF, FB, æquale quartę parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipſi FB, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propoſitionis antecedentis, rectangulum ſub AB, AF, ad rectangulum ſub AB, FB; Rectangulum vero ſub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum ſub AB, FB, quadrato ex GB, eſt æquale, per lemma



b 19. deci.

ma 1. eiuſdem antecedentis propoſitionis; [a] quòd angulus AGB, rectus ſit in ſemicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cum AF, FB, longitudine ſint incõmenſurabiles, [b] erũt quadrata ex AG, GB, incommenſurabilia. [c] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles ſunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale eſt, [d] æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rurſus, quia ex 1. lemmate propoſitionis præcedentis, rectangulum ſub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale eſt factũ, [e] æquale eſt quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus eſt, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla exiſtens ipſius CE, dupla etiam erit ipſius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propoſitionis, rectangulum ſub AB, CD, duplum erit rectanguli ſub AB, FG. (cum FG, dimidia ſit minoris CD,) [f] Sed rectangulum ſub AB, CD, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt. Igitur & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, cum ſit eius dimidium, Mediũ eſt, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Atqui rectãgulo ſub AB, FG, per 1. lemma propoſitionis præcedentis, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Contentũ igitur ſub AG, GB, Medium quoque eſt: Oſtenſum autem eſt compoſitũ ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciũt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

[a] 31. tertij

[b] 10. deci.

[c] 4. defin. [d] 47. primi

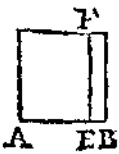
[e] 17. ſexti

[f] 22. deci.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in ſcholio quodam antiquo, fieri poſſe, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior ſit, non habentes proportionem, quam



quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem deſcripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniã igitur eſt vt C, ad D, ita quadratũ ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autẽ C, ad D, proportionẽ quam
[a] 9. decimi — C, 6. D, 4. quadratus ad quadratũ; [a] erunt latera AB, AE, dictorum quadratorũ proportionẽ non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommenſurabilia; Ae propterea cum AB, tota longitudine ſit incommenſurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine
[b] 1. ſexti — incommenſurabilis, ex coroll. propoſ. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita eſt quadratum ex AB, ad AF. Igitur
[c] 10. deci. — cum AB, AE, incommenſurabiles ſint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommenſurabilia. Quare quadrato ex AB, exiſtente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommenſurabile, Irrationale. Eodemque argumento oſtendemus BF, Irrationale eſſe. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perſpicuum eſt, ex duobus Irrationalibus conſtici poſſe Rationale. Quod eſt propoſitum.

AT vero ſi AF, FB, Rationalia ſint, oſtendemus & totũ AFB, ex ipſis compoſitum Rationale eſſe. Cum enim vtrumque AF, FB, Rationale ſit; erunt ipſa inter ſe commenſurabilia. [d] Igitur & totum AFB, ex ipſis compoſitum vtrique eo-
[d] 16. deci. — rum commenſurabile erit. Quare AFB, totum commenſurabile vtrique Rationali AF, FB, [e] Rationale quoque eſt. Quod
[e] 9. defin. — eſt propoſitum.

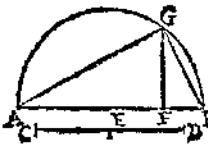
34. 28.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum Rationale.

RE-

1 REPERIANTVR duæ Mediæ AB, C D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus poſsit quã minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſuabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propoſ. Oſtendemus igitur ſimiliter, vt in propoſ. antecedenti, rectas A G, G B, potentia eſſe incommenſurabiles. Et quia quadratum ex Media A B, [b] æquale exiſtens quadratis rectarũ A G, G B, Medium eſt; erit quoque cõpoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus vt in antecedẽti propoſitione, oſtẽdemus rectangulũ ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, F G; atque adeo illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum rectangulum ſub A B, C D, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. rectangulo ſub AB, FG, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Igitur & rectangulum ſub AG, GB, Rationale eſt. Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum AG, GB, eſſe Medium. Igitur duę rectæ AG, G B, quæ oſtẽſæ ſunt potentia incommenſurabiles, faciũt compoſitum ex earum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem comprehenſum, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



[a] 32. deci.

[b] 47. primi

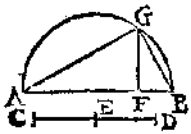
PROBL. 12. PROPOS. 36.

35. 29.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis

dratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

[a] 33. deci. a REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus poſsit quam minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſiantque reliqua, vt in propoſ. 34. Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas A G, G B, potentia incommenſurabiles eſſe. Et quia quadratum ex Media A B, Medium eſt, [b] 47. primi [b], & quadratis rectarum A G, G B, æquale erit & compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus, vt in 34. demonſtrabimus, rectangulum ſub A B, C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G, atque adeo illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum ex conſtructione, rectangulum ſub A B, C D, Medium ſit: erit quoque rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, quod illi per 1. lemma propoſ. 33 huius lib. æquale eſt, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi C D; Eſt autem eidem C D, ipſa C E, longitudine commenſurabilis, quod illa huius ſit dupla; [c] 13. deci. erunt A B, C E, longitudine incommenſurabiles: Sed vt A B, ad C E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, C E, hoc eſt, ad rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, (ſunt enim rectangula ſub A B, F G, & ſub A G, G B, per [d] 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æqualia,) [d] 11. deci. Igitur quadratum ex A B, incommenſurabile eſt rectangulo ſub A G, G B. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.



SCHO-

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud abſoluemus, quod ad propoſ. 24. huius lib. nos demonſtraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitũ ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulũ Medium, Mediæ, incommenſurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia eſſent commenſurabiles, eſſent & earum quadrata, hoc eſt, compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum ſub AG, GB, commenſurabilia, quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur AB, potens compoſitũ ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum ſub AG, GB, id eſt, media proportionalis inter AG, GB; inuenta erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

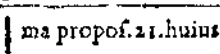
PRINCIPIVM SENARIORVM per compoſitionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. 36. 30.

SI duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duę Rationales AB, BC, potentia ſolum commenſurabiles, inuentæ per 2. lem-

ma propoſ. 21. huius lib. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quoniã. n. AB, longitudi ne incommenſurabilis eſt ipſi BC; & vt AB, ad B C, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex B C, per lem ma propoſ. 31. huius lib. erit rectangulum ſub AB, BC, quadrato ex B C, incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt quadratum rectæ AB; (omnia enim ſunt Rationalia) atque adeo & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quę in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub AB, BC, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compoſitũ ex eo, quod bis ſub AB, BC, & ex compoſito quadratorum rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum ex tota AC. (Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vna cũ rectangulo ſub AB, BC, bis) compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile erit: Eſt autem cõpoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale, quod commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex BC, Rónali. Igitur quadratũ ex A C, quadrato Rónali ex BC, incommenſurabile, Irrationale eſt; atq; adeo & recta ipſa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt alij loquuntur, Binomiũ, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia ſolum commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.



a 10. decī.

b 16. decī.

c 4. ſecũdi

d 17. decī.

e 10. deſin.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nã recta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, Irrationalis eſt, quia Media vocatur. At vero compoſita ex ipſis, Irrationalis eſt, quia ex binis nominibus dicitur.

f 22. decī.

g 37. decī.

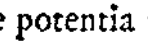
THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

37. 31.

SI duæ Mediæ potentia tantum cõmenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentę AB, BC, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quia.n. AB, eſt ad BC, vt rectangulũ ſub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propoſ. 31. huius lib. eſt oſtenſum; ſunt autem AB, BC, longitudine incommenſurabiles; [b] erunt rectangulum ſub AB, BC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt, quod ſub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia ſint commenſurabiles, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia, [c] atque adeo & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex BC, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub AB, BC, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, [d] quod huic compoſito æquale eſt, [e] incommenſurabile quoque eſt rectangulo ſub AB, BC, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub AB, BC, cõmenſurabile rectangulum ſemel ſub AB, BC, cũ hoc ſit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AB, BC: Ponitur autẽ rectangulum ſub AB, BC, Rationale. [g] Irrationale ergo eſt quadratum



[a] 28. deci.
[b] 10. deci.
[c] 16. deci.
[d] 4. ſecundi
[e] 17. deci.
[f] 13. deci.
[g] 10. deſin.

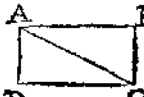
dratum ex A C, [a] & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 11. defin.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR rectangulum ABCD, sub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, [b] *faciet ipsum ad Rationalem A B, applicatum latitudinem B C, Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim B C, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*



[b] 21. deci.

38. 32.

THEOR. 27. PROPOS. 39.

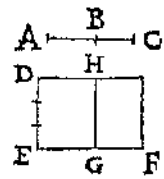
SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secũda.

COMPONANTVR duæ Mediæ, [c] superius inuentę A B, B C, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineãt. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, [d] ad quam applicetur rectangulũ D F, æquale quadrato A C; & cõposito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eãdem D E, applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangu-

[c] 29. deci.

[d] 45. primi

ctangulũ DF, [a] æquale eſt duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub AB, BC, continetur. Quoniá vero, ex hypotheſi, rectangulum ſub AB, BC, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſurabile, hoc eſt, HF, Mediũ, ex coroll. propoſ 24. huius lib. Rurſus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt; [b] erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum DG, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumque quadratorũ ex Medijs AB, BC, Medium eſt Igitur & DG, ex coroll. propoſ. 24. huius lib Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; ([c] eſt enim GH, Rationali DE, æqualis) [d] erunt eorũ latitudines EG. GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommẽſurabiles. Rurſus quia AB, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt; & eſt vt AB, ad BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, BC, ex lemmate 3 propoſ. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommenſurabile rectangulo ſub AB, BC, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex AB, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC; & rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt, quod continetur bis ſub AB, BC, cum hoc illius ſit duplum. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulũ DG, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, rectangulo HF. [e] Cum ergo ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [f] erit EG, ipſi GF, longitudine incommenſurabilis: oſtenſum autem iam fuit EG, GF, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt EG, GF, potentia tantum commenſurabiles. [g] ac propterea, & tota EF, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex AC, ipſi DF, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autem



[a] 4. ſecundi

[b] 16. deci.

[c] 34. primi

[d] 23. deci.

[e] 1. ſexti.

[f] 10. deci.

[g] 37. deci.

tem ex binis Medijs ſecunda, ſeu vt alijs placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

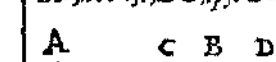
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſitione lineã Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineã Irrationalẽ AC, quę componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit cõpoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineę, qua maior pars minorem ſuperat.

SECETVR recta AD, in E, non bifariam, ſitque maior pars AB *; in qua ſumatur* BC, *minori parti* BD, *æqualis, vt ſit* AC, *exceſſus, quo* AB, *ſuperat BD, hoc eſt,* BC, *ipſi* BD, *æqualem. Dico quadrata rectarum* AB. BD, *ſimul maiora eſſe rectãgulo bis ſub* AB BD, *quadrato rectæ* AC. *Quoniã. quadrata ex* AB, BC, * *æqualia ſunt rectangulo bis ſub* AB, BC. *vna cum quadrato ex* AC; *eſtq; BC, ipſi* BD, *æqualis: erunt quoq; quadrata ex* AB, BD, *æqualia rectangulo bis ſub* AB, BD, *vna cũ quadrato ex*



* 7. ſecundi

ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora ſunt, quã rectangulum bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

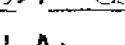
THEOR. 28. PROPOS. 40.

39.
33.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quę faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ [a] ſuperius inuentæ AB, BC, potẽtia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitũ ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulũ vero ſub ipſis contentũ, Mediũ Dico totã AC, eſſe Irrationalẽ. Quoniã. n rectangulũ ſub AB, BC, Mediũ ponitur, erit & rectãgulũ bis ſub AB, BC, illi cõmenſurabile, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24 huius lib. atq; adeo Irrationale. Ponitur autẽ compoſitũ ex quadratis rectarũ AB, BC, Rõnale. [b] Incõmenſurabile ergo eſt rectangulũ bis ſub AB, BC, compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. [c] Igitur & rectangulum bis ſub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compoſitum ponatur Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; [e] Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt Vocetur autẽ Maior, quia [f] cum poſſit duo quadrata ex AB, BC,

[a] 34. decī.
[b] 10. defin.
[c] 17. decī.
[d] 10 defin.
[e] 11. defin.
[f] 4. ſecundi



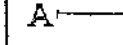
B C, & rectangulum bis ſub AB, BC; compoſitum ex quadratis rectarum AB, B C, per lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub A B, B C, Medium; recte vocabitur A C, Maior, ſiquidem a Rationali, quod maius eſt, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

40. 34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

[a] 35. deci. COMPONANTVR duæ rectæ, ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium, rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam



A C, Irrationalem eſſe. Quoniam.n. compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod uero continetur bis ſub A B, B C, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod ſub AB, BC, ſemel cõtinetur, Rationale ponatur; [b] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC. [c] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectãgulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo bis

[b] 10 defin.

[c] 17. deci.

bis ſub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, BC, vt diximus, ſit Rationale; [a] erit quadratum ex A C, illi incommenſurabile, Irrationale; [b] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum ſcilicet bis contentum ſub A B, B C. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

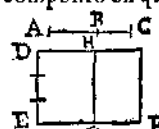
[a] 10. defin.
[b] 11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

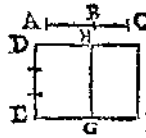
41.
35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciãt & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [c] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Ratio nalis DE, [d] ad quam applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex A C; Et compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, alterum æquale applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc eſt, rectangulum D F, [e] æquale eſt cõpoſito ex quadratis rectarũ AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum H F, æquale rectangulo



[c] 36. decl.
[d] 45. primi
[e] 4. ſecũdi



gulo bis ſub AB, BC Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum DG, quam rectangulum ſub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis ſub A B, B C, nempe ipſum H F, (cum illi ſit commenſurabile) Medium ponitur, [a] facient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC: Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; [b] erunt & DG, HF, incõmenſurabilia. Quare [c] cum ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [d] erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles: Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; [f] ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 23. deci.

[b] 13. deci.
[c] 1. ſexti.
[d] 10. deci.

[e] 37. deci.

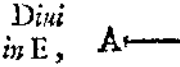
[f] 11. defin.

LEMMA

SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualiũ ſimul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rurſus

ſus inæqualiter in D, ſintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam poſteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, ſimul maiora eſſe quadratis ex AD, DB, ſimul. Diuiſa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, [a] æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale eſt eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DE, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratū ex EC, maius ſit quadrato ex ED; erit reliquū rectangulū ſub AC, CB, minus reliquo rectangulo ſub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis ſub AC, CB, minus erit rectangulo bis ſub AD, DB. Quoniā vero quadratum ex AB [b] æquale eſt tā rectangulo bis ſub AC, CB, vna cū quadratis ex AC, CB, quā rectāgulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectāgulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis ſub AC, CB, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.



[a] 5. ſecūdi

[b] 4. ſecūdi

SED cadat iā D, inter A, E. Quoniā igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quā partes AD, DB; erit AD, (quæ minor eſt poſteriorū) maior quam CB; (quæ priorū minor eſt) ac proinde cū AE, EB, æqua-

quales ſint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE.



Itaque quia rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex

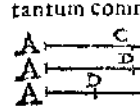
5 ſecundi. EC, æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale eſt quadrato ex AE, hoc eſt, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonſtrabimus quadrata ex AC, CB, maiora eſſe quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.

42. 36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuiſa ad punctum C, *in* ſua nomina, ita vt AC, CB, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt vult propoſ. 37. huius libri.



Dico AB, ad aliud punctũ diuidi nõ poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterũ in ſua nomina ad D. Conſtat ergo AB, in C, nõ diuidi bifariã. Nam ſi bifariã diuideretur, eſſent AC, CB, lõgitudine cõmenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles. Eodẽ modo neque ad D, bifariã ſecabitur AB, cum & AD, DB, Rationales ſint potentia tantũ cõmenſurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quã ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales ſunt, quã partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedẽs, quadrata ex AC, CB, vel minora ſũt quadratis ex AD, DB, vel maiora, Ne-

[a] (Neque enim partes A D, D B, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione ſecaretur A B, ſecunda diuiſione in eadem nomina, in quæ ſecta eſt diuiſione prima, quod non ponitur.) Quia vero ſi ab æqualibus inæqualia demantur, reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis eſt, vt in pronũciatio 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis ſub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis ſub A D, D B, [a] quod tam illa, quam hæc æqualia ſint quadrato ex A B; fit, vt qui exceſſus fuerit ablati compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, idem ſit reliqui rectanguli bis ſub A C, C B, & reliqui rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A B, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales ſint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cũ Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt. [b] Quoniam vero rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt, erit & quod bis ſub A C, C B, illi cõmenſurabile, ex coroll propoſ. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub A D, D B, Medium erit. [c] Quare cum Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtẽdimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Nõ igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat pun-

[a] *4 ſecundi.*

[b] *22. deci.*

[c] *27. deci.*

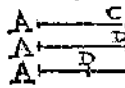
punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

43. 37.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſito 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctũ diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in



alia nomina AD, DB. Igitur vbicũque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub AC, CB, ei, quod continetur ſemel ſub AC, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub AD, DB. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CD, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commenſurabilia. * Quare & compoſitum

* 38. decimi.

poſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cum vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, DB. [a] Cum ergo Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarū AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.

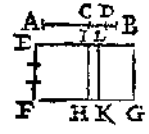
[a] *27. deci.*

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44. 38.

QVAE ex binis Medijs ſecunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs ſecunda AB, diuiſa ad punctū C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, Medię ſint potétia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, continenteſque Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat,

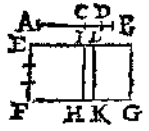


ſimiliter oſtendemus, vt in propoſitione 43. quadrata ex AC, CB, vel maiora eſſe quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur Rationalis EF, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis ſub AC, CB; quandoquidem quadratum ex AB, [c] æquale eſt quadratis ex AC, CB, & rectan-

[b] *45. pri.*

[c] *4. ſecundi*

rectangulo bis ſub AC, CB. Eodem modo ſi ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale; erit reliquum LG, æquale rectangulo bis ſub AD, DB, comprehenſo.



Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia ſunt quadratis ex AD, DB; erũt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex AC, CB, maiora ſunt, per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipſius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidiũ ipſius FG. Eadem ratione oſtẽdemus FK, maiorẽ eſſe dimidio ipſius FG. Inæquales ergo ſunt partes FH, HG, partibus FK, KG, ſingulæ ſingulis. Quoniã vero AC, CB, Medię ſunt, & potẽtia commẽſurabiles; erũt & earũ quadrata Media, & commenſurabilia. [a] Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cum ergo vtrũque ipſorũ ſit Medium, erit quoque compoſitũ ex ipſis, hoc eſt, EH, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. [b] Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipſi EF, longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cũ rectangulum ſub AC, CB, ponatur Mediũ, erit & quod bis ſub AC, CB, hoc eſt, IG, illi commẽſurabile, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, [c] erit HG, Rationalis ipſi IH, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus LG, Medium eſſe, & KG, Rationalem ipſi KL, lõgitudine incommenſurabilem. Rurſus quia AC, CB, longitudine ſunt incommenſurabiles; & eſt vt AC, ad CB, ita per lẽma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, [d] erit quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. Sed quadrato ex AC, cõmenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB: (cum enim AC, CB, potentia ſint commẽſurabiles, atq; adeo ipſarum quadrata cõmenſurabilia; [e] erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum quadrato

a 16. deci.
b 23. deci.
c 23. deci.
d 10. deci.
e 16. deci.

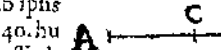
quadrato ex AC, commenſurabile.) Rectangulo uero ſub AC, CB, commenſurabile eſt, quod bis ſub AC, CB. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc eſt, rectangulum EH, incommẽſurabile eſt, per ſcholiũ propoſ. 14. huius libri, rectangulo bis ſub AC, CB, hoc eſt, ipſi IG. Quocirca [a] cũ ſit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur FG, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Eodem modo oſtendemus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, [d] vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur AB, ex binis Mediis ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctũ, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

[a] 1. ſexti
[b] 10. deci.
[c] 37. deci.
[d] 43. deci.

THEOR. 34. PROPOS. 46. 45. 39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum vero ſub ipſis Mediũ, vt vult propoſ. 40. huius lib. Dico AB, non poſſe diuidi ad aliud punctũ in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incõmenſurabiles quoq; ſint potẽtia, facientes compoſitum ex ipſarũ quadratis Rõnale, & rectangulũ ſub ipſis Mediũ. Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demõſtrabimus ſimiliter, vt in propoſitione 43. exceſſum cõpoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB. Sed exceſſus compoſiti ex



quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatiũ eſt Rationale: (quia cũ utrũque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoq; eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub AC, CB, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub AD, DB. 2 Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

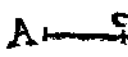
27. deci.

46. 40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum uero ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius libri. Dico AB, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis Mediũ, & rectangulũ ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum

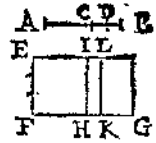


excessum rectanguli bis sub AC,CB, & rectãguli bis sub AD,DB, eundẽ esse, qui est cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC,CB, & rectanguli bis sub AD,DB, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: a Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatiũ Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat. a 27. decimi.

THEOR. 36. PROPOS. 48. 47. 41.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri. Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiã lineæ potentia incõmensurabiles, facientes & compositum ex ipsarũ quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctũ D, existat. Constructio autẽ eadem fiat, quæ in propos. 45. ostẽdemus; vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex



quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex coroll propoſ 24 huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalem EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis), faciunt latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipſi EF, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG, [b] eſtq; vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus. Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolũ cõmenſurabiles. Igitur tota FG Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, etiam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

2. 23 decimi

b 1. ſexti

c 43. decimi

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Ra-

Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile Vocetur ex binis nominibus ſecũda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomẽ; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearũ, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniã nomina linea, quæ ex binis nõibus dicitur, ſunt lineæ Rõnales potentia tantũ commenſurabiles, non poterit vtrumq; nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomina ipſa eſſent quoq; lineæ longitudine inter ſe cõmenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus. quod nõ ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſsit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile, vt manifeſtum eſt.

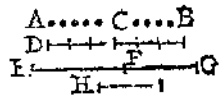
RVR-

RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile eſt longitudine expoſitæ lineæ Rationali; & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cũ minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipſorum nominum expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans; ſecundam, quintam; & tertiam, ſextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49. INVENIRE ex binis nominibus primam.

48.
42.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs, quæ in ſcholio 2. propo. 29. huius libri ſcripſimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem nô habeãt, quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commẽ-

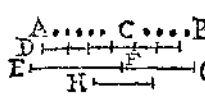


ſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cũ proportionem habeant, quam numeri AB, AC, [a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa autem eſt EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis eſt. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia ſolum commenſurabiles;

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

a 37. deci. les;. Atq; idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; ſit autem AB, maior, quam AC; erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniã igitur eſt vt AB, numerus ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad exceſſum, quo antecedens AB, ſuperat conſequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex EF, ſuperat conſequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebũt quam numerus quadratus ad numerum quadratum; b ac proinde rectæ EF, H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectę H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.



b 9. deci.

49. 43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in precedenti propoſitione, expoſitaq; Rationali quadã D; ſumatur ei longitudine cõmenſurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationalj D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, eſſe ex binis nominibus ſecundam

dam. Quoniã quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectę FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis est. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [b] Incõmensurabiles ergo sunt longitudine rectę FG, EF. Sũt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quę ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cũ enim sit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autẽ AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in precedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilẽ esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quã minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estq; minus nomen FG, expositę Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

[c] 37. deci.

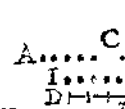
PROBL. 15. PROPOS. 51.

50. 44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum

cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel ſola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidé, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt ſi AC, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario. quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi AC, ſit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5 vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib 8. oſtendimus, non cadet inter I, & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Expoſita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propoſ. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum



[a] 6. decimi ex EF. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionē habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commenſurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc eſt, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū; [b] erūt D, & EF, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. [c] Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia. Igitur cum E F, oſtenſa ſit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad AC, hoc eſt, quadratum ex EF, ad quadratū ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] erunt EF, F G, longitudine incommenſurabiles Sūt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque ideirco tota EG, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe

[b] 9. decimi

[c] 6. decimi

[d] 9. decimi

[e] 37. deci.

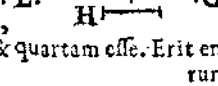
eſſe. Quoniam.n. eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, Et vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habẽt autẽ I, ad AC, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratũ. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum;* ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Eſt autem AB, maior quam AC; erit & quadratũ ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propoſ. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commẽſurabilis; & neutra ipſarum EF, FG, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratum eſt; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

* 9. decimi

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB, ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rõnalis, cũ Rationali D, commenſurabilis ſit. Quod ſi reliqua cõſtruantur, vt in propoſ. 49 oſtendemus ſimiliter, vt ibi, totã EG, ex binis nominibus eſſe. Dico & quartam eſſe. Erit enim



rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quam quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectę H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratũ ex EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum quadratũ. [a] Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectę EF, & H. Itaq; cũ maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

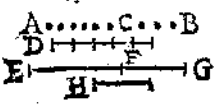
[a] 9. deci.

52. 46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in precedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositę Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incõmẽsurabiles esse. Quare cum maius nomen plus EF, possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositę Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.



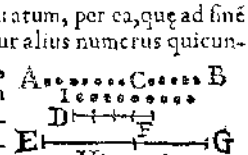
PROBL.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

53. 47.

INVENIRE ex binis nominibus ſextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non ſimilibus, quorum neuter ſit quadratus, & compoſitus ex ipſis AB, non ſit quoque quadratus, habeatq; ad neutrũ ipſorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, ſi numerus qui libet nõ quadratus diuidatur in duos numeros inter ſe primos.) Nam hac ratione & totus ad vtrũque ipſorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quę ad finẽ lib. 8. demonſtrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis eſt quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, nõ quadratos proportionem nõ habebit, quã quadratus ad quadratũ. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratũ ex D, ad quadratũ ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib. & reliqua fiãt, vt in propoſ. 51 oſtendemuſq; vt ibi, rectas D, & EF, eſſe longitudine incommenſurabiles, atq; totã EG, ex biniſeſſe nominibus. Dico & ſextã eſſe. Demonſtrabimus. n. ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & FG, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeq; quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49. per conuerſionem rationis, eſſe vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; erunt rectę EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum maius



a 30. ſept.

b 9. deci.

nomen

nomen EF, plus posſit, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommẽſurabilis, & neutrum ipſorum nominum EF, F G, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque; erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, mediũ proportionale inter quadratum totius lineę, & quadratum dictæ partis.

SECTA ſit recta AB, vtcunq; in C. Deſcribatur ex AB, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: *Ducta autem ex* C, *recta* CF, *ipſi* BD, *parallela, quę diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2.* FH, CI, *quadrata partium* AC, CB; *vtrumq; autem rectangulorum* DG, GA, *comprehenſum ſub eiſdem partibus: At vero rectangula* CD, AI, *ſub tota* AB, *& parte* CB, *contenta. Dico* DG, *mediũ proportionale eſſe inter quadrata* FH, CI: *At* CD, *mediũ eſſe proportionale inter quadrata* AD, CI. *Quoniã. n.* [a] *vt* HG, *ad* GI, *ita eſt tam* FH, *ad* DG, *quã* AG, *ad* CI; *erit vt* FH, *ad* DG, *ita* AG, *ad* CI: [b] *Eſt autem* AG, *ipſi* DG, *æquale. Igitur erit q;ſoque vt* FH, *ad* DG, *ita* DG, *ad* CI; *Atq; adeo* D G, *medium proportionale eſt inter quadrata* FH, CI.

[a] 1. ſexti.

[b] 43. prim.

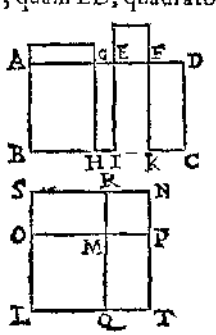
RVR-

RVRSVS quia est [a] *vt* AB, *ad* CB, *ita tam* AD, *ad* CD, *quam* AI, *ad* CI; *erit vt* AD, *ad* CD, *ita* AI, *ad* CI: *Est autem* AI, *ipsi* CD, *æquale*. *Igitur erit vt* AD, *ad* CD, *ita quoque* CD, *ad* CI. *Quare* CD, *medium proportionale est inter quadrata* AD, CI. *Eodem modo erit* AF, *medium proportionale inter quadrata* AD, FH. [a] 1. sexti.

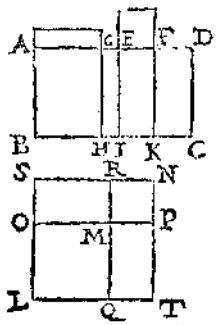
THEOR. 37. PROPOS. 55. 54. 48.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineã, quę potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, maius nomẽ AE. Erũt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique AF, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariã in F. Quia igitur AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ sibi lõgitudine commẽsurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammũ sub AG, GE, cõtentum, per 2 lemma propos. 17 huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; [b] in partes longitudine cõmensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes inter se



[b] 18. deci.



ter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipſis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK.[a] Et parallelogrammo AH, æquale quadratum ſiat LM: At parallelogrammo GI, æquale ſiat quadratum MN; coniunganturq; quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnã rectam lineam conſtituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnã rectam QR, vt demonſtratum eſt a nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea quod anguli OMQ, PMR, ad verticem M, ſunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales ſint, ideoque & tota OP, toti QR; [b] ſit autem OP, ipſis SN, LT; & QR, ipſis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoque quadratum.

[a] 34. ſecun.

[b] 34. prim.

QVONIAM vero rectangulum ſub AG, GE, æquale eſt, per conſtructionem, quadrato ex EF; [c] erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE; [d] Ac propterea & vt AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale eſt inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale eſt TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur eſt TM, ipſi EK. [e] Cum ergo ipſi TM, æquale ſit MS, [f] & ipſi EK, æquale ſit FC; erit & MS, ipſi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale eſt; atq; adeo recta OP, poteſt ſpatiũ AC, contentum ſub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

[c] 17. ſexti

[d] 1. ſexti.

[e] 43. primi

[f] 36. primi

QVONIAM enim AG, GE, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles; [g] erit & tota AE, vtrique ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem AE, cum ſit maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commenſurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib

[g] 16. deci.

lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atque adeo cum AB, ſit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. [a] Quare rectangula AH, GI, ſub Rationalibus longitudine cõmenſurabilibus cõtenta Rationalia ſunt; Ideoque & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Rationalia erũt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rõnales erũt. [a] 20 deci.

ET quoniam AE, ipſi ED, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis AG; & ipſi ED, commenſurabilis eſt longitudine EF, eius dimidia; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib & AG, EF, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & AH, EK, [b] eandem proportionem habentia, quam AG, EF, [c] incommenſurabilia ſunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. [d] Igitur & rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles, [e] cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales oſtenſæ. Igitur OM, MP, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. [f] Quapropter tota OP, potens ſpatium AC, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat. [b] 1. ſexti [c] 10. deci. [d] 10. deci. [e] 1. ſexti. [f] 37. deci.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

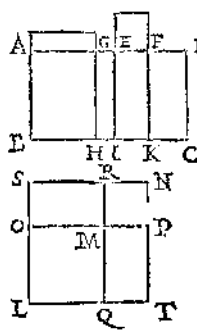
55. 49.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR ſpatiũ AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit enim plus AD, maius nomẽ AE.

Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commẽſurabilis; Et denique ED, Rationali expoſitę AB, longitudine cõmenſurabilis. Secetur ED, biſariam in F; & reliqua conſtruantur, vt in antecedenti propoſitione. Quo facto, demonſtrabimus ſimiliter, vt ibi, rectam OP, poſſe ſpatium AC, contentum ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico iam OP, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Mediis prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incõmenſurabilis eſt ipſi ED; & ED, minus nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commenſurabilis eſt Rationali AB; erunt AE, AB, longitudine incommenſurabiles. Et quia AG, GE, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſitione longitudine cõmenſurabiles; erit quoque tota AE, vtrique ipſarum cõmenſurabilis. Quare cum AE, maius nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea ſit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales: quod cum utraque AG, GE, ipſi AE, ſit longitudine commenſurabilis; at uero AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis, erit utraque AG, GE, eidem AB, incommenſurabilis longitudine. Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Igitur rectangula AH, GI, Media ſunt, propterea que & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Media ſunt. Ergo & rectæ OM, MP, ſunt Mediæ.



QVIA uero AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles; erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionẽ habentia, commenſurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, commenſurabilia ſunt. Igitur & rectæ OM, MP, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommenſurabiles ſunt;

a 13. deci.
b 16. deci.
c 14. deci.
d 22. deci.
e 10. deci.

ſunt; Ipſi vero AE, oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis AG; & ipſi ED, longitudine cõmenſurabilis eſt EF, eius dimidia; erunt per ſcholium propoſ. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipſis, [a] incommenſurabilia ſunt. Igitur & LM, MT, ipſis AH, & EK, æqualia, incommenſurabilia ſunt. [b] Ideoq; & rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles. [c] cum eandem habeant proportionem, quã LM, MT. Cum ergo oſtenſum ſit OM, MP, Medias eſſe, & commenſurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AB, hoc eſt, ipſi EI: Eſt autem EF, ipſi ED, quoque longitudine commenſurabilis; [d] erunt etiam EI, EF, longitudine commenſurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis ſit, erit & EF, Rationalis. [e] Quare EK, rectangulum, Rationale eſt: Eſt autem MT, ſub OM, MP, contentum ipſi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale eſt. Quapropter OM, MP, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, Rationaleque continentes; [f] atque adeo OP, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 10. deci.
[b] 10. deci.
[c] 1. ſexti.
[d] 12. deci.
[e] 20. deci.
[f] 38. deci.

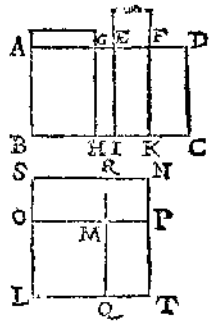
THEOR. 39. PROPOS. 57.

56.
50.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam,

quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit autem ipſius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique neutra ipſarum A E, E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam O P, poſſe ſpatium A C: Et vt in antecedenti propoſ. 56. rectas O M, M P, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipſi A B, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam vero E D, E F, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque E D, ipſi A B, Rationali, hoc eſt, ipſi E I, longitudine incommenſurabilis; [a] erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quod E F, dimidia ſit ipſius E D, Rationalis; & E I, expoſitæ Rationali A B, æqualis. Igitur E F, E I, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; [b] Ac propterea E K, Medium eſt; ideoque & M T, æquale ipſi E K, Medium eſt, quod ſub Mediis O M, M P, continetur. Itaque cum O M, M P, Mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; [c] erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 14. deci.

[b] 22. deci.

[c] 22. deci.

57. 51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali,

nali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potẽs Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalẽ, quæ Maior vocatur. Sit.n. AE, ipſius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potententia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique A E, ipſi A B, commenſurabilis erit longitudine. Secta E D, biſariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. [a] Erunt ergo A G, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, O P, poſſe ſpatium A C. Dico O P, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam.n. A G, G E, longitudine incommenſurabiles ſunt; [b] erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atque adeo & quadrata L *M*, *M* N, ipſis A H, G I, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ O *M*, *M* P, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; [c] & rectangulum A I, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem A I, æquale compoſito ex quadratis L *M*, *M* N: Compoſitum ergo ex quadratis L *M*, *M* N, Rationale eſt.

[a] 59. deci.

[b] 10. deci.

[c] 21. deci.

ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartę, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali A B, erit & E F, ipſius dimidia eidẽ A B, longitudine incõmenſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cũ ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales ſunt potentia ſolũ cõmenſurabiles. [d] Quare

[d] 22. deci.

EK, Medium eſt, ſub ipſis contentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; ſub OM, MP, Medium eſt. Quocirca cum OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis MT, Medium; [a] Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendum.

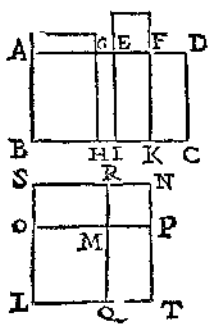
[a] 40. deci.

58.
52.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Mediũ.



Sit. n. ipſius AD, maius nomẽ AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quam ED, quadrato rectæ lõgitudine ſibi incõmenſurabilis; & deniq; ED, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariã, fiant reliqua cadẽ, quæ in propoſ. 55. [b] Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommẽſurabiles. Simili autem modo, vt in propoſ. 55. cõſtabit rectã OP, poſſe ſpatiũ AC. Dico OP, Irrationalẽ eſſe, quæ potens Rationale & Mediũ appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis

[b] 19. deci.

tionalis & longitudine incõmenſurabilis Rationali AB; erũt AE, AB, Rationales potẽtia tantũ cõmenſurabiles. [a] Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali AB, cum ſit minus nomẽ ipſius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipſius dimidia, eidem AB, commenſurabilis lõgitudine, & Rationalis. [b] Quare EK, ſub Rationalibus EI, EF, lõgitudine commenſurabilibus, Rationale eſt; atque idcirco & MT, ſub OM, MP, contentũ Rationale erit, cum ipſi EK, ſit æquale. Quamobrẽ cũ rectæ OM, MP, potentia incõmenſurabiles ſint, faciantque cõpoſitum quidẽ ex ipſarũ quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, ſub ipſis contentum, Rationale; [c] Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demoſtrandum.

[a] 22. deci.

[b] 20. deci.

[c] 41. deci.

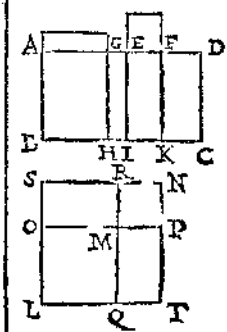
THEOR. 42. PROPOS. 60.

59. 53.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatiũ potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quę ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commenſura-

ſurabiles;& AE,plus poterit,quam ED. quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis;& denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB. Fiant omnia,quæ in ſuperioribus; eruntque AG,GE, longitudine incommenſurabiles. Iã vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ. 58. rectas O*M*, *M*P, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis L*M*, *M*N, Medium. Vt autẽ in propoſ. 58 erit quoque *M*T, ſub O*M*, *M*P, comprehenſum, *M*ediũ. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommẽſurabilis eſt longitudine ipſi ED; hæc vero eidem commẽſurabilis; erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt. cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis L*M*, *M*N, quod ipſi AI, æquale, eſt, & rectangulum *M*T, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ O*M*, *M*P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarũ quadratis I. *M*, *M*N, *M*edium, & *M*T, ſub ipſis contentum, *M*edium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis; erit tota OP, Irrationalis, quę bina *M*edia potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.



* 19. deci.

b 13. deci.

c 10. deci.
d 1. ſexti.

e 42. deci.

60.

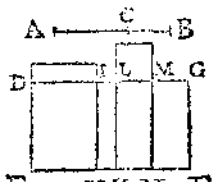
54.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT

Sit ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; [a] & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia [b] sint quadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex AB, æquale est, per cõstructionem rectangulũ DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipsis LK, GF, parallela agatur MN: eritque vtrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur. [c] Et quoniam AC, CB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota AB, sit ex binis nominibus; erũt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; [d] quorum vtrique cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectãgulum DK. Igitur & DK, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, [e] faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipsi DE, longitudine commensurabilem.

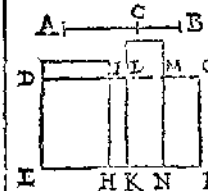


RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, [f] erit rectangulum sub ipsis, Medium, atq; adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem, [g] facit LG, latitudinem Rationalem & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. [h] Igitur DL, LG, longitudine incõmensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum commẽsurabiles; [i] Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

[a] 45. primi
[b] 4. secun.
[c] 37. deci.
[d] 16. deci.
[e] 21. deci.
[f] 22. deci.
[g] 33. deci.
[h] 13. deci.
[i] 37. deci.

QVO-

QVONIAM. n. ex lẽmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, CB, medium proportionale eſt inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo [a] cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeat, quam DH, LN, IK; erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL. [b] Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, cõmenſurabilia ſunt, quod AC, CB, ponuntur potentia cõmenſurabiles; erunt & DH, IK, ipſis æqualia, commenſurabilia. [c] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autẽ DK, maius eſt, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint, per lemma propoſ. 39. huius libri, quam rectangulum bis ſub AC, CB; erit & recta DL, maior quã LG, [d] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quã DK, LF. Itaque quoniam DL, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatur rectangulum ſub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore LG, deſcripti; oſtenſum enim eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quadrato ex LM.) diuiditurq; DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit DL, maior plus quam LG, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum DG, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus poſſe, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine cõmenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 1. ſexti.

[b] 17. ſexti.

[c] 10. deci.

[d] 1. ſexti.

[e] 18. deci.

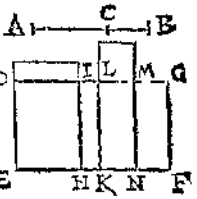
61.
55.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis

binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC; [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundã. Cõstituantur. n. eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes [b] Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erũt quadrata ex AC, CB, ato; adeo rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalẽ DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub AC, CB, Rationale est; erit & eius duplum, nempe LF, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; erit eius latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarũ DL, LG, ipsa LG, sit ipsi DE, cõmẽsurabilis lõgitudine, at DL, longitudine incõmensurabilis, erũt DL, LG, longitudine incõmensurabiles. Quod cũ DL, LG, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potẽtia solum cõmẽsurabiles; [g] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, maius nomen esse, & posse plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius DG, maius nomen DL, plus



possit

[a] 45. primi
[b] 38. deci.
[c] 16. deci.
[d] 23. deci.
[e] 21. deci.
[f] 13. deci.
[g] 37. deci.

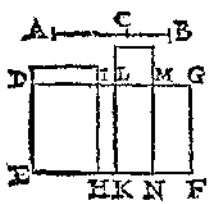
posſit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen LG, oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis Medijs prima, &c. Quod erat oſtendendum.

62. 56.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs ſecũda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs ſecunda AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciẽs DG. Dico DG, eſſe ex binis nominibus tertiã. Cõſtructis. n. ijſdẽ, quæ in propoſ. 61. qũ AC, CB, ex binis Medijs ſecundã AB, componentes, [b] Medię ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent; Etũt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectã gula ipſis æqualia DH, IK, commenſurabilia, & Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique iporum DH, IK, ſit commẽ ſurabile; erit & ex coroll. propoſ. 24. huius libri DK, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem LK; [e] erit latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE longitudine incommenſurabilis, Et quia AC, ipſi CB, longitudine eſt incommen-



[a] 45. primi
[b] 39. deci.
[c] 40. deci.
[d] 23. deci.
[e] 23. deci.

menſurabilis;eſtq; vt AC,ad CB, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC,CB,[a] erit quoque quadratum ex AC,rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. [b] Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB,quod quadrata ex AC, CB, commenſurabilia ſint,quippe cum rectę ipſę potentia ponantur commenſurabiles;& rectangulo ſub AC, CB, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub AC,CB.Igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc eſt,rectangulum DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC,CB,hoc eſt, rectangulo LF, per ea,quæ in ſcholio propoſ.14.huius libri conſcripſimus.Quare rectæ DL,LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes [c] longitudine ſunt incommenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles; [d] ac propterea tota DG, ex binis nominibus eſt. Iam vero vt in propoſ.61.oſtendemus DL,eſſe maius nomen, poſſeq; plus, quam minus LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrem cum DL, maius nomen plus poſsit, quam LG, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum DL, LG,Rationali expoſitæ DE, ſit oſtenſa longitudine cõmenſurabilis;erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius,quę ex binis Medijs ſecũda, ad Rationalem applicatum,latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtrandum.

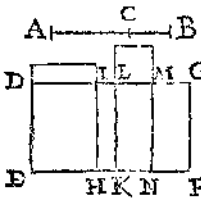
[a] 10. deci.
[b] 16. deci.
[c] 10. deci.
[d] 37. deci.

63.
57.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

SIT



SIT Maior AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad [a] Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse, quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB, componentes, [b] potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit quoque DK, compositi ex quadratis rectarū AC, CB, æquale existens, Rationale; At vero LF, duplū eius, quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum; [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item cum LF, Medium sit applicatum ad Rationalem LK; erit LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, lōgitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine; hæc vero eidē DE, longitudine incommensurabilis; [e] incommensurabiles erunt longitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LG, Rationales potentia tantum cōmensurabiles; [f] ideoque DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, CB, incommensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB, potentia incōmensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommensurabilia; [g] atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam vero vt in propos. 61. ostendimus, DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DL, IL, quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam DL, ad I, in partes longitudine incommensurabiles; [h] poterit DL, plus quā LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa DL, (maius nomen ipsius DG,

[a] 45. prim.
[b] 40. deci.
[c] 21. deci.
[d] 23. deci.
[e] 13. deci.
[f] 37. deci.
[g] 10. deci.
[h] 19. deci.

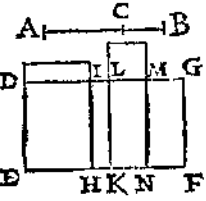
D G, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DE; erit ex defi. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

64. 58.

QVADRATVM eius, quę Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectangulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium; & LN, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur, atque adeo ipſius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommenſurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, commenſurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commenſurabilis eſt Rationali DE, illa vero longitudine incommenſurabilis;



a 45. primi

b 41. decl.

c 23. decl.

d 21. decl.

a 13. deci. b 37. deci. [c]erunt DL, LG, lõgitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potẽtia solũ cõmensurabiles; [b] Ac ꝓpterea DG, est ex binis nominibus. Iã vero, vt in propos. 61. ostendemus rectangulũ sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectę sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cũ & minus nomẽ LG, ostẽsum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, & c. Quod demonstrandum erat.

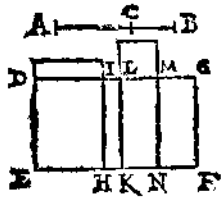
65. 59.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina Media potens recta A B, cuius maius nomen AC, [c] & ad Rationalẽ D E, applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextã. Constructis n. iisdem, quæ in propos 61. quoniã rectę AC, CB, componentes ipsam AB, potentẽ bina Media, [d] potentia incommẽsurabiles sunt, faciuntq; & cõpositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis cõtinetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quam LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Mediũ. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; [e] erũt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommen-

c 45. primi



d 42. deci.

e 23. deci.

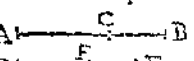
commensurabiles. [a] Quoniam vero compositũ ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem vero rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum; [b] Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [c] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; [d] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; posseq; plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cũ ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.

[a] 42 dec.
[b] 13. dec.
[c] 10. dec.
[d] 37. dec.

THEOR. 49. PROPOS. 67. 66. 60.

EI, quæ est ex binis nominibus, lõgitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

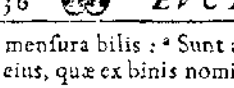
SIT ex binis nominibus quæcunq; AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitque recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandẽ ipsi AB. [e] Fiat.n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. [f] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE.



Et quoniã ipsi AB, longitudine cõmensurabilis ponitur DE; erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, lõgitudine com-

[e] 12. sexti.
[f] 19. quint.
[g] 19. dec.

[a] 37. deci. mensura bilis : [a] Sunt autem AC, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE;



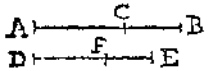
Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; [b] 10. deci. [b] erunt & DF, FE, potentia solum commensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [c] 37. deci. [c] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis; [d] 35. deci. [d] poterit & DF, plus quã FE, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis. Quod si AC, cõmensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis [e] 12. deci. [e] nominibus prima; erit & DF, eidẽ Rationali lõgitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit commẽsurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero CB, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositę longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum AC, CB, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex binis nominibus tertia; [f] 12. deci. [f] erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

AT si AC, plus possit quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [g] 15. deci. [g] poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse vel quintam, vel sextam, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD ſi recta DE, potentia tantum commenſurabilis ſit ipſi AB, quæ eſt ex binis nominibus, oſtendemus quidem eod-m modo, (ſi loco: Commenſurabilis longitudine: in demonſtratione reponamus vbique: commenſurabilis potentia tan'um:) & DE, eſſe ex binis nom.nibus: At eam eſſe ordine eandem ipſi AB, cui commenſurab: is eſt, nullo modo concludemus. Non enim ſequitur, ſi AC, maius nom.en longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali; & DF, maius nomẽ eidem eſſe commenſurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expoſita Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine cõmenſurabilis eſt, ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum, ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione poteſt, vt DE, illi potentia tantũ cõmenſurabilis ſit ex binis nominibus ordine eadem.



SIT enim AB, ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, diuiſa in ſua nomina ad C; ſitque ei cõmenſurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonſtrabimus eſſe ex binis nominibus, diuiſamque eſſe in ſua nomina ad F; & partes AC, CB, partibus DF, FE proportionales eſſe, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri poſſe, vt DE, ex binis nominibus ſit eadem ordine ipſi AB. Nam ſi poteſt fieri, ſit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expoſita commenſurabilis longitudine. [a] Quare & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt. Et quoniam eſt vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt propterea & AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima eſt. Eo dè modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; ſecũda vel quinta. Eſſet. n. vtrũq; nomen minus CB, FE, ex

[a] 12. decì.

[b] 10. decì.

deſin. longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ, atque adeo & inter ſe. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commenſurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilem, eſſe quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine commen
a 15. deci. *ſurabilis. Cum ergo ſit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; a poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare ex deſin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſſit, quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine incom-*
b 15. deci. *menſurabilis; b poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum ſit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex deſin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel ſexta, licet non eadem ordine ipſi AB.*

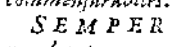
IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.

67. 61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ eſt ex binis Mediis, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atque ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuiſa in ſua nomina, quorũ AC, maius, & CB, minus, ſitque ei recta DE, lõgitudine commẽſurabilis.



Dico DE, quoq; ex binis Mediis eſſe, & ipſi AB, ordine eandem.
c 12. ſexti. c Fiat. n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. d Erit ergo & reliqua CB,
d 19. quin. ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam

ipſi

ipſi AB, ponitur longitudine commenſurabilis DE; erit & DF, ipſi AC, & FE ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. Igitur & DE, FE, illis commenſurabiles, Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutãdo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autem AC, CB, potentia ſolum cõmenſurabiles; [d] erunt & DF, FE, ſolum commenſurabiles potentia. Cũ ergo & oſtenſæ ſint Mediæ, erunt DF, FE Mediæ potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipſi AB, eandẽ eſſe ordine. Quoniam enim eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem vt AC, ad CB, ita quadratũ ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratũ ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. [f] Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, ſit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum ſub DF, FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; [g] atque adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, CB, fuerit Mediũ, ita vt AB, ſit ex binis Mediis ſecunda: erit & rectangulum ſub DF, FE, ei commenſurabile, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis ſecunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine cõmenſurabilis, &c. Quod demonſtrandũ erat.

10 a 11

[b] 24. decim.

[c] 38. decim.

[d] 10. decim.

[e] 38. vel 39. decim.

[f] 10. decim.

[g] 38. decim.

[h] 39. decim.

SCHOLIVM.

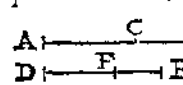
EODEM prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam DE, ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi AE, quæ eſt ex binis Mediis, ex binis Mediis eſſe, atque ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis

eſt; ſi modo loco: commenſurabilis longitudine: ut demonſtratione dicamus vbique: commenſurabilis potentia tantũ, &c. vt manifeſtum eſt.

68. 62. THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.

SIT linea Maior AB, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis ſit DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, *Maiorem eſſe*. Fiant enim eadem, quæ ſuperius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE.



Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ſunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commẽſurabiles. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compoſitum ex quadratis rectarum DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, FE, oſtẽſæ ſint commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Igitur & compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, CB, cõmẽſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarum DF, FE. Eſt autem compoſitum illud Rationale,

21 0. deci.

b 22. ſexti

c 10. deci.

d 40. deci.

nale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB.[a] Igitur & hoc Rationale est. [a] 9. d. fin.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutãdo vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.[b] Igitur & rectangulũ sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est.[c] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commẽsurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE;[d] suntque AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componãt Maiore AB;[e] Erũt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles Itaq; cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est;[f] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

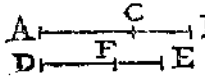
[b] 10. decis. [c] 40. decis. [d] 40. decis. [e] 10. decis. [f] 40. decis.

THEOR. 52. PROPOS. 70. 69. 63.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue lõgitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potentẽ Rationale ac Medium. Cõstructis. n. ijsdem, quæ

quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, commenſurabile
[a] 31. deci. eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, F E. [a] Eſt autẽ illud compoſitum Medium, cum rectę A C, C B, componant ipſam A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ſub A C, C B, [b] quod Rationale



[b] 41. deci. eſt, commenſurabile rectangulo ſub D F, F E; [c] atque adeo & rectangulum ſub D F, F E, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt D F, F E, potentia incommenſurabiles. Quare cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; [c] erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

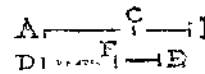
[c] 41. deci.

70. 64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens A B, diuiſa in ſua nomina ad C, ſitque commenſurabilis D L, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum: Dico & D E, eſſe bina Media potẽtia. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtẽdemus, vt in propoſ. 69. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, cõpoſito ex quadratis rectarũ D F, F E, commenſurabile eſſe: Nec nõ & rectangulum ſub A C, C B, eſſe commenſurabile rectan-



[d] 42. deci. culo ſub D F, F E. [d] Cum ergo tam compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum ſub A C, C B, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius libri.

bri, tam compoſitũ ex quadratis rectarum DF, FE, quàm rectangulum ſub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommenſurabiles ſunt, vt prius. Poſtremo, quia compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum ſub AC, CB, incommenſurabilia ſunt, ex hypotheſi, propterea quod AB, bina Media poteſt: Eſt autem compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile oſtenſum compoſitũ ex quadratis rectarũ DF, FE; & rectãgulo ſub AC, CB, proſauimus cõmenſurabile rectãgulum ſub DF, FE; Erunt quoq; ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitũ ex quadratis rectarũ DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incommenſurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; erit DE, bina *Media* potens. Itaque bina *Media* potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt. Quod erat oſtendendum.

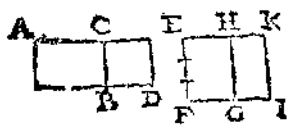
a 42. decimi.

b 42. decimi.

THEOR. 54. PROPOS. 72. 71. 65.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

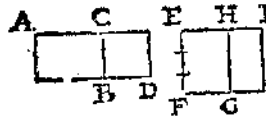
SIT Rationale ſpatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatium AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potẽtem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Aequale ſiquidem non erit; alias cum AB, ſit Rationale, eſſet & illi æquale CD, Rationale, quod non ponitur. Sit primo



maius,

[a] 45. primi

maius, & expoſita Rationali EF, [a] applicetur ad eam rectangulũ EG, æquale ipſi AB; & ad HG, aliud HI, æquale ipſi CD, vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Et quoniã AB, Rationale eſt, & CD, Medium; erit quoque EG, Rationale, & HI, Medium: quæ cum applicentur ad Rationalem EF; [b] erit EH, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis; [c] At vero HK, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommẽſurabilis. Rurſus qa EG, HI, incommenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus; quod EG, Rationale ſit, at HI, Irrationale, nempe Medium; [d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit quoq; EH, maior quã HK, [f] cum EH, HK, eandẽ rationem habeant, quã EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & ſpatium AD, compoſitum ex Rationali AB, & Medio CD, [g] Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.



[b] 21. deci.

[c] 23. deci.

[d] 10. deci.

[e] 37. deci.

[f] 1. ſexti.

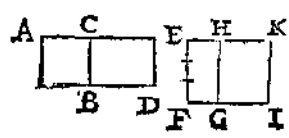
[g] 35. deci.

SI vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine cõmenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & ſpatium AD, [h] Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

[h] 38. deci.

SI T deinde AB, minus quam CD; & eadem conſtruantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus,

minibus, & EH, ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Et quia AB, minus eſt, quam CD, hoc eſt, EG, quâ HI; erit quoq; recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rurſus HK, maius nomen ipſius EK, quę eſt ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectę longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſsit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus ſecunda, cum EH, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus ſecunda EK, atque adeo & ſpatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compoſitum, [a] Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Medijs prima.



[a] 56. decī.

SI vero HK, plus poſsit quam EH, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & ſpatium AD, [b] Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 59. decī.

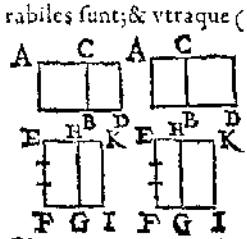
THEOR. 55. PROPOS. 73.

72. 66.

SI duo Media interſe incommenſurabilia cõponatur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommenſurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ poteſt totum ſpatium AD, eſſe vel ex binis Medijs ſecundam, vel bina Media

potẽtem. Erit enim rurſus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Aequale ſiquidem non erit; alias eſſent AB, CD, commenſurabilia, quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia ſpatia AB, CD, ponuntur Media, & incommenſurabilia; erunt & ſpatia EG, HI, Media & incommenſurabilia; cum illis ſint æqualia. [a] Igitur rectæ EH, HK, eandẽ cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles ſunt; & vtraque (cum EG, HI, Media ſint, applicenturq; ad Rationalem EF.) [b] Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; [c] ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedenti propoſ. EH, maius nomen ipſius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſsit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & ſpatium AD, [d] Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur.



SI vero EH, plus poſsit quam HK, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpatium AD, [e] Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD; non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ rel. quæ Irrationales fiunt, &c. Quod oſtendendum erat.

a 10. deci.
b 23. deci.
c 37. deci.
d 37. deci.
e 60. deci.

COROL-

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neq; inter ſe eaſdē eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] *latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.* [a 23. deci.]

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] *latitudinem efficit ex binis nominibus primam.* [b 61. deci.]

ET quadratum eius, quæ, eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] *latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.* [c 62. deci.]

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, [d] *latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.* [d 63. deci.]

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] *latitudinem facit ex binis nominibus quartam.* [e 64. deci.]

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, [f] *latitudinem facit ex binis nominibus quintam.* [f 65. deci.]

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [g] *latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.* [g 66. deci.]

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidē Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differētes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenarijs.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ſex lineas Irrationalium, nimirū eius-

quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

IN ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe.

IN tertio deinde contẽto propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, & ſexta.

IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quanam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN quinto autem, quẽ reperies in propoſ. 61, 62. 63, 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto vero, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.

IN ſeptimo denique contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

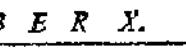
REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadẽ illi, inter cuius nomina media exiſtit.



SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomẽ AC; & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel

DB

DB, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundum Analogiam Arithmeticã, inter AC, CB: & E, eſſe quoq; ex binis nominibus. Quoniã .n. AC, ſuperat dimidiã AD, recta DC; & dimidia DB, ſuperat ipſam CB, eadem recta DC; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius AB, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.



RVRSVS quia E, cõmenſurabilis eſt longitudine toti AB, cum hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi AB, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadẽ Euclides demonſtrat de ſex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generãtur, qua in precedentibus ſeptem ſenarijs de Irrationalibus, qua per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

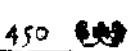
SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali AB, Rationalis AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB. Dico reliquã BC, Irrationalẽ eſſe. Quoniã .n per lemma 3 propoſ. 19. huius lib. eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, AC: Et



ſunt AB, AC, longitudine incommenſurabiles; [a] erunt *a 10. deci.*

incommenſurabilia quadratum ex A B, & rectangulum ſub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, (cum enim AB, AC, potentia ponantur commenſurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commenſurabilia.) Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex A B, (rectangulo vero ſub A B, AC, commenſurabile eſt rectangulum ſub AB, AC, bis. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum ſub AB, AC, bis contentum, incommenſurabilia ſunt, vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri demonſtrauimus. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarũ A B, A C, æquale rectangulo bis ſub AB, A C, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, ſit Rationale; (propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rationali ex AB. linea Rationali deſcripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Reſiduum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



a 16. deci.

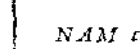
b 7. ſecun.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propoſitionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

NAM cum A B, A C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles; c erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis



c 37. deci.

binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine A B, vt relinquatur Apotome B C.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

74. 69.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR a Media AB, Media A C, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB, ſitque rectangulum ſub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia ſunt commenſurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commenſurabilia; [a] atque adeo & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex A C. Eſt autem quadratum ex A C, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum ſub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis ſub AB, AC, Rationale. Igitur incommenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis ſub AB, AC. [b] Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale ſit rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis ſub AB, AC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia ſunt. Exiſtente ergo rectangulo bis ſub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur



[a] *16. decim.*

[b] *7. ſecund.*

[c] *17. decim.*

Post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

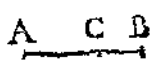
SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomẽ AB, & minus AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome prima.

a 38. deci.



75.
70.

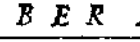
THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR a Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum

lum ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalẽ. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia cõmenſurabilibus commenſurabilia ſunt; a erit & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile: Eſt autem vtrũque ipſorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compoſitum ex ipſis, vtrique commenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia rectangulũ ſub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis ſub AB, AC, ex coroll propoſ. 24 huius lib Mediũ. b Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC, æquale ſit rectãgulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, quod etiam Medium eſt. quadrato ex BC. c Medium autẽ non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratũ ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & ipſa recta BC, Irrationalis. Vocetur autẽ Mediæ Apotome ſecũda, quoniã relinquitur poſt detractionem minoris nominis eius, quę ex binis Medij ſecunda, a maioris nomine, vt ex ſcholio ſequenti apparebit. Si igitur Media Media auferatur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 16. deci.



b 7. ſecun.

c 27. deci.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuiſſet proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

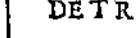
QVONIAM enim AB, AC, Mediæ ſunt potentia tantũ commenſurabiles, continentq; Medium; d *erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome ſecunda.*

d 39. deci.

76. 71.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidē ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.



DETRAHATVR a recta AB, recta AC, potētia ipſi AB, incommenſurabilis; Sit autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem eſſe. Quoniam n. compoſitū ex quadratis rectarū AB, AC, Rationale eſt; rectangulum vero ſub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & ei commenſurabile, hoc eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, Medium, hoc eſt, Irrationale; [a] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. [b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17 huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile erit. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. [c] Igitur quadratum ex BC, illi incōmenſurabile, Irrationale eſt, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autē Minor, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineę Maioris, a maiori nomine, vt in ſcholio ſequēti dicemus. Si igitur a recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 10. defin.
[b] 7. ſecun.
[c] 10. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium: erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ vocatur Maior, *eiuſq; maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur* Minor *BC.* 2 40. decimi.

THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autē ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam.n. compoſitū ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub

a 10. defin. AB, AC, Rationale; a erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub

b 7. ſecun.

AB, AC, b Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulũ bis ſub AB, AC, vna cũ quadrato ex BC, incõmenſurabile eſt rectãgulo bis ſub AB, AC. c Sũt ergo & rectãgulũ bis ſub AB, AC, & quadratũ ex BC, incõmenſurabilia. Cũ ergó rectangulũ bis ſub AB, AC, Rationale ſit; d erit quadratũ ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autẽ cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratũ additum rectãgulo bis ſub AB, AC, quod Rationale eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC, quod Medium exiſtit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

c 17. deci.

d 10. defin.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

e 41. deci. *CVM enim AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; e erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus autem AC. Auferatur igitur minus nomen AC, a maiori AB, vt BC, cum Rationali* Medium *totum efficiens relinquatur.*

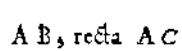
THEOR.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

78. 73.

SI a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sitque tam compoſitũ ex ipſarum quadratis, quam rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. [a] Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale eſt rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis ſub AB, AC, quod ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium etiam eſt, (cum Medio, quod ſub AB, AC, continetur, ſit commenſurabile) quadrato ex BC. [b] Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiẽs, quia eius quadratum cum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Medium eſt, facit totum cõpoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam eſt. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 27. ſec.

[b] 37. dec.

SCHO.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuiſſet hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Mediũ totum efficiens.

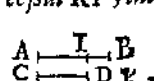
QVONIAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabile; compoſito ex quadratis ipſarum; [a] erit compoſita ex illis Irrationalis, qua bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur EC, cum Medio Medium totum efficiens.

[a] 42. deci.

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & viciſsim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter ſecũdam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, ſitq; IB, exceſſus inter AB, CD, æqualis exceſſui KF, inter EF, GH. Dico eundem eſſe exceſſum inter AB, EF, qui eſt inter CD, GH. Quoniã, n. IB, exceſſus eſt inter AB, & CD; erit AI, ipſi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipſi GH. Idem igitur exceſſus erit inter AI, & EK, qui



EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

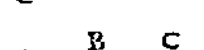
79. 74.

APOTOMAE vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam rationalẽ non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, cõgruat alia Rationalis BD, ita vt BD ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC, Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia cõmenſurabilis,



ſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt AC, BC, potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis ſub AC, BC, qui inter compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis ſub AD, BD; (ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, rectãgulum bis ſub AC, BC, quadrato ex AB; quòd compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale ſit rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compoſitũ ex quadratis rectarũ AD, BD, ſuperat rectangulum bis ſub AD, BD, quadrato eodẽ ex AB; cum & compoſitum ex quadratis rectarũ AD, BD, æquale ſit rectangulo bis ſub AD, BD, vna cum quadrato ex AB.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, DB. Eſt autem exceſſus inter illa cõpoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quod vtrũq; Rationale ſit. (Nam cum AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum cõmenſurabiles; erũt earum quadrata, Rationalia, & cõmenſurabilia. Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; illorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtẽdemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ſpatium Rationale eſt. Et quia rectangulum ſub AC, BC, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis ſub AD, BD. Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, Rationale ſpatium non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia



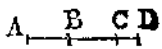
*7. ſecun.
b7. ſecun.
c61. decì.
d22. decì.
e27. decì.

alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tãtum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 63. PROPOS. 81. 80. 75.

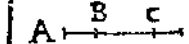
MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipsi congruat B C, Media toti A C, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media est potentia solum ipsi A C, commensurabilis; [a] erit & A C, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt A C, B C, potentia tantum commensurabiles. Quoniã vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, C B, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrũq; sit Rationale. (cum enim rectangulum sub A C, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, BC, illi commensurabile, Rationale. Atque eadẽ ratione Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositũ ex quadratis rectarum A C, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadra-



[a] 24. dec.

quadrata Media,& commenſurabilia., Igitur & compoſitum ex ipſis utrique ipſorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Medium, ex coroll. propoſ 24. huius lib. Non aliter quoque Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD. [b] Medium autem non ſuperat Mediũ Rationali. Igitur ex



cellus inter cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale nõ eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia ſolum commenſurabilis, contineatq; cũ tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16. deci.

[b] 37. deci.

81. 76.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

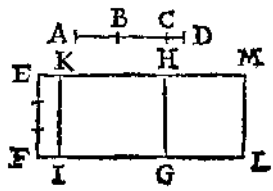
MEDIAE Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome ſecũda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commenſurabilis, & rectangulũ ſub AC, BC, ſit medium. Dico ipſi AB, aliam mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatque cum tota Mediũ. Si enim fieri poteſt, cõgruat ipſi alia BD, media toti AD, potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, [c] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. [d] Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum

[c] 45. prim.

[d] 7. ſecun. 4.

cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur ſub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur ſub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; (cum enim BC, Media ponatur, erit & AC, ipſi potẽtia cõmenſurabilis, *Media*) erunt & earũ quadrata *Media*, & cõmenſurabilia. [b] Ergo & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtriq; eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cum applicetur ad Rationalem EF, [c] erit EH, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem KI, [d] erit KH, Rationalis ipſi KI, hoc eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectãgulum ſub AC, BC, vt oſtendimus lemmate 3. ad propoſ. 19. huius lib. [e] erit quadratum ex AC, incõmenſurabile rectãgulo ſub AC, BC. Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata commenſurabilia [f]. Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique ipſorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile eſt eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipſi KG, incommenſurabile eſt, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus. [g] Rectæ igitur EH, KH, eãdem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommẽſurabiles ſunt: Sed & Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potẽtia tantum commenſurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commenſura-



[a] *14. decimi.*
[b] *16. decimi.*
[c] *23. decimi.*
[d] *23. decimi.*
[e] *19. decimi.*
[f] *16. decimi.*
[g] *10. decimi.*

surabilis ipsi EH, [a] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potẽtia solum commen surabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere, [b] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 74. deci.

[b] 80. deci.

82. 77.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINORI vna tantum congruit recta linea potẽtia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor A B, & illi congruens BC, toti AC, potẽtia incõmensurabilis, faciẽsq; compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale, & rectangulum sub A C, B C, Medium. Dico ipsi A B, aliam non cõgruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens B D, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulum sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propos 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, B C, & cõpositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrũque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulũ bis sub AD, BD, spatium est



eſt Rationale, ſed & non Rationale eſt. Cũ enim rectangulum ſub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D. [a] Quare vnum non non ſuperabit alterum Rationali.) Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 27. decim.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam non cõgruere, quę hæc eadem faciat.

Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarũ AD, BD, Medium, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis

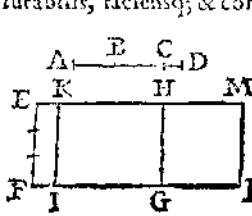


ſub AD, BD. Eſt autẽ exceſſus inter hæc rectangula, ſpatiũ Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa cõpoſita, ſpatiũ Rationale eſt: ſed
[a] 27. deci. & nõ Rationale eſt; cũ vtrumq; ſit Mediũ. [a] Medium, n. Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdũ. Non ergo ipſi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

84. 79. EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum cõgruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciẽs & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileq; cõpoſito ex ipſarum quadratis.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipſi vero congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensq; & compoſitum ex quadratis rectarũ



AC, BC, Medium, & rectangulum ſub AC, BC, Mediũ, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipſi AB, aliã non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si. n. fieri poteſt, cõgruat ipſi recta alia BD, toti AD, potẽtia incõmenſurabilis, ita vt & compoſitũ ex quadratis rectarũ AD, BD, Mediũ ſit, & rectãgulum ſub AD, BD, Medium quoque, ac incommenſurabile cõpoſito ex quadratis rectarum AD, BD. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium eſt; erit etiam

FG,

EG, illi æquale, Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt; erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH, Rationalis eſt, longitudine ipſi EF, incommenſurabilis. Et quoniã KG, commenſurabile eſt rectangulo ſub AC, BC, cum illud huius ſit duplum; at rectangulum ſub AC, BC, incommenſurabile ponitur compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; [c] erit quoque KG, eidem compoſito, hoc eſt, ipſi EG, incommenſurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, [d] longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commenſurabilis ipſi EH; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter oſtendemus EK, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit, &c. Quod eſt abſurdum. [f] Vnam enim tantum congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 23. deci.
[b] 23. deci.
[c] 14. deci.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 80. deci.

DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

Si vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſsit, quam cõgruens, quadrato rectæ *lineæ* ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longiiudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neque congruens

gruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarũ, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus factus collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

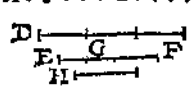
PROBL. 19. PROPOS. 86.

85.

INVENIRE primam Apotomen.

80.

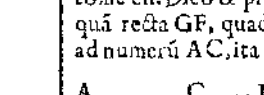
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri docuimus, quorũ exceſſus AC, non ſit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratũ, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF. Eritque EF, cũ cõmenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, eſſe primam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex E F, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, cõmenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neq; quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine re-



[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

ctæ EF, GF. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tantum commensurabiles; atque idcirco reliqua EG, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta EF, plus quã recta GF, quadrato H. Et quia est, vt numerus AB, ad numerũ AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF; erit per conuersionẽ rõnis, vt AB, ad CB, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex H. Habent autẽ AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [b] Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam cõgruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commẽ surabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

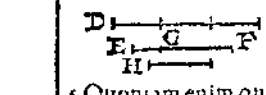


86. 81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE secundã Apotomẽ.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. præcedenti; expositaq; Rationali D, sumamatur ei longitudine commensurabilis GF; eritque GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico EG, esse secundam Apotomen.



[c] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo GF, sit ostensa Rationalis, erit quoq; EF, Rationalis. Quia vero numeri BC, AB, atq; adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri

meri quadrati; erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solum commensurabiles; & Ideoque EG, reliqua, A potome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Qm̃ ergo est vt AC, ad AB, ita quadratũ ex GF, ad quadratũ ex EF; & conuertẽdo, vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF: Ostendemus iam, vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

[a] 9. deci.

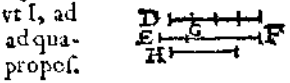
[b] 74 deci.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

87.
82.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expositа deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratũ ex D, ad quadratũ ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. [c] Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionẽ habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [d] erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario

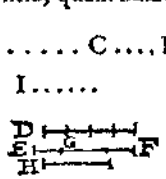


[c] 6. deci.

[d] 9. deci.

propoſ.6. huius lib. Dico EG, eſſe tertiam Apotomen.

a 6. deci. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB, AC, atq; adeo & quadrata ex EF, GF,



b 9. deci. proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi ſolum commenſurabilis; [c] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniã. n. eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quã numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [d] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H; Oſtendemusque, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſũ EF, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota EF, plus poſsit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis ſit Rationali [e] D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

c 74. deci.

d 9. deci.

e 4. deci.

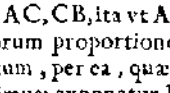
PROBL.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

88.
83.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commẽ ſurabilis ſit EF; eritq; propterea & EF, Rationalis. Quod ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, vt ibi, EG, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſsit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Quoniã igitur tota EF, plus poteſt, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, eſtque eadem tota EF, commenſurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



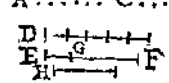
[a] 9. deci.

THEOR. 23. PROPOS. 90.

89.
84.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propoſ. præcedenti, fiat conſtructio, vt in propoſ. 87. hoc eſt, ſumatur GF, longitudine commenſurabilis Rationali D, &c. Oſtendemus ergo vt in propoſ. 87. EG, eſſe Apotomen. Dico & ſecundam



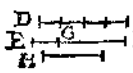
dam eſſe. Poſsit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia ſimiliter, vt in propoſ. 86. oſtenditur, per conuerſionem rationis, eſſe vt A B, ad C B, ita quadratũ E F, ad quadratum ex H; erunt rurſus, vt in propoſ. antecedenti, rectæ E F, & H, longitudine incommenſurabiles; eſtque congruens G F, Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

90. 85.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE ſextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propoſ. 54. ita vt A B, ad neutrum ipſorum A C, C B; & I, ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiãt, vt in propoſ. 88. Oſtendemus ergo ſimiliter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommenſurabiles eſſe; & E G, Apotomen eſſe.



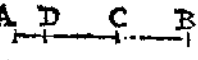
Dico & ſextam eſſe. Nam vt in propoſ. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommenſurabiles; Atque adeo neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H, quam oſtendemus, vt in propoſ. 89. longitudine incommenſurabilem eſſe ipſi E F. Igitur cum tota E F, plus poſsit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, & neutra ipſarum E F, G F, longitudine ſit commenſurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, ſexta Apotome. Inuenimus ergo ſextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHO

SCHOLIVM.

SED & expeditius ſex dictas Apotomas inuenientur hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.[a] Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abſciſſa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis ſit ipſi CB: Dico AD, eſſe primam Apotomen. Quoniã. n. AC, CB, Rationales ſunt potentia tantũ cõmẽſurabiles; erunt etiã AC, DC, Rationales potentia tantum commenſurabiles. [b] Eſt ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus poteſt, quam CB, hoc eſt, quam DC, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis: & eſt AC, Rationali expoſita longitudine commenſurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotome prima, AD prima Apotome. Eadẽ ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicũtur, & alias Apotomas inuenietemus, vt ex ſecunda ſecundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex ſexta ſextã, ſi minora nomina ex maioribus auferamus.



[a] 49. deci.

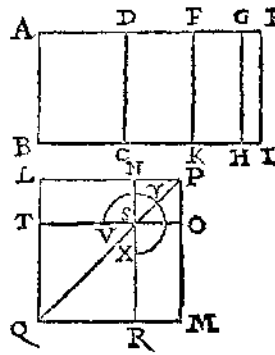
[b] 74. deci.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

91. 86.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Apotomen eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia ſolum commẽſurabiles; & tota AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit, quam



quam congruẽs DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulũ æquale ſub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. Et quia AE, plus poteſt, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis:

[a] 18. *deci.* [a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commenſurabiles;

[b] 16. *deci.* [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commẽ ſurabilis erit: Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine

[c] 12. *deci.* cõmenſurabilis. [c] Igitur & vtraq; AG, GE, ipſi AB, longitudine eſt cõmenſurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi AB, parallelis, quæ ipſi

[d] 20. *deci.* BC, productæ occurant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum ſub duabus rationalibus longitudine cõmenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraq; DF, FE, longitudine cõmenſurabilis eſt ipſi DE; & DE, longitudine incõmenſurabilis eſt Rationali AB; (Nã ſi cõmenſurabilis eſſet lõgitudine, cũ & AE, ſit eidem AB, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent AE, DE,

[e] 12. *deci.* longitudine quoque commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolum potentia commẽſurabiles:)

[f] 14. *deci.* [f] erit etiam vtraque ipſarum DF, FE, ipſi AB, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraq; DF, FE, Rationali DE, commenſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium.

[g] 22. *deci.*

[h] 14. *ſecun.* IAM vero ipſi AH, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipſi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens

bens cum L M, angulum L P M. [a] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex FE; [b] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [c] Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant rationem; erit FI, medium proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autem inter eadem LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: [d] Sed ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totum DI, toti gnomini VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum AI, per conſtructionem, æquale quadratis LM, NO, Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac propterea recta T S, poteſt ſpatium A C. Dico T S, Apotomen eſſe.

a 26. ſexti

b 17. ſexti
c 1. ſexti

d 36. primi

QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeo & rectæ T O, S O, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & L O, illi æquale, Medium. Incommenſurabilia ergo ſunt L O, & N O, cum vnum ſit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ T O, SO, [e] eandem rationem habentes cum LO, NO, [f] longitudine incommenſurabiles ſunt; [g] Atque idcirco reliqua T S, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

e 1. ſexti
f 10. deci.
g 74. deci.

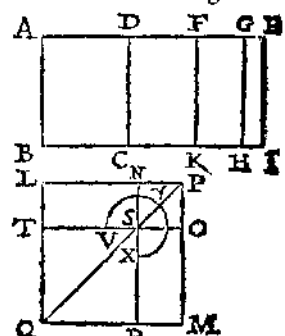
THEOR. 69. PROPOS. 93.

92.
87.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

CON-

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali *AB*, & *A* potoma ſecunda *AD*. Dico rectam, quæ ſpatium *AC*, poteſt, Mediæ *A* potomen eſſe primam. Sit ipſi *AD*, congruens recta DE. Erunt ergo *AE*, DE, ex definitione *A* potomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali *AB*; Et denique *AE*, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariã in F, & reliqua omnia conſtruãtur, vt in propoſitione præcedenti. [a] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, *AG*, GE, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti *AE*, longitudine commenſurabilis. Eſt autem *AE*, Rationali *AB*, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi *AB*, longitudine, cum DE, eidem *AB* ponatur longitudine commenſurabilis; [c] eſſent *AE*, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) [d] Igitur & vtraque ipſarum *AG*, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidẽ *AE*. Eſt autem vtraque *AG*, GE, Rationali *AE*, commẽſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam *AB*, *AG*, quam *AB*, GE, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Atque idcirco rectangulum vtrumq; *AH*, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali *AB*, longitudine commenſurabilis; erit quoque, vt in ſcholio propoſitionis 12. huius lib. oſtendimus, eidem *AB*, Rationali longitudine commẽſurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. [f] Vtrumque ergo rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus longitudine



[a] 18. deci.
[b] 16. deci.
[c] 12. deci.
[d] 14 deci.
[e] 22. deci.
[f] 20. deci.

gitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen eſſe primã.

QVONIAM enim AG, GE, longitudine ſunt cõmenſurabiles, [a] erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atque adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & latera eorum nempe rectæ TO, SO, ſaltem potentia erunt commenſurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (oſtenſum. n. ſunt AH, GI, Media eſſe.) Media ſint. Et quoniam FI, atque adeo ſibi æquale LO, Rationale eſt, propterea que Medio NO, incommenſurabiles; [b] erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incõmenſurabiles. Cum ergo & Mediæ ſint oſtenſæ, & commenſurabiles; erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commenſurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale eſt oſtenſum; [c] erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

[c] 75. deci.

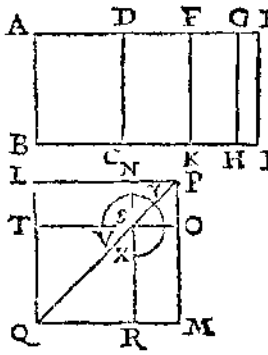
THEOR. 70. PROPOS. 94.

93. 88.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam. Sit. n. ipſi AD, congruẽs DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.

ſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propoſ. 92. eruntque rurſus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter ſe commenſurabiles; [a] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis erit. Eſt autem AE, poſita incommenſurabilis longitudine Rationali AB. [b] Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommenſurabilis. Cũ ergo vtraque AG, GE, Rationali AE, commenſurabilis, Rationalis ſit; erunt tam AB, AG, quã AB, GE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; [c] Ac propterea vtrumque rectangulum AH, GI, Medium erit. Rurſus quia DE, longitudine ponitur incommenſurabilis Rationali AB; erit quoque vtraque DF, FE, ipſi DF, longitudine commenſurabilis exiſtens, [d] eidem AB longitudine incommenſurabilis. Cum ergo vtraque DF, FE, Rationali DE, cõmenſurabilis, ſit Rationalis; erunt tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [e] atque propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam.



QVONIAM enim AH, GI, Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas oſtendimus commenſurabiles eſſe, commenſurabilia ſunt; Erunt & quadrata LM, NO, commenſurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commenſurabiles, ſaltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles, eſtque ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis GE, ipſi vero DE,

[a] 16. deci.
[b] 14. deci.
[c] 23. deci.
[d] 14. deci.
[e] 23. deci.
[f] 10. deci.

DE, commensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incommensurabiles; [a] ac propterea G I, F I, eandem rationem habentia, quam GE, FE, hoc est, illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt cõstat ex propos. 92. quod Medium esse ostẽdimus; erit & LO, Medium.) [b] erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. decí.

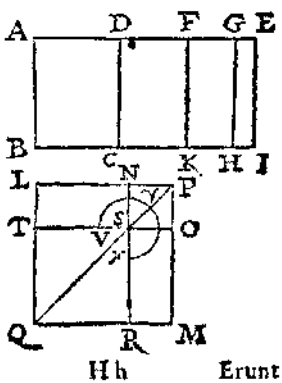
[b] 76. decí.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

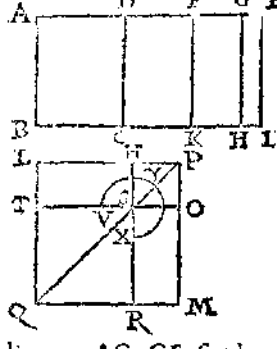
94. 89.

SI spatium continetur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua ita fiant, vt prius.



[a] Eruntergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus poteſt, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulũ ſub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficienſque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [c] erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles; [d] incommenſurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Minorem.



QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & cõpoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Itẽ quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, cõtentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq; adeo recta TO, SO, potentia incommenſurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotome quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 19. deci.
[b] 20. deci.
[c] 22. deci.
[d] 10. deci.
[e] 77. deci.

95. 90. THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali,

li, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quę cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propoſitionis) ſub Rationali *AB*, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Sit ipſi *A*D, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, D*E*, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & D*E*, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB, vt in propoſ. 93. diximus; [a] erit rectangulum *AI*, Medium. Item quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rurſus erũt, vt in præcedenti propoſ. AH, GI, incommenſurabilia; poteritq; ſi, vt oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS, ſpatiũ *AC*. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum *efficit*.

[a] *22. deci.*

[b] *20. deci.*

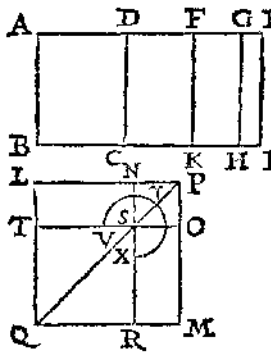
QVONIAM enim oſtenſum eſt *AI*, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demõſtrauimus FI, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulũ ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autẽ & TO, SO, potentia incommenſurabiles, vt in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; [c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

[c] *78. deci.*

96. 91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſexta AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totũ efficit. Sit.n. ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarũ AE, DE, Rationali AB, cõmenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F. & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis eſt, [a] & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [a] erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; [b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commenſurabilia ſint, [c] erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam uero demõſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

[a] 22. deci.
[b] 10. deci.
[c] 14. deci.

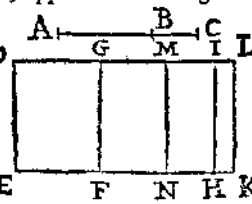
QVO-

QVONIAM enim AI, *Medium* oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis L *M*, N O, rectarum TO, SO, illi æquale, *Medium*. Itẽ quia FI, Mediũ oſtẽſum eſt; erit & LO, illi æquale, contentumque ſub TO, SO, *Medium*. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile, vt oſtendimus; erit quoque LO, ſub TO, SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarũ TO, SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Deniq; TO, SO, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt demonſtratum. Quamobrem cum TO, SO, ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, *Medium*; necnon & rectangulum ſub ipſis *Medium*, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarum incommenſurabile; [a] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio *Medium* totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum. [a] 79. *decimi*

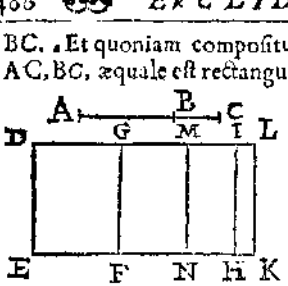
THEOR. 74. PROPOS. 98. 97. 92.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint *Rationales* potentia ſolum commenſurabiles; [b] & ad *Rationalem* DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, eſſe Apotomen primã. Ad eandem. n. DE, ap applicetur rectangulũ DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totũ tũ DK, æquale ſit compoſito ex quadratis rectarũ AC, BC. [b] 45. *primi*



BC. [a] Et quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cũ quadrato ex AB; ſi auferantur quadratũ ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectãgulo bis ſub AC, BC, æquale; atque adeo diuiſa GL, biſariam in M, ductaq; MN, ipſi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo ſub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales ſunt; erunt quoq; quadrata ex AC, BC, Rationalia; ideoque commenſurabilia. [b] Cum ergo & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipſorum ſit commẽſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, [c] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia AC, BC, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erit rectangulũ ſub ipſis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF, [d] erit GL, Rationalis ipſi GF, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Medium, hoc eſt, Irrationale, incommenſurabilia ſunt; [e] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem. quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint demonſtratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [f] Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. *Dico* & primam eſſe.



QVONIAM enim per lemma propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, BC, hoc eſt, MK, medium eſt proportionale inter quadrata rectarũ AC, BC, hoc eſt, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales ſunt. [g] Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex ML, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc eſt illis æqualia DH, IK, commenſurabilia ſunt, [h] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis ha-

[a] 7. ſecun.
[b] 16. deci.
[c] 21. deci.
[d] 23. deci.
[e] 10. deci.
[f] 74. deci.
[g] 27. deci.
[h] 10. deci.

lis habentes proportionem, longitudine commenſurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales ſint, & ad maiorem DL, applicatum rectãgulum ſub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficienſq; figura quadrata; atque ſit oſtenſa DI, ipſi IL, longitudine commenſurabilis; [a] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quare cum ſit oſtenſum DG, eſſe Apotomen, & totam DL, plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eandem totam commenſurabilem eſſe longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod oſtendendum erat.

[a] 18. deci.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

98. 93.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatũ latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale: [b] Et ad Rationalẽ DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen ſecũdam eſſe. Conſtruantur. n. eadẽ, quæ in antecedenti propoſ. ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod ſub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod ſub AC, BC, continetur ſemel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ ſunt potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata, hoc eſt, illis æqualia, DH, IK, Media, & commenſurabilia; [c] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commenſurabile erit: Igitur & Medium. per coroll. propoſ. 24. huius lib. Cũ ergo DK, applicetur ad Rationalẽ DE, [d] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incõmenſura-

[b] 45. primi

[c] 16. deci.

[d] 23. deci.

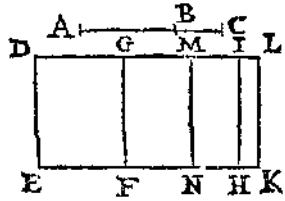
bilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod
[a] 21. deci. cum applicetur ad Rationalem DE, [a] erit GL, Rationalis longitudine cõmenſurabilis ipſi DE. Quia verò DK, Medium, id eſt, Irrationale, & GK, Rationale, incommẽ
[b] 10. deci. ſurabilia ſunt; [b] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ, erunt DL, GL, Ra-
[c] 74. deci. tionales potentia tantum commenſurabiles; [c] Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Nam ſimiliter, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus totam DL, plus poſſe, quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum cõgruens GL, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali DE; erit ex defin. D G, Apotome ſecunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundã. Quod oſtendendum erat.

99. 94.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatũ, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome ſecũda AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia tantũ commen-
[d] 45. primi ſurabiles, contineantque Medium: [d] Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, eſſe tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Oſtẽdemus iã, vt in propoſ. præcedenti, DK, Medium eſſe,
[e] 23. deci. [e] atque adeo rectã DL, Rationalem ipſi DE, longitudine incommenſurabilem. Et quia



quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt, atque ob id, & eius duplum GK; erit quoque GL, Rationalis ipſi DE, lõgitudine incommẽſurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC; [b] erit quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. [c] Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, BC, hoc eſt, ipſi GK; [d] Atque adeo rectę DL, GL, eandem habẽtes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſę & Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac proinde reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ. 98. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe, quàm GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit cõmenſurabilis, vt demonſtratũ eſt; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratũ igitur Mediæ Apotomæ, ſecundę ad Rationalem applicatũ, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 23. decì.

[b] 10. decì.

[c] 16. decì.

[d] 10. decì.

[e] 74. decì.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

100.

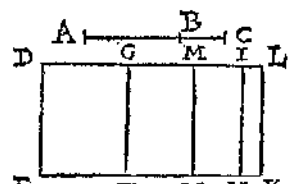
95.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT Minor AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint, facientesq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale;

[a] 45. primi

nale; rectangulum vero ſub AC, BC, Medium: & ad Rationalem DE, applicetur ſpatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniã igitur compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale eſt; [b] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Item quia rectangulum ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; [c] erit GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam DK, Ratibnale, & GK, Irrationale, nempe Mediũ, incommenſurabilia ſunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipſis habentes rationem longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia tantum commenſurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & quartam eſſe. Quoniam enim AC, EC, potentia ſunt incommenſurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc eſt, ipſis æqualia, DH, IK, incommenſurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo rectangulum ſub DI, IL, æquale ſit quadrato ex ML, id eſt, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propoſ. 98. eſt demonſtratum; [g] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum tota DL, plus poſſit quam congruens GI, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitq; eadẽ tota DL, Rationali DE, longitudine oſtenſa commenſurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratũ igitur *Minoris* ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.



[b] 21. deci.

[c] 23. deci.

[d] 30. deci.

[e] 74. deci.

[f] 80. deci.

[g] 29. deci.

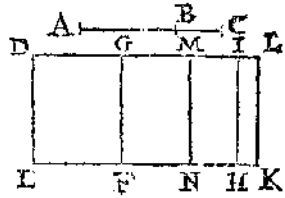
THEOR.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

101.
96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum *Rationali* Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero ſub iiſdem AC, BC, Rationale: [a] Et ad Rationalē DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam eſſe. Conſtruantur. n. eadē, quæ ſupra. Qm̄ igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, atqueadeo & illi æquale DK, Medium eſt; [b] erit DL, *Rationalis* ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Item quia rectangulum ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale eſt; [c] erit GL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Et quia DK, Medium ſeu Irrationale, & GK, Rationale, incommenſurabilia ſunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipſis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sunt autem & Rationales oſtenſæ. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome eſt. Dico & quintam eſſe. Eodem. n. modo, vt in antecedēti propoſ. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe quam GL, congruentem, quadrato ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare cum congruens GL, demonſtrata ſit longitudine commenſurabilis *Rationali* DE; erit ex defin.



[a] 45. primi

[b] 23. deci.

[c] 21. deci.

[d] 18. deci.

[e] 74. deci.

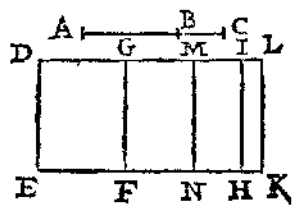
DG,

DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

102. 97. THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub iiſdem AC, BC, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarũ: [a] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, ſpatium æquale DF, latitudinem faciés DG. Dico DG, eſſe ſextam Apotomen. Ead. n. fiant, quæ ſupra. Quoniã igitur tã compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, quam rectangulũ ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; [b] Erit tam DL, quam GK, Rationalis ipſis DE, longitudine incõmenſurabilis. Et quia rectangulum ſub AC, BC, incõmenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; Et ſunt rectangulum ſub AC, BC, & eius duplum GK, commenſurabilia; [c] Erit & GK, eidem compoſito, hoc eſt, ipſi DK, incõmenſurabile; [d] propterea q; rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum



[a] 45. primi

[b] 23. deci.

[c] 24. deci.

[d] 30. deci.

lum commenſurabiles; [a] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & ſextam. Oſtendemus.n. ſimiliter, vt propoſ. 101. totam DL, plus poſſe, quam congruentem GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommmenſurabilis. Cum igitur neutra ipſarum DL, GL, commẽſurabilis ſit lõgitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome ſexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat oſtendendum. [a] 74. deci.

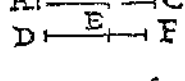
THEOR. 80. PROPOS. 104.

103. 98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis; & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipſi congruẽs BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Sit autem ipſi AB, longitudine commenſurabilis DE. Dico & DE, Apotomen eſſe, atq; ordine eandẽ ipſi AB.

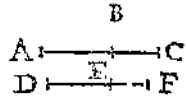
[b] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [c] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commenſurabiles; [d] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commenſurabiles longitudine. Et quia AC, BC, ſunt Rationales, erunt etiam illis commenſurabiles DF, EF, Rationales. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & ſunt AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles; erunt quoq; ex iis, quæ ad propoſ. 10. huius libri demonſtrauimus, DF, EF, potentia tantum commenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint oſtenſæ, [e] reliqua DE, Apotome eſt. Dico & ipſi AB, ordine eandem eſſe. Poſsit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽ ſurabilis. Quo poſito, [f] poterit & DF, plus quam EF, qua



[b] 12. ſexti
[c] 12. quin.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 11. deci.

quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commẽsurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis expositæ, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commẽsurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

12. decim.



14. decim.

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommẽsurabilis Quo posito, potest & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

15. decim.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotome, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis longitudine commensurabilis vtamur voce: potentia tantum commensurabilis;) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eãdem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis expositæ, & EF, eidem AC, longitudine commensurabilis sit, sed Rationalis quidem commensurabilis

rabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt DE, illi potentia tã tum commenſurabilis, ſit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, ſecũda, quarta, vel quinta, eique conguens BC; & ſit DE, ipſi AB, potentia tantum commenſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtendemus Apotomen eſſe, eique congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen eſſe ordine eandem ipſi AB. Nam ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expoſitæ commenſurabilis longitudine; [a] atque adeo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt AC, & DF. Quare cum ſit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt quoque AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda, vel quinta. Eſſet enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, atque adeo & ipſæ inter ſe. Quocirca & AB, DE, inter ſe longitudine forent commenſurabiles. quod non ponitur.

[a] 12. deci.

[b] 10. deci.

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome primæ, vel ſecundæ, vel tertiæ, rectã DE, quæ ipſi AB, potentia ſolũ eſt cõmenſurabilis, eſſe quoq; vnã ex illis tribus, licet ordine non eadẽ ſit. Nã hoc poſito, poterit AC, plus q̃ BC, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commẽ ſurabilis. Cũ ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [c] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ lõgitudine ſibi cõmenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome primæ, vel ſecũdæ, vel tertiæ. Eodẽ modo ſi AB, eſt Apotome quartæ, vel quintæ, vel ſextæ, ita vt AC, plus poſſit, q̃ BC, quadrato rectæ ſibi lõgitudine incõmenſurabilis; erit quoq; DE, Apotome quartæ, vel quintæ, vel ſextæ, quãuis ordine nõ eadẽ ipſi AB: quia rurſus, cũ ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, [d] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quartæ, vel quintæ, vel ſextæ.

[c] 15. deci.

[d] 15 deci.

I N

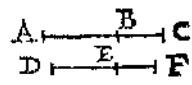
IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.

104. 99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine erit.

SIT Mediæ Apotome quæcunque A B, eique congruens B C, ita vt A C, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue lógitudine & potẽtia, ſiue potẽtia tm̃. Dico & DE, Mediæ Apotomẽ eſſe, & ipſi A B, ordine eandem.



[a] 12. ſexti [b] 12. quin.

[a] Fiat.n. vt A B, ad D E, ita BC, ad EF. [b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [c] erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodẽ modo commenſurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ ſunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis commenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autẽ AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. DF, EF, ſolum potentia commenſurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ; [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. *Dico* & eandem eſſe ordine ipſi AB. Quoniã.n. eſt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita eſt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, E F; Et permutando vt quadratum ex AC,

[c] 15. vel 16. decimi. [d] 14. deci. [e] 73. vel 76. decimi.

ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Igitur cum quadratũ ex AC, commenſurabile ſit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, oſtenſæ ſint cõmenſurabiles; [a] erit & rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; [b] atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium ex coroll propoſ. 24. huius lib. [c] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome ſecũda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 10. deci.

[b] 73. deci

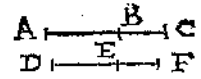
[c] 76. deci.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

105. 116. 100.

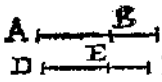
RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

SIT Minor AB, ipſique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommẽſurabiles, facientesque compoſitum quidẽ ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulũ vero ſub iiſdẽ AC, BC, Medium. Sit autẽ DE, ipſi AB, cõmenſurabilis ſiue lõgitudine & potẽtia, ſiue potẽtia tantũ. Dico & DE, Minorẽ eſſe. Fiant. n. eadem, quæ ſupra, ita vt rurſus AB, BC, ad DE, EF, candẽ habeãt rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. DF, EF, ipſis AC, BC, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potẽtia tantum. Et quoniã eſt, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [d] erit vt quadratũ ex AC, ad quadratũ ex BC, ita quadratũ ex DF, ad quadratum ex EF; & cõponendo vt cõpoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, ad quadratũ ex BC, ita compoſitũ ex quadra-



[d] 22. ſexti

tis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF; & permutando vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad cõ-



poſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Eſt autem quadratũ ex BC, commẽſurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. [a] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, compoſito ex quadratis rectarum DF, EF, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypotheſi, Rationale. Igitur & cõpoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. deſin. Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, rectãgulo ſub DF, EF, eſſe commenſurabile: ponitur autem rectangulum ſub AC, BC, Medium; Erit quoque rectãgulum ſub DF, EF, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Et quia eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, ſuntq. AC, BC. potentia incommenſurabiles; [b] erunt etiam D F, E F, potentia incommenſurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarũ DF, EF, Rationale, rectangulum vero ſub ijſdem DF, EF, Medium; [c] erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 18. deci.

[b] 23. deci.

[c] 77. deci.

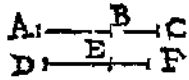
PROBL. 83. PROPOS. 107.

106. 117. 101.

RECTA linea commẽſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totũ efficiens eſt.

SIT recta AB, cum Rationali Mediũ totũ efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles, facientesque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum ſub

ſub AC, BC, Rationale: Sit autẽ DE, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit, Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus vt in antecedẽti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt deniq; eodẽ modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ DF, EF, potẽtia incõmenſurabiles. Igitur cũ DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



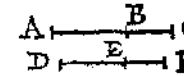
* 78. deci.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

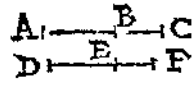
107. 102.

RECTA linea commẽſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB, cum Medio Medium totũ efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incõmenſurabiles, facientesque compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectãgulum ſub ipſis Medium quoq;, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autẽ DE, ipſi AB, quomodolibet commenſurabilis. Dico & DE, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus



similiter, vt in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF.



Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Mediũ. Rurſus vt in propoſ. 105. oſtendemus, rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud ſit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propoſ. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommenſurabiles. Poſtremo quia compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum eſt; & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile rectangulũ ſub DF, EF: Sunt autem compoſitũ ex quadratis rectarum *AC*, BC, & rectangulum ſub AC, BC, per hypotheſin, incommenſurabilia; erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, incommẽſurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia ſint incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, *Medium*; necnon & rectangulum ſub ipſis, Medium; incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis; [a] erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, quæ cum *Medio*, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] *79. decimi.*

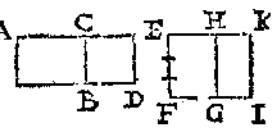
108. 103. THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR a Rationali *AD*, Medium CD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium reliquum *AB*, eſſe vel Apotomen, vel Minorẽ. Exponatur enim Rationalis EF, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipſi *AB*, &

[b] *44. primi*

AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipſi CD, ita vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale eſt; [a] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia HI, Medio CD, æquale Medium eſt, [b] erit HK, Rationalis, ipſi EF, lõgitudine incõmenſurabilis. Itaque cum EK, quidem ſit longitudine cõmenſurabilis ipſi EF; at HK, eidem EF, longitudine incõmenſurabilis, [c] erunt EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles: [d] propterea que reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus põt EK, quam HK quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc eſt, ſpatium AB, ſibi æquale, [e] Apotome eſt. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectę ſibi longitudine incommenſurabilis, cum tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potẽs ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [f] Minor eſt. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

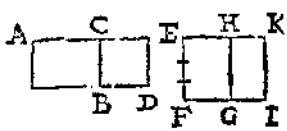


[a] 21. deci.
[b] 23. deci.
[c] 13. deci.
[d] 74. deci.
[e] 92. deci.
[f] 95. quin.

THEOR. 86. PROPOS. 110. 109. 104.

RATIONALI a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem. n. conſtruatur, quæ ſupra.



Et quia EI, Medio AD, æquale, Medium eſt; [a] erit EK, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; [b] erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Itaque cum HK, quidem ipſi EF, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis; [c] erunt HK, EK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [d] Ac proinde reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens HK, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſecunda EH, hoc eſt, ſpatio AB, illi æquale, [e] Mediæ eſt Apotome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens HK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc eſt ſpatio illi æquale AB, [f] eſt ea, quæ cum Rationali Medio totum efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 23. deci.
[b] 21. deci.
[c] 13. deci.
[d] 74. primi
[e] 93. deci.

THEOR. 87. PROPOS. 111.

110.
105.

MEDIO a Medio detracto, quod incom-

sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomẽ secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Cõstructis enim iisdẽ, quæ supra; quoniã EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia[c] Media sunt; erũt EK, HK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur incommensurabilia; [b] erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantũ cõmensurabiles; [c] Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatiũ EG, contentũ sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est, spatium AB, illi æquale; [d] Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus; erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, [e] est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.



[c] 23. deci.

[b] 10. deci.

[c] 74. deci.

[d] 94. deci.

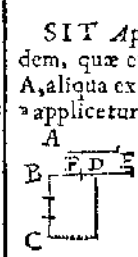
[e] 97. deci.

111. 106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT *A* potóme *A*, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, A, aliqua ex binis nominibus. Expoſita autē Rōnali BC, [a] applicetur ad BC, rectangulum C*D*, æquale quadrato ex A. Quoniā igitur A, Apotome eſt; [b] erit latitudo BD, *Apotome prima*. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum cōmenſurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine [c] commenſurabilis, & ipſa BE, Rationali BC, commenſurabilis erit lōgitudine. Rurſus quia A, ponitur eſſe quoque ex binis nominibus; [c] erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomē B F. Erunt igitur ex defin. eius, quę ex binis nominibus prima eſt, *BF*, FD, *Rationales* potentia ſolum commenſurabiles, poteritque BF, plus quam F D, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, & ipſa B F, *Rationali* BC, lōgitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam BE, quàm BF, longitudine ſit commenſurabilis eidem BC; [d] erunt quoque *BE*, BF, inter ſe commenſurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, ſit longitudine commēſurabilis parti B *F*, erit & eadem BE, reliquę parti *FE*, longitudine commenſurabilis, ex coroll. prop. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, *Rationalis ſit*, & *FE*, *Rationalis* erit. Quoniam vero duarum linearum B E, *FE*, longitudine commenſurabilium, ipſa B E, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi D E; (quod B E, *DE*, *Rationales* ſint potentia ſolum commenſurabiles), [e] erit quoque altera *FE*, eidem *DE*, incommenſurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, *D* E, *Rationalis* eſt oſtenſa. *Rationales* ergo ſunt *FE*, *DE*, potentia ſolum



a 45. primi
b 98. deci.
c 61. deci.
d 12. deci.
e 14. deci.

ſolum commenſurabiles. Quare reliqua FD, a Apotome eſt; Atque adeo Irrationalis. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod demonſtrandum erat. a 74. deci.

COROLLARIVM.

EX demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, b *latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.* b 23. deci.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, c *latitudinem efficit Apotomen primam.* c 98. deci.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, d *latitudinem efficit Apotomen ſecundam.* d 99. deci.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, e *latitudinem efficit Apotomen tertiam.* e 100. deci.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, f *latitudinem efficit Apotomen quartam.* f 101. deci.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, g *latitudinem efficit Apotomen quintam.* g 102. deci.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, h *latitudinem efficit Apotomen ſextam.* h 103. deci.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales;

inter

inter ſe autem, quod ordine non ſint eadẽ Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & a Media, & inter ſe ſe differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtrauimus, Apotomen eandem non eſſe, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextam: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarũ quinque Irrationaliũ, quæ ipſam ſequũtur, ad Rationalẽ applicata, latitudines efficiũt ex binis nominibus primam, ſecundã, tertiam, quartam, quintã, ac ſextam; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam expoſita tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe ſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus; Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.

4. Ex

4. Ex binis Medijs ſecunda.

5. Maior.

6. Rationale ac Medium potens.

7. Bina Media potens.

8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.

9. Mediæ Apotome prima.

10. Mediæ Apotome ſecunda.

11. Minor.

12. Cum Rationali Medium totum efficiens.

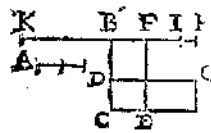
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113. 112. 0.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus,

& in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.

SIT Rationalis *A*, & ex binis nominibus BC, cuius maius nomen BD;[a] & ad BC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex *A*, latitudinem faciens EF. Dico BF, eſſe *A*potomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc *A*potomē BF, eſſe ordine eandem ipſi BC, ex binis nominibus.[b] *A*pplicetur enim rurſus ad DC, minus nomen, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; ſitque ipſi DG, æqualis BH. Et quoniam æqualia ſunt BE, CG;[c] erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc eſt, ſibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Eſt autem BD, maior, quam DC. Igitur & HF, maior eſt, quam FB. Ponatur FI, ipſi FB, æqualis;[d] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc eſt, ad ſibi æqualē BF, ita FK, ad BK. Oſtenſum eſt autem eſſe vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles.[e] Igitur & FK, BK, potentia ſolum commenſurabiles ſunt.



RVRSVS quia eſt vt HF, ad BF, ita FK, ad BK, (erũt quoque HF, FK, antecedentes ſimul, nempe tota HK, ad BF, & BK, conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam FK, vt FK, ad BK. Ac propterea FK, media proportionalis eſt inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, ſecunda. Quia vero CG, cum Rationale ſit, (eſt enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum,[g] facit DG, latitudinem

[a] 45. primi
[b] 45. primi
[c] 14. vel 16. ſexti.
[d] 12. ſexti.
[e] 10. deci.
[f] 12. quinti
[g] 21. deci.

dinem Rationalem, ipſi DC, longitudine commenſurabilem; Erit quoque HB, ipſi DG, æqualis, Rationalis & longitudine cõmenſurabilis ipſi DC. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoque vt BD, ad DC, ita HK, ad FK. [a] Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commenſurabile eſt quadrato ex DC, (quod rectæ BD, DC, ſint Rationales potentia commenſurabiles, cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus.) [b] Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratũ ex FK, ita recta HK, ad BK. [c] Igitur longitudine commenſurabilis eſt HK, ipſi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & BK, ipſi HK, commenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cũ ergo oſtenſa ſit FK, ipſi BK, potentia ſolum commenſurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales ſint, & potentia tantum oſtenſæ commenſurabiles, [d] erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod eſt primum.

[a] 22. ſexti

[b] 10. deci.

[c] 10. deci.

[d] 74. deci.

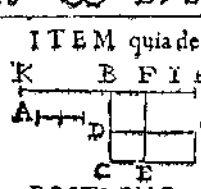
QVONIAM vero oſtenſum eſt eſſe rectam HK, totam parti BK, longitudine commenſurabilem, [e] erunt propterea & BK, BH, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cum ergo BH, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi DC; erit quoque BK, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum eſt eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, oſtenſæ longitudine commenſurabiles; [f] Erunt quoque BD, FK, commenſurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipſi BD, & BK, ipſi DC, longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.

[e] 16. deci.

[f] 10. deci.

ITEM

ITEM quia demonſtrauimus eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erũt idcirco Apotomę nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipſius BC, quæ eſt ex binis nominibus. Quod eſt tertium.



POSTREMO vel BD, plus poteſt, quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incõmenſurabilis. Si plus poteſt BD, quã DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; [a] poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis: Et ſi BD, plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Et ſi quidẽ BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commẽſurabilis; erit & FK, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si vero DC, ſit Rationali commẽſurabilis lõgitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si denique neutra ipſarum BD, DC, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; [b] erit quoque neutra ipſarum FK, BK, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF, ipſi BC, ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertijs. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 15. decimi

[b] 14. decimi

113. o.

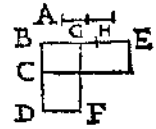
THEOR. 90. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadẽ proportione;

&

& adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eũdem habet ordinẽ, quem ipſa Apotome.

SIT Rationalis *A*, & *A*potome B C, cui congruat C D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum Ç E, æquale quadrato ex *A*, latitudinẽ faciens BE. Dico BE, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipſam BE, ex binis nominibus, eſſe ipſi BC, Apotomæ ordine eandem. [b] Applicetur enim rurſus ad BD, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc eſt, ipſi C E, latitudinem faciens BG. Et quoniam B F, C E, æqualia ſunt; [c] erit vt BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conuerſionem rationis, vt BE, ad GE, ita B D, ad C D. Secetur quoque E G, ad H, ſecundum proportionem B E, ad G E, ex ijs, quæ in ſchol. propoſ. 10. lib. 6. conſcripſimus; vt ſit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur eſt vt BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoque BH, reliqua ipſius BE; ad HE, reliquã ipſius GE, vt tota BE, ad totam GE: Erat autem vt BE, ad G E; ita EH, ad HG. Erit igitur quoque vt BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis eſt inter BH, GH. Quare erit vt BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, ſecunda, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc eſt, BH, ad HE: & ſunt BD, CD, cum ſint nomina *A*potomæ BC, Rationales potentia tantum commenſurabiles, [d] Erunt quoque BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commenſurabilia. Igitur rectę BH, GH, eandem habentes rationem cum quadratis ex BH, HE, vt demonſtrauimus, [e] lõgitudine ſunt commenſurabiles; Ac propterea tota BH, longitudine commenſurabilis exiſtens parti G H, commenſurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propoſ.



[a] 45. primi

[b] 45. primi

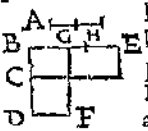
[c] 14. vel 16. ſexti.

[d] 10. deci.

[e] 10. deci.

propoſ. 16. huius lib. At vero cum BD, Rationalis ſit, nempe maius nomen Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; erit latitudo BG, Rationalis commenſurabilis longitudine ipſi BD. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & BH, ei dem BD, Rõnali commẽſurabilis eſt longitudine, atque adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem BH, BG, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero BH, HE, oſtenſę ſunt commenſurabiles potentia tantũ, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; [b] Ac propterea BE, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum.

[a] 21. deci.



[b] 37. deci.

QVONIAM vero oſtendimus eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD; atq; adeo permutãdo BH, ad BD, vt HE, ad CD; Oſtenſa eſt autem BH, ipſi BD, longitudine commenſurabilis; [c] erit quoque HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

[c] 10. deci.

IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertiũ.

POSTREMO vel BD, plus poteſt quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, [d] poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis lõgitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine

[d] 15. deci.

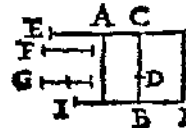
dine Rationali expoſitæ; a erit quoq; neutra ipſarũ BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis, atque tertijs definitionibus, ipſa BE. ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ BC. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 14. deci.

THEOR. 91. PROPOS. 115. 114. o.

SI ſpatiũ cõtineatur ſub Apotoma, & ea, que ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.

CONTINEATVR ſpatiũ A B, ſub Apotoma AC, & ſub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, cõmenſurabilia ſint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Poſsit autem recta F, ſpatiũ AB. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rõnali G, b applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. c Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commenſurabilia ſunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeo vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. d Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE: e Commenſurabilis autem eſt longitudine HI, ipſi CE, quod vtraque



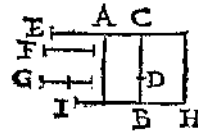
b 45. primi

c 113. decimi.

d 19. quint.

e 12. decim.

HI, CE, commenſurabilis fuerit longitudine ipſi CD.



[a] Igitur & BH, ipſi AC, longitudine eſt commenſurabilis; [b] Atque idcirco & HC, ipſi BA, commenſurabile erit, [c] cum ſit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale eſt. Igitur & BA, illi cõmenſurabile, Rationale erit, propterea q; & recta F, ipſum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis. Quod erat demõſtrandum.

[a] 10. decim.
[b] 10. decim.
[c] 1. ſexti.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, fieri poſſe, vt ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus. Nam ſpatium AB, contentum ſub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales ſunt, oſtenſum eſt Rationale eſſe.

SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propoſitionibus intelligenda ſunt nomina Apotoma nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commenſurabilia eſſe longitudine. In prioribus enim duabus, lõgitudine oſtenſa ſunt eſſe cõmenſurabilia; In poſteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, ſi nomina CD, DE, nominibus CE, AE, potentia tantum commenſurabilia ponantur. Id quod facile ex demonſtrationibus harum trium propoſitionum apparet.

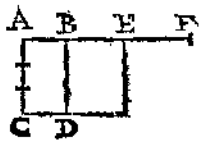
A ME-

THEOR. 92. PROPOS. 116.

115. 107.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, et nulla alicui antecedentium eſt eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem ſit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propoſ. 112. huius lib. Expoſita enim Rationali AC, cõtineatur ſub AB, Media, & Rationali AC, ſpatium AD. Eſt ergo AD, ſpatium ſub Rationali AC, & Irrationali AB, contentũ, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſsit ipſum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non eſſe eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propoſ. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, a latitudinem faciat Rationalem ipſi AC, longitudine incommenſurabilem: Et quadrata reliquarũ duodecim Irrationaliũ, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt conſtat ex propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad candẽ Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem faciat differentem a latitudinibus, quas quadrata illarũ tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



a 23. decimi.

QVOD ſi cõplcatur rectãgulum DE; erit & hoc cõtentũ ſub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lẽmate propoſ. 38. Poſsit ergo ipſum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus EF, nõ eſſe

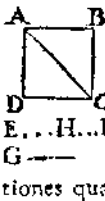
eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi BE. Hoc autem manifeſtum eſt, cum quadratum ipſius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius BE, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes a BE, vt demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe, & a diſtis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt. &c. Quod demonſtrandum erat.

118. 7.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri AB. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; ſintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, ([b] Cum enim quadrata habeant ſuorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum ſint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum eſt quadrati ex AB per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus



5. decimi.

[b] 20. ſexti, & 11. octaui.

merus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariã poſsit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe EF, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſe ipſum multiplicans producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; [a] eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod eſt abſurdum. oſtenſus eſt enim par.) Quia vero EF, & G, in ſua proportione minimi, [b] inter ſe primi ſunt; & EF, oſtenſus eſt par, erit G, impar. (Si enim par etiam eſſet, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus eſt numeri EH; [c] & quadrati habẽt proportionẽ laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partiũ 4. eſt quadratus ex EF, taliũ 2. erit quadratus ex G; & taliũ 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſupra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus. quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter AC, lateri AB. Igitur *incommenſurabilis longitudine*.

[a] 29. noni

[b] 24. ſepti.

[c] 11. octaui

ALITER. Sit ſi poteſt fieri, diameter AC, commenſurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, *proportionem*, quam numeri EF, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum ſit quadrati ex AB; ſit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam eſt demonſtratum, quadratus ex EF, duplus eſt quadrati

[a] 14. octaui ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; [a] ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cũ ergo & G, ſe ipſum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdum. Non ergo commenſurabilis eſt diameter AC, longitudine lateri AB. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommẽſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1 demonſtrata a nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia ſumptis in proportione dupla

[b] 10. noni *quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.* [b] *ſolum tertius ab vnitate quadratus eſt, & cæteri omnes vnum intermittentes; quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non ſit; erunt ſolum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad*

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

[c] 24. octaui *2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (* [c] *alias & 2. quadratus eſſet.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* [d] *Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum.*

[d] 9. decī.

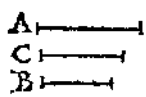
HOC etiam theorema aliter demonſtrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex ſequentibus Stereometria libris pendet, vt merito omitti poſſet. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſuralitatem omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinent; viſum eſt, eam paucis explicare, aſſignando more

noſtro

noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter quas media proportionalis ſit C. Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita eſt figura rectilinea quæuis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem, ſimiliterque poſitam ſuper C; & ſunt A, & B, longitudine incommenſurabiles; [a] erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper A, & C, incommenſurabiles.



[a] 10. deci.

RVRSVS [b] quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, deſcripta: Quadrata autem hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque poſitæ, proportionem habent, quam rectæ A, & B, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. [c] habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam rectæ A, B: Sed rectæ A, B, incommenſurabiles ſunt longitudine. [d] Igitur & circuli dictarum rectarum A, C, incommenſurabiles ſunt.

[b] 2. duodecimi

[c] 11. quinti

[d] 10. deci.

IAM vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata eiuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ ſuper A, C, [e] habebunt pyramides, atque priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc eſt, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommenſurabiles ſint, vt modo eſt demonſtratum; [f] incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, & priſmata.

[e] 5. 6. vel 7. duodecimi.

[f] 10. deci.

QVOD ſi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, C, [g] habebunt huiuſmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles, [h] Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta ſunt igitur non ſolum lineæ, & ſuperficies incommenſurabiles, verum etiam & corpora, ſiue ſolida incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum.

[g] 11. duodecimi.

[h] 10. deci.

[a] 10. deci.

[b] 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

EADEM autem ratione, ſi recta A, & B, longitudine commenſurabiles ſint, [a] oſtendemus earum figuras rectilineas ſimiles, ſimiliterque deſcriptas, necnon & ipſarum circulos, commenſurabiles eſſe, [b] atque adeo & earundem pyramides, & priſmata; ac denique conos, & cylindros; ſi modo eandem habeant altitudinem, vt perſpicuum eſt.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

* * *

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.

POSTQVAM *Euclides in prioribus ſex libris abunde de ea Geometriæ parte diſſeruit, quæ circa plana verſatur, ſibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vſurpauit; In ſubſequentibus vero tribus diligenter ea de paſſionibus numerorum docuit, quæ neceſſaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearũ commenſurabilium, atq; incommenſurabilium, quas idcirco luculentiſsime in libro decimo deinde expoſuit, vt conſtructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in poſtremis tribus libris, nimirum in 13. 14 & 15. ſubtiliſsime diſſeritur, perfectius poſſet cognoſci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſiue ſolida conſiderat, proprioque vocabulo Stereometria eſt appellata.*

EXPLICAT autem prius, more ſuo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, ſiue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita vt tres dimenſiones poſſideat, vnam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemve, appellari ſolidum, ſiue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantũ habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adiecit, ſuperficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hoc enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis ſit magnitudinis expers; vt autem percipiamus ſuperficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri; hac enim deſcribet veſtigiũ longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in tranſuerſum eſt factus; carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditum, conſulunt, vt concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter eleuari, ſiue in tranſuerſum moueri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum vero ſeu craſſum, propter eleuationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum ſiue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta diſtincta a linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantum dimenſio poſſit aſſignari, vt perſpicue in commentariis, quos in ſpharam Ioannis de Sacro Boſco conſcripſimus, a nobis fuit demonſtratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.

SOLI-

II.

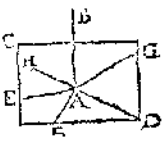
SOLIDI autem extremum, eſt ſuperficies.

QVEMADMODVM *linea finita in extremitatibus puncta, ſuperficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc aut Solidi finiti extremũ eſſe ſuperficiem. Cum enim ſolidum, ſiue corpus efficiatur ex illo motu imaginario ſuperficiei; perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.*

III.

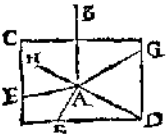
LINEA recta eſt ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta AB, plano CD, inſiſtens, ita vt B, punctum ſit in ſublimi extra planum CD, at punctum A, in ipſo plano, tum demum dicetur recta ſeu perpẽdicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in punctο A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter inſiſtat plano CD, & nõ magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eadẽq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, educta

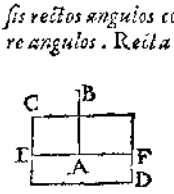


non

non efficeret angulum rectum, etiamſi cum aliis omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planũ recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eode plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et e contrario, vt recte cõcludatur, lineam quampiam eſſe ad planum datum rectam, demonſtrãdum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos angulos conficere.



VT autem recta quæpiam plano cuicunque inſiſtens rectos conſtituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipſamque tangentibus, ſatis eſt, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, ſed ſe mutuo ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eã cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perſpicuum fiet ex propoſ. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia ſi duæ lineæ componant vnam rectam lineam, non neceſſario efficitur, lineam, quæ cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim AB, inſiſtat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineã componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos conſtituere; atq; idcirco non eſſe rectã ad planũ CD. Hoc autem perſpicuum eſt, cum AB, circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo ſit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipſa cum EF, ſemper eoſdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod ſi eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales ſunt AG, AD, in priori figura, rectos conſtituat angulos, tum demum eã omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonſtratur propoſ. 4. huius lib.

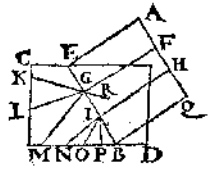


PLA-

IIII.

PLANVM ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorũ ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducũtur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

INSISTAT planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planũ ſubiectum CD, at EB, in ipſo eodẽ plano: Sit autẽ horum planorum communis ſectio EB, qua, vt demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem ſumptis quotcunque punctis G, I; ex ipſis in plano AE, ducãtur GF, IH, perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, a pũctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram, ſed aquabiliter illi inſiſtet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique a lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe cõceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.

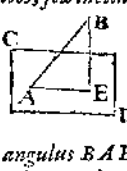


RE-

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planũ deducta fuerit perpendicularis, atque a pũcto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodẽ eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adiuncta comprehenſus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpẽdicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque neceſſario * 17. primi *angulus BAE, acutus, cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.*



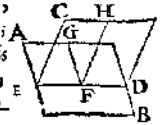
VI.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus,

qua

quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO naq; AE, insistat planũ CD, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitq; CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex eius pũcto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicatur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometræ angulum GFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtusus ve: quamquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit a pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON

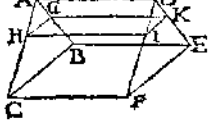
NON obſcura eſt hac definitio, precedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius anguli inclinationis minor extiterit, atque adeo a tecto magis receſſerit.

VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur, hoc eſt, ſiue ad dexteram, ſiue ad ſiniſtrã, & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dexteram, nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad ſiniſtram. Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT enim tectum quodpiam ABCDEF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius baſis BCFE; auferaturque faſtigium AGHDKI. Quo facto, perſpicuum eſt, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter ſe, ſi ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cũ producta ad partes GH, KI, conueniant in faſtigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autem linea in eodem plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atque deorſum. Itaque duo plana quæcunque, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea ve-



ro recta, vel ſunt parallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandē nec ſunt parallela, neq; vnquam conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, vt breuitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim cōſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cum illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

X.

AEQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

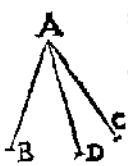
QVOD ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolum ſimiles,

verum etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuo huiuſmodi ſolida, neutrum alterũ excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuo congruent; ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planũ, vt lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus BAC, cõtentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædã linea AD, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ AB, AC, AD, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compoſitus. Quod ſi AD, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC; immo circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, ſolidum



lidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui plurìbus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

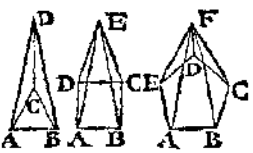
HÆC definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti rectè intellecta. Cum enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano eſt, in quo rectæ AB, AD; & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB; atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque verò ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Habit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his verò perſpicuũ cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitu-

dine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſe ſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis ſolum rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica ſuperficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus ſuperficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis eſt, qui fit, ſi conus per verticem ſecetur.

XII.

PYRAMIS eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnũ punctum conſtituta.



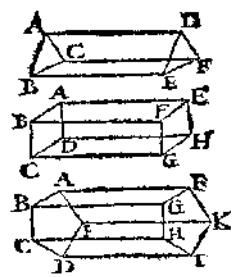
VIDELICET figura ſolida a planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, conſtituta appellantur pyramides. Perſpicuum autẽ eſt, omnia plana, quibus pyramis continetur eſſe triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitũ: Hoc enim poteſt eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationem ſumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrãgula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quilibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Vt pyramidis triangularis, præter baſin, triangula ſunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

PRI-

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, et parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ scilicet solidæ, quarum plana aduersa & æqualia, & similia, et parallela sunt triãgula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogrãma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur prismata. Itaque prisma nihil aliud erit, quã columna quadam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue ha sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrãma continebit prisma quotlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoq; oppositorũ planorũ reperiuntur, vt figura indicãt.



EX his manifestum est, quantum hallucinẽtur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt cõstat; præsertim quod plurimæ demonstrationes in hoc lib & 12. sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sum-

pſerũt autem fortaſſe hi auctores occaſionẽ errãdi, quod Euclides & in propoſ. vltima huius lib. et in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib 12. illis aduerſari, in qua Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi voluut, priſma appellaretur ab Euclide, fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Imo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon, Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eãdem cum illa baſin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecũdum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidẽ, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiã, quod a Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA eſt, quando, ſemicirculi, manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum; ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometra ſpharam appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum

mum videlicet illud quieſcens, a quo omnes linea recta in peripheriã cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtant illi lineæ circumuolutæ : Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circumducti, a quo omnes recta cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinẽ definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiã modo.

SPHAERA eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

CICERO in libro de vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſſit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδὲς Graci vocant, cuius omnis extremitas partibus a medio radiis attingitur.

XV.

AXIS autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

DIAMETER autem ſphæræ, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque a ſphæræ ſuperficie terminata.

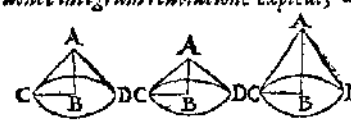
HÆ tres definitiones non egent expoſitione; dummodo hoc ſolum notetur, omnẽ diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra reuoluatur. Vnde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrum ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS eſt, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectũm angulum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

ATQVE ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum cõuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT ſi triangulum rectangulum ABC, circa latus quieſcens AB, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ continetur duabus ſuperficiebus, circulari vna, ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit; & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD

QVOD ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus eſt. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli BAC, BCA, æquales; qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus eſt; erit angulus BAC, ſemirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quieſcens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim BC, latus latere AB, ſit maius; [b] erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, ſemirecto maior. Similiter BAD, maior erit ſemirecto; atq; adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quieſcẽs latus AB, maius fuerit circũducto EC, vt in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cum.n. latus AB, maius ſit latere BC, [c] erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, ſemirecto maior, ideoque reliquus BAC, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus BAD, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

[a] 5. primi

[b] 18. primi

[c] 18. primi

XIX.

AXIS autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quieſcens AB.

BASIS

XX.

BASIS vero coni eſt circulus, qui a circumducta linea recta deſcribitur.

NIMIRVM circulus, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt B C, in ſuperioribus conis. Itaque huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides ſolum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin; Non autem inclinatum, cuius axis ab baſim rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionẽ, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, vt tibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea deſcriptam, conſtantemque ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſe ſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

VERTICEM ipſius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentã circulo,

circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

AXEM, rectam lineam, quæ a vertice ad circuli centrum producitur.

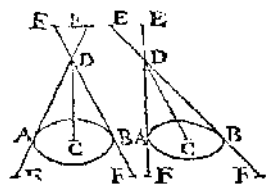
BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.

SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur eouſque in circuli AB, circumferentia, quouſq; punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, a quo capit moueri: deſcribet ſuperficiem quãdam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctum ſe ſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea ſuperficie, quam DB, ſola deſcribit. Coni verticem, punctum D. Axem DC. Baſim AB, circulum. Quod ſi DC, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

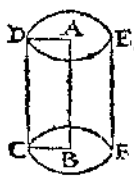


CYL IN-

XXI.

CYLINDRVS eſt, quando rectã guli parallelogrãmi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogramum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumaſſumpta figura.

VELVTI ſi rectangulum parallelogrammũ ABCD, circa latus quieſcens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri ſunt circuli a duobus aduerſis lateribus, quę circumaguntur, deſcripti.

QV A-

QVALES sunt circuli à lateribus AD, BC, oppositi describipti.

EVCLIDES porrò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

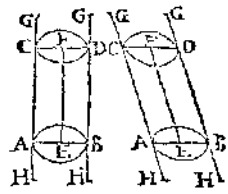
LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylyndri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur,

cantur, qui axem habent ad rectos angulos exi ſtentem ipſis baſibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidiſtantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitũ ex utraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa cẽtra E, F, in planis circulorũ ſemper æquidiſtãtes, una cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum reſtituantur, vnde moueri caperunt; deſcribetur a linea AC, ſuperficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Cylindrum vero appellat figuram AB DC, circulis AB, CD, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quam videlicet ſola AC, deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos AB, CD. Axem, rectã EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod ſi axis EF, perpendicularis fuerit ad baſes, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

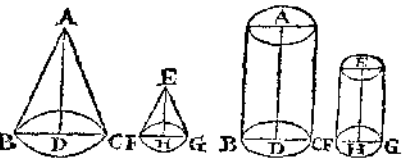


XXIIII.

SIMILES coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

RECTE Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorũ ab eorum axibus, & baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundũ duas dimen-

dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinẽi Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinẽ ſimiles eſſe demonſtrãt. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis aũt axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit vt AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem vt BC, ad FG, [a] ita dimidia BD, ad dimidiã FH; erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circũ æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectãgula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, [c] ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula vero, [d] eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



QVOD ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba facit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, & diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri

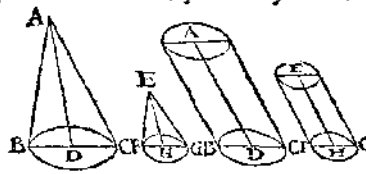
[a] 15. quinti

[b] 6. ſexti

[c] 5. ſexti.

[d] 34. primi

cylindri ABC, EFG: In conis autem axes ſint AD, EH, & baſium diametri BC, FG ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita



BC, ad FG, extiterintq; anguli inclinationũ ADB, EHF, tã in conis, quam in cylindris, æquales inter ſe; dicẽtur & coni inter ſe, & cylindri quoque inter ſe ſe ſimiles; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſupra diximus, & rurſus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindriſque demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non ſint recti.

XXV.

CVBVS eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, et æquilateris contenta.

DO-

XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HÆC ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus conſtat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Timæo quinque mundi corpora, quæ ſimplicia a philoſophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hiſce corporibus aſſimilat, vt in ſphæra Ioannis a ſacro boſco latius explicauimus. Horum omnium conſtructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propoſ. 15. Tetraedri vero propoſ. 13. Octaedri deinde propoſ. 14. Dodecaedri autem propoſ. 17. Icoſaedri denique propoſ. 16. Vbi planius perfectiuſque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum eſt, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formam quis intueatur. Trademus tamen propriis in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet ſecundum eorum ſoliditatem poſſit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinq; illa dari poteſt, vt demonſtrabimus ad finem lib. 13.

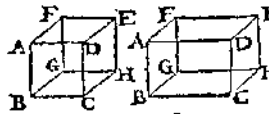
QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inſcriptione, circumſcriptioneque corporum regularium; neceſſarium eſſe duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam ſit Parallelepipedum,

lepipedum, quidque ſit figuram ſolidam in figura ſolida inſcribi, vel circa eandem deſcribi.

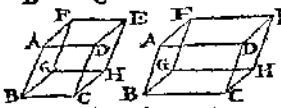
XXX.

PARALLELEPIPEDVM eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerſo, parallelę ſunt, contenta.

VELVTI ſolida figura comprehenſa ſex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppoſita AC, FH; Itē



DF, CG; Item AG, DH, ſunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehē



ſa. quæ quidem plana parallela oppoſita, ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallelogramma, vt demonſtrabitur propoſ. 24. huius lib.

SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, reſpondebitque quadrato in planis figuris: Si autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte lōgiora, quāuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique ſex parallelogramma neque rectāgula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerſo, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

SOLI-

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidę figurę viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptę tangunt omnes angulos figurę, circum quam deſcribitur.

NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdū pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, uel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ, ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur uel ab angulis, uel a lateribus, uel denique a planis figuræ exterioris.

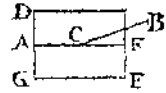
VERVM dua hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibusque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

RECTAE lineæ pars quædā non eſt

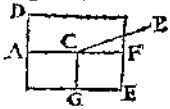
in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidé AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quandoquidem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC, quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam uero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, rectæ AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directū, & continuum poſitam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quādoquidem rectam CB, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Verumtamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi AC, in plano DE, producatur vſque ad F, erit CF, recta recta AC, in cōtinuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet DE, ipſi AC, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa unam rectam lineam cōſtituat, quamuis quis dicat, AB, eſſe quoque rectam, eiuſque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam.



ſitam. Ducatur enim in plano DE, ipſi AC, perpẽdicularis CG, & in eodẽ plano ipſi CG, perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuũ & rectũ. Cũ enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione; erunt AC, & FC, in directum & continuum poſitæ. Quamobrem etiamſi quis contendat, AB, eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam conſtituat lineam, atque adeo duæ rectæ AB, AF, ſe mentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.

[a] 11. primi

[b] 14. primi

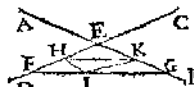
HINC ſit omnes partes cuiuſuis rectæ linea, hoc eſt, totam rectam lineam, in vno exiſtere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duæ rectę lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum ōmne in vno eſt plano.

RECTAE lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirũ EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra. quod fieri nõ poſſe, iam ſupra demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe, pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur

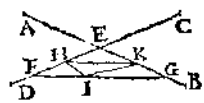


[c] 1. vndec.

tur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoq; rectarum FE,GE, partes quidē FH,GK, in vno plano, partes autem HE,KE, in sublimi, vel cōtra. Quæ omnia absurda sunt,[a] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

[a] 1. vndec.

QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG,[b] in eodem sunt rectæ totæ CD,AB, ne partes quædā in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB,CD, in vno plano, in quo nimirum triangulū EFG, consistere demōstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

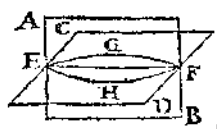


[b] 1. vndec.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB,CD, sitq; communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectā. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.



ALITER. Secent se rursus plana AB,CD, sintq; termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectātur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, cōstat propositum: Ipsa enim erit communis sectio.

Si

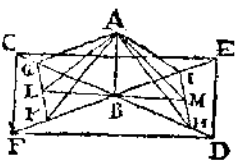
Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cũ eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantũ plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secãtibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiã per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cũ enim se mutuo secent in B; [a] erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumãtur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, HI; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secãs rectas GK, HI, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, triãguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.



RVRSVS [d] cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erũt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent,

[a] 2. undec.

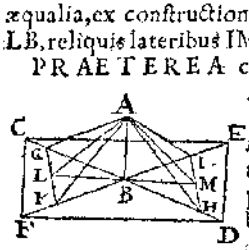
[b] 15. primi

[c] 4. primi.

[d] 15. primi

[a] 26. primi æqualia, ex conſtructione. Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

PRAETEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex cõſtructione; & anguli ipſis contenti ABG ABH æquales, nempe recti ex hypotheſi, [b] erunt & baſes AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.



[b] 4. primi.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli, AKG, æqualia ſunt; & baſis AH, baſi AG, ex hactenus demonſtratis; [c] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehẽſi, æquales.

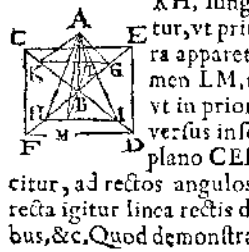
[c] 8. primi.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia ſint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipſis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonſtrauimus; [d] erunt quoque baſes AL, AM, æquales.

[d] 4. primi.

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia ſunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & baſis AL, baſi AM, ex demonſtratis; [e] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehenſi, æquales; qui cum ſint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano ſubiecto ipſam tangit in B: Eademq; ratione oſtendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipſam tangent in B, angulos rectos conſtituere, etiamſi inter pũcta G, I, & K, H, ductæ ſint, dummodo rectæ GI, KH, iungantur: vel certe literę diſponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem ſunt literæ; & tamen LM, non ducitur à ſiniſtra in dextrã, vt in priori figura, ſed à ſuperiori parte verſus inferiorem. [f] Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

[e] 8. primi.



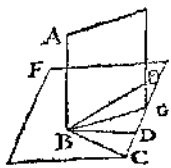
THEO-

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, ſe tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum ſectione, ſeu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano eſſe. [a] Cũ enim quælibet duæ in vno ſint plano, propterea quod productæ ad partes B, ſe mutuo ſecent in B; ſint BC, BD, in plano FC; Et ſi fieri poteſt, recta BE, non ponatur in eodem plano, ſed in ſublimi. [b] Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno ſunt plano, cum ſe mutuo ſecent in B; ſint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, ſibi mutuo occurrunt in B; neceſſario producta ſe mutuo ſecabunt. [c] Sit ergo eorum communis ſectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, [e] ipſas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipſâ in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, exiſtentes in plano AG, per rectas AB, BE, ductæ æquales inter ſe erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdũ. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, exiſtentibus, nõ erit BE, in ſublimi, ſed in eodem cum ipſis plano. Quocirca ſi recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 2. undec.

[b] 2. undec.

[c] 3. undec.

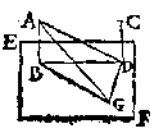
[d] 4. undec.

THEOR.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, CD, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas eſſe parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpẽdicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectãtur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; erunt baſes æquales AD, GB. Rurſus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Eſt autem & baſis communis AG; Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Eſt autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus eſt; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano: Eſt autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, ſint recti, erũt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.



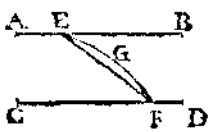
a 4. primi.
b 8. primi.
c 5. undec.
d 2. undec.
e 28. primi

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineę, in qua-

quarum vtraque ſumpta ſint quęlibet puncta : Illa linea, quæ ad hęc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

IN parallelis AB,CD, ſumantur vtcunque duo puncta E,& F,quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF,non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra:ſecet iam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E,& F, ſitque communis ſectio horum planorum EGF,quę recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eoſdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB,CD, erit recta EF. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta:Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum.



* 3. undec.

SCHOLIVM.

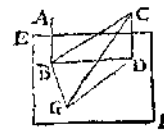
HÆC eadem propoſitio vera eſt, etiãſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT

SINT parallelæ rectæ *AB*, *CD*; ſitque *CD*, plano *EF*, ad angulos rectos: Dico & *AB*, eidem plano *EF*, eſſe ad rectos angulos. Ducta enim recta *BD*, in plano *EF*; erit per defin. 3. huius lib. angulus *CDB*, rectus: Sunt autem duo *CDB*, *ABD*, duobus rectis æquales. Igitur & *ABD*, rectus erit. Iam in plano *EF*, ducatur *BG*, perpendicularis ad *BD*; ponanturque æquales *BG*, *CD*. Coniungantur deinde rectæ *DG*, *GC*, *CB*. Quoniã igitur latera *CD*, *DB*, trianguli *CDB*, æqualia ſunt lateribus *GB*, *BD*, trianguli *GBD*, ex conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti, *CDB*, *GBD*, æquales, ſunt recti; Erunt baſes *CB*, *GD*, æquales. Rurſus quia latera *CD*, *DG*, trianguli *CDG*, æqualia ſunt lateribus *GB*, *BC*, trianguli *GBC*; & baſis eſt communis *CG*; Erunt anguli *CDG*, *GBC*, dictis lateribus comprehenſi æquales. Eſt autem *CDG*, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & *GBC*, rectus erit. Quare recta *GB*, duabus rectis *BD*, *BC*, ſe mutuo ſecantibus in *B*, (Si namque producerẽtur *DB*, *CB* ecarent ſeſe in *B*, ob angulum *CBD*.) ad rectos angulos exiſtit; ac proinde ad rectos angulos erit plano per *BD*, *BC*, ducto: Eſt autem in hoc eodem plano recta *AB*, propter ea quod rectæ *BD*, *BC*, in eodẽ ſunt plano, in quo parallelæ *AB*, *CD*; cum puncta *B*, *C*, *D* exiſtant in parallelis *AB*, *CD*. Igitur & *GB*, recta rectæ *BA*, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cũ *AB*, recta ſit ad rectas *BG*, *BD*; erit quoque *AB*, recta ad planum per *BG*, *BD*, ductum, hoc eſt, ad planum *EF*. Si duæ igitur ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat oſtendendum.



a 29. primi

b 4. primi.

c 8. primi.

d 4. undec.

e 7. undec.

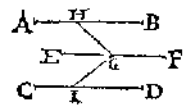
f 4. undec.

9. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVAE eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ,

rallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarũ AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur EG, recta eſt ad duas rectas GH, GI, ſe tangẽtes mutuo in G; [a] erit recta quoque ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ AB, EF; & EF, ſit recta ad planũ per GH, GI, ductum; [b] erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum ſint parallelæ CD, EF; ſit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [c] erit etiam CD, recta ad idem planum; [d] Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.



[a] 4. undec.
[b] 8. undec.
[c] 8. undec.
[d] 6. undec.

SCHOLIVM.

DATA opera Euclidis voluit, duas rectas AB, CD, non eſſe in eodem plano cum recta EF, cui ſunt parallelæ. Nã ſi forent in eodem plano cum ipſa EF, eſſent AB, CD, inter ſe parallelæ, ex 30. propoſ. 1. lib. Superuacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

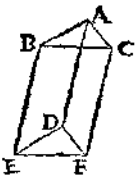
10.

SI duæ rectę lineę ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes

ſint

ſint parallelę, non autẽ in eodem plano: Illę angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, ſe tangentibus in D; non ſint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponãtur enim AB, DE, inter ſe æquales, & AC, DF, inter ſe; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ



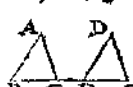
[a] 33. primi

ſunt & æquales; [a] erũt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erũt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales ſint eidem AD; [b] erunt etiam BE, CF, inter ſe parallelæ, & æquales: [c] Ac propterea parallelæ & æquales erũt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex conſtructione; & baſis BC, baſi EF, æqualis, vt modo demonſtrauimus; [d] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehẽſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 8. primi.

SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam eſt, quãdo priores duæ lineæ in eodẽ ſunt plano cũ duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodẽ plano, ſit q; AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, eſſe æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF; ducanturq; rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniã igitur parallelæ ſunt AB, DE; æquales erũt anguli ABC, DEF, [e] interni & externi. Similiter æquales erũt anguli ACB, DFE; Sũt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC,



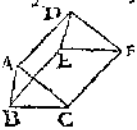
[e] 29. primi

æqua-

æquales ſunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF.
[a] Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

[a] 32. primi

NON ſint iam BC, EF, in vna recta linea conſtituta. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, ſint parallelæ & æquales; [b] erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidē AD, parallelæ exiſtētes & æquales, [c] inter ſe parallelæ erūt & æquales: AC proinde parallelæ & æquales quoq; erūt BC, EF. Itaq; cū duo latera AB, AC, triāguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, triāguli DEF; & baſis BC, baſi EF, [d] erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.

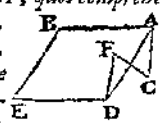


[b] 33. primi
[c] 30. primi
[d] 33. primi

CAETERVM vt concluſio huius theorematis rectè ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodē plano, ſiue non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nullā rōne ſe mutuo ſecent; vt ex prima et vltima figura apparet. Nā alias cōcluſio vera nō erit.

[e] 8. primi.

SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehēdunt, non ſunt æquales, cum ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, ſe mutuo ſecant. Vnde quamuis AC, DF, ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non coniungūt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.

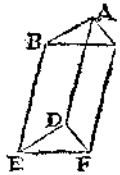


PORRO conuerſum quoque huius propoſ. nimirum: Si in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ductæ: demonſtrabimus hoc modo. In planis parallelis ſint anguli æquales BAC, EDF, ſitque AB, ipſi DE, parallela, & AC, DF, ſint ad eaſdem

dem partes plani AE, per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse. hoc est, planum per AC, AD, ductum trā sire etiam per rectam DF. Si enim non sint parallelæ; [a] si ducatur in plano CD, per AC, AD, ducto recta alia per D, ipsi AC, parallela, [b] continebit hæc cum DE, angulum angulo BAC, æqualē, ac propterea & angulo EDF: atque ita pars & totū erunt æqualia. quod est absurdū. Recta ergo DF, ipsi AC, parallela est: atq; adeo planū per AC, AD, ductū trāsibit per rectā DF. quod est propositū.

[a] 31. primi

[b] 10. vnde.



11. PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planū BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunq; DE; [c] ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH; [e] ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. [f] Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL; cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, [g] ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum; [h] erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. [i] Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitq; rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. [k] Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo pūcto in sublimi, ad subiectū planū perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendū erat.

[c] 12. primi

[d] 11. primi

[e] 12. primi

[f] 31. primi.

[g] 4. vnde.

[h] 8. vndec.

[i] 2. vndec.

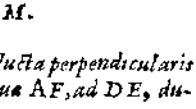
[k] 4. vndec.



SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD *ſi quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis;* [a] *erit ipſa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis ad ſubiectum planum BC, perpẽdicularis, cum perpendicularis ſit ad vtramque DE, GH.*



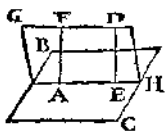
[a] *4. vnde.*

PROBL. 2. PROPOS. 12. 12.

DATO plano a puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. [b] Ex quouis puncto D, in ſublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extenſa recta per E, & A, [c] ducatur per A, ipſi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam eſſe ad planum datũ BC. Cum enim DE, AF, parallelæ ſint; & DE, recta ad planũ BC, ex conſtructione; [d] erit quoq; AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciendum erat.

[b] *11. vnde.*



[c] *31. primi*

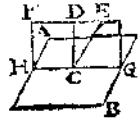
[d] *8. vndec.*

THEOR. 11. PROPOS. 13. 13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad re-

ctos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, [a] quæ in vno, eodemque plano ſunt, ducatur planum FG, ſecãs planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ ſint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabũtur, ad eaſdẽ partes. Quod erat demonſtrandum.



[a] 2. vndec.

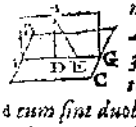
ALITER. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum AB, duæ perpẽdiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ ſint ad idem planum AB; [b] erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.

[b] 6. vndec.

SCHOLIVM.

EODEM modo a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in ſublimi ad ſubiectum planum BC, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, [c] quæ in vno plano ſunt, planum FG, ſecans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ ſint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod eſt abſurdum; [d] cum ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis aſſumpti.

[c] 2. vndec.



[d] 17. prim.

ALITER. Si AD, AE, rectæ ſint ad planum BC; [e] ipſæ erunt inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.

[e] 6. vndec.

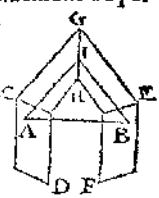
THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela eſſe plana CD, EF. Si enim non credantur eſſe parallela, producta inter ſe conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem ſectionem rectam lineã GH: In qua ſumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad planum GCD, GEF; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. [b] Sed & minores duobus rectis ſunt. Quod eſt abſurdum. Igitur plana CD, EF, producta non quam inter ſe conueniunt. Parallela ergo ſunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 3. vndec.

[b] 17. primi

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrari poterit conuerſum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta ſit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; eſſe ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatq; communes ſectiones cum dictis planis rectas GH, IK:

eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac protinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; [a] *cum tota recta HGI, sit in vno plano, nempe in AB, producto; Item tota recta KIL, in vno quoque plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdū, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodē modo si aliud planum videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas, communes cum ipsis sectiones MO, PN; erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad* [b] *duas rectas IK, PN, recta quoque erit EF, ad planū CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.*

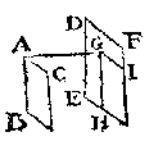
[a] 1 *vndec.*

[b] 4. *vndec.*

15. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quę per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, enim deducatur ad planum EF, perpēdicularis AG, occurrēs plano EF, in puncto G [d] Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; [e] erunt & AB, GH,



[c] 11. *unde.*

[d] 3 1. *primi*

[e] 9. *vndec.*

GH, inter ſe parallelæ; [a] Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA ſit recta duabus AB, AC; [b] recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. [c] Igitur parallela ſunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandũ.

[a] 29. primi

[b] 4. undec.

[c] 14. unde.

SCHOLIVM.

QVOD ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non ſunt ducenda aliæ parallelæ. Vt ſi lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC, ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; oſtendemus, vt prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductũ, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

DATVM planum ſit AB, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunq; duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, [d] agatur CE, ipſi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum eſſe plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibusq; in alio cũ illis plano parallelæ ſint; [e] parallela erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.



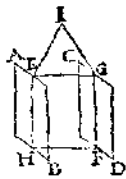
[d] 31. primi

[e] 15. unde.

16. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF, secante. Conueniant igitur in puncto I. Quia ergo tota recta HEI, in vno est plano, nimirum in AB, producto; item tota recta FGI, in vno quoque est plano, videlicet in CD, producto; conuenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 7. undec.

SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Nō tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallela, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

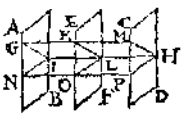
SINT

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorum sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, ut duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL; atque adeo parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano; erunt plana AB, CD, per ipsas ductæ, parallela. Quod est propositum.

[a] 16. unde.

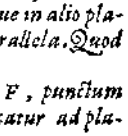
[b] 9. undec.

[c] 15. unde.

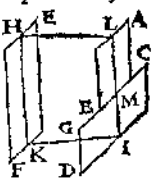


ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, a quo in utramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius libri demonstravimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana AB, CD; parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.

[d] 14. unde.

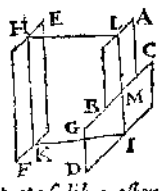


QUOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantque producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia



tria plana per lineas rectas H K, L M, M I. Quoniam igitur

a 16. vnde.



parallela sunt plana A B, E F; a erunt & communes sectiones L M, H K, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I M, H K. Quam ob rem cum rectæ L M, I M, parallelæ sint ipsi H K, existantque in eodem plano secante H I, & conueniant in M; ipsa erunt in rectum & continuum posita, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana A B, C D, vnum

b 1. vndec.

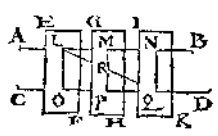
planum efficient; b propterea quod recta L I, in vno tacent plano. Quod est propositum.

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

17. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ *A B*, C D, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue nõ, existẽtes tñ in eodẽ plano; siue in trãsuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis E F, G H, I K, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earũ inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem L M, ad M N, ita esse O P, ad P Q. Ducantur enim rectæ L O, N Q, in planis E F, I K, & coniungatur recta L Q, occurrens plano G H, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur R M, R P, in eodem plano G H,



c 2. vndec.

c Eritque triangulum L N Q, in vno plano: similiter triangulum L O Q, in vno plano. Quoniam vero pla

na

na parallela GII, IK, ſecantur plano trianguli LNQ, [a] erunt communes ſectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [b] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16 vnde
[b] 2. ſexti

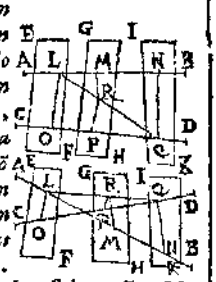
SCHOLIVM.

QVOD ſi data duæ rectæ AB, CD, ſint in vno eodēque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in ſuperiori figura apparet. Nam tunc planū per rectas AB, CD, ductum ſecabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [c] quæ inter ſe parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, exiſtet, cum ſit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano exiſtentia, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum ſectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, conſtituent, nimirum communem ſectionē planorum LOQN, GH.

[c] 16. vnde.

SI vero duæ rectæ AB, CD, non ſint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hiſce duabus figuris apparet: quia [d] cum triangulum LOQ, ſit in uno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuerſum eſt, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano exiſterent, eſſent duæ rectę AB, CD, in eodē illo plano, quod ex ipſis conſtituitur, quod eſt cōtra hypotheſim.) erunt rectæ RM, RP, in diuerſis illis planis triangulorū; ac proinde vnam rectam non conſtituent: [e] aliàs in vno eſſent plano, quod eſt abſurdum.

[d] 2. vndec.



EADEM hæc propoſitio locum habet, ſi duæ rectæ AB, CD, in eodem plano exiſtentes, nō ſint parallelæ, vt in eiſdem hiſce duabus figuris apparet: ſed tunc MRP, ſemper erit vna linea recta, vt ad initium huius ſcholij demonſtratū eſt, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonſtratio hic adhiberi poteſt.

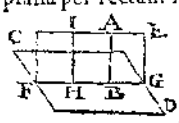
NON

NON ſecus, ſi plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, ſecent, erunt earum partes proportionales, & communes ſectiones mediorum planorum & triangulorũ LOQ, LNQ, rectas lineas conſtituent. ſi recta AB, CD, in uno ſint plano, non rectas autem, ſi non ſint in uno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum eſt.

18. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiã ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, plana eidem plano ad rectos angulos erũt.

SIT recta AE, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, eſſe recta ad idem planum CD. Ductum enim ſit per AB, planũ EF, ſecans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipſi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ ſunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelę, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiã ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 31. primi

[b] 18. und.

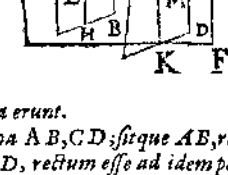
SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnũ cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: a eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est, ipsa parallela erunt.



a 29. primi

b 14. vnde.

SED iam parallela sint plana AB, CD; sitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; c quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. d Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod est propositum.

c 16. vnde.

d 18. primi

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectũ.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planũ CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, e erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planũ ducatur EF. f quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

e 12. vnde.

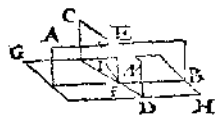
f 18. vnde.

THEOR.

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoq; esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, [a] recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alterã rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defi. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cũ perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniã igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, cõmunem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadẽ ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum



[a] 4. vndec.

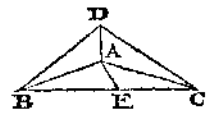
[b] 11. primi

planum GH, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſupra [a] demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] 13. vndec.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis cõtineatur: Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores.

CONTINEATVR angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo eſſe maiores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuũ eſt, quoſuis duos maiores eſſe reliquo: Si vero duo tantũ ſint æquales, & tertius vtrouis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo maiores eſſe. Quod ſi vnus, uidelicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſiue æquales, ſiue inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe maiorem. Dico iã hoc angulo maximo BAC, maiores quoque eſſe angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto [b] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectę AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, ſecans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipſis contenti, per conſtructionem, æquales; [c] erunt baſes BD, BE, æquales. [d] Quia vero latera DB, DC, maiora ſunt latere BC; ſi demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam CE. Cùm igitur latera AD, AC, triãguli DAC, æqualia ſint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & baſis CD, maior baſe CE;



[b] 23. prime
[c] 4. primi.
[d] 20. primi.

[a] 23. primi

se CE; a erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Addatis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

21.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt cõstituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis cõtinetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC.



[b] 20. undec

[b] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [c] Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi, vna cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, ([d] sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 32. primi

[d] 32. primi

SCHO-

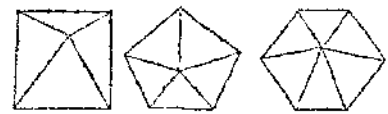
SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli cõſtituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos ſolidos extendemus hoc modo.

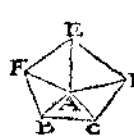
SIT angulus ſolidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoq; minores. Nam ſi omnibus angulis planis recta ſubtendantur ordine in eodẽ plano exiſtentes; cõſtituetur pyramis, cuius vertex datus angulus ſolidus, tot laterum, angulorumve, ſub quot angulis planis ſolidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorũ, (a cum anguli cuiuslibet trianguli duobus ſint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis æquales ſunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propoſ. 1. lib. demonſtrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (propterea, quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorum quilibet tribus planis angulis cõtinetur, b & horũ quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorũdem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.

a 32. primi

b 20. unde.

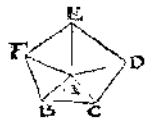


VERVM vt res melius percipiatur, ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus ſubtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB,



itaut

ita vt conſtituatur ſyramis pentagona, habens videlicet baſin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot v. delicet, quot anguli plani componunt angulũ ſolidum A. [a] Quia vero omnes anguli quinque triangulorum E A C, C A D, D A E, E A F, F A B, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis BCDEF, æquales ſunt ſex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; ſiperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cum enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; [b] erunt duo CBA, ABF, qui ſunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui eſt in baſi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis.



[a] 21. primi

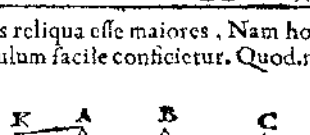
[b] 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulum conſtituatur.

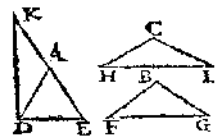
SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis D E, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarũ D E, FG,

FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores, Nam hoc posito, [a] ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod.n. duę DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. [b] Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primũ AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus; quod quidem continget, quãdo duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [c] erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, maior angulo C; propterea qđ duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & basis EK, maior basi HI: [e] Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



[a] 22. primi
[b] 23. primi
[c] 4. primi.
[d] 24. primi
[e] 20. primi

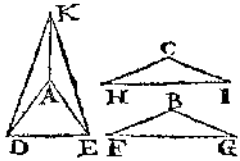
CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipsi AD, æqualis rursum, & connectatur recta KD. [f] Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. [g] Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores sunt recta KE; & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, CI: [h] Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



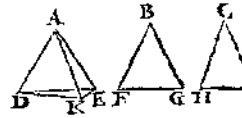
[f] 4. primi.
[g] 20. primi
[h] 20. primi

CADAT postremo AK, ad partes AE, ita vt nec

angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta fit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, dúobus rectis ſunt maiores. Ponaturq; rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ K D, K E. [a] Erit igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. [b] Quoniam vero duæ DE, DK, maiores ſunt duabus AE, AK; & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypotheſi & cóſtructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: [c] Hæ autem maiores ſunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores eſſe, quam FG, ſi angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, ſi angulo C, ad FG, conſtituatur angulus æqualis, &c. [d] Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonſtrandum.



ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; [e] erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius minor; [f] erunt quoque duæ illorũ baſes æquales, [g] & baſis tertij vtraque minor: Quare rurſus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod ſi vnus eorum, nempe A, ſit maximus, ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales; [h] erit quoque baſis DE, omniũ maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quã FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores eſſe recta DE, [i] Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipſi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, tranſeat circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, deſcripta, ob æqualitem rectarum AD, AK, AE. Connectantur



[a] 4. primi.
[b] 21. primi
[c] 20. primi
[d] 22. primi
[e] 4. primi.
[f] 4. primi.
[g] 24. primi
[h] 24. primi
[i] 23. primi

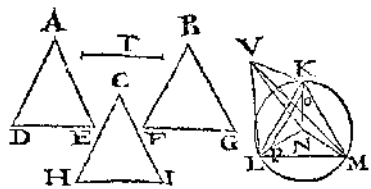
nectantur deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionē; erit angulus C, maior reliquo angulo K A E. Et quia latera AD, AK, trianguli A D K, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [a] erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; [b] erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: [c] Sed DK, KE maiores sunt, quam D E. Igitur multo maiores erunt F G, H I, quam D E, Quod est propositum.

[a] 4. primi.
[b] 24. primi
[c] 20. primi

PROBL. 3. PROPOS. 23. 23.

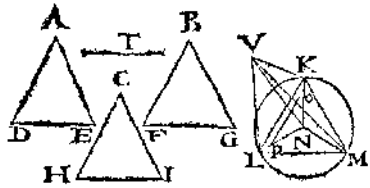
EX tribus angulis planis, quorū duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac cōditione, vt qlibet duo sint maiores reliquo. Oportet iā ex tribus angulis A, B, C, angulū solidū cōficere, qui nimirū contineat tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponātur sex lineę angulos dictos cōprehendēntes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendāturq; bases DE, FG, HI. [d] Fieri ergo pōt, vt ex DE, FG, HI, triangulū cōstituatur



[d] 22. vnde.

ſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triãgulum KLM, ſitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectę FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. [a] Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrũ N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritq; quęlibet rectarũ angulos planos cõprehendẽtium, nẽpe AD, AE, &c. maior qualibet ductarũ ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrũ N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quãdo triangulũ eſt oxygonium, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. cõſtat. Si igitur AD, AE, maiores nõ credãtur, quã NK, NL, erũt vel ęquales, vel minores. Sint ergo æquales. Cũ igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, triãguli NKL; & baſis DE, baſi KL, ęqualis: [b] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodẽ argumẽto erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cũ igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neque minores. Si. n. minores ſint AD, AE, quã NK, NL, abſcindãtur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniã igitur eſt vt NK, ad NO, ſita NL, ad NP, cũ & antecedẽtia inter ſe, & cõſequẽtia ſint inter ſe æqualia; erũt latera NK, NL, triãguli NKL, ſecta proportionaliter; [c] ac proinde OP, ipſi KL, parallela erit. [d] Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, ęquales erũt, & triangulũ NOP, triãgulo NKL, æquiangulũ. [e] Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Eſt aũt NK, maior quã NO. [f] Igitur & KL, hoc eſt, DE, quę ęqualis eſt ipſi KL, maior erit, quã OP. Quocirca cũ latera AD, AE, triãguli ADE, ſint ęqualia lateribus NO, NP, triãguli NOP, & baſis DE, maior baſe OP,

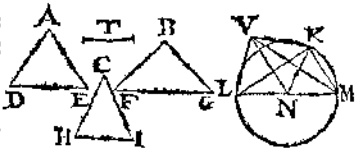


[a] 5. quarti.
[b] 8. primi.
[c] 2. ſexti.
[d] 29. primi
[e] 4. ſexti.
[f] 14. quinti

se OP; [a] erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostēdetur. Cū igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis ęquales, ex coroll. ppoſ. 15. lib. 1. erūt tres anguli A, B C, maiores quatuor rectis. Qđ est absurdū. ponūtur, n quatuor rectis minores. Nō igit minores sūt AD, AE, q̄ NK, NL; sed neq; ęquales. Igit maiores.

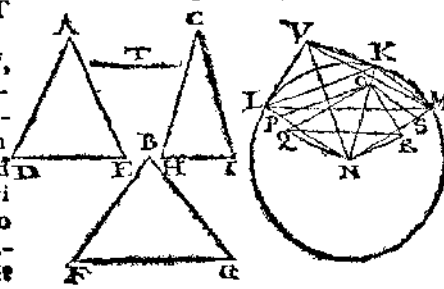
[a] 25. primi

CADAT deinde centrū N, in latus LM; quod tū cō tinget, quādo triangulū KLM, angulū LKM, habuerit rectū, vt ex eodē coroll. propoſ. 5. lib. 4. manifeſtū est. Si igitur AD, AE, dicātur esse æquales ipſis NK, NL; erūt quoq; BF, BG, æquales eidē NK, NL. Cū ergo NK, æqualis sit ipſi NM; ęquales erūt BF, BG, rectæ LM: Poſita autē fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. [b] Sunt autē & maiores BF, BG, quā FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credātur, quam NK, NL; erūt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cū ergo NK, æqualis sit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdū, [c] cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.



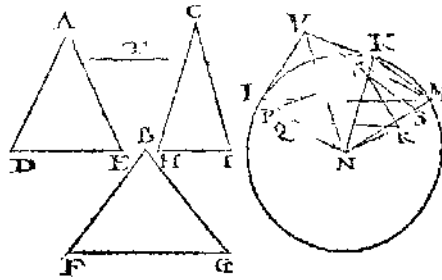
[b] 20. primi

CADAT poſtremo centrū N, extra triāgulū KLM, infra latus LM, qđ demū accidet, quādo angulus LKM, fuerit



[c] 22. primi

obtuſus, vt ex coroll. dicto propoſ. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicatur AD, AE, eſſe æquales ipſis NK, NL; cum & baſis DE, baſi KL, ponatur æqualis; [a] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LMN, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æqualis; [b] erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiore oſtendimus eſſe. Quod eſt abſurdũ. Nõ igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE credantur eſſe minores quã NK, NL; ſi abſcindantur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonſtrabitur, vt in primo caſu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. [c] Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipſis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſeat circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, deſcripta, cum æquales ſint rectæ NO, NP, NQ. [d] Quare cum angulus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadet enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Eſt autem



a 8. primi.
b 8. primi.
c 32. primi
d 29. primi

autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem; [a] erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus; [b] erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſũt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & baſis FG, maior baſe QR; [c] erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis; Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat; poſsit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. [d] Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectę T, æqualis; connectanturq; rectę KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM; [e] ac proinde quadratum rectę VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectę AD, æquale ſit ex conſtructione, eiſdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rurſus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipſis contenti VNK, VNL, recti; [f] erit baſis VK, æqualis baſi VL; Atque eadem ratione rectę VM, Quare tres rectę VK, VL, VM, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta VK, æqualis rectę AD. Tres ergo rectę VK, VL, VM, æquales ſunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamob-

[a] 24. primi.
[b] 24. primi.
[c] 25. primi.
[d] 12. unde.
[e] 47. primi.
[f] 4. primi.

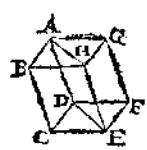
rem, cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia ſint lateribus BD, AE, trianguli ADE; & baſis KL, baſi DE; a erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non ſecus demõ ſtrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulũ KVM, angulo C, eſſe æqualem. Quare angulus ſolidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, quæ æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

a 8. primi.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. ſex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramma, ſimilia, & æqualia. Cũ enim parallela plana BG, CF, ſecentur plano AC; b Erunt communes ſectiones AB, CD. parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, ſecentur plano AC; erunt communes ſectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera ABCD. Non aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ ſint rectis DC, CE, & nõ in eodem plano, ſed in oppoſitis; c erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. d Quoniam vero AB, ipſi ipſi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipſi CE, in parallelogramo BE, æqualis eſt; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea



b 16. vnde.

c 10. vnde.

d 34. primi

pterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de cauſa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipſa ſimilia. Ductis iam diametris AH, DE, [a] cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia ſint lateribus DC, CE, trianguli DCE; [b] & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt oſtenſum eſt; [c] erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter ſe. [d] Quare cum trianguia ABH, DCE, dimidia ſint parallelogrammorũ BG, CF; erũt parallelogrãma BG, CF, inter ſe æqualia. Similiter demonſtrabimus ſimilia & æqualia eſſe parallelogrãma oppoſita AC, GE; & AF, BE. Si ſolidum ergo parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana, parallelogrãma ſunt, ſimilia, & æqualia. Quod erat demonſtrandum.

[a] 34. primi
[b] 10. vnd.
[c] 4. primi.
[d] 34. primi.

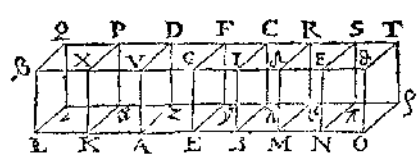
THEOR. 22. PROPOS. 25. 25.

SI ſolidum parallelepi pedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemad modum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppoſitis planis AD, BC. Dico vt eſt baſis AG, ad baſin BG, ita eſſe ſolidum AEFD, ad ſolidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum AB-CD, productũ in vtram que partem quantumlibet, ſumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipſi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipſi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela



lela planis AD, EF, BC, per ſcholiũ ꝓpoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur ſolidum AEFD, cõtinetur planis paralle lis ex hypotheſi; ipſum parallelepipedũ erit, ex definitio ne, [a] habebitq; plana oppoſita, parallelogrãma ſimilia, & æqualia. Eodẽ mõ erũt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebunt plana oppoſita, parallelogrãmaq; ſimilia, & æqualia. [b] Quoniam vero parallelogrãma AG, KV, LX, cũ ſint ſuper ęquales baſes AE, AK, KL, æqualia ſunt; & ſimilia quoq;, [c] cũ anguli vnius ſint ęquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius ęqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione ęqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma AY, KZ, Lα. Cũ igitur ęqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogrãma AD, KP, LQ; Erunt tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, ęqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD; & tribus planis LX, Lα, LQ, ſolidi KLQP: [d] Sũt autẽ tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodẽ, nẽpe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VE; & AD, ipſi EB. &c. Igitur per defin. 10. huius lib. ęqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento ęqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS.



Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) ęqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) ęquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartę magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, ęqualibus exiſtẽtibus, ęqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogrãma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT:

Si

a 24. vnde.

b 36. primi

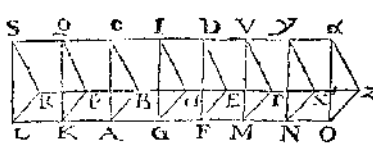
c 29. primi

d 24. vnde.

Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidũ quoq; ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacũq; hoc fiat multiplicatione. Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſim BG ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidũ AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidũ BEFC, quartam magnitudinem. Eadẽ ratione demonſtrabitur eſſe ſolidũ ad ſolidũ, vt eſt baſis DY, ad baſim CY; & vt baſis AY, ad baſim BY; & vt baſis DG, ad baſim CG. Si ſolidũ igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HAEC propoſitio accommodari etiã poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis parallelis, erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF; ſecenturq; plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſim FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur priſma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productũ, & ex AF, protracta vtrinque capiãtur quotcũque rectæ AK, KL,



ipſi AG; & quotcũq; rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS; MTV, NXY, OZα, parallela planis ABC, GHI, FED, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI; [a] erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH; [b] erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammũ oſtẽdetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus

[a] 16. vnde.

[b] 16. vnde.

[a] 34. primi
[b] 10. vnde.

teribus GI, GH, trianguli GHI; [a] cum AC, ipſi GI, & AB, ipſi GH, ſit æquale; [b] & anguli CAB, IGH, ſunt quoque æquales, eò quod rectæ CA, AB, parallelæ ſũt rectis IG, GH,

[c] 4. primi.



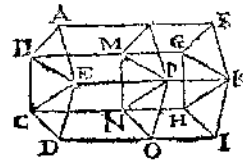
& non in eodẽ plano: [c] Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter ſe, & æquiangula; [d] Quare

[d] 4. ſexti

latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum ABCIHG, contentum duobus planis oppoſitis ABC, GHI, æqualibus & ſimilibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, priſma eſt. Eadẽ arte priſmata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniã vero parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia ſunt & ſimilia; necnon AH, KB, LP; & CH, QB, SP; erunt omnia plana priſmatis ABCIHG, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defin. 10. huius lib. æqualia erunt priſmata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quam multiplex eſt baſis LI, baſis AI, tam multiplex erit priſma LRSIHG, priſmatis ABCIHG; & quam multiplex eſt baſis OI, baſis FI, tam multiplex erit priſma PZαIHG, priſmatis FEDIHG. Quia vero ſi baſis LI, (multiplex baſis AI, primæ magnitudinis) æqualis eſt baſi OI, (multiplici baſis FI, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt priſma LRSIHG, (multiplex priſmatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) priſmati OZαIHG, (multiplici priſmatis FEDIHG, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus LI, OI, exiſtentibus æqualibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia omnia plana priſmatis LRSIHG, omnibus planis priſmatis OZαIHG: Si autem baſis LI, maior eſt baſe OI, priſma quoque priſmate maius eſt; & ſi minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt baſis AI, prima magnitudo ad baſin FI, ſecundam magnitudinẽ, ita priſma ABCIHG, tertia magnitudo ad priſma FEDIHG, quartam

tam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, vt eſt baſis AH, ad baſin FH: & vt baſis CH, ad baſin DH. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde priſma ABCDEFGHIK, *cuius oppoſita plana ſint polygona, nempe pentagona, ſecenturque plano* LMNOP. *Dico rurſus vt eſt baſis* CM, *ad baſin* NG, *ita eſſe ſolidum* ABCDELMNOP, *ad ſolidum* LMNOPFGHIK. *Si enim plana oppoſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoq; priſma in totidem priſmata, quorum plana oppoſita ſunt triangula, reſolutum. Quare erit vt baſis* BP, *ad baſin* MK, *ita priſma* ABEPML, *ad priſma* LMPKGF, *per ea, quæ demonſtrata ſunt. Eodem modo erit vt baſis* CP, *ad baſin* NK, *ita priſma* BCEPMN, *ad priſma* MNPKGH; *& priſma* CDEPNO, *ad priſma* NOPKHI. [a] *Vt autem* BP, *ad* MK, *&* CP, *ad* NK, *ita eſt recta* EP, *ad rectam* PK, *hoc eſt, vt* CN, *ad* NH; *& vt* CN, *ad* NH, *ita eſt* CM, *ad* NG. *Igitur priſmata* ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, *ad priſmata* LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, *eandem habent proportionem ei, quam habet* CM, *ad* NG; *ac proinde eandē inter ſe.* [b] *Vt autem vnū ad vnū, ita ſe habent omnia ad omnia. Igitur erit vt priſma* BCEPMN, *ad priſma* MNPKGH, *hoc eſt, vt baſis* CM, *ad baſin* NG; *ita priſma* ABCDELMNOP, *ex tribus compoſitum ad priſma* LMNOPFGHIK, *ex tribus conflatum. Quod eſt propoſitum. Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunque alio priſmate.*



POTEST tamen hoc idem in omni priſmate oſtēdi. Demonſtratione, qua vſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita, triangula ſimilia. Si enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in vtramque partem, erunt omnia plana parallela ſecantia, inter ſe æqualia, & ſimilia; [c] *propterea quod latera eorum ſunt parallela, nempe communes ſectiones parallelorum planorū;* [d] *ac proinde angulos æquales cōprehendūt, &c. Vnde, vt prius, oſtendentur priſmata ex vna parte inter ſe æqualia, necnon & priſmata ex altera parte, &c.*

[a] 1. ſexti.

[b] 12. quin.

[c] 16. vnde.

[d] 10. vnde.

COROL.

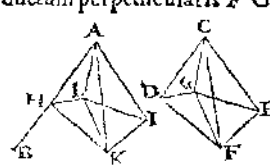
COROLLARIVM.

EX his infertur, ſi priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectionem eſſe figuram æqualem & ſimilem planis oppoſitis: Veluti demonſtratam eſt, in priori priſmate, triangulum G H I, æquale eſſe & ſimile triangulo A B C, atque adeo triangulo D E F. Eadem enim in omnibus eſt demonſtratio. Idem dices de parallelepipedo.

26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiuſque punctum angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, conſtituendus angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano exiſtentibus. [a] Ducatur ex F, ad planũ per CD, CE, ductum perpendicularis F G; connectanturq; rectæ D F, DG, EF, EG, CG. Deinde abſcindatur AH, æqualis ipſi C D, [b] fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rurſus in plano per AH, AI, ductũ cõſtituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano p CD, CE, ducto exiſtit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. [c] Ex L, vero ad planũ, in quo ſũt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis L A, quæ ipſi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulũ ſolidũ A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem eſſe dato angulo ſolido C. Connexis n. rectis HK, HL, IK, IL; cũ latera AH, AL, triãguli AHL,



a 11. unde.
b 23. primi
c 12. unde.

AHL, æqualia ſint lateribus CD, CG, triãguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per conſtructionem; Erũt baſes HL, DG, æquales. Rurſus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales ſunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia ſint lateribus CG, CE, triangulo CGE, per conſtructionem; [b] æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia ſunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. erũt & baſes HK, DF, æquales. Quare cũ & latera AH, AK, triãguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, triãguli CDF, ex cõſtructione. (cũ enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos ex defin. 3. huius lib. [d] erunt baſes AK, CF, æquales.) [e] Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK, EGF, recti, ex defin. 3. huius lib. [f] Erunt baſes IK, EF, æquales: Cũ igitur & latera AI, AK, triãguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; [g] Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidũ angulum A, componẽtes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus; Atq; proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituimus ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 8. primi.
[f] 4. primi.
[g] 4. primi.

SCHOLIVM.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramisq; quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triangula

triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur quorum quilibet tribus angulis planis continetur; conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.

VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, *conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendendæ ſunt angulis planis rectæ* BC, CD, DE, EF, FB, *vt fiat pentagonum* BCDEF, *quod in tria triangula reſoluatur* BCF, FCD DEF. *Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis* BAC, CAF, FAB, *conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH Et ſolido angulo A, contento tribus planis angulis* CAF, FAD, DAC, *æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis* DAE, EAF, FAD, *æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.*



27. PROBL. 5. PROPOS. 27.

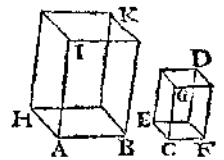
A DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

SIT a data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, *ſimiliterque poſitum* parallelepipedo CD. [a] Fiat ad rectam AB, eiuſque punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales ſint tribus angulis planis ECG, GCF,

[a] 23. vnde.

GCF, FCE. Deinde vt eſt CF, ad CG, ſic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. [a] 12. ſexti.

Poſt hæc, perficiatur parallelepipedum AK, complctis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrãmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cum enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione; erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [b] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita, ſolida AK, CD. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



[b] 24. vnde.

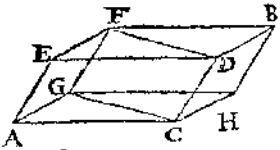
THEOR. 23. PROPOS. 28. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana oppoſita ſint AH, EB, quorum diagonij, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela eſt, [c] & æqualis ipſi AE, cum ſint parallelogramma [c] 34. primi

[a] 9. vndec. [b] 33. primi

CE, GE; [a] erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. [b] Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erũt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, DBF, proportionalia. [d] Igitur similia quoque erunt dicta triangula. [e] Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CE, BG, CF, prismatis HGCDBF; propterea quæ prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



[d] 6. sexti. [e] 24. vnde.

[a] 24. vnde.

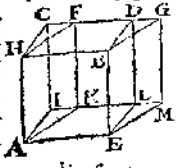
29.

THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eã dem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in ijsdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in ijsdem collocentur lineis,

neis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia.



[a] Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisde n parallelis constituta; erunt, ablato cõmuni trapezio AELK, æqualia quoq; triangula AIK, ELM. [b] Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; [c] Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. [d] Rursus parallelogrammum AC, æquale est, & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [e] Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales ([f] Nam cum rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoq; inter se æquales; quare cõmuni dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erũt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erũt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 35. primi

[b] 34. primi

[c] 4. sexti.

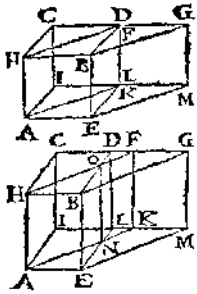
[d] 24. unde.

[e] 36. primi

SCHOLIVM.

HAEC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere medijs, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, vt ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis aequalibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK,

ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



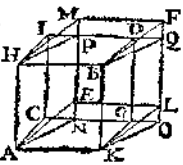
IN, tertio vero caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, demetur triangulum commune ANE, erũt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB; a quibus ſi auferatur priſma commune KLNODF; (Nam communis ſectio planorum AF, DE, eſt recta NO.) remanebit ſolidum cõprehenſum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale ſolido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique priſma commune AENOBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter ſe æqualia.

30. ## THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in ijſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neq; CI, GD, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, eſſe æqualia.

æqualia. Cum enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, ſecet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, eaſdem in punctis P, Q; adiungantur q; rectæ AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponãtur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammũ HIDB. [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ ſunt & æquales, ideoque parallelogrammum eſt H PQB. Eadem ratione parallelogrãma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & pallelogrammum N O Q P. Igitur parallelepipedum eſt APQK. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale eſt parallelepipedo APQK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter ſe ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 34. primi

[b] 33. primi

[c] 29. unde.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propoſitio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſin, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine.

NAM ſi vnũ dicatur altius; ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia

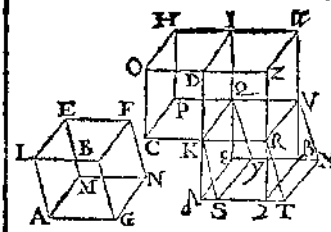
[a] 29. vel 30. vndec. *abſciſſum, & reliquum.* [a] *Cum igitur & totũ huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abſciſſum toti, quod eſt abſurdum.*

31. 32.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SVPER æquales baſes AB, CD, in eadẽ altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hęc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD. perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictę perpendiculares inter ſe æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, ſitque KR, æqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectę ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogrãma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cũ latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. [b] Quare cum tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia tribus planis LG, EA,



[b] 24. vnde.

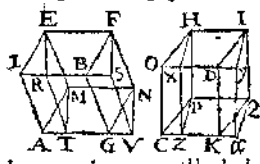
EA, LF, parallelepipedi AEFG; [a] tam autem illa, quam hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter ſe æqualia. [a 24. unde.]

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ; & IQ, XY, in ε, compleaturque parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qδγ V, eandem habent baſin KV, ſuntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & inſiſtentes ipſorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ; QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eiſdem rectis δT, εX; [b] ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V. [b 29. unde.]

[c] QVONIAM vero parallelogrãma KT, Kγ, æqualia ſunt inter ſe; & KT, æquale eſt ipſi LG, erit & Kγ, ipſi LG, hoc eſt, ipſi CD, æquale; cum baſes LG, CD, ponantur æquales. [d] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: [e] Vt autem CD, baſis ad baſin DR, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KIαR; cũ parallelepipedũ CHαR, ſecetur plano IK, planis oppoſitis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita eſt ſolidũ Qδγ V, ad ſolidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, ſecetur plano KV, oppoſitis planis Dα, δβ, parallelo. [f] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qδγ V; cum eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKRα. Quare cum parallelepipedũ Qδγ V, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum. [c 35. primi] [d 7 quin.] [e 25. unde.] [f 9. quinti.]

SINT iam neque inſiſtẽtes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; neque CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares: [g] Et a punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo baſis AB, perpendiculares; Item a punctis H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpẽdiculares inter ſe æquales, cũ ſint altitudines dictorum parallelepipedorũ æquales. Ducantur re- [g 11. unde.]

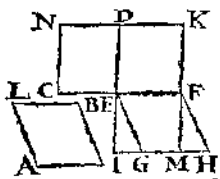
ctæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. [a] Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK, cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 29. vel 30 vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases



æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & recta EF, rectæ LB; & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur paralle-

parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur ſuper baſes EH, IF, EK, *conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper AB, CD, conſtructis; ſintque inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper* EH, *æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem:* [a] *Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper* EH, IF, *cum habeant baſin eandem, cuius infimum latus* EF, *erectam ſuper planũ* IK; *Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima* GH, IM, *in eodem plano, cuius infimum latus* IH; *atque inſiſtentes lineæ* EG, FH, EI, FM, *&c. in eiſdem rectis lineis* IH, *&c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper* IF, *parallelepipedo ſuper AB.* [b] *Quoniam vero parallelogramma* EH, IF, *æqualia ſunt; &* EH, *æquale eſt ipſi* CD: *æqualia erunt* IF, CD. [c] *Erit igitur, vt* IF, *ad* EK, *ita* CD, *ad* EK. [d] *Eſt autem vt* IF, *ad* EK, *ita ſolidum ſuper* IF, *ad ſolidum ſuper* EK, *quod ſolidum ſuper* IK, *ſecetur plano ſuper* EF, *erecto parallelo planis ſuper* DK, IM, *erectis. Et eadem ratione, vt* CD, *ad* EK, *ita ſolidum ſuper* CD, *ad ſolidum ſuper* EK, *cum ſolidum ſuper* CK, *ſecetur plano ſuper* DE, *erecto parallelo planis ſuper* CN, FK, *erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper* IF, *ad ſolidum ſuper* EK, *ita ſolidum ſuper* CD, *ad ſolidum ſuper* EK; [e] *Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper* IF, *&* CD. *Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper* IF, *æquale parallelepipedo ſuper AB. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper AB,* CD. *Quod eſt propoſitum.*

[a] 29. vnde.

[b] 35. primi

[c] 7. quinti.

[d] 25. vnde.

[e] 9. quinti.

CONVERTETVR *quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.*

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

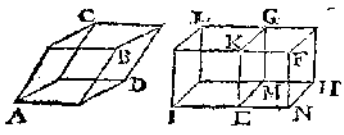
SI enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine,
[a] *31. unde.* *fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo, partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

33. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiuſdem altitudines ſuper baſes AB, EF. Dico eſſe ſolidum
[b] *45. primi* ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. [b] Super rectam enim EK, conſtruatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui ſit æqualis angulo ENF. Conſtituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vtrum FI. vt in 45. propoſ. lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturq; totũ vnũ parallelepipedũ IFLH:



[c] *31. unde.* erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cũ habeãt æquales baſes, per conſtructionẽ AB, IK; & eandẽ altitudinẽ, ex hypotheſi. [d] Quare erit vt ſolidum
[d] *7. quinti* IKLM, ad ſolidũ EFGH, ita ſolidum ABCD, ad
[e] *25. unde.* ſolidum EFGH: [e] Eſt autem ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, vt baſis IK, hoc eſt, illi æqualis baſis AB, ad baſin EF. Igitur & ſolidũ ABCD, erit ad ſolidũ EFGH, vt ba-

vt baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

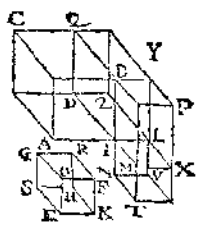
CONVERSO modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadē credatur altitudo; ex maiori abſcindatur minori aqualis, & ducatur planum baſi parallelum; [a] *eritq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abſciſſum: ſed ſic quoque erat ad totum.* [b] *Abſciſſum ergo æquale eſt toti. Quod eſt abſurdum.*

[a] 32. vndec.
[b] 9 quint.

THEOR. 28. PROPOS. 33. 36.

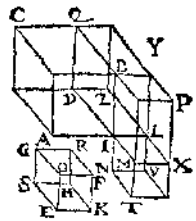
SIMILIA ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT ſimilia parallelepipeda ABCD, EFGH, ſuper baſes ſimiles AB, EF, in quibus latera homologa ſint AI, EK. *Dico* proportionē parallelepipedi ABC*D*, ad parallelepipedum EFGH, eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum *A*I, E*K*. Producatur enim AI, ad L, & ſit IL, æqualis ipſi EK, vel GR; Item *D*I, ad M, & ſit IM, æqualis ipſi HK, vel GO; Item BI, ad N, & ſit IN, æqualis ipſi *K*F, vel GS. Deinde cōpletis parallelogrammis L*M*, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIY. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia ſint lateribus GR, GO; [c] & anguli cōtenti æquales, cū angulus LIM, ſit æqualis angulo AI*D*, qui ob ſimilitudinem parallelepipedorum æqualis



[c] 15. primi

æqualis eſt angulo EKH, ſeu RGO; erunt parallelogrã
mà IX, GF, ſimilia & æqualia. Eadem ratione ſimilia e-
runt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana
IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, ſimilia ſunt & æqua-
lia tribus planis GF, RS, GE, pa-
rallelepipedi EFGH: [a] Sunt au-
tem tria cuiuſq; ſimilia & æqua-
lia tribus reliquis oppoſitis. Igi-
tur æqualia ſunt & ſimilia paral-
lelepipeda TXIV, EFGH, ex
defin. 10. huius lib. Rurſus com-
pletis parallelogrammis MB,
BL, LM, perficiatur parallelepi-
pedum MPBL; Item completis
parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepi-
pedum IYQZ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem paral-
lelepipedorũ ABCD, EFGH, eſt vt AI, ad EK, hoc eſt,
ad IL, ita DI, ad HK, hoc eſt, ad IM; & BI, ad FK, hoc
eſt, ad IN. [b] Vt autem AI, ad IL, ita eſt parallelogram-
mum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogram-
mum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogram-
mum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad
LM; & BL, ad LN. [c] Sed vt AD, baſis ad DL, baſin, ita
eſt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum
DLYQ: & vt baſis DL, ad baſin LM, ita pallelepipe-
dum DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP; & vt baſis BL,
ad baſin LN, ita parallelepipedũ LMBP, ad parallelepi
pedũ LNTX. Quare erit, vt parallelepipedũ ADCB, ad
parallelepipedũ DLYQ, ita parallelepipedũ DLYQ ad
parallelepipedũ LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad
parallelepipedũ LNTX. Ac ꝓinde quatuor quantitates
ſunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP,
LNTX, ideoq; ꝓportio primæ ADCB, ad quartã LN-
TX, hoc eſt, ad EFGH, erit triplicata ꝓportionis primę
ADCB, ad ſecundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. [d] Vt
autem ADCB, ad DLYQ, ita eſt baſis AD, ad baſin
DL; [e] Et vt AD, ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc eſt,
ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad pa-
rallelepipedum EFGH, eſt triplicata proportionis ho-
mologo-



[a] 24. vnde.
[b] 1. ſexti.
[c] 22. vnde.
[d] 32. vnde.
[e] 1. ſexti.

mologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonſtrandum.

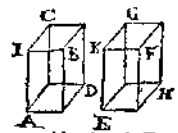
COROLLARIVM.

EX hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonſtratum eſt, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam propertionis primæ linea ad ſecundam, nimirum laterũ homologorum.

THEOR. 29. PROPOS. 34. 34.35.

AEQVALIVM ſolidorum parallelepipedorũ baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum *A*DCB, *E*HGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem *A*DCB. Sint enim primũ inſiſtentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines *A*I, E*K*, ſunt æqua-



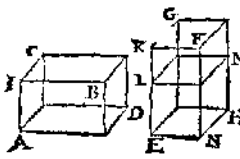
æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo LK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholiũ propoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadẽ ratione, baſis KN, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eãdem habeant altitudinem, ſi nimirũ baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.

[a] 7. quinti.

[b] 32. vnde.

[c] 1. ſexti.



SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

[d] 31. vnde.

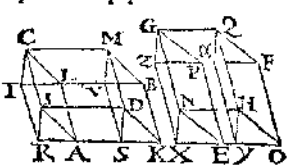
QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelũ baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin

[e] 32. vnde.

baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML: cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; [a] Et vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN; [b] Vt autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum DHGF, ad ſolidum EHML, cũ ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erũt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; erit vt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML; [c] ideoque æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

[a] 1. ſexti. [b] 34. vnd. [c] 9. quinti.

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum inſiſtẽtes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non ſint perpẽdiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autẽ a punctis I, D, M, C, ad planũ baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; ſtẽ a punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntq; perpẽdiculares RI, XN, parallelepipedorũ altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinẽ XN, ad altitudinẽ RI. [d] Cũ enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, ſit autem ABCD, æquale ſolido RVCD, quod habeant eandem baſin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadẽ ratione, æquale ſolido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH, erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



[d] 29. vel 30. vndec.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, vt prius; Cum ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; [e] Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin

[e] 24. vnde.

baſin GH, ſolidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinẽ RI. Quare cum XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ, perpendiculares ad baſes C D, G H; erunt, vt iam oſtenſum eſt, [a] æqualia parallelepipeda R V C D, XαG H. [a] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis *A* B C D, *E* F G H, æqualis. Igitur æqualia quoque erunt parallelelepipeda A B C D, E F G H: Idemque oſtendetur ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quam ob rem, Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] *29. uel 30 vndec.*

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædicta hypotheſes ſeruentur. Nam ſi duobus priſmatis eiuſmodi eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis, apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſteneia, [b] *Quare æqualia erunt eiuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.*

[b] *29. 30. uel 31. vndec.*

RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & ſuper diuerſas baſes conſtitutis adiiciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis. [c] *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt baſis ad baſin;* [d] *Atque adeo priſma ad priſma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.*

[c] *32. vnde.*
[d] *15. quin.*

PRAETEREA, ſi duobus priſmatis prædictis ſimilibus addãtur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, conſtituentur duo parallelepipeda ſimilia, [e] *quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.*

[e] *33. vnde.*

[f] *Igitur & priſmata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant*

[f] *15. quin.*

habeant proportionem cum parallelepipedis, in proportionem habebunt triplicatã proportionis eorundem laterum homologorum, quæquoque ſunt latera homologa priſmatum.

DENIQVE ſi duobus priſmatis æqualibus adiungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cum priſmatis. [a] *Quare cum baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciprocæ; & baſes priſmatum eadem ſint, vel certe triangula earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ.*

[a] 34. vnde.

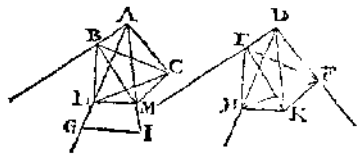
[b] 15. quin.

THEOR. 30. PROPOS. 35. 37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In ſublimibus autẽ lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, ſit æqualis: a ſumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demit

tantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, exiſtunt perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectę IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, eſſe æquales inter ſe. Nam ſi AG, DH, ſunt inæquales, auferatur a maiori AG, ipſi DH, æqualis linea AL; & ex L, ad planum anguli BAC, perpendicularis demittatur LM. Quoniam igitur GI, LM, rectę ſunt ad planum anguli BAC; [a] ipſæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI. Quare LM, cadet in rectam AI. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF; & connectantur rectę BC, BL, LC, EF, LH, HF. Et quia LM, recta eſt ad planum anguli BAC, ipſa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML: [c] Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus ſit, ex conſtructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CM, ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æquale eſt quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus ſit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectę AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CL; [e] Ac proinde angulus ACL, rectus erit. [f] Rurſus quia quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AM, ML: [g] Eſt autem quadratum rectę AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BM, ML: [h] At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, ſit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [i] propterea-que angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB,



[a] 6. vndec.
[b] 47. primi
[c] 47. primi
[d] 47. primi
[e] 48. primi
[f] 47. primi
[g] 47. primi
[h] 47. primi
[i] 48. primi

LAB, triáguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; [a] Erũt & reliqua latera AB, BI, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erũt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cũ latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales ex hypotheſi; [b] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; [c] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, ſunt recti; [d] erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: [e] Quia vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti ſint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarũ EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia ſunt, quod rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt, ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; [f] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 26. primi
[b] 4. primi.
[c] 26. primi
[d] 4. primi.
[e] 47. primi
[f] 8. primi.

COROLLARIVM.

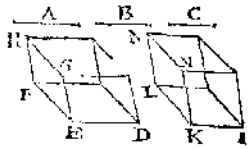
ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtãt, quæ cũ lineis primo poſitis angulos contineãt æquales, vtrũque vtrique. Erunt a punctis extremis

linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

38. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A, B, C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque *DEF*, DEG, FEG, ita vt recta *DE*, ipſi A; & EF, ipſi *B*; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. [a] Deinde ad rectam I *K*, eiuſque punctum *K*, fiat ſolidus angulus *K*, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis *IKL*, IKM, *LKM*, qui æquales ſint tribus DEF, *DEG*, FEG; ita vt rectę *IK*, *K* L, *K* M, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum *I*N; quod contineri dicitur ſub linea *B*, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit vt DE, ad I *K*,



[a] 26. vnde.

ita

ita KM, ad EG, (quod DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: Erunt parallelogramma DG IM, æqualia, propterea quod latera habẽt circa æquales angulos reciproca. Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales, quorũ verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos cõprehendũt cũ lineis primo poſitis, ex conſtructione, vtrũq; vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ. ſi imirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſunt DG, IM, inter ſe æquales, per coroll propoſ. precedentis. Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeãt baſes DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 14 ſexti.

[b] 31. unde.

SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo a media linea deſcripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum DH, deſcriptum ex rectis A, B, C, vt dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepipedo IN, deſcripto a media B. Dico tres A, B, C, eſſe continue proportionales. Nam veluti prius, oſtendentur eorum altitudines ex F, L, demiſſæ eſſe æquales. Quare cum & ipſa ponantur æqualia; erunt eorum baſes DH, IM, æquales per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius l. b. demonſtrauimus. Quæ baſes cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex cõſtructione; [c] habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc eſt, vt DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cũ DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.

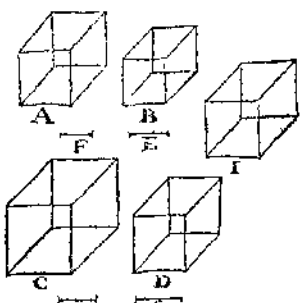
[c] 14 ſexti.

PROBL. 32 PROPOS. 37. 39.

SI quatuor rectę lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda,

quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcri buntur, proportionalia erunt. Et ſi ſoli da parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineę proportionales erunt.

SINT quatuor rectę proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; conſtituanturque ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & b, ſimilia ſimiliterque deſcripta; item ſuper C, & D, alia duo C, & d, ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia, ſiue non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duę continue proportionales E, F; Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineę A, B, E, F, & quatuor lineę alię C, D, G, H, quę binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B; Et vt C, ad H, ita ſolidũ C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum D, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.



SINT iam e contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoque proportionales. Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] ſuper quam deſcribatur parallelepipedũ ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur

[a] 12. ſexti.
[b] 27. vnde.

tur eſt, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam eſt oſtenſum, vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum I. Vt autem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ponitur quoque ſolidum C, ad ſolidum D: Igitur erit vt ſolidum C, ad ſolidum I, ita idem ſolidum C, ad ſolidum D. [a] Atque idcirco æqualia erunt ſolida I, & D. Quę cum ſint ſimilia, ſimiliterque deſcripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & ſimilia habent latera homologa æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales ſunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque ſi quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico eſſe quoque vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. [b] Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidum B, & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales; quandoquidem triplicatę ſunt proportionum æqualium, nempe rectę A, ad rectam B, & rectę C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Dico eſſe quoque, vt recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [c] Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatę, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

[b] 33. vnde.

[c] 33. vnde.

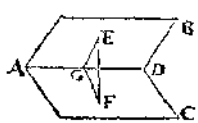
SCHOLIVM.

EODEM *modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia ſimiliterque deſcripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiuſque ſolidum ſumatur bis, hab. huiuſmodi quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor ſolida proportionalia, vt demonſtratum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ lineæ; & linea ſecunda æqualis tertiæ lineæ; perſpicuum eſt, quod proponitur.*

TOTA *vero hæc propoſitio conuenit etiam priſmatis, quorum duo plana aduerſa æqualia, ſint vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis priſmatis, quæ ſingula ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda,* [a] 15. quin. *quæ vt hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt.* [a] *Cum igitur priſmata, eorum dimidia, eaſdem habeant cum ipſis proportionem; perſpicuum eſt, quod proponitur.*

13. ## THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM n. AB, rectum ſit ad planum AC, ſitque eorum communis ſectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpẽdicularis demittatur: quã dico cadere in communem ſectionẽ AD. Nam ſi fieri pôt, [b] 12. primi *cadat extra ad punctum F,* [b] *& ab F, in plano AC, ducatur ad rectã AD, perpẽdicularis FG, connectaturq; recta EG,*

FG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Eſt autem & EF, recta ad FG, per eandē 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti ſunt. quod eſt abſurdum; [a] cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex E, demiſſa ad planum AC, non extra communem ſectionem AD, cadet. ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] 17. primi

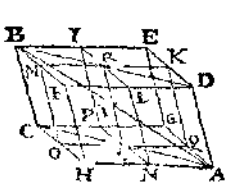
SCHOLIVM.

HÆC eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demiſſa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem ſectionem AD, ſed in punctum F, extra ſectionē; [b] ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ ſunt ad ipſum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus. [b] 12. primi

THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI ſolidi parallelepipedi eorum, que ex aduerſo, planorum latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariam ſe mutuo ſecabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana oppoſita AC, BD, quorum omnia latera bifariam ſecta ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quę extēſa ſint duo plana IN, KO, quorum



quorum ſectio communis ſit recta RS: Ducatur item diameter AB Dico rectam RS, & diametrũ A B, ſe mutuo ſecare bifariam. Connexis enim rectis R B, R D, SA, SC; conſiderentur duo triangula AQS, COS. Quoniã igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia ſunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium A G, C H; [a] & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum ſint parallelogramma AS, HS,) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & baſes AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus ſunt rectis æquales: [e] Ac propterea AS, CS, vnã rectam lineam conſtituent. Eodem modo oſtendentur eſſe æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rurſus quia vtraq; AD, BC, parallela eſt, & æqualis rectæ I H, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipſæ quoq; inter ſe parallelæ erunt, & æquales. [g] Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ ſunt' & æquales; Ac proinde ipſarum dimidiæ AS, BR, æquales ſunt. Quia vero AC, BD, parallelæ ſunt; [h] erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipſis plano, ideoque ſe mutuo ſecabunt, in puncto videlicet T. Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales ſint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: [k] Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, ſe mutuo ſecant bifariam in T. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 34. primi
[b] 29. primi
[c] 4. primi
[d] 13. primi
[e] 14. primi
[f] 9. vndec.
[g] 33. primi
7. vndec
[h] 29. & 15. primi.
[k] 26. primi

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuo bifariam ſecare in vno puncto. nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonſtratum eſt, rectam RS.

HINC

SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad propoſ. 34 primi lib. demonſtrauimus, videlicet.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

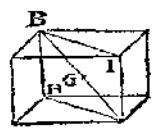
SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc eſt, per punctum medium diametri AB, quod ſit G. Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sit enim primo planũ CD, oppoſitis planis AE, BF, parallelum. [a] *Et quia plana parallela BF, DC, EA, ſecant rectas quaſcunque proportionaliter; ſecatur autem EA, bifariam in G; ſecabuntur quoque latera aduerſorum planorum AH, BI, atque adeo & baſes AH, BI, bifariam.* [b] *Cum igitur ſit vt baſis KC, ad baſim CH; ita ſolidum AD, ad ſolidum CB; erit parallelepipedũ AB, ſectum bifariam plano CD, per centrum G, ductũ.*

[a] 17. vnde.



[b] 25. vnde.

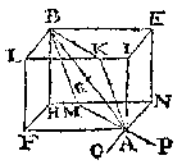
TRANSEAT ſecundo planum ſecans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelipipedum per centrum G, immo per totam diametrum AB; [c] *cũ AB, in plano ſit parallelarum AH, BI.* [d] *Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ductũ bifariam.*



[c] 7. vndec.
[d] 28. vnde.

TERTIO planum ſecans AKBM, neque ſit aduerſis planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, ſecantur plano AKBM; [e] *erunt communes ſectiones AM, BK,*

[e] 16 vnde.



BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, factæ a plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM;[a] ideoq; tam rectæ AK, BM, quæ rectæ AM, BK, inter se erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, triaguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, triaguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ;[b] ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK.[c] Cum igitur OAP, æqualis sit angulo MAN; æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.)[d] Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales, & triangulum triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN,[e] cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, recta MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, est æqualis, vt ostendimus; erit & reliqua LK, reliqua HM; & reliquus angulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, æqualis (Est enim tota LI, toti NH, æqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis æquales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob similitudinē parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, æqualia; & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero AMHF, Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triangula BHM, AIK; & quadrilatera AKLF, BMNE; cum inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quapropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, æquale erit solido contento planis BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & æqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.

[a] 34. primi
[b] 10. unde.
[c] 15. primi
[d] 4. primi
[e] 4. sexti

PO-

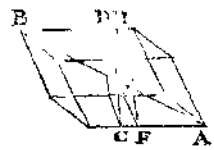
POSTREMO planum ſecet CD, neque aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum oppoſitorum, neque per vllos angulos eorum ductum, ſed vnumquodque ſecet plana oppoſita AHBI. Oſtendemus autem, vt prius, planum ſecans CD, eſſe parallelogrammum, & iam rectas CK, DM, quæ rectas CM, DK, eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; cõnectanturq; rectæ AM, BK, quæ parallelæ erunt, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum AH, BI, factæ a plano per rectas AB, KM, ducto. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipſi LI, ob parallelogramma AL, LE, [b] inter ſe ſunt parallelæ; [c] Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea ſi mutuo ſecabunt in cẽtro G. In ſolo enim centro G, recta AB, per hypotheſim, ſecat planum CD, in quo exiſtit recta CD. Simili argumento, cũ AM, BK, ſint oſtenſæ parallelæ; erunt AB, MK, in eodem cum illis plano, ſeque mutuo ſecabunt in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, tranſibunt, ibique ſe mutuo ſecabunt; atque adeo bifariam, per ea, quæ ad prop. 34. lib. 1. oſtẽdimus. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia ſunt lateribus AG, GC, trianguli AGC, [a] & angulus BGD, æqualis angulo AGC; [c] Erit & baſis BD, æqualis baſi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia ſint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Eſt autem totus DBI, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniã igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; [c] Erit & baſis KL, baſi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum eſt, & æquiangulum; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula cuique-



[a] 16. vnde
[b] 9. vndec.
[c] 7. vndec.
[a] 15. primi
[c] 4. primi
[c] 4. primi

conueniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota LI, toti NH, eſt æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterũ DLIK, æquilaterum eſt quadrilatero CFHM. Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, LIK, æquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinem parallelogrammorum EI, AH, & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DLIK, CFHM, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia quadrilatera ACKI, BDMH; item DENM, CFLK, tum & latera lateribus, & anguli angulis conuenire, vt perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. d. fin. huius lib. æquale eſt ſolido contento planis DMNE, LIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum biſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur AB, ſectum eſt per centrum G, plano CD, bifariam.

SED ſecetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, ſecabitur parallelepipedum AB, bifariã plano FH, vt demonſtratum eſt. Ponitur autem & bifariam ſecari plano CD; Igitur ſolida CB, FB, cum ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdũ.



Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi.

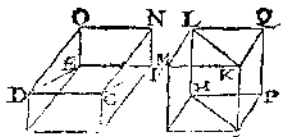
Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basin habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib.



[a] Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. [b] Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, trium prismata ABCDEF, GHIKLM, (Nã parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HM, IL, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi

[b] 31. vnde.

[c] 3. vnde.

PER

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; tum imperet parallelepipeda complere; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM DVODECIMVM.

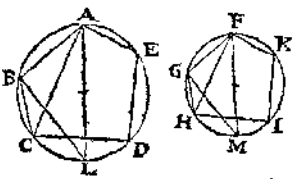
Et Solidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorũ diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus *ABC*, *FGH*, rectæ AC, FH, & cõnectantur rectæ BL, *GM*. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales *ABC*, FGH, habeant latera proportionalia: [b] Eſt autẽ angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqua-

[a] 6. ſexti



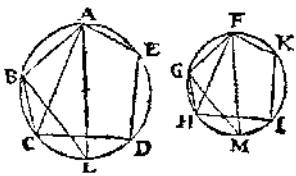
[b] 21. tertij.

lis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cũ ergo
a 31. tertij & anguli ABL, FGM, æquales ſint, a nempe recti in ſemi
b 32. primi circulis exiſtentes, b erunt & reliqui BAL, GFM, æqua-
c 4. ſexti. les. c Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permu-
d 22. ſexti tando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. d Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum.

2. THEOR. 2. PROPOS. 12

CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe, vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulũ EFGH. Si enim res non ita ſe habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim eſſet æqualis, e haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea eſſet circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine ſcilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis ſit magnitudinibus I, & K, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium eſt quadrati circa eundem circulum deſcripti, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur biſariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectę LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per



e 7. quinti.

L, recta

L. recta T V, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi E F vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratq; rectis H E, G F, productis in T, & V. [a] Quia ergo triangulum E L F, dimidium eſt parallelogrammi T E F V; maius erit triangulum E L F, quam dimidium ſegmenti circuli E L F. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia ſegmentorum, in quibus ſunt. Omnia igitur triangula ſimul maiora ſunt, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ E L, L F, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps. Quoniam vero, ſi a circulo E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum E F G *H*; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nempe triangula *E L* F, F M G, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [b] relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulum E F G H, & magnitudinem I. Sint iam circuli ſegmenta relicta E L, L F, F M, &c. ſimul ſumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus E F G *H*, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & *K*, ipſa magnitudo K, quæ maior eſt præfatis circuli ſegmentis; erit reliquum polygonum E L F M G N H O, maius reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo A B C D, polygonum A P B Q C R D S, ſimile polygono E L F M G N H O. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi A B C, A D C, bifariam ſecentur in B, & D; & rurſus circumferentiæ *A B*, *B C*, *C D*, *D A*, bifariã in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diuiſa ſit circumferentia A B C D, in quot diſtributa eſt circumferentia E F G H. Nam iunctis rectis A P, P B, B Q, &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ E L F M G N *H* O, vt patet. [c] Quoniam igitur eſt polygonum A P B Q C R D S, ad polygonum E L F M G N H O, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E H, hoc eſt, per hypotheſim, vt circulus A B C D, ad I: Eſt autem polygonũ A P B Q C R D S, minus circulo

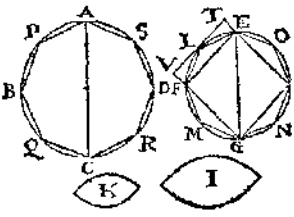
[a] 41. primi

[b] 1. decimi

[c] 1. duodec.

ª 14. quin. ABCD. ª Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Oſtenſum autem eſt & maius. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demõſtrabimus, minorem circulum EFGH, non poſſe ad magnitudinem, quæ minor ſit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionẽ, quã habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & uniuerſe demonſtratum ſit, nunquam quadratũ diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor.



SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cũ ergo ponatur circulus ABCD, ad I, eſſe vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinẽ aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, ᵇ maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratũ diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo ABCD. Quod eſt abſurdũ. Oſtenſum enim eſt iam in priori parte generaliter, non poſſe eſſe vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor. Quamuis autẽ circulus ABCD, maior eſt, & EFGH, minor; eadem tamen ratione oſtendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratũ diametri circuli, ABCD, nõ poſſe habere

ᵇ 14. quinti

habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratũ diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; sit autẽ vt circulus ABCD, ad I, ita idẽ circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratũ diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum. *17. quinti*

COROLLARIVM.

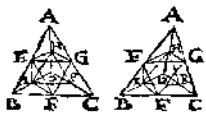
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptũ. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratũ diametri, veluti demonstratum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares 3.

gulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius baſis triangulum *A*BC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariã in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum baſes triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo ſolida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammũ EBFG, & triangula oppoſita E*H*G, BIF; huius uero baſis eſt triangulum CFG, cui opponitur triangulum *K*IH, habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera A*D*, BD, trianguli ADB, ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter; [a] erunt *H*I, *A*B, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I*K*, BC; & H*K*, AC; & E*G*, *B*C; & EF, AC; & FG, AB; & E*H*, BD; & EI, AD; & IF, DC; & *H*G, DC. [b] Sunt autẽ & rectæ FG, *H*I, cum parallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH, FI, cũ ſint parallelæ *ipſi* DC. Quare parallelogramma ſunt AEI*H*, *H*EBI, ID*H*E, EBFG, GH*K*C, CKIF, FG*H*I. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ; [c] erũt anguli E*H*G, BDC, æquales: Ac eadẽ rõne æquales erũt anguli HEG, DBC; & HG*E*, DCB. [d] Proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt trian-

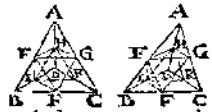


[a] 2. ſexti.
[b] 9. vnde.
[c] 10. vnde.
[d] 4 ſexti.

triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, ſimilia per coroll. propo. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH. pyramidi ABCD, ſimilis eſt, per defin. 9. huius lib. Rurſus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, ſunt parallelæ; [a] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadē ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triāguli ABC, circa æquales angulos ſunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, ſimile eſt: Sunt autem & triāgula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, ſimilia, per idem coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, ſimilis eſt quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. huius lib. Quoniam autē triangula AHE, HDI, ſimilia ſunt triangulo ADB, vt oſtenſum eſt ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] ipſa quoque inter ſe ſimilia erunt. Cum igitur ſint ſuper rectas æquales AH, HD, conſtituta; ipſa erunt æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & ſimilia triangula AHG, HDK, cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo ADC, & conſtituta ſuper æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & ſimilia erunt triangula AEG, HIK, cū ſimilia ſint oſtenſa triangulo ABC, & ſuper rectas poſita AF, HI, [d] quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum AEIH. Non ſecus æqualia erunt & ſimilia triangula EHG, IDK, cum ſint oſtenſa ſimilia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, [e] quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales ſunt & ſimiles, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia ſunt & ſimilia omnibus triangulis alterius, vt demonſtratum eſt.

RVRSVS, [f] quia rectæ EH, HG, GE, æquales ſunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter ſe, & æqualia, per coroll. propoſit. 8. lib. 1. Ac propterea & ſimilia: [g] Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ ſint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur ſolidum BIFGHE, contentū duobus triāgulis EHG, BIF,

[a] 10. vnde.
[b] 4. ſexti.
[c] 21. ſexti.
[d] 34. primi.
[e] 34. primi.
[f] 34. primi.
[g] 15. vnde.



ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, priſma eſt, ex definitione. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum CFGHIK. [a] Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales ſint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia: [b] Sunt autem & parallela, quod rectę CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur ſolidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, priſma eſt. Quoniam vero priſmata EBFGHI, CFGHIK, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIKF; & parallelogrammum EBFG, baſis illius, duplum eſt trianguli CFG, baſis huius, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. [c] Ipſa inter ſe æqualia erunt.

[a] 34. primi

[b] 15. unde.

[c] 40. unde.

DENIQVE quia priſma EBFGHI, maius eſt pyramide EBFI, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqualis & ſimilis pyramidi AEGH, necnó pyramidi HIKD, vt perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorum: Maiora erunt priſmata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero a dimidio eiuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales ſecatur, maior dimidium eius ſuperat, minor vero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraq; diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; &

ti;& in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita et omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

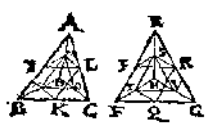
SINT duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirũ in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemque modo intelligãtur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Di



co ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata genera ta in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit vt BG, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. [a] Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulũ EFG, ad triangulum RQG. Et permutãdo, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet

[a] 22. sexti.

[a] 12. quin. delicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST. [a] ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin KQS, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedẽti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD ad prismata cuiuslibet pyramidis factę in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cũ sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, [b] ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.



[b] 12. quin.

LEMMA.

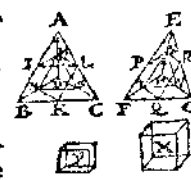
QVOD autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligan

telligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, EFG demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela AEC, MNO, ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur a plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus. [a] 17. vnde.

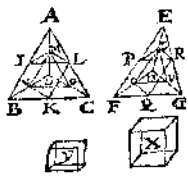
THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Si enim nō ita ſit, ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 3. huius lib. Rurſus eodē modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia,



æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV, quæ maiora ſunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps; relinquetur tã dem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quam ſolidũ X. Oſtenſa vero ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.



SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG; Erit conuertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, maius ponit pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum

3. duode. *5. deci.* *4. duode.* *14. quin.* *14. quin.*

dum X, pyramide EFGH; ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [a] Sit autẽ pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt ad pyramidẽ EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoque vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 7. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abſciſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritq; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modo conſtitutam: Sed ſic quoque erat ad totam pyramidem. [b] Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.

[b] 9. quinti.

COROLLARIVM.

HINC ſit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandẽ proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

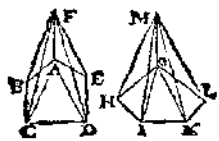
ITEM ſequitur, e conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

THE-

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarũ baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triãgulares diuiſa. [a] Quia vero eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidẽ GHIKLM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cũ quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo



ABCDE	ABCDEF
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL	GHIKLM

a 5. duode.

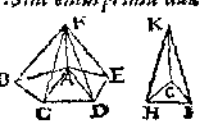
b 5. duode.

c 5. duode.

æquo, erit vt baſis ad ABCDE, baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtētes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera, quam baſis alterius. Sint enim primū duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. [a] *Quoniam vero eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* [b] *Erit vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo oſtenſum: & vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quatitas ad pyramidem GHIK, quartam quatitatē;* [d] *Erit etiā baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quatitas cum ſexta, ad pyramidē GHIK,*



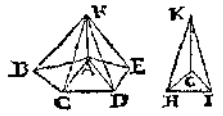
[a] 5. duodec.

[b] 24. quin.

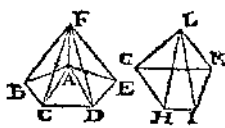
[c] 5. duodec.

[d] 24. quin.

GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quã ob rem duæ pyramides qualibet, quarũ vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat a polygono, eiusque pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoque ſumere a triangulo, eiuſque pyramide, vt dictum eſt.



SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygona, ſintq; plura latera in vna baſe, quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia vero, vt iam eſt demonſtratũ, eſt vt baſis ABC, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem; ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; [a] Erit etiam vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque, vt baſis ADE, quinta quantitas



[a] 24. quin.

titas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante eſt oſtenſum; Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE. * 24. quin.

HANC autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinem.

QVOD non ſecus oſtendemus, ac ea, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandẽ cõſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandẽ habeant proportionem cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

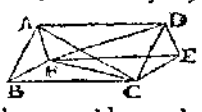
RVRSVS cõtra fit, pyramides multangulas æquales, & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autem duo demonſtrabuntur, vt in coroll. propoſ. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æqua-

les interſe, triangulares baſes habentes.

SIT priſma ABCDEF, cuius duo triangula oppoſita, æqualia, ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia ſunt; eſtq; vt baſis ABC, ad baſin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planũ ABCD, demiſſam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erũt pyramides ADFC, EFDC, ſuper æquales baſes ADF, EFD, conſtitutę, & ſub eadem altitudine, nempe perpẽdiculari a vertice C, ad planum ADEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi ADF, & triãgulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum priſma componẽtes, vt perſpicuum eſt) æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF; in tres pyramides æquales eſt diuiſum. Quocirca omne priſma triangularem habens baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.



*34. primi

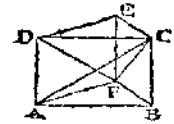
*5. duode.

COROLLARIVM I.

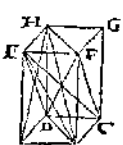
HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa baſim & altitudinem: Siue priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet baſin, & altitudinem.

SIT

SIT enim primum pyramis ABEC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABF. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis. Namſi ducatur recta DF, erit priſma diuiſum in tres pyramides aquales ABCF, ADCF, CDEF, vt demonſtratum eſt; Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hæc illi ſit æqualis, vtpote eadem, quod eiſdem planis cõprehedatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eãdem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem, & altitudinem; ac propterea priſma e contrario eſſe pyramidis triplum. a 7. duode.



SIT deinde pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, vt demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD; Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB; b Ac propterea vt vna pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſub ead altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll. b 12. quin.



propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADFE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, *tertia pars priſmatis* ABCDEFGH. *Cum igitur pyramis* ABCDE, *æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſim* ABCD, *conſtituta, per coroll propoſ. 5. huius lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partẽ priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.*



QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, fiet um erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horũ priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habẽtis baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiuſmodi pyramis æqualis eſt pyramidi illi, quæ eãdem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Quam quidem iam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

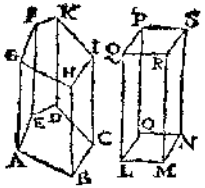
SCHOLIVM. I.

EX dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, vi delicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcumque habeant baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11. de priſma-

priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula. licet eorũ baſis ſint parallelogramma, vertices vero linea recta; necnon de parallelepipedis, quæ nomine priſmatum contineri diximus: Nunc tamen idipſum demonſtrabimus vniuerſe de omnibus priſmatis, quorum duo plana aduerſa, ſiue baſes, ſunt polygona, quamuis plura latera, ſeu anguli in vnius baſe reperiantur, quam in baſe alterius. Sint igitur duo priſmata eiuſdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum baſes ſint figuræ multilatera. Dico vt eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis vtriuſque baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes: Ac proinde per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis. [a] Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, vt baſis ad baſin, vt oſtenſum eſt propoſ. 6. eiuſque ſcholio. Igitur erit quoque vt baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.



[a] 15. quint.

CONVERSO modo, ſi priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, vt baſes, ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

COROLLARIVM. II.

VNDE priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ECONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudi-

ne. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propos 31. lib. 11. fuit demonſtratum.

SCHOLIVM II.

CAETERVM tam ea, quæ in priori corollario quam illa, quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelligunter tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia, & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum aliis putat tantummodo priſma dici ab Euclide, vt in defin. priſmatis diximus. Nam ſi in huiuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis vnum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis eiuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia paris ipſius priſmatis, vt in corollario 1. demõſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, vt in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis cõcipiatur vnũ parallelogrammorum, ita vt in vertice ſit linea rẽcta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, ſed dua tertiæ partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur aliud æquale & ſimile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialterã. Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiã partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in

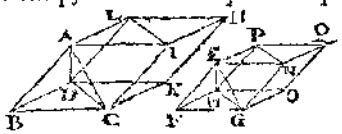
vertice

vertice lineam rectã L M habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque eã, quę oſtendimus in ſcholio, intelligendæ ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorũ vertices vel lineæ rectæ ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemque altitudinis, duæ tertiæ partes priſmatum, vt modò demonſtrauimus. Quare eadem habebunt rationẽ, quam priſmata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

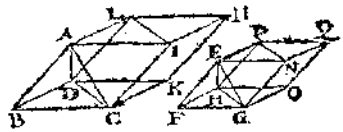
SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita vt baſes ABC, EFG, ſint ſimiles, & reliqua triangula vni uſ ſimilia reliquis triãgulis alterius. Dico ꝓportionẽ pyramidũ eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB,



perficianturq; parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ & æquales, cõuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur cõpletũ parallelepipedum BM, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cũ plana ſolidi FM, ſint parallela, vt facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodẽ modo perficiatur parallelepipedũ FQ. Quoniã igitur ob ſimilitudinẽ pyramidũ, anguli plani ABC, EFG, ſunt æquales, eſtq; vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, ſimilia. Eodẽ modo cũ anguli ABD, EFH, ſint æquales, ſitq; vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Itẽ anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erũt & parallelogramma BL, BK, parallelogrãmis FP, FO, ſimilia. [a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepi-

[a] 24. vnde.



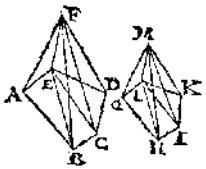
pedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM; quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, [a] sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt pallelepipeda BM FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, [b] prismata DBCILA, HFGNPE, habēt eandē proportionē, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; [c] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [d] Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 24. unde.
[b] 15. quinti
[c] 11. quin
[d] 33. unde.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC; LH, LI, [e] diuisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis



[e] 20. sexti

triangulis GHL, LKI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum ſimilitudinem, triangula AEF, GLM, ſimilia ſunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter ſimilitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rurſus quia eſt vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula ſimilia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum ſimilitudinem ſimilia ſint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum ſit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. [a] Quare æquiangula, atq; adeo & ſimilia ſunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, ſimilia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. ſimiles ſunt. Eadem ratione ſimiles erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. [b] Quapropter, vt demonſtratum eſt, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, ſingula ad ſingulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorũ AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, ſingulorum ad ſingula. Cũ igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeãt vnã et eandem proportionem, ob ſimilitudinem baſium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnã eandemq; proportionem, triplicatam ſcilicet illius; [c] Atque idcirco erit, vt una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, [d] cũ pyramis ABEF, ad pyramidẽ GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod eſt propoſitum.

[a] 5. ſexti

[b] 8. duodec.

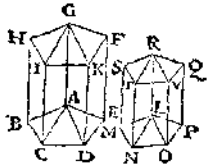
[c] 12. quinti

[d] 8. duodec.

SCHOLIVM.

EADEM ratione priſmata ſimilia habebunt triplicatã proportionem homologorum laterum. Sint enim duo priſmata ſimilia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum propor-

proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Na si ex angulis A, *&* I, *ducãtur rectæ* AC, AD; LN, LO, *erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula* ABC, CAD, DEA, *triangulis* LMN, NLO, OIL, *similia. Similiter, si ex angulis* G, *&* R, *ducantur rectæ* GI, GK; RT, RV, *erunt triangula* GHI, IGK, KFG, *& triangulis* RST, TRV, VQR, *& triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam uero ob similitudinem prismatum, parallelogramma* CH, NS, *similia sunt, erit vt* IC, *ad* CB, *ita* TN, *ad* NM: *Vt autem* CB, *ad* CA, *ita quoque est* NM, *ad* NL, *ob similitudinem triangulorum* BCA, MNL. *Igitur ex æquo erit vt* IC, *ad* CA, *ita* TN, *ad* NL. *Rursus quoniam angulus solidus* N, *æqualis est solido angulo* C, *ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus* MNO, *angulo* BCD, *& angulus* TNM, *angulo* ICB, *& angulus* TNO, *angulo* ICD: *Conuenit autem & recta* NL, *rectæ* CA, *eo quod anguli* MNL, BCA, *sint æquales. Igitur anguli* ICA, TNL, *æquales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erũt parallelogramma* CG, NR, *similia. Atqui & parallelogramma* CH, HA, *parallelogrammis* NS, SL; *& triangula* ABC, GHI, *triangulis* LMN, RST, *similia sunt. Igitur prismata* ABCIGH, LMNTRS, *similia sũt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata* CDAGIK, NOLRTV; *nec non prismata* AEDKGF, IPOVRQ. *Quapropter prismata* ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, *ad prismata* LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, *per ea, quæ demonstrauimus ad propos.* 34. *lib.* 11. *triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterũ homologorum* BC, CD, DE, *ad* MN, NO, OP, *singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata* ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, *proportionem habere homologorum laterum* BC, MN, *triplicatam, quo paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.*



20. sexti

EX

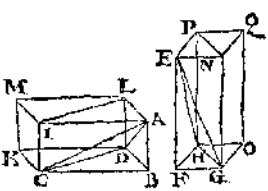
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas ſimilis diuidi in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifeſtum eſt ex demonſtratione precedentis coroll.

EODEM modo infertur, priſmata multangula ſimilia diuidi in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius ſcholij demonſtratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes & altitudines; illæ ſunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum baſes ABC, EFG, & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt ABC, ad EFG, ita altitudinẽ pyramidis EFGH, ad altitudinẽ pyramidis ABCD. Sint. perficiantur, vt in precedẽti propoſitũ eſt, parallelepipeda BM, FQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt priſmata DBCILA, HFGNPE, cum ſint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter ſe æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum ſint priſmatum dupla, æqualia quoque erunt. a, Quare baſes eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc eſt, erit vt baſis BI, ad baſin FN, ita altitudo ſolidi FQ, ad altitudinẽ ſolidi BM: b, Vt autẽ baſis BI, ad baſim FN, ita eſt triangulũ ABC, ad triãgulũ EFG. Igiſ erit quoq; vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eędem



a 34. vndec.

b 15. quint.

dem ſint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

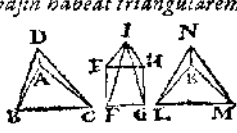
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius; cũ ſit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eędem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum & altitudines eorunde reciprocæ; [b] Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallepipeda BM, FQ. Quare & priſmata DECILA, HFGNIE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 15. quinti

[b] 34. unde.

SCHOLIVM.

EADEM ratione Aequalium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentiũ reciprocatur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, baſin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat baſi non triangulari EFGH, *æquale triangulum* KLM. *Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum factile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demoſtrauimus ad propoſ. 42. lib. 1. Deinde ſuper* KLM, *fiat pyramis* KLMN, *eiuſdem altitudinis cũ pyramide* EFGHI. *Quoniam ergo pyramides* EFGHI, KLMN, *æquales habent baſes, & eandem altitudinem; ipſæ erunt æquales, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. huius lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis* EFGHI, *æqualis pyramidi* ABCD. *Igitur & pyramis* KLMN, *pyramidi* ABCD, *æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides* ABCD, KLMN, *baſis triangulares;* [c] *erit vt baſis* ABC, *ad baſin* KLM, *hoc eſt, ad huic æqualem baſin* EFGH, *ita altitudo*



[c] 8. duodec.

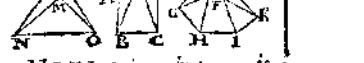
pyra-

pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo; cum baſis KLM, æqualis ſit baſi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI; ponatur autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem, erit quoque vt baſis ABC, ad baſim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. [a] Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.

[a] 9. huius.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multãgula. Fiat rurſus triangulũ MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritque ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt nũc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocantur.



SED reciprocentur iam baſes harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO, æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante oſtea

oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGH KL: Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

OMNIA hæc facile quoque demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorum tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certe duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, vt in ſcholio eiuſdē propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atq; altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

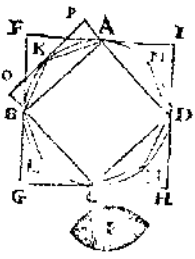
RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint triplæ, vel certe ſeſquialteræ, æqualia quoque ſunt. Quod eſt propoſitum.

9. ## THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus baſin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quã triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratũ ABCD, & circa eũdem, quadratum FGHI; intelliganturque ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda.

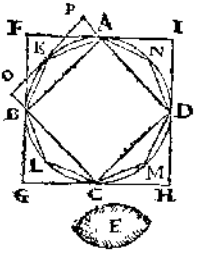
Quo-



Quon am igitur quadratum ABCD, dimidiũ eſt quadrati FGHI, vt a 1 propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; a 32. vnd. eſtq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidiũ parallelepipedi baſis FGHI, Ac proinde parallelepipedum baſis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiungunturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad propoſ. 17. lib. 3 oſtendimus, occurratque rectis DA, CB productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cum ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, quemadmodum ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis AKB, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura cõtenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariã, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodẽ modo priſmata eiuſdẽ altitudinis cũ cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omniũ ſegmentorũ cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmẽta, & ſic deinceps. Quoniã uero ſi a cylindro, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis ABCD; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium AKB, BLC,

b 41. huius

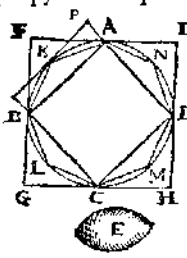
[a] 1. decim. BLC, &c. atq; in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmẽta cylindri relicta basium AK, KB, BL, &c. (quę quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulę AKBLCMDN, eandem habẽs altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum tripium coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadẽ cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.



SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, [b] estque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidẽ eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super ABCD, dimidium pyramidis super basin FGHI; ac proinde pyramis super basin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus ABCD. Secẽtur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit

[b] 6. duodec.

erit ipſi AB, vt ad propoſ 27. lib. 3. demonſtrauimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligãtur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. [a] Quia ergo triangulũ AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis ſuper baſin AKB, dimidium pyramidis ſuper baſin ABOP, [b] cũ pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, maior erit dimidio ſegmenti coni, cuius baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul maiores ſunt, quã dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quã dimidia omniũ ſegmentorum coni ſimul, quorũ baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi a cono, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus ABCD; & a reliquis ſegmẽtis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [c] relinquitur tãdem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: Sint iam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahãtur ſegmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior



[a] 41. primi.

[b] 6. duode.

[c] 1. decimi

eſt, præſatis coni ſegmentis; erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cũ cono & cylindro, maior quã tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cũ priſma eandẽ habens baſim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cũ cono & cylindro, triplum ſit ipſius pyramidis, vt ſupra in corollario propoſitionis ſeptimæ huius libri a nobis eſt demonſtratum, erit huiuſcemodi priſma maius cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum, Non ergo cylindrus minor eſt triplo coni: Sed neque maior triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, propterea q; conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos dixerit Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis conuenit, vt perſpicuum eſt eius demonſtrationem diligenter intuenti. Itaque propoſitio vniuerſe ita proponi poterit.

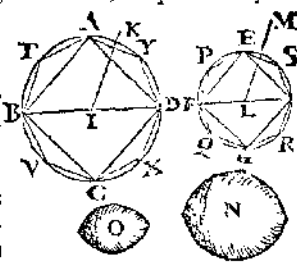
OMNIS conus, ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuſlibet cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni & cylindri.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt vt baſes.

SINT ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ baſes circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, &

num, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non creditur, ſit vt baſis ABCD, ad baſim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si n. eſſet æqualis, haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandẽ; ac propterea eſſet conus ad conum, vt baſis ad baſim: quod non cõceditur. Sit ergo primũ N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis ſit magnitudinibus N. & O, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur ſi ex cono EFGHM, detrahatur pyramis ſuper baſin EFGH, eiuſdem altitudinis, & a reliquis ſegmentis auferantur pyramides eiuſdem altitudinis baſium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio, ſemper plus dimidio ſubtrahitur, vt in poſteriore parte præcedẽtis propoſitionis oſtenſum eſt; [b] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, exceſſus coni EFGHM, ſuper N. Sint ergo iam ſegmenta coni relicta baſium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidẽ baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, ſimul; ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta, & ex N, & O, ipſa magnitudo O, quæ prædicti coni ſegmẽtis maior eſt, erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonũ EPFQGRHS, eiuſdẽ altitudinis cũ cono, maior quã N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonũ ATBVCXDY, ſimile polygono EPFQGRHS, vt in propoſ. 2. huius lib. docuimus, ducanturq; circulorũ diametri BD, FH. Quũ igit per coroll. ppoſ. 2. huius lib. eſt vt circulus ABCD, ad circulũ EFGH, ita polygonũ ATBVCXDY, ad polygonum



[a] 7. quinti.

[b] 1. decimi

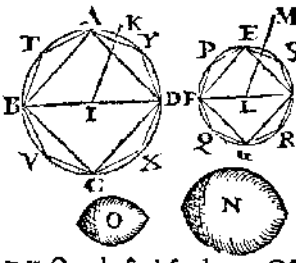
gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABC D, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, [a] & vt polygonum, ad polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidē EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto, [b] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quā N: Oſtēſa autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

[a] 6. duodec.

[b] 14. quinti

SIT ſecundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinē O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit vt circulus EFGH ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono ABCDK. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior eſt N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor eſt oſtenſa; Aequalis igitur eſt. Quapropter cum ponatur, vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; [a] Sit autem, vt conus ABCDK, ad N, ita idē conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

[a] 14. quin.



[a] 7. quinti

[a] 15. quin.

QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita eſt cylindrus ABCDK, (qui triplus eſt coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni EFGHM) Erit quoque vt baſis AI CD, ad baſin EFGH,

EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrũ EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, conſtituantur cylindri, & priſmata ſub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vnuerſe proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTETVR hæc propoſitio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

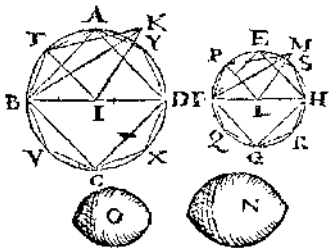
ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi nõ habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni,& cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

SINT ſimiles coni,& cylindri,quorum baſes circuli ABCD,EFGH,axes vero LK, LM, & diametri baſium BD,FH. *Dico* conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatã diametri ad diametrum.Si enim hoc non credatur,habeat conus ABCDK,ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conũ EFGHM, & ad N, proportionem eãdem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conũ EFGHM, eſſet quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH;quod non conceditur.Sit ergo primum N, minor,quam conus EFGHM. magnitudine O; Fiatque eadẽ prorſus conſtructio figuræ,quæ in præcedenti propoſitione,ita vt rurſus pyramis EPFQGRHSM, maior oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP,vt habeãtur duo triangula BKT,EMP, pyramidum ATBVCXDYK,EPFQGRHSM;& connectantur rectæ TI,PL.Quoniam igitur coni ABCDK,EFGHM,ſimiles ponuntur,erit,ex 24.defin.lib.11.vt diameter BD, ad diametrum FH, ac propterea vt ſemidiameter BI, ad ſemidiametrum FL,ita axis IK,ad axem LM; Ac permutãdo vt BI, ad IK, ita FL, ad LM.Cum igitur anguli BIK,FLM,recti ſint,ex defin.3.lib.11.quod coni recti ponantur,propterea que axes recti ad eorum baſes; [c] Erunt triangula BIK, FLM,æquiangula; [d] Ac propterea



a 7. quinti

b 11. quinti

c 6. ſexti.

d 4. ſexti

rea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autē BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob ſimilitudinē triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus arcubus BT, FP, ſint æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtēſum eſt; ſitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatē tam linearū BI, IT, quam FL, LP; erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rurſus qa latera KI, IB, triāguli KIB, æqualia ſūt lateribus KI, IT, triāguli KIT, & anguli dictis lateribus cōprehēſi, recti, ex defin 3. lib. 11. cū axis IK, rectus ponatur ad circulū ABCD, erūt baſes KB, KT, æquales. Eodē modo æquales erūt rectæ MF, MP; Ac pptera rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt. cū vtrobiq; ſit proportio æqualitatis. Qm̄ vero vt KB, ad BT, ita KT, ad eandē BT; Itē vt MF, ad FP, ita MP, ad eandē FP: Erat aūt vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoque vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et cōuertēdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cū ſit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP, Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti oſtenſum eſt; habebūt triāgula BKT, FMP, latera ꝓportionalia, ideoq; æquiāgula erūt; Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendētur reliqua triangula ambictia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter ſe ſimilia eſſe: Quæ cū ſint multitudine æqualia, erūt dictæ pyramides ſimiles, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Vt autē BT, ad FP, ita eſt BI, ad FL, ob ſimilitudinē triangulorum BIT, FLP; Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidē habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Oſtenſa autem eſt & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

a 6. ſexti.

b 4. primi

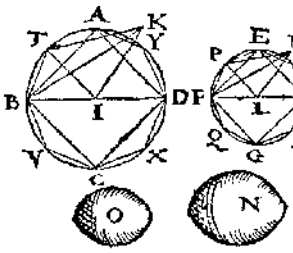
c 7. quinti

d 6. ſexti.

e 11. quinti

f 14. quinti

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autẽ & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime oſtendimus: Erit vt conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterũ PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoq; N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatã diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinẽ O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM,[a] erit quoq; conus ABCDK, maior quã O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinẽ O, minorem cono ABCDK, proportionẽ habet triplicatam diametri FH ad diametrũ BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conũ ad magnitudinẽ alio cono minorẽ, proportionẽ habere triplicatã eius, quã habent baſiũ diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor eſt oſtenſa. Aequalis igitur eſt;[b] ac proinde conus ABCDK, eandẽ habet proportionẽ ad conũ EFGHM, & ad N. Cũ ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorũ BD, & FH; erit quoq; conus ABCDK, ad conũ EFGHM, in earundẽ diametrorũ, pportione triplicata.



[a] 14. quin

[b] 7. quinti.

[c] 15. quin.

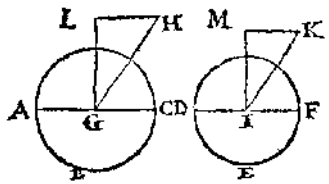
[c] QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, ean-

ni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylindrus ad cylindrum proportionē diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

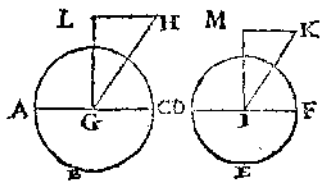
QVOD ſi maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8. huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterū homologorum triplicatam. Id quod ad deſin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HÆC porro propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cum in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK, & diametri baſiū AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatā. Intelligantur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti eorundem cum ſcalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducātur per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana ſecantia baſes lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti ſunt baſibus ABC, DEF; a erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad eaſdem recta. b Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadent in AC, DF, communes ſectiones: & proinde erunt anguli



a 18. vnde.
b 38. vnde.

anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter ſe erunt, cũ coni & cylindriſcaleni ſimiles ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin.
a 32. primi 3. lib. 11. a Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur eſſe eiuſdem altitudinis; erit recta HL, per axiũ vertices ducta ipſi AC,
b 29. primi parallela, b ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti ſint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum ſint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula ſunt; eatque idcirco



c 4 ſexti. erit vt GL, ad GK, ita IK, ad IM; & permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axẽ IK, ita eſt AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri ſcaleni ponãtur ſimiles. Igitur & GL, axis ad IM, axẽ erit, vt diameter AC, ad DF, diametrũ; Et proinde coni & cylin
d 12. duod. dri recti ABCL, DEFM, ſimiles erũt, ex definitione. d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant baſim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus CEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) eſt æqualis, vt conſtat ex coroll. propoſ.
e 7. quint. 11. huius lib. e Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum et cylindrũ DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod eſt propoſitum.

11.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SE-

SECETVR cylindrus *ABCD*, plano GH, paralle lo aduerſis planis AB, CD, quod quidem ſecet axé EF, in I. Dico vt eſt cylindrus ABHG, ad cylindrũ GHCD, ita eſſe axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunq; rectæ *EK*, KL, æquales ipſi EI; Itẽ quotcũque rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi *FI*. Deinde per puncta I, K, L, *M*, N, O, ducantur rectę IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, deſcribent circulos GH, PR, Q S, T*α*, VZ, XY, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erũt SP, PA, AH, HD, *D*T, TZ, ZX, ex definitione, componẽtes totum cylindrum SQXY. Quoniã vero tam cylindri SP, PA, AH, ſuper baſes æquales QS, PR, BA,



& ſub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales ſũt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, ſuper æquales baſes XY, VZ, T*α*, CD, & ſub altitudinibus æqualibus N O, MN, FM, IF, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quã multiplex eſt axis IL, ipſius axis IE; Itẽ tã multiplex cylindrus X*G*, cylindri *CG*, quam multiplex eſt axis I O, ipſius axis IF. Quoniam autem ſi axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi IO, (multiplici axis IF, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro X*G*, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunq; hoc contingat multiplicatione: Erit, per defi. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axẽ IF, ſecundã magnitudinẽ, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylin

drus

drus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri LS, KR, EA, &c. super æquidistantes circa centra L, K, E, &c. vna cũ recta SY, semidiametros contingente. Hæc enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.



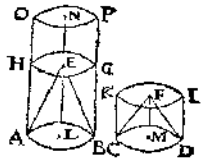
11.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturq; axis EN,

E N, æqualis axi *M F*, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O *f* eiuſdem altitudinis cum cylindro C D I K. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.



[a] propterea q; e cylindrus A G, ad ipſos eandem habet proportionem. [b] Eſt autem cylindrus *A G*, ad cylindrum H P, vt axis, ſeu altitudo L E, ad axem, ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo L E, ad altitudinem M F.

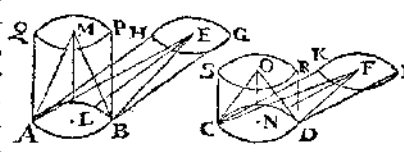
[a] *7. quinti*
[b] *13. duod.*

[c] QVIA vero coni A B E, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum *A G*, C I; [d] ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus A B E, ad conum C D F, vt altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

[c] *10. duod*
[d] *15 quin.*

SCHOLIVM.

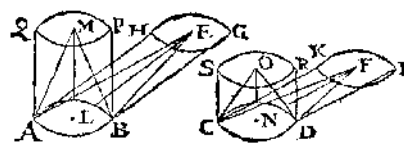
HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E; C D F, et cylindri A B G H, C D I K, ſcaleni, quorum altitudines L M, N O. Dico conũ A B E, ad conum C D F, et cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, eſſe, vt eſt altitudo L M, ad altitudinem N O. Super baſin enim A B, conſtruatur cylindrus rectus A B P Q, ſub altitudine L M; Item ſuper baſin C D, cylindrus C D R S, ſub altitudine N O. [e] *Quoniã igitur eſt cylindrus rectus A B P Q, ad*



[e] *14. duod.*

ad cylindrum rectũ CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO: Eſt autẽ cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Ité cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

[a] 10. duod. [b] 15. quin. *QVONIAM autem coni, [a] cum ſint tertiæ partes cylindrorum, [b] eandem habent proportionem, quam cylindri;*



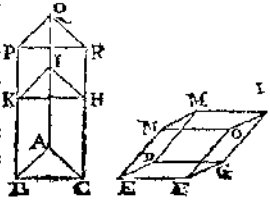
Erit quoque conus ABL, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodẽ argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundẽ altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus ſcalenus ABGH, æqualis ſit cylindro recto ABPQ; ſit autẽ cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonſtrauit: Erit quoque cylindrus ſcalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

[c] 15. quin. [d] 10. duod. *[c] QVONIAM vero coni eandem habent proportionẽ, quam cylindri, [d] cum illi horum ſint tertiæ partes; Erit etiã conus ſcalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus oſtendetur eadẽ ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt.*

EADEM quoque hæc propoſitio conuenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC, DEFG, priſmata ABCHIK, DEFGKMNO, & pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, priſmatis ABCHIK, ad baſin ABC, perpendi-

Perpendiculares, ita vt BK, ſit altitudo priſmatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, ſumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini priſmatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur priſma HIKPQR, eiuſdem altitudinis cum priſmate EL. Eruntq; priſmata HIKPQR, EL, cum habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propo. 7. huius lib. [a] Ac propterea priſma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia vero ex ſcholio propo. 25. lib. 11. priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, eſt vt planum BI, ad planum KQ; [b] Et vt planum BI, ad planum KQ, ita eſt recta BK, ad KP; erit priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, hoc eſt, ad priſma EL, vt BK, altitudo priſmatis ABCHIK, ad KP, altitudinem priſmatis HIKPQR, hoc eſt, priſmatis EL, Quod eſt propoſitum.



[a] 7. quinti.

[b] 1. ſexti.

QVOD ſi inſiſtentes lineæ AI, CH, BK nõ ſint perpendiculares ad baſin ABC, cõſtituendũ erit ſup baſin ABC, aliud priſma, cuius inſiſtentes ſint perpẽdiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis ABCHIK. Nam eũ ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinẽ, et baſin, ſint æqualia, ſitq; priſma conſtitutũ ad priſma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinẽ; erit et priſma ABCHIK, ad priſma EL, vt altitudo illius, ad altitudinẽ huius

[c] QVONIAM vero pyramides eandẽ habent proportionem cum priſmatis, [d] quod illæ ſint horũ tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.

[c] 15. quint. [d] 7. duod.

EADEM prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atque ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

HAEC omnia eodem fere modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

OMNI

OMNIA quoq; hæc facile conuerti poſſunt hoc modo.

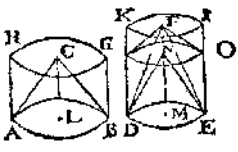
CONI & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

NAM alia pars æqualis foret toti, vt in conuerſo propoſ. 31. lib 11. oſtenſum eſt.

12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorũ reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

SINT æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes, altitudinesve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.



QVOD ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, vt

vt in ſcholio propoſ. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO. OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [a] 7. quinti.

[b] Eſt autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: [c] Itẽ vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines. [b] 11. duod. [c] 14. duod.

IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, [d] cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demõſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF conſtituãtur duo coni, vt in figura. [d] 10. duod.

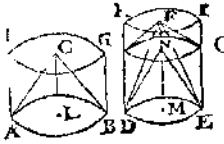
SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidẽ in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN; [e] Eſt autem vt baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: [f] Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrũ DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; [e] 11. duod. [f] 14. duod.

29. quinti

[a] ideoq; cylindrus ABGH, cylindro [illegible], æqualis erit.

A T vero in conis hæc [illegible] mo[illegible]atio. Si conorũ



A B, DEF bases & altitudines recip[illegible]o ẽtu, reciprocabũtur quoq; bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cũ eædem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales quo ostẽdimus cylindros æquales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocãtur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandũ.

SCHOLIVM.

NON difficile erit idẽ ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti easdem cum illis bases, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eædem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoque erunt æquales.

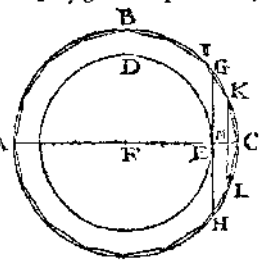
IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

13. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum

lygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idē centrū F, oportcatq; in maiori ABC, inſcribere polygonū æquilaterū, cuius latera numero pari cōtinentur, nō tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, ſecās circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib 3.



Quoniā igitur arcus AGC maior eſt arcu GC, ſi ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidium IK, & ſic deinceps, relinquetur tandem minor arcus quā CG. Sit igitur iá arcus CK, arcu CG, minor, & ſubtēdatur recta CK. Dico rectā CK, eſſe vnum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BL, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrās AB, in totidē partes æquales diuidat, in quot diuiſus ē quadrans BC; necnō ſemicirculus AHC, in totidē partes, quot cōtinet ſemicirculus ABC; deinde oībus arcubus rectę lineę ſubtēdātur, quę æquales quidē erunt ipſi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales ſubtendant: Deſcriptū erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidē non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, ſecans ipſam AC, in M. Quōn igitur anguli GEM, KME, recti ſūt; erūt rectę GH, KL parallelæ. Quare cū recta GH, tágat circulū DE, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra dictū circulū, nec vnquam ipſum continget, quod nunquā cum recta GH, cōueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abeſt, quam KL, circulum DE, tanget. Ac

a 1. decimi

b 29. tertij.

c 28. primi

propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cũ æqua
* *14. tertij.* lia ſint lateri CK; ideoque æqualiter cum CK, a centro F diſtent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtẽtibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum DE.

14. PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphęra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſpheræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inſcribere ſolidũ polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorẽ ſphæram EFGH. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo p centrum, ſintq; communes ſectiones factæ in ſphęris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti congruent ſectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes

omnes lineæ rectę cadentes ex I, ad peripherias ſectionũ ſunt æquales, cum ducãtur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducãtur in his circulis diametri AC, BD, ſe ſe in centro I ſecantes ad angulos rectos, vt ſint quadrantes AB, BC CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidẽ vt facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vſq; circuli ABCD, quæ circulũ EFGH, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectę Gγ, applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero ſi arcui Cγ, intelligatur ſubtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, latus Cγ, oppoſitũ maiori angulo, nẽpe recto, maius eſt latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit. vt conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Abſcindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod ſi ex quadrante CD, dimidiũ auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidiũ LK, & ſic deinceps; relinquetur tandẽ arcus minor arcu Cδ, ſeu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritq; recta CK, ſubtenſa minor quam recta Aε, hoc eſt, quam Gγ, ex ſcholio propoſ. 29 lib. 3. Dico igitur, rectã CK, eſſe vnum latus polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tãgat circulum EFGH, vt ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet, multo minus recta CK ſubtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulũ tanget. Rurſus ducta diametro KN, erigatur ex centro I, ad plana circulorũ ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens ſuperficiei ſphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientq; cõmunes ſectiones, circulos, vt iam dictũ ẽ, quorũ ſemicirculi ſint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. æquadrantes erunt OC, OK; atq; adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes CD,

[a] 16. duod.

[b] 1. quarti.

[c] 19. primi.

[d] 1. decimi

[e] 12. vnde.

[f] 18. vnde.

[g] ſchol. 22. tertij.

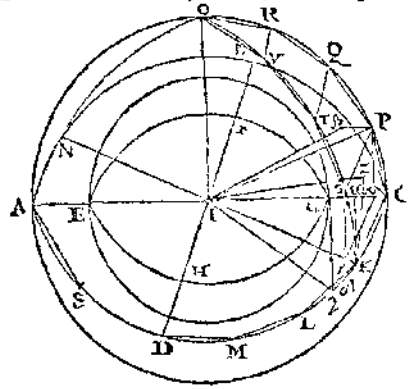
OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD: Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Connectis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, quæ in communes sectiones AC, NK, cadent; eruntque inter se parallelæ.

a 29. tertij.

b 38. vnde.
c 6. vndec.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib 11. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoq; erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sūt autē & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY; æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter sese. At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demātur æquales rectæ CX, KY relinquātur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erūt parallelę quoq; PS, CK, inter se, cum

d 27. tertij.



e 26. primi
f 33. primi
g 2. sexti.
h 9. vndec.

ſe, cum vtraq; parallela ſit ipſi XY; [a] ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eode n cum ipſis plano exiſtent. Totũ igitur quadrilaterũ CKSP, in vno erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planum circuli AB CD, perpediculares, & cõnectantur rectæ QC, TK, oſtẽdemus ſimiliter CK, QT, eſſe parallelas; atq; adeo ipſas PS, QT, inter ſe parallelas eſſe, cũ eidẽ CK, ſint parallelę; totũq; quadrilaterũ PSTQ, in vno eſſe plano. Eadẽ ratione in vno erit plano qnadrilaterũ QTVR. [b] Eſt autẽ & triangulũ RVO, in vno plano. Si igitur eadẽ conſtructio exhibeatur ſuper reliqua latera KL, LM, MD, ductis ſcilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemiſphęrio, vt tota ſphęra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ ſimilia ſint prædictis inter quadrantes OC, OK, ſuper latus CK, cõſtructis; inſcriptũ erit in ſphęra maiori ſolidũ polyedrũ circunſcriptũ dictis quadrilateris, atq; triãgulis. Hoc ergo dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

[a] 7. vndec.

[b] 2. vndec.

DVCATVR. n. ex I, ad planũ CKSP, perpẽdicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniã igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; [c] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratũ rectę IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint, erunt & quadrata rectarũ IZ, ZC, quadratis rectarũ IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipſę rectę ZC, ZK, æquales. Similiter oſtẽdemus rectas, q̃ ex Z, ad PS, ducẽtur, æquales eſſe & inter ſe. & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallũ ZC, deſcriptus p quatuor pũcta C, K, S, P, trãſibit. Eadẽq; trõne circa reliqua quadrilatera PSEQ, QTVR, & triangulũ RVO, circulos deſcribi poſſe, demõſtrabimus. Qm̃ vero, vt poſtea oſtẽdemus, angulus CZK, obtuſus eſt; erit quadratum rectę CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia ſint, malus erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectę ZC.

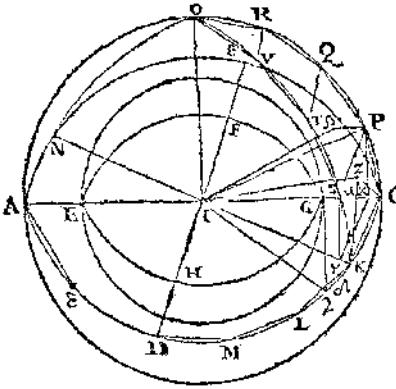
[c] 47. primi.

[d] 12. ſecun.

DVCATVR ex K, ad rectã AC, perpendicularis Kα. Cum igitur A C, dupla ſit ipſius A I, & Aα, maior ſit,

quã AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quã ob rẽ cum
[a] 2 ſexti. ſit, vt AC, ad Aα, ita rectangulũ ſub AC, αC, ad rectangulũ ſub Aα, αC, quod baſes horum rectangulorum ſint AC, Aα, & eadẽ altitudo αC; erit quoq; rectãgulum ſub
[b] 17. ſexti. AC, αC, minus duplo rectanguli ſub Aα, αC. [b] Eſt autem rectangulũ ſub AC, αC, æquale quadrato rectę CK; & rectangulũ ſub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quod recta CK, inter AC, αC, ſit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratũ rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC.

[c] 47. primi



[c] Quoniã vero quadratũ rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarũ IZ, ZC; & quadratũ rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntque æqualia quadrata rectarũ æqualiũ IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarũ Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectę αK; & ex illis minus, videlicet rectę ZC, erit reliquum quadratũ rectę IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tãgat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta Kα, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cũ omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint a ſphæra EFGH,

EFGH, quam punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Cγ: Eſt autem CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox demonſtrabitur; Multo maior erit Gγ, quam ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [b] Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, ſit ſphæræ minoris EFGH, ſemidiameter; exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

[a] 19. primi

[b] 47. primi

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, vt demonſtratum eſt: Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus Iβ P, rectus ſit, ex 3. defin. lib. 11. [c] erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia uero & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Eſt aũt quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior ſit, quam linea βP, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoque & linea Iβ, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra ſphæram EFGH, exiſtet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphæ-

[c] 47. primi

ram

ram minorem E F G H. Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſsint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

EX ijs, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium; Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidia-

me-

metrorum, atque adeo diametrorum ſpharārum, [a] cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem. [a] 15. quinti

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonſtranda.

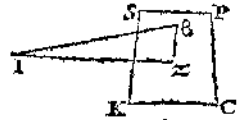
PRIMVM itaque oſtendendum eſt, angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſint.) Eſt autem IK, maior quam IY; [b] erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis ſit oſtenſæ ipſi SP, erit quoque KC, maior quam SP; Ac propterea arcus CK, maior erit arcu SP, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. [c] Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque adeo angulus CZK, obtuſus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ 27. lib. 3.



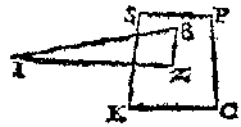
[b] 14 quin.

[c] 28. tertij

SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius a centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ.



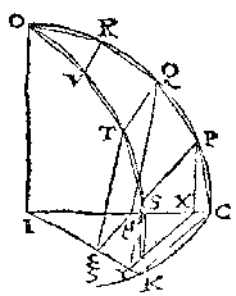
Quoniam



[a] 19. primi

Quoniã ergo angulus IZβ, *rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11.* [a] *Erit latus illi oppoſitum* Iβ, *maius latere* IZ, *quod minori angulo* IβZ, *nimirũ acuto, opponitur; Ac propterea punctum* β, *longius a centro* I, *diſtat, quam punctum* Z. *Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.*

TERTIO, ac vltimo probandum eſt, rectam ZC, *maiorem eſſe recta* βP. *Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam* PS, *maiorem eſſe recta* QT. *Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris* IC, IO, *& quadrantibus* OC, OK, *&c. Demittantur deinde ex* Q, *&* T, *ad planum circuli* AB, CD, *in quo eſt triangulum* ICK, *perpendiculares* Qμ, Tξ, [b] *quæ in communes ſectiones* IC, IK, *cadent,* [c] *eruntque inter ſe ſe parallelæ, vt de rectis* PX, SY, *dictum eſt. Quod ſi adiungantur rectæ* μξ, *erunt* QT, μξ, *parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe & æquales* PS, XY.



[b] 38. vnde.
[c] 6. vnde.

[d] *Quia vero* μξ, *ipſi* CK, *parallela eſt; quod latera* IC, IK, *protractæ ſint ſectæ in* μ, *&* ξ, *veluti diximus de recta* XY; [e] *erunt quoque* μξ, XY, *parallelæ. Quare erit, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. vt* IY, *ad* YX, *ita* Iξ, *ad* ξμ: *Eſt autem* IY, *maior quam* Iξ. *Igitur &* YX, *maior erit quam* ξμ; *Ac proinde &* PS, *qua æqualis eſt ipſi* XY, *maior erit quam* QT, *qua æqualis eſt ipſis* ξμ.

[d] 2. ſexti
[e] 30. primi

HOC ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris Z, β, *circa quadrilatera* CKSP, PSTQ, *circuli, egredianturque e centris rectæ* ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. *Si igitur* ZC, *non creditur maior, quam* βP, *erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera* ZK, ZC, *æqualia*

lia ponuntur lateribus β S, β P, *& baſis* K C, *maior eſt baſe* P S; [a] *erit angulus* K Z C, *maior angulo* S β P. *Eadem ratione maior erit angulus* S Z P, *angulo* T β Q. *At quoniam baſes* K S, C P, *baſibus* S T, P Q, *ſunt æquales*; [b] *erunt anguli* K Z S, C Z P, *angulis* S β T, P β Q, *æquales. Igitur quatuor anguli ad* Z, *maiores erunt quatuor angulis ad* β: *Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta* Z C, *rectæ* β P.

[a] 25. primi

[b] 8. primi

S I T deinde Z C, *minor, quam* β P. *Et abſcindantur* β π, β ρ, β ω, β φ, *ipſis* Z C, Z K, Z S, Z P, *æquales, connectanturque rectæ* π ρ, ρ ω, ω φ, φ π, [c] *quæ parallelæ erunt rectis* P S, S T, T Q, Q P, *eo quod rectæ ex centris ſectæ ſint proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit ut* β S, *ad* S P, *ita* β ρ, *ad* ρ π. *Cum ergo* β S, *maior ſit quam* β ρ, [d] *erit &* S P, *maior quam* ρ π. *Eademque ratione maiores erunt* S T, T Q, Q P, *rectis* ρ ω, ω φ, φ π; *Ac propterea cum* P S, *minor ſit, quam* C K, *&* S T, P Q, *æquales rectis* K S, C P; *&* T Q, *minor quam* P S, *erunt rectæ* π ρ, ρ ω, ω φ, φ π, *minores rectis* C K, K S, S P, P C. *Quare cum rectæ* β π, β ρ, β ω, β φ, *rectis* Z C, Z K, Z S, Z P, *ſint æquales;* [e] *erunt anguli ad* Z, *maiores angulis ad* β: *Sunt autem & æquales. quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta* Z C, *quam* β P: *Sed neque æqualis eſt oſtenſa; Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.*

[c] 2. ſexti

[d] 14. quin.

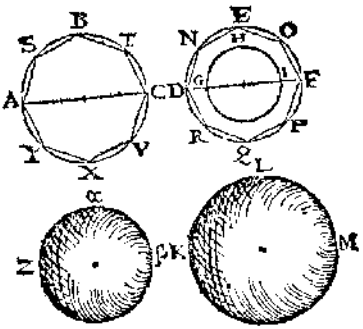
[e] 25. primi

THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHAERAE inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

SINT

SINT duæ ſphæræ A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. *Dico* ſphæram A B C, ad ſphæram D E F, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra A B C, aliam ſphæram G H I, minorem, vel K L M, maiorem, quã D E F, triplicatam proportionem diametri A C, ad diametrum D F. Habeat primũ ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, minorem ſphæram D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; intelligaturque ſphæra G H I, concentrica ſphæræ D E F. [a] Inſcribatur in ſphæra maiori D E F, polyedrum D N E O F P Q R, non tangens minorem ſphæram G H I; Atque huic ſimile polyedrum A S B T C V X Y, inſcribatur in ſphæra A B C. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ A B C, ad ſphæram G H I, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F: Eſt autem, per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R. Quare cum ſphæra A B C, maior ſit polyedro A S B T C V X Y, [b] erit & ſphæra G H I, maior polyedro D N E O F P Q R, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, minorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F.



[a] 17. duod.

[b] 14. quin.

HA-

HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, maior, quam ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaq; inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

HINC

COROLLARIVM.

HINC fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

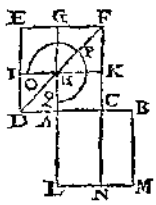
Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

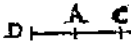
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumẽs dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta *A B*, in *C*, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum *A C*. Producta autem *B A*, ad *D*, ſit *A D*, dimidia totius *A B*. Dico quadratum rectæ *C D*, quintuplum eſſe quadrati rectæ *A D*. Deſcribatur enim ſuper *C D*, quadratum *C E*, in quo ducta diametro *D F*, ducatur *A G*, ipſi *D E*, parallela, ſecans diametrum in *H*, puncto, per quod ducatur *I K*, parallela ipſi *C D*. Producta deinde *G A*, perficiatur quadratum *A M*, protrahaturque *F C*, ad *N*. eruntque

ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulũ CM, ſub AB, CB, æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB; & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: [c] Eſt autẽ vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. [d] Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum ſit quadrati AI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ AD; erit & gnomon OPQ, eiuſdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, ſi gnomoni OPQ, addatur ipſum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



ALITER. Ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum eſt quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Eſt autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis ſub AB, AC, & ſub AB, BC, comprehenſis; Et rurſus, quod ſub AB, AC, æquale eſt ei, quod ſub AD, AC, bis; (ſicut enim AB, ipſius AD, eſt dupla, [f] ita quoque erit rectangulum ſub AB, AC, rectanguli ſub AD, AC, duplum, cum vtriuſq; rectanguli eadem ſit altitudo AC. Ac propterea rectangulum ſub AD, AC, bis ſumptum æquale erit rectangulo ſub AB, AC.) [g] Quod vero ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ AC, cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiuſdem rectæ AD. [h] Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale ſit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis; Erit & quadratum



rectæ

[a] 3. defin. ſexti. [b] 17. ſexti. [c] 1. ſexti [d] 43. primi [e] 2. ſecundi [f] 1 ſexti. [g] 17. ſexti [h] 4. ſecun.

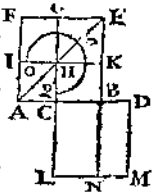
rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea suijpsius segmenti quintuplum posit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, positque quintuplum segmenti AC; sumatur autē ipsius AC, dupla CD, quę, vt post ostēdemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquā partem prioris lineę. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplū ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratū CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdē quadrati CI, quadruplus: Est autē & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. [a] Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectāgulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: [b] Est autem CK, ipsi HF, æquale. Aequale igitur est LB,



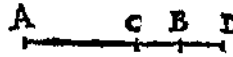
[a] 1. sexti

[b] 43. primi

ipſis C K, H F; Ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo ſunt tres rectæ C D, C B, B D; eſtque rectangulum B M, ſub C D, B D, comprehenſum æquale ipſi K G, quadrato rectæ C B; [a] Erit vt C D, ad C B, ita C B, ad B D. Quam ob rem, ex definitione, recta C D, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum C B.

[a] 17. ſexti

ALITER. Quoniam quadratum rectę A B, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C; [b] eſtque quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, A C, vna cum rectangulo ſub A C, C B, bis; Erunt & quadrata rectarum C B, A C, una cum rectangulo ſub A C, C B, bis, quintuplum quadrati rectę A C. Dempto igitur quadrato rectę A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectę A C: Eſt autem & quadratum rectę C D, eiuſdem quadrati rectę A C, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum rectę C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ C D. Cum ergo rectangulum ſub A C, C B, bis, æquale ſit rectangulo ſub C D, C B; (ſicut enim recta C D, dupla eſt rectæ A C, [c] ita quoque duplum erit rectangulum ſub C D, C B, rectanguli ſub AC, CB; cum vtriuſque rectãguli eadem ſit altitudo C B; Ac propterea rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [d] At quadratum rectæ CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD. Igitur quadratũ rectæ CB, & rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectãgulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectãgulo ſub CD, BD; [e] ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplũ poſsit, &c. Quod erat demonſtrandum.



[b] 4 ſecundi

[c] 1. ſexti

[d] 2. ſecundi

[e] 17. ſexti

LEM

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario, quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD,. cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum. 4 ſecundi

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum *A C*, bifariam diuidatur in D. Dico quadratũ rectę BD, quintuplũ eſſe quadrati rectæ C D. Deſcribatur. n. ſuper AB, quadratum A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducantur ipſis A F, B E, parallelæ CG, DH, ſecantes diametrum in *L*, *K*, punctis, per quæ agantur ipſis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ ſecẽt rectas CG, DH, in P, Q. Erunt q; ex coroll propoſ. 4. lib 2. LG, PQ, *D O*, quadrata rectarum *AC*, CD, BD. Quoniam igitur recta A C, dupla eſt rectæ C D, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum LG, quadruplum quadrati P Q. Eſt autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum ſit vt *AB*, ad AC, ita AC, ad CB, [a] erit rectangulum ſub A B, C B, nempe CE, æquale quadrato rectæ *AC*, nimirum ipſi LG.) Igitur & CE, quadruplũ erit quadrati PQ. Quia vero æqualia ſunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earũ latera H *K*, *I*Q, æqualia; [b] ac proinde rectæ EO, OM, ipſis oppoſitæ æquales erunt. [c] Quare rectangula IO, Q E, æqualia erunt: [d] Eſt autem I O, ipſi I *D*, æquale. Ergo & Q E, eidem I *D*, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, oſtenſum ſit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon RST, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus: *Ac* propterea addito quadrato P Q, erit quadratum *D* O, ex recta BD, quintuplum quadrati P Q. ex recta *C* D.



[a] 17. *ſexti*

[b] 34. *primi*
[c] 36. *primi*
[d] 43. *primi*

ALITER. Cum A *C*, diuiſa ſit bifariam in *D*, & ei addita CB; [e] erit rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato rectę CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectanguium ſub *AB*, BC, quadruplum eſt quadrati rectæ CD; (Nam cum ſit, vt AB, ad *AC*, ita AC, ad *CB*; [f] erit rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato rectę *A C*: quod cum, ex ſcholio propoſ. 4. lib 2. quadruplũ ſit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum ſub AB, BC, quadruplum eiuſdem quadrati rectę C D.) *Ac* propterea rectangulum ſub *A* B, B C, vna cum quadrato rectæ *C D*,



[e] 6 *ſecundi*

[f] 17. *ſexti*.

CD, quintuplum quadrati rectę CD. Igitur & quadratũ rectę BD, quintuplum erit quadrati rectę CD. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, minus ſegmẽtum aſſumens dimidium maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſsit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB, diuiſa inæqualiter in C, cuius maius ſegmentum AC, bifariam ſectum ſit in D; ſitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuiſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propoſ. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt autem & gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ, ex rectæ CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus.) Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG: At gnomoni RST, æquale eſt rectangulum CE, vt ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idẽ rectangulum CE, ſub AB, BC, comprehenſum: [a] *At proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.* [a] 17. ſexti

ALITER. Cum AC, diuiſa ſit bifariam in D, & ei

a 6. secundi addita CB; a erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex rectæ lineæ BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem eiusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est

b 17. sexti rectangulū sub AB, BC. b Quamobrē erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde secta AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

5. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundnm extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; segmentū maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratū AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntq; CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB;



c 17. sexti erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon

KLM.

KLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectę BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atq; adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. [b] Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarũ AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

[a] 17. sexti

[b] 7. secundi

SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

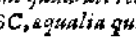
SI recta linea inæqualiter secetur, fitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectã AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac propterea cum æqualia sint AH, & CD; erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC, [c] erit vt AB,

[c] 17. sexti

vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.

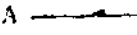
ALITER. Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla [a] *sint quadrati rectæ AC;* [a] *Sint vero quadrata rectarũ AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectãgulo sub AB, BC, bis: erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplũ quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectãgulum sub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC; Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC.* [b] *Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*



EX Francisco Maurolyco demonstratimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod a maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumẽs minus segmentum possit quintuplũ eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui adiatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmẽto. [c] *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC:* [d] *Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, qua-*



[a] 7. secun.

[b] 17. sexti.

[c] 8. secundi

[d] 17. sexti.

quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum ſub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiuſdem quadrati ex AC, quintuplum erit. quod eſt propoſitum.

SIT deinde recta AB, ſecta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis, ſitque quadratũ ex AD, quadrati ex AC, maiori ſegmento quintuplum. Dico AB, in C, ſectã eſſe extrema ac media ratione. Quoniam. n. [a] *quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum ſub AC, BC, quater, vna cũ quadrato ex AC, quintuplũ quadrati ex AC; ac propterea rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplũ quadrati ex AC: hoc eſt, rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato ex AC.* [b] *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

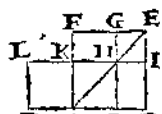
[a] *8. ſecundi*

[b] *17 ſexti.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. 4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecũdum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ a principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori ſegmento AC. Dico rectam BD, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeque maius ſegmentum AB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipſi BE, parallela CG, ſecans diametrum



metrum in H, puncto, per quod agatur ipſi *B*D, parallela IK, & ex D, ducatur ipſi AF, parallela *D*L, occurrens ipſi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. *C K*, I G, quadrata rectarum A C, B*C*. Quoniam igitur eſt vt AB, ad A C, ita A *C*, ad *C B*; [a] Erit rectangulum IF, contentum ſub AB, BC, æquale quadrato *C* K, rectæ AC. [b] Eſt autem *C* K, ipſi A L, æquale. Igitur IF, æquale erit ipſi A L; additoque communi B K, erit rectangulum BL, contentum ſub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ A B; [c] Ac proinde erit vt BD, ad A*B*, ita AB, ad D*A*. Quare BD, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum A B.

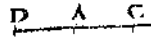


[a] *17. ſexti.*

[b] *36. primi*

[c] *17. ſexti*

ALITER. Quoniam eſt vt A *B*, ad A *C*, hoc eſt, ad A D, ita AC, ad*C*B; Erit conuertendo vt D A, ad *A*B, ita B*C*, ad CA; & componendo vt DB, ad A B, ita A B, ad *C*A, hoc eſt, ad AD. Secta igitur eſt *B*D, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmẽtum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RE-

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum AB, minus autem ſegmẽtum AD; & ex maiori ſegmeto AB, detrahatur recta AC, æqua'is minori ſegmento AD. Dico maius ſegmentum AB, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, et maius ſegmẽtum eſſe rectam AC, quæ æqualis eſt minori ſegmento AD. Facta enim prioris figura conſtructione, cũ ſit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; erit rectangulum EL, contentum ſub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato cõmuni BK, erit AL, æquale ipſi IF; [b] Eſt autem AL, ipſi CK, æquale. Æquale igitur eſt IF, contentum ſub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC; [c] Proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, recta eſt in C, extrema ac media ratione, cuius ſegmentum maius eſt AC, minus vero ſegmentum recta CB. Quod eſt propoſitum.

[a] 17. ſexti.

[b] 36. primi

[c] 17. ſexti.

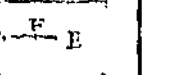
ALITER. Quoniam eſt vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc eſt, ad AC, detractam ex AB; [d] erit quoque ita AD, reliqua ipſius BD, hoc eſt, AC, ad CB, reliquam ipſius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc eſt, vt AB, ad AC; Ac propterea diuiſa erit AB, in C, extrema & media ratione.

[d] 19. quin.

RVRSVS & hoc demonſtrabimus, quod ſequitur.

SI linea ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti: Erit quoque dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, ſitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris ſegmenti AC. Dico DE, in F, ſecari extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentum eſſe DF. Cum enim ſit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique ſit proportio dupla; [e] erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam:



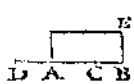
[e] 19. quin.

[a] 15.quin. *tam; Ac proinde & CB, dupla erit ipſius FE. Quoniam vero eſt, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Eſt autem ex defin. linea ſecta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, ſecta erit in F, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; Vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione Dico vtrumque ſegmentum AC, CB, eſſe lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori ſegmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [b] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum eſt quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [c] Quare commẽſurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipſæ rectæ CD, AD, commenſurabiles quoque exiſtent, ſaltem potentia: Eſt autem AD, Rationalis, cum ſit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarũ CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ CD, AD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex CD, Rationali detrahatur



[b] 1.tertij dec.

[c] 6. deci.

[d] 9.decimi

tur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; [a] erit reliqua AC, Irrationalis, quę appellatur Apotome. [a] 74. dec.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AE, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum AE, equale quadrato rectę AC. Quā ob rem quadratum Apotomę AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, [c] facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi equalem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 17. sext. [c] 98. dec.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. [d] Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum; [e] ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erūt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde [d] 3. tertij dec. [e] 6. dec.

$$A_{\frac{DC}{}}\!\!\!

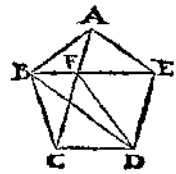
Rationali detrahatur CD, *Rationalis potentia tantum commensurabilis, erit reliqua* C B, *Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

[c] 74. deci.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui nõ deinceps sint, æquales fuerint : AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono equilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, equales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse equiangulum. Subtendantur enim dictis angulis equalibus rectæ BE, AC, BD, & ex puncto F, vbi se interfecant rectæ BE, AC, rectæ ducatur FD.



[a] Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli *ABE*, equalia sunt lateribus C*B*, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti equales, [b] ex hypothesi; erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, equales; [c] Sunt autẽ & anguli *BED*, BDE, equales, cum equalia sint ostensa latera *BE*, BD; Toti igitur anguli AED CDE, equales erunt. Rursus quia latera AB, AE, trianguli ABE, equalia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoq; ipsis contenti equales, ex hypothesi: [d] Erit & basis BE, basi AC, equalis, & anguli ABE, AEB, angulis B*A*C, BCA, equales. Cum ergo equales sint anguli *ABE*, BAC, trianguli ABF; [e] erunt quoque latera BF, AF, equalia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis equalibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, equales. Itaque cum latera FE, E*D*, trianguli FED, equalia sint lateribus FC, C*D*, triãguli FCD; & basis communis F*D*; [f] erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, F C D, equales: Sunt autem & anguli

A F B,

[a] 4. primi
[b] 4. primi
[c] 5. primi
[d] 4. primi
[e] 6. primi
[f] 8. primi

AEB, BCA, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

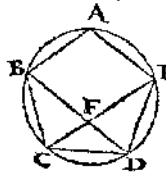
SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, triãguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi; [a] Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [b] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED. CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 4. primi.
[b] 5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 11.

SI pentagoni æquilateri, & æquiãguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

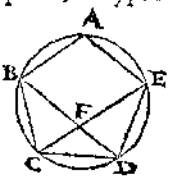
SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, ſe mutuo ſecantes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maioraque earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pẽtagoni. [c] De-



[c] 14. quar.

[a] *28 tertij.* [b] *4. primi* [c] *32. primi* [d] *33. sexti.* [e] *6. primi* [f] *27. tertij.* [g] *32. primi* [h] *4. sexti.* [i] *22. tertij.* [k] *28. primi*

scripto enim circulo circa pentagonum, erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: Est autem & angulus BCE, eiusdē anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt; Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. Quoniā autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistētes æquales sunt; erunt duo anD B C, C D B, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD; Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelā esse opposito lateri: hoc est, BD, *parallelam esse lateri* AE; *et* CE, *lateri* AE. *Descripto enim circulo circa pentagonum,* Quoniam *tam duo anguli* A, & BCE, *quam duo* ABC, AEC, *duobus rectis æquales sunt: Sunt autem* A, & ABC, *inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli* BCE, AEC, *æquales. Cum ergo* A, & BCE, *duobus sint rectis æquales; erunt etiā* A, & AEC, *duobus rectis æquales:* ac *proinde* AB, CE, *parallelæ erunt. Quod est propositū.*

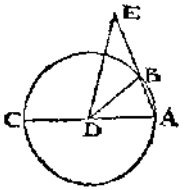
THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

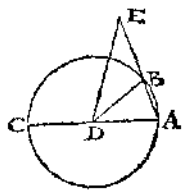
SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, cõponantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.

IN circulo ABC, ſit latus decagoni AB, cui in rectũ addatur BE, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidẽ circulo inſcripti. Dico EA, rectã ſectam eſſe in B extrema ac media ratione maiuſq; ſegmentũ eſſe EB, latus hexagoni. Ducatur. n. ex A, per centrũ D, diameter AC, coniungaturq; rectę DB, DE. Quoniam igitur AE, arcus, eſt decima pars totius periphærię circuli; continebit arcus ſemicirculi arcum AB, quinquies; Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rurſus quia latera BD, BE, ſunt æqualia, nempe latera hexagoni; (eſt enim BE, latus hexagoni ſemidiametro BD, æquale, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4.) erũt & anguli BDE, BED, æquales: [b] quibus cum æqualis ſit externus ABD; [c] erit angulus ABD, duplus anguli BED: [d] Eſt autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, ſimul quadruplierunt anguli BED. [e] Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis ſit externus BDC; erit angulus BDC, quadruplus eiuſdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, oſtenſus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales ſunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales ſint



[a] 33. ſexti.
[b] 5. primi
[c] 32. primi
[d] 5. primi
[e] 32. primi

duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD; [a] erũt trian gula *A*DE, ABD, æquiangula. [b] Igitur erit vt *B A*, ad *A*D, hoc eſt, ad EB, ipſi AD, æqua lem, ita AD, hoc eſt, EB, ſibi æqua lis ad BA; Atq; idcirco recta EA, ſecta eſt in B, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum EB, latus hexagoni. Itaque ſi hexa goni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componan tur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum,



[a] 32. primi.
[b] 4. ſexti.

SCHOLIVM.

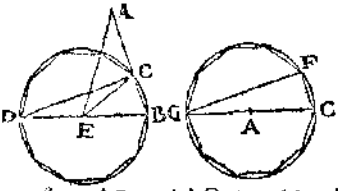
QVIA vero demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum linea diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema et media ratione, eiuſque ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile tum Campano demonſtrabimus. Videlicet.

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decago ni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fu rit latus decagoni alicuius circuli; Erit ma ius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione ſitque,

ſitque primũ AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus segmentum CB, eſſe eiuſdẽ circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulũ cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur



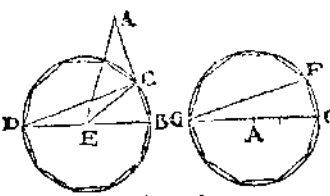
rectæ EA, EC. Quia ergo eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, [a] ideoqꝫ e triangula ABE, EEC, æquiangula erunt, cũ habeant latera circa communem angulum B, proportionalia; eritque angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni; [b] erunt anguli CAE CEA, æquales; [c] quibus cum æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A: [d] Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdẽ anguli A. [e] Cum ergo anguli BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus. [f] Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.

[a] 6. ſexti.
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.
[d] 5. primi.
[e] 32. primi
[f] 33. ſexti.

SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD, ducaturque diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritq; ex coroll. propoſ 14. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniã igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterũ & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD,

decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; *eruntque latera* BC, CF, *inter ſe æqualia. Quoniam vero, ſi connectantur rectæ* CD, FG, *anguli* CDB, FGC, *ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilibus* BC, CF, *nempe decimis partibus peripheriarum; & ſunt quoque anguli* BCD, CFG, *in ſemicirculis æquales,* [a] *ni mirum rectis:* [b] *Erunt quoque latera* BD, CG, *inter ſe æqualia. Quam ob rem cũ iametri* BD, CG, *ſint æquales, æquales quoque erunt circuli* BCD, CFG. *Ac proinde, cũ recta* AC, *ſit latus hexagoni circuli* CFG, *erit quoq; eadem recta* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Quod eſt propoſitum.*

[a] 31. tertij.
[b] 26. primi.



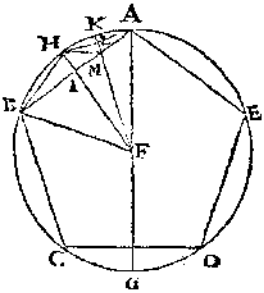
10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterũ deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, deſcriptum ſit pentagonum æquilaterum. *Dico* quadratum lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vna cũ quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur n. diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, ſecans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quũ igitur arcus AH, BH, æquales ſunt; [c] erũt & anguli ipſis inſiſtentes AFH, BFH, æquales. Quare cum

[c] 27. tertij.

cum latera *AF*, *FI*, trianguli *AFI*, æqualia ſint lateribus *BF*, *FI*, trianguli *BFI*, & anguli ipſis contenti æquales quoque; [a] erunt & baſes *AI*, *BI*, æquales, & anguli *AIF*, *BIF*, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ *AL*, *HL*, & anguli *ALF*, *HLF*, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualibus *ABCG*, *AEDG*, demantur æquales arcus *ABC*, *AED*; relinquentur arcus *CG*, *DG*, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus *CG*, dimidiũ arcus *CD*. Eſt autẽ & arcus *AH*, dimidium dimidium arcus *AB*. Igitur cum arcus *AB*, *CD*, æquales ſint; erunt quoque eorum dimidij arcus *CG*, *AH*, æquales; Ac proinde cum arcus *AH*, duplus ſit arcus *HK*, erit & arcus *CG*, duplus eiuſdem arcus *HK*. Eodem modo, quia arcus *AB*, *BC*, æquales ſunt, & eſt arcus *AB*, duplus arcus *BH*, erit etiã arcus *BC*, eiuſdem arcus *BH*, duplus. Quare arcus *CG*, *BC*, æquemultiplices ſunt, nempe dupli, arcuum *HK*, *BH*; [b] Ac propterea totus arcus *EG*, duplus quoq; erit totius arcus *BK*; [c] & idcirco angulus quoque *BFG*, duplus anguli *BFK*: [d] Sed quia idem angulus *BFG*, ad centrum duplus eſt quoque anguli *FAB*; erunt idcirco anguli *BFM*, *FAB*, æquales; [e] Ac propterea triangula *ABF*, *FBM*, cum habeant angulos *FAB*, *MFB*, æquales, & angulum *ABF*, communem, æquiangula erunt. [f] Quocirca erit vt *AB*, ad *BF*, ita *BF*, ad *BM*; [g] ideoque rectangulum ſub *AB*, *BM*, æquale erit quadrato rectæ *BF*.



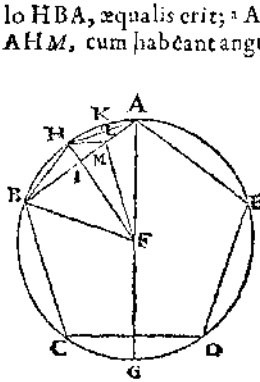
RVRSVS quia latera *AL*, *LM*, trianguli *ALM*, æqualia ſunt lateribus *HL*, *LM*, triãguli *HLM*, & anguli quoq; ipſis contenti æquales, nẽpe recti: [h] erunt & baſes *AM*, *HM*, & anguli *LAM*, *LHM*, æquales: [i] Eſt autẽ angulus *LAM*, angulo *HBA*, æqualis, quod & latera *HA*, *HB*, æqualia ſint. Igitur & angulus *LHM*, eidem angu-

[a] 4. primi.

[b] 1. quin.
[c] 33. ſexti
[d] 20. tertij.
[e] 32. primi
[f] 4. ſexti
[g] 17. ſexti

[h] 4. primi.
[i] 5. primi.

lo HBA, æqualis erit; [a] Ac propterea triangula A B H, A H M, cum habeant angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, communem, æquiangula erũt. [b] Quam obrẽ erit vt A B, ad A H, ita A H, ad A M; [c] ideoque rectãgulum ſub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Oſtẽſum eſt autem & rectangulum ſub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula ſub A B, B M, & ſub A B, A M, ſimul æqualia ſunt quadratis rectarũ B F, A H: [d] At vero rectangula ſub A B, B M, & ſub A B, A M, æqualia ſunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarum B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 32. primi

b 4. ſexti.

c 17. ſexti.

d 2. ſecun.

COROLLARIVM I.

HINC ſequitur, lineam rectam. quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam F H, propterea quod arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris eſt demonſtratio.

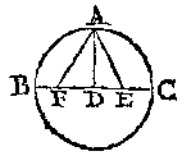
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pẽtagoni ductam diuidere & arcũ, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitum ſubtẽdit, & la-

& latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratione erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ deſcribitur, eiuſque demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc a nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuiſa ſemidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF, adiungaturque recta AF. Dico rectam AF, eſſe latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, ſecta ſit bifariam in E, eique addita DF; [a] *erit rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipſi EF, eſt æqualis.* [b] *Eſt autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectãgulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc eſt, quadrato rectæ CD.* [c] *Quamobrem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF; propterea quæ recta CF, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius ſegmentum CD, ſit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum DF, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib.* [d] *Rurſus*



[a] *6. ſecundi*

[b] *47. primi*

[c] *17. ſexti*

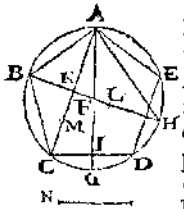
[d] *10. tertiidecimi*

ſus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vna cum quadrato lateris decagoni DF, æquale eſt quadratum lateris
[a] *47. primi* *pentagoni eiuſdem circuli;* [a] *Eſt autem eiſdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF; ac propterea rectæ AF, lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitũ.*

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, eſſe lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, ſecetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, ſecet diametrum BH, in K. Abſcindatur quoque ex ſemidiametro FH, quarta eius pars FL; Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoq; FL, BF, illi commenſurabiles, cum ſint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, compoſita,
[b] *16. decimi* [b] cum ſit commenſurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.



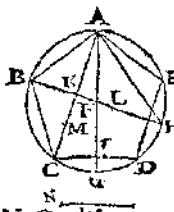
RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta ſecat AC, bifariam in B; ſecabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ. Triangula ergo ACI, AFK, cũ habeant angulos AIC,
[c] *32. primi* AKF, rectos, & angulum CAI, communẽ, [c] æquiãgula inter

inter ſe erunt. [a] Quam obrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA. [b] Vt autem CA, ad AF, ita eſt CM, quarta pars ipſius CA, ad FL, quartam partem ipſius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc eſt, vt CD, dupla ipſius CI, ad CK, duplam ipſius CM, ita FK, ad, FL; Atque componendo, vt CD, CK, ſimul, ad CK, ita FK, FL, ſimul, nimirum recta KL, ad FL; [c] Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compoſitæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratũ rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia vero ſi AC, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD, [d] maius eius ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi CD; [e] Erit quadratum rectæ compoſitę ex CD, maiori ſegmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL; [f] ideoque quadratum rectæ KL, commenſurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autem FL, oſtenſa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

[a] 4. ſexti.
[b] 15. quin.
[c] 22. ſexti
[d] 8. tertijde cimi.
[e] 1. tertijde cimi
[f] 6. decimi

DEINDE quia qualium partium 4. eſt BF, talium 1. eſt FL; ac propterea qualium 5. eſt BL, talium 1. eſt FL; ac propterea qualium 5. eſt BL, talium 1. eſt FL; erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratũ rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. [g] habent enim quadrata proportionẽ laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. eſt quadratũ rectæ FL, taliũ 5. oſtenſum eſt quadratũ rectæ KL. Qualiũ igitur 25. eſt quadratũ rectæ BL, talium 5. eſt quadratũ rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ſut patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [h] Erunt rectæ BL, KL, longitudine incõmenſurabiles; ideoq;, cũ oſtenſæ ſint Rationales, erunt Rõnales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex Rõnali BL,

[g] 20. ſexti
[h] 9. deci.



BL, dematur Rationalis KL, potẽtia tantum commenſurabilis; [a] erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congruẽs erit KL.

IAM vero recta BL, poſsit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum KL, & N; Qualiũ autem partiũ 5. fuit quadratũ rectæ BL, taliũ 1. fuit quadratũ rectæ KL; Erit reliquum quadratũ rectę N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratũ rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerum. [b] Quare commẽ ſurabilia erunt; propterea quæ rectæ ipſæ BL, & N, commenſurabiles, ſaltem potentia: Eſt autem BL, oſtenſa Rationalis, Rationalis igitur erit & N. Quia uero quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. quod proportio eorum lt, que 5. ad 4.) [c] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis longitudine ſit commẽſurabilis Rationali BH: (Qualium enim partium 8. eſt BH, talium 5. eſt BL,) poſsitque plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vt oſtenſum eſt; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

POSTREMO quia recta AB, eſt media proportionalis inter BH, BK, (ex coroll propoſ. 8. lib. 6.) quod triangulum ABH, [d] habeat angulum BAH, rectum, a quo ducta eſt AK, ad baſin perpendicularis; [e] erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo ſub BH, BK. Quocirca cum ſuperficiem cõtentam ſub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, poſsit recta linea AB, [f] Erit AB, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

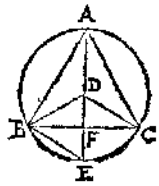
[a] 74. deci.
[b] 6. decimi
[c] 9. decimi
[d] 8. tertij.
[e] 17. ſexti
[f] 94. deci.

8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum

rum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. *Dico* quadratum lateris *AB*, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet, ex coroll. 2. propoſ. 10. huius l. b. arcum B C, bifariam in E. & rectam B C, biſariã quoque & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres ſextas partes totius circuli: arcus vero AB, cum ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus *BE*, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta *BE*, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro DE, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale eſt quadratis rectarum AB, *BE*, [b] quod angulus A *BE*, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ *BE*, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2 quod linea AE, dupla ſit lineæ BE; erunt quadrata rectarum *AB*, *BE*, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ *B E*; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum *AB*, *BE*, talium partium 1. erit quadratum rectæ *BE*; & idcir co talium partium 3. erit quadratum rectæ A *B*. Quare quadratum rectæ *AB*, triplum eſt quadrati rectæ *BE*, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

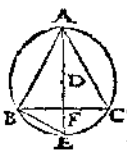


[a] *47. primi*

[b] *31. tertij.*

SE-

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli aquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cum latus AB, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri AD; poſito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadruplum eſt quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. vt eſt AE, ad AB, ita ſe habet AB, ad AF; erit quoque latus triãguli aquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad baſim demiſſa potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi poteſt, ſemidiametrum DE, bifariam ſecari in F, a latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplum ſit quadrati rectæ BE; ſi ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. [a] *Eſt autem quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ AB, quadruplum ſit quadrati rectæ BF, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt enim AB, dupla ipſius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE, hoc eſt, quadra-*

[a] 47. primi

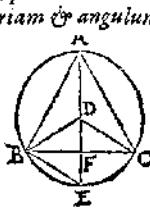
quadratum rectæ DE, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Cum igitur, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ DE, quadruplum ſit quadrati dimidiæ lineæ ipſius DE; erit FE, dimidia ipſius DE. Quocirca DE, bifariam ſecatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſsim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito.

IN circulo ABC, *cuius centrum* D, *triangulum æquilaterum inſcribatur* ABC. *Dico rectam* AE, *per centrum* D, *ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum* BAC, *& latus* BC, *necnon ad angulos rectos*; *Semidiametrum quoque* DE, *ſecari a latere* BC, *bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis* BD, CD, BE; *cũ latera* AB, AD, *æqualia ſint lateribus* AC, AD, *trianguli* CAD; *& baſes* BD, CD, *æquales quoq;* : [a] *Erunt anguli* BAD, CAD, *æquales. Quod eſt primum.*



[a] 8. primi

DEINDE, *cum latera* AB, AF, *trianguli* BAF, *æqualia ſint lateribus* AC, AF, *trianguli* CAF, *& anguli ipſis contenti æquales oſtenſi:* [b] *Erunt & baſes* BF, CF, *& anguli ad* F, *æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum.*

[b] 4. primi

POSTREMO, *cum anguli* BAE, CAE, *demonſtrati ſint eſſe æquales;* [c] *erunt & arcus* BE, CE, *æquales. Quare cum* BEC, *arcus ſit tertia pars circumferentiæ, erit* BE, *ſexta*

[c] 26. tertij

pars

pars eiuſdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque ſemidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. prop. 15. lib. 4. [2] *Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli EDF, BFD, trianguli DBF, æquales ſunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune;* [3] *Erunt & latera DF, EF, æqualia.*

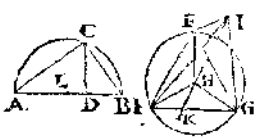
[2] *5. primi*

[3] *26. primi*

13. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM conſtituere; & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

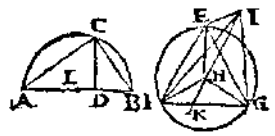
SIT datę ſphæræ diameter *AB*, circa quã ſemicirculus deſcribatur ABC; & ex *AB*, auferatur tertia pars BD, vt ſit AD, ipſius *DB*, dupla; at vero *AB*, eiuſdem DB, tripla; & ipſius AD, ſeſquialtera. Deinde ducta *DC*, perpendiculari ad AB, cũnectantur rectę AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis ſit ipſi DC, deſcribatur circulus *EFG*, cuius centrũ H, in quo triangulũ æquilaterum inſcribatur EFG, adiũganturq; rectæ HF, HG, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi DC, cum æquales ſint ipſi HE, ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpẽdicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex *I*, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis FEC, IEF, *IFG*, IEG, eſſe Pyramidẽ, ſiue Tetraedrum. Quoniam.n. latera *DA*, DC, trianguli A*D*C, æqualia ſunt lateribus HI, HE, trianguli IH*E*, & anguli ipſis contenti, recti, ex hypotheſi, & 3. defin. lib 11. erit baſis *AC*, baſi IE, æqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam AC, æqualem eſſe rectis IF, IG. Rurſus quia tres lineæ A D, D C, D *B*, proportionales



[4] *4. primi*

ſunt

ſunt ex coroll propoſ.8.lib.6.erit,ex coroll. propoſ.20. lib.6. vt AD, ad DB, ita quadratum rectæ *A* D, ad quadratum rectæ *D* C; & componendo, vt *A*B, ad *D*B, ita quadrata rectarum *A*D, DC, ſimul ad quadratum rectæ DC: Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectę AB Igitur erit quoque vt AB. ad DB, ita quadratum rectæ A C, ad quadratũ rectæ DC; Ac proinde cum AB, ſit ipſius D B, tripla, erit quoque quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis ſit ipſi DC: Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ EF, æquale erit; & propterea recta AC, rectæ EF Quare cum recta AC, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis IE, IF, IG; erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter *A* B; & diametrum ſphæræ A B, potentia ſeſquialteram eſſe lateris EF, vel AC.



* 47. primi

b 12. tertij dec.

EXTENDATVR perpendicularis IH, vſque ad *K*, vt ſit H*K*, ipſi DB, & tota I*K*, toti *A*B, æqualis. Quia ergo tres rectæ *A*D, DC, *D*B, proportionales ſunt, quibus æquales exiſtunt tres IH, H*E*, H*K*; erunt quoque I H, *HE*, HK, proportionales. Quare cũ HE, ſit ad I*K*, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK, ſemicirculus circa I K, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HE, tranſibit per E, vt mox oſtendetur; Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam I*K*, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HF, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem I*K*, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HG, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cũ per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphęra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter

meter IK, æqualis ponatur diametro *AB*, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

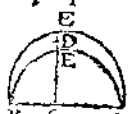
QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt *AB*, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, taliũ 2. ſit AD. Igitur & quadratũ rectę *AB*, ſeſquialterum erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphęrę, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis; perſpicuũ eſt, diametrũ ſphęrę potẽtia ſeſquialterã eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo cõſtituimus, & data ſphęra cõplexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectã deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, &*



a 17. ſexti

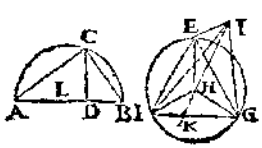
ipſa

ipſæ rectæ C D, C E, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdū. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.

HINC manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa I K, in plano rectanguli I K, HE, tranſire per E, cum HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ AE, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualiū 9 eſt quadratum rectæ AB: At qualium partiū 6. eſt quadratum rectæ EF, taliū partium 2. eſt quadratum rectæ HE,



, quod quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cum proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2. * 13. tertiædecimi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi ACB, eritque L, centrum quoq; ſphæræ. Dico rectā L D, (quæ nimirū ex centro ſphæræ ad baſin E F G, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis ſit ipſi I H, & ideo punctum D,

idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiã partẽ ſemidiametri AL. Quoniã. n. AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nã proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totã ſolliditatem. Hanc vero praxim, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durero non ignobili ſcriptore.



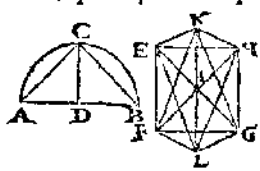
15. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphęra complecti, qua & pyramidem; & demon-

demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque rectæ AC, BC, quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratũ EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuo ſecantes in I eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratũ eſt. Deinde ex I, in vtramq; partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, eſſe octoaedrum, quod quæritur. Quoniã enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus EI IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti recti; ipſe quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EH, GH.) [c] Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis; Eodemq; modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeo æqualia ſint triangulo KEH, cum illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis cõſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.

[a] 4. primi



[b] 8. primi

[c] 4. primi

QVONIAM.n.IE,perpẽdicularis eſt ad KL,ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL;(quod tres rectę KI, IE, IL, ęquales ſint, ideoque eandem habeãt proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL,IE, deſcriptus tranſibit per punctum E,ex lemmate prędcedentis propoſ. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KI, IF incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G,H.Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphęram,quę complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hęc ſphæra æqualis ſit datæ ſphærę, cuius diameter AB;(Nam cum rectæ AC, EF, æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF quadrati rectę EI;Erunt & rectæ AD, EI, hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde ſphærę ipſarum æquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphęra.

[a] 47. primi

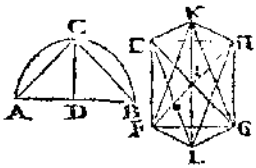
QVIA vero quadratum rectæ AB,[a] æquale eſt quadratis rectarũ AC, BC, quæ æqualia ſunt; erit quadratũ rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cũ AB, ſit diameter ſphęrę, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphærę potentia duplam eſſe lat ris octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphęrę: quales ſunt KL, EG FH, ſecãtes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HF;[b] *recta*

[b] 4. undec.

cta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductũ; [a] Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt; Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus,) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterũ octaedri FK, KH. [b] Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cæteris angulis.



[a] 18. vnde.

[b] 48. primi

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, ſemidiametri IK, IL. cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertiũ

lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. [a] Quoniam igitur diameter sphæræ est potẽtia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. [b] Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partiũ 3. qualiũ 6. est quadratũ diametri sphæræ. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

[a] 13. tertij decimi

[b] 14. tertij decimi

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: [c] Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

[c] 15. vnde.

SCHOLIVM.



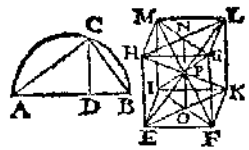
QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totam soliditatem, vt ait Albertus Durerus.

CVBVM

PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

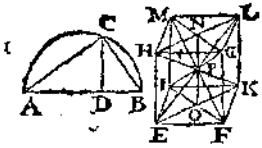
CVBVM conſtituere; & ſphæra cõplecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIT ſphæra, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quã ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cõnectantur rectæ AC, BC. Super rectã EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planũ EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt ipſi EF. [b] Igitur & EF, IK parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammũ eſt EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: [c] Sũt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, [d] cũ ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quod eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM,



[a] 6. vnde.
[b] 33. primi
[c] 34. primi
[d] 24. vnde.
[e] 11. vnde.

GM, *H L*, per quæ ducantur plana *E K L H*, *F I M G*.



[a] *28. vnde.* [a] Quia igitur tam planum *E K L H*, quam *F I M G*, cubũ bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi trãſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdẽ propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana *E K L H*, *F I M G*, rectãgula ſunt, (Cũ. n. *H E*, perpẽdicularis ſit duabus rectis *E I*, *E F*, ob quadrata *E M*, *E K*; [b] perpẽdicularis quoq; erit ad planũ *E K*, ideoq; & ad rectã *E K*, ex defi. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt *H E K*. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano *E K L H*, necnon & anguli in plano *F I M G*. Rectangula ergo ſunt plana *E K L H*, *F I M G*,) & æqualia, quod latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri *E L*, *H K*, *F M*, *G I*, æquales, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 34. lib. 1. Ac proinde & ſemidiametri *P E*, *P L*, *P H*, *P K*; *P F*, *P M*, *P G*, *P I*, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa *E L*, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro *E L*, ſphęrã deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphęrę diametri *A B*, ita demonſtrabitur.

[b] *4. vnde.*

[c] *47. primi* CVM quadratũ rectæ *E K*, æquale ſit quadratis æqualibus rectarũ æqualiũ *E F*, *F K*, ac *p*inde duplũ quadrati rectę *E F*, hoc eſt, quadrati rectæ *K L*: Erũt quadrata rectarum *E K*, *K L*, tripla quadrati rectæ *K L*. [d] Eſt autem quadratis rectarum *E K*, *K L*, æquale quadratum rectæ *E L*, qđ angulus *E K L*, ſit rectus in rectangulo *E K L H*. Igitur & quadratum rectæ *E L*, triplum erit quadrati rectæ *K L*, hoc eſt, quadrati rectæ *F C*: At vero eiuſdem quadrati rectæ *B C*, triplum eſt quadratum rectæ *A B*. (Namtres rectæ *A B*, *B C*, *B D*, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt eſt *A B*, ad *B D*, ita erit quadratũ rectæ *A B*, ad qua-

[d] *47. primi*

ad quadratum rectæ BC. Cum ergo *A* B, ipſius B D, ſit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia ſunt; ac propterea ipſæ rectæ EL, *A*B, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarũ ſphæræ æquales exiſtunt.

QVIA vero oſtenſum eſt quadratum diametri E*I*, triplum eſſe quadrati lateris cubi KL; manifeſtum eſt diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeque mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales ſunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno NMP, inter lineas FI, GM, [b] quæ parallelæ ſunt, cum ſint communes ſectiones planorũ parallelorum EFKI, GHML; [c] & angulus OPF, æqualis eſt oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erũt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.*

* 29. primi.
[b] 16. vnde.
[c] 15. primi

CO-

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. [a] *Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris tetraedri:* [b] *Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrũ ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC, cubi vero BC.* [c] *Perſpicuum autem eſt, diametrũ ſphæræ AB, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus.*

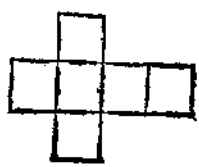
[a] 13. tertij dec.

[b] 15. tertij dec.

[c] 47 primi

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, vt conſtat.



16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras;

guras: & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras cõprehẽdit, diameter AB, circa quã ſemicirculus deſcribatur AGB: Et ex AB, abſcindatur quinta pars BD, vt AB, ipſius BD, ſit quintupla: & ipſius AD, ſeſquiquarta; At vero AD, ipſius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipſi BC, ſit æqualis, circulus deſcribatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIK. Poſt hæc diuiſis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, cõnectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex cẽtro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. Eruntq; omnes inter ſe æquales; [b] ſed & parallelæ ſunt. Igitur rectæ, quæ illas cõiungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confuſionem, non duximus.) binæ inter ſe æquales erunt: Ac proinde cum æquales ſint EL, EM, &c. ſemidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter ſe, & ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. [d] Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum eſt plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademq; ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum eſt plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quę ad propoſ. 16. lib. 11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planũ per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineę QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde ſi ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, tranſibit, eritque

[a] 11. quar.

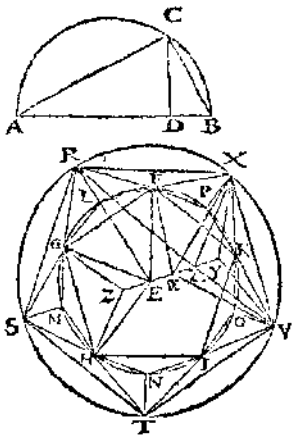
[b] 6. vndec.

[c] 33. primi.

[d] 15. vndec.

æqualis

æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R,S,T, V,X,rectis RS,ST,TV,VX,XR.[a] Quia igitur L R, PX, æquales ſunt,& parallelæ; ſi concipiatur duci recta LP; [b] erunt quoque LP,RX, æquales & parallelæ; [c] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Auſert autem LP,quintam partem circuli FGHIK,nempe duas decimas partes FL,FP. Igitur & RX,quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prſus argumento concludemus, reliquas rectas RS,ST,TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pẽtagonum æquilaterũ eſt RSTVX, omnia latera æqualia habẽs lateribus pẽtagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pẽtagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur ſemidiametro EF, hoc eſt, lateri hexagoni circuli FGHIK; & eſt [d] latus decagoni; [e] erit quadratum lateris pẽtagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [f] Eſt autem eiſdẽ quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni: ideoque recta FR, lateri pẽtagoni LP, ſeu FG, hoc eſt, ipſi RX, æqualis erit. Eademq; rõne erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriuſq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triãgula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, KRX, XKF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia, cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni, æquilateri



[a] 6. vndec.
[b] 33. primi
[c] 28. tertij.
[d] 10. tertij dec.
[e] 47. primi
[f]

lateri. Poſt hæc, perpendicularis EQ, in vtramq; partẽ extendatur, ſintq; rectæ QY, EZ, æquales ſingulæ, lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quũ ergo QX, ſemidiameter eſt circuli RSTVX, hoc eſt, latus hexagoni, & QY, latus eſt decagoni eiuſdem circuli; erit quadratũ lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarũ QX, QY; b Eſt autẽ eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus ſit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK RSTVX, parallela ſint oſtenſa, ſitque EQ, ad illius planum recta, ex conſtructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QY, in eodem plano) Igitur quadratum rectæ XY, æquale eſt quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis oſtendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ KY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confuſionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo VYX, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiamet, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus,) quę omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, c copulenturque ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſiedrum. Quod dico comprehendi ſphæra diametri AB.

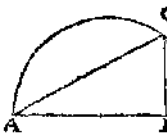
DIVISA enim recta EQ, bifariã in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia ſunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, ſint ſemidiametri circuli RST, VX;

a 10 tertij. dec.

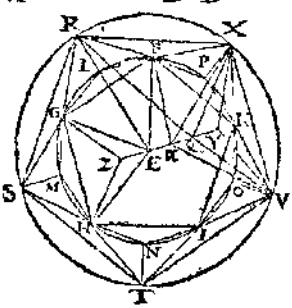
b 47. primi.

c 8 vndecimi.

VX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe re-
[a] *4. primi.* cti, ex defin. 3. lib. 11. [a] Erunt & baſes αV, αX, æquales. Eademque ratione, ſi ducâtur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter ſe, & ipſis αV, αX. Rurſus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia ſunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuiſa ſit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales, ni mirum recti, ex defin. 3. lib. 11.



[b] *4. primi.* [b] Erunt quoque baſes αX, αF, æquales: eodemq; modo ſi ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, oſtendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipſi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiuſdē circuli; [c] erit QZ, diuiſa in E, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens E α, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta αZ, [d] quintuplum poteſt eius, quod ex Eα, deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta αF, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum ſit quadrati rectæ αE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius Eα; erunt quadrata rectarum EF, Eα, ſemel quintupla quadrati rectæ Eα. [e] Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale ſit quadratum rectæ AF; erit quoq; quadratum



[c] *9. tertij dec.*

[d] *3. tertij dec.*

[e] *47. primi*

dratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum αZ, αF, ac proinde rectæ ipſi αZ αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, biſariam ſecetur in α, (propterea quod ſi æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY totæ Zo, Yπ, æquales fiant) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icoſaedri æquales. Quocirca ſphæra deſcripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſphęræ diametri AB.

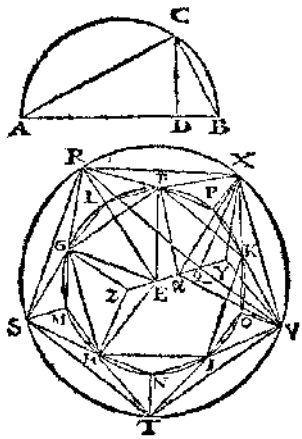
2 CVM. ſit vt αZ, ad αE ita YZ, dupla ipſius αZ, ad QE, duplam ipſius αF; [a] Ac propterea vt quadratum rectę αZ, ad quadratum rectę αE, ita quadratũ rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; ſit autem quadratũ rectæ αZ, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ αE: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc eſt, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis ſit poſita ſemidiametro EF, hoc eſt, rectæ BC: Eſt autem & eiuſdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6, ſit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę BC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Ac proinde exiſtẽte AB, quintupla ipſius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia ſunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & ſphæræ circa ipſas, æquales erunt.

QVONIAM denique diameter ſphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendũ eſt, latus Icoſaedri eſſe lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur) põtq; quintuplũ quadrati rectæ BC, hoc eſt, rectę illi æqualis EF; erit quoque ſemidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis, (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. [c] erunt commenſurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo AB, ſit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG,

[a] 15. quin.
[b] 22. ſexti
[c] 6. dem.

lus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur cõſtituimus & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.



EX dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potẽtia quintuplam ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutũ eſt, & quæ quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum.n. eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati rectæ BC, hoc eſt, ſemidiametri EF.

COROLLARIVM II.

ITEM manifeſtum eſt, ſphæræ diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli: Nam Y Z, diameter ſphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

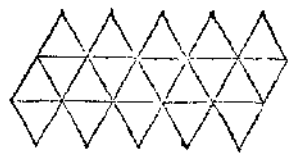
COROL-

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidē rectæ LP, sit quoq; parallela recta HI, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

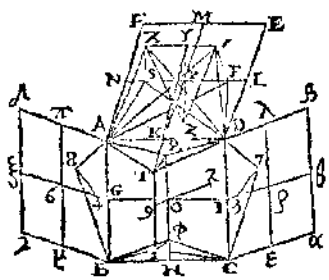


PROBL. 5. PROPOS. 17. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra cōplecti, qua & prędictas figuras; & demōstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratū ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit cōmunis horum sectio recta AD, (Insi

stunt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos Nam in pręcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipsi basi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductę, rectæ erunt ad eandem basin EFGH) Diuisis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quę rectis cõnectantur secãtibus sese in O, P, centris quadratorum, vt cõstat ex demonstratione octaui problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in pũctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, ęquales segmẽtis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, esse vnum ex duodecim pentagonis ęquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, sit in vno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX, sint ad quadratum ADEF, rectę, [b] ipsę erunt parallelę; Ac proinde, cũ sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ sectę PL, PN, ęquales sint.) [c] erunt quoque coniungentes rectę RS, VX, ęquales & parallelę: [d] Est autem & AD, eidem RS, siue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelę sunt & ęquales. [e] Igitur & AD, VX, parallelę sunt; [f] Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipsis erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in vno existet plano: Est autem & triangulum ATD, in vno plano. Dico quod & in eodẽ plano cum trapezio ADVX. Ex P.n. ducatur PY parallela ipsi RV, [g] quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta sit RV: Et conectantur re-



[a] 18. vnde.
[b] 6. vndec.
[c] 33. primi
[d] 33. primi
[e] 9. vndec.
[f] 7. vndec.
[g] 8. vndec.

rectæ K T, K Y. Quũ igitur eſt vt O K, ad O Q, ita O Q, ad Q K, ob ſectionem rectæ O K: Eſt autem K P, ipſi O K, æqualis: (ſunt enim dimidia latera cubi;) & P Y, ipſi O Q, (cum æqualis ſit ipſi R V, quæ poſita fuit æqualis ipſi O Q, maiori ſegmento;) Erit quoque vt K P, ad P Y, ita O Q, hoc eſt, Q T, illi æqualis, ad Q K. Quare cum triangula P K Y, Q T K, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, ſintque ad vnum angulum K, compoſita, [a] ita vt homologa latera ſint parallela, nempe P K, & Q T, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit ad quadratum A B C D; & P Y, Q K, inter ſe, quod vtrumque rectum ſit ad quadratum A D E F: [b] Erunt reliqua latera K Y, K T, in rectam lineam collocata; [c] Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoque planum A T D, & planum A D V X, vnum planum conſtituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno exiſtit plano.

[a] 6. vndec.
[b] 32. ſexti
[c] 1. vndec.

QVOD vero ſit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia ſint lateribus A K, K Q, trianguli A K Q; (Sunt enim A N, A K, dimidia latera cubi, & N S, K Q, ſegmenta minora rectarum æqualium ſectarũ.) & anguli A N S, A K Q, recti; ſi ducatur recta A Q, erunt baſes A S, A Q, æquales. Rurſus cum latera A S, S X, trianguli A S X, ſint æqualia lateribus A Q, Q T, trianguli A Q T; (Nã rectæ A S, A Q, oſtenſæ ſunt æquales, & S X, Q T, ſunt ſegmenta maiora rectarum æqualium ſectarum) & anguli A S X, A Q T, recti, ex defin. 3. lib. 11. [c] Erunt quoque baſes A X, A T, æquales. Quod ſi ducatur recta D Q, oſtendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; ſi vero ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, eſſe æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V; æqualia; quibus etiam æquale oſtendemus reliquum V X, hac ratione. [f] Quadrata rectarum P N, N S ſimul tripla ſunt quadrati rectæ P S, hoc eſt, quadrati rectæ S X: Eſt autem quadrato rectæ P N, æquale quadratum rectæ A N. Igitur & quadrata rectarũ A N, N S, ſimul tripla ſunt quadrati rectæ S X. [g] Cum ergo quadratis rectarũ A N, N S, æquale ſit quadratum rectæ A S; erit quoque quadratum

[d] 4. primi.
[e] 4. primi.
[f] 4. tertij de cimi.
[g] 47. primi

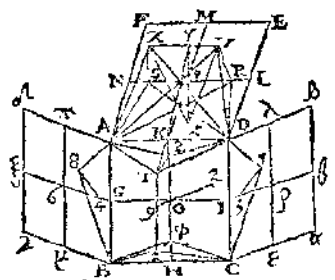
rectæ AS, triplum quadraxi rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarũ AS, SX, ſimul, quadrupla eiuſdẽ quadrati
[a] 47. primi. rectæ SX. [a] Eſt autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ AX. Quadratũ ergo rectę AX, quadruplum quoque erit quadrati rectę SX, hoc eſt quadra
[b] 34. primi ti rectæ PS, hoc eſt quadrati rectę XY; [b] Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cum igitur & quadratum rectę VX, quadruplum ſit eiuſdem quadrati rectę XY ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2 quod VX, dupla ſit ipſius XY; Erunt quadrata rectarũ AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipſę æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, oſtenſæ ſint eſſe æquales; æquilaterum eſt pẽtagonum ATDVX.

QVOD autem & æquiangulum ſit, ita perſpicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, ſecta ſit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori
[c] 5. tertijde. ſegmento PS; [c] erit quoque NR, ſecta in P, extrema ac
[d] 4. tertijd. media ratione, maiusque ſegmentum erit NP. [d] Quadrata igitur rectarum NR, RP, ſimul tripla ſunt quadrati rectę NP, hoc eſt, quadrati rectæ AN: Eſt autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla ſunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla ſunt eiuſdem quadrati rectæ AN.
[e] 47. primi [e] Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarũ RV, AR, quadrupla ſunt
[f] 47. primi quadrati rectæ AN. [f] Cum ergo quadratis rectarũ AR, RV, æquale ſit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiuſdem quadrati rectę AN, quadruplum. At vero eiuſdem quadrati rectæ AN, quadruplum eſt quadratum rectæ AD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod AD, dupla ſit ipſius AN. Æqualia igitur ſunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectę AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, oſtendemus DX, DA, æquales eſſe; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter ſe eſſe æquales. Quoniã igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia ſunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & baſes AD DX, æquales quoque:
[g] 8. primi [g] Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non ſecus oſtenditur angulus DVX, æqualis angulo AXV, Ac proinde,

cum

cũ in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeãtur anguli æquales ATD, DVX, AXV, ipſum erit æquangulũ. [a] 7. tertij de.

QVOD ſi ſumantur alia duo cubi quadrata Cαβ D, Bγδ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus ſectionibus CD, AB, quorum ſingula latera biſariam ſecentur in ε, θ, λ, Ι, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur ſe mutuo ſecantibus in quadratorũ centris ρ, σ. Secẽtur deinde Oα, OK, ρΙ. σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educãtur ad partes cubi ex eriores perpendiculares φ2, Q T, 37, 48, æquales ſegmentis maioribus 60, 20, 3μ, 46, coniunganturq; rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonſtrabimus eadem ratione, pẽtagona T2C7DT2B8A, æquilatera eſſe & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Conſtructa igitur iã ſunt tria pentagona tangẽtia cubi tria latera AD DC, AB, & ſibi mutuo cohærẽtia lateribus cõmunibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tãgentia reliqua nouem cubi latera; cõſtitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem ſphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ, hac arte demonſtrabimus.

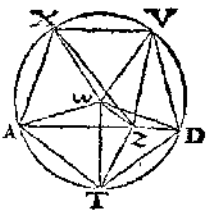


INTELLIGANTVR plana cubi oppoſita ſecari planis, quæ per rectas planorum latera biſariam ſecantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppoſitum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppoſitum, planis per rectas GI, HK, ductis &c. Quoniã igitur plana ſecantia recta ſunt ad dicta plana cubi, qđ parallela ſint baſibus cubi, quæ rectæ ſunt ad plana ADEF, ABCD. Erũt & cõmunes eorũ ſectiones ad eadẽ cubi plana rectæ. Quare cũ YP, recta ſit ad planũ ADEF, ipſa producta verſus Z, erit cõis ſectio [b] 19. unde.

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto ſi ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis
[a] 39. vnde. 9OZ; erit ipſa communis ſectio planorũ, quę per rectas GI, HK, ducuntur. [a] Quia vero dictæ communes ſectiones & diametri cubi ſe inmutuo bifariam ſecant; ſecent ſe mutuo bifariam in Z: Secant autem ſeſe diametri cubi bifariam in centro ſphęræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propoſ. 15. huius lib Punctum igitur Z, centrum erit ſphæræ circa cubum deſcriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter ſe æquales erunt: quibus omnibus æquales quoq; eſſe oẽs rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, ſic fiet perſpicuũ, ducta recta ZX.
[b] 6. vnde. [b] Quoniã parallelæ ſunt KP, OZ, quod vtraq; recta ſit ad planũ AB. D; ité parallelæ ſunt OK, ZP, quod vtraq; recta ſit ad planũ ADEF; erit PK-
[c] 34. primi OZ, (debent. n. duo puncta Z intelligi eſſe cõiuncta) parallelogrãmum; ac ppea PZ æqualis erit ipſi KO, hoc eſt, ipſi NP, dimidio lateri cubi: Eſt autẽ & PY, ipſi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR æqualis erit.
[d] 4. tertij dec. [d] Quare cum quadrata rectarum NR. PR, ſimul tripla ſint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, ſecta ſit extrema & media ratione; erũt quoq; quadrata rectarum ZY. PY, hoc eſt, quadrata rectarum ZY, YX, ſimul tripla quadrati rectæ PZ: (Eſt. n. YX, æqualis ipſi PS, hoc eſt, ipſi PY:)
[e] 47. primi [e] Eſt autẽ quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc eſt, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiuſdem quadrati dimidij lateris cubi triplum eſt quoq; quadratũ ſemidiametri ſphæræ cubũ comprehen-
[f] 15. primi dẽtis. ([f] Ná vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiame-
[g] 22. ſexti. ter ad dimidiũ lateris; [g] Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratũ lateris, ita quadratum ſemidiametri ad
[h] 15. tertij dec. quadratũ dimidij lateris. [h] Cũ ergo quadratũ diametri triplũ ſit quadrati lateris, erit quoq; quadratũ ſemidiametri triplũ quadrati dimidij lateris.) Aequale igiĩ eſt quadratũ rectæ ZX, quadrato ſemidiametri ſphrę, ſeu cubi; Ac ppea ZX, æqualis ſemidiametro. Eadẽ róne erit ducta recta ZV, ſemidiametro æqualis. Vel certe qa cũ latera ZY, YX, triãguli ZYX, æqualia ſint lateribus ZY,

YV,

YV, trianguli ZYV, & anguli cõtenti recti. (cũ enim PY, ſit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad ſibi parallelã VY, perpẽdicularis.) [a] Erunt baſes ZX ZV, æquales: Sunt aũt & ZA ZD, ad angulos cubi, ſi midiametro ſphæræ æquales, vt dictũ eſt. Sunt ergo iã quatuor rectæ ductæ ex Z. centro ſphærę ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphæræ. Vt autem oſtendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, ſemidiametro æqualis, deſcribatur circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ perpendicularis demittatur Z ω, connectanturque rectæ ω A, ω T, ω D, ωV, ωX. [b] Quoniam igitur quadratũ rectę Z A, æquale eſt quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectę ZA, ZX, oſtenſæ ſint æquales; Igitur & quadrata rectarũ Zω, ωA, quadratis rectarũ Zω, ωX, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectę Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarũ ωA, ωX, ideoq; rectę ipſę ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter oſtendentur rectę ωV, ω D, & inter ſe, & ipſis ω A, ωX, æquales, quod & rectę ZV, ZD, æquales ſint oſtenſę rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectę lineę æquales, quam duę, [c] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarũ Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT. [d] Cũ ergo illis duobus æquale ſit quadratum rectæ Z A; his vero quadratũ rectæ Z T; Erũt æqualia quadrata rectarũ ZA, ZT; ppeaq; & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare ſphæra complectens cubum ex centro Z, deſcripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem ſphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



POSTREMO cum ſit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: erit

[a] 14. primi.
[b] 47. primi
[c] 9. tertij
[d] 47. primi

erit quoque vt NL, dupla ipſius NP, ad KS, duplam ipſius PS, ita KS dupla ipſius PS, ad rectam compoſitam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipſius SN. Si igitur cubi latus NL, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum erit SR: Sed NL, tota ita ſecta, Rationalis eſt. (Nam eius quadratum commẽſurabile eſt quadrato diametri ſphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum ſit illud tertia pars huius.) Igitur maius ſegmentum SR, hoc eſt, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & prædictas figuras; & demonſtrauimus, quòd Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Apotome. Quod erat faciendum.

[a] 11. quin

[b] 6. tertij d.

COROLLARIVM. I.

CVM ergo demonſtratum ſit; recta LN, extrema ac media ratione ſecta, maius ſegmentum eſſe rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus Dodecaedri in eadẽ ſphæra deſcripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pẽtagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Nam AD, latus cubi ſubtendit angulum T, pentagoni, eſtque oſtenſum æquale rectis AV, DX, ſubtendentibus angulos X, & V, eiuſdem pentagoni.

QVONIAM vero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum latus pentagoni; ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex maiori ſegmen-

[c] 8. tertij decimi.

[d] 3. tertij de.

ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri; ſimiliter diuiditur, facitque minus ſegmentum latus Dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt VX, T2, quæ videlicet parallela ſunt lateribus cubi EF, AB; aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cum parallela ſint cubi lateribus parallelis & oppoſitis, ſecanturque, ex demonſtratis, bifariã & ad rectos angulos, a lineis rectis, quæ centra baſiũ cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ vt demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales ſint dimidio lateri cubi; et YP, 9O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS, OQ; Erũt totæ YZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare tota tres lineæ æquales ſunt, ſeque bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo KOZP, angulus OZP, rectus eſt, cum opponatur recto OKP. Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ rectæ centra baſium coniungentes efficere angulos rectos.

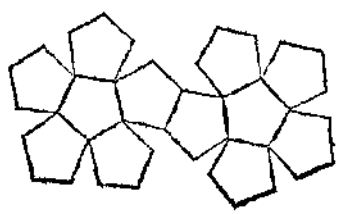
ctos. Omnes enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, vt perſpicuum eſt.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla oſtenſa ſint quadrati rectæ PZ; erit ZY, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmẽtum erit PZ, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; [a] ideoque vt dupla ipſius ZY, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipſius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipſius ZP, ad duplam ipſius PY, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ.

[a] 15. quin.

SCHOLIVM.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, diſponaturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrũ ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſe complicentur.

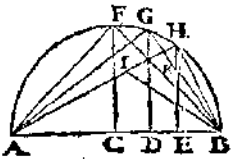
LATE-

PROBL. 6. PROPOS. 18.

18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

SIT ſphæræ diameter *AB*, quæ in *C*, ſecetur bifariam. In *D*, vero ita, vt *BD*, ſit ipſius pars tertia; In *E*, denique ita, vt *BE* ſit quinta pars eiuſdem. Deſcripto deinde circa *AB*, ſemicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex *C*, *D*, *E*, ipſi *AB*, perpendiculares *CF*, *DG*, *EH*; connectanturque rectæ *AF*, *BF*, *AG*, *BG*, *AH*, *BH*. Poſt hæc ex *HA*, abſcindatur *HI*, æqualis lateri Decagoni in eo circulo deſcripti, cuius ſemidiameter, ſeu latus Hexagoni eſt *BH*: connectaturque recta *BI*. Poſtremo *BG* ſecetur extrema ac media ratione in *K*, ſitque maius ſegmentum *BK*.



QVOD igitur attinet ad expoſitionem laterum prædictarum figurarum, dico *AG*, eſſe latus Pyramidis, ſeu Tetraedri; *AF*, latus Octaedri; *BG*, latus cubi; *BI*, latus Icoſaedri; *BK*, denique latus Dodecaedri. Quoniã. n. *AG*, media proportionalis eſt inter *BA*, *AD*, ex coroll. propoſ. 8 lib. 6. Erit ex coroll. propoſ. 20. eiuſdem lib. vt *BA*, ad *AD*, ita quadratum rectæ *BA*, ad quadratum rectæ *AG*: Eſt autem *BA*, ipſius *AD*, ſeſquialtera; cum talium partium 2. ſit *AD*, qualium 3. eſt *BA*. Igitur & quadratum rectæ *BA*, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ *AG*; Ac proinde cum diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri; erit *AG*, latus Tetraedri. [a] *13. tertij dec.*

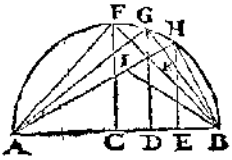
RVRSVS quoniam *AF*, eſt media proportionalis inter *BA*, *AC*, ex eodem coroll. propoſ. 8. lib 6. Ac proinde vt *BA*, ad *AC*, ita quadratum rectæ *BA*, ad quadratum rectæ *AF*, ex adducto coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem *BA*, ipſius *AC*, dupla: Erit quadratum rectæ *BA* duplum quadrati rectæ *AF*. [b] Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit *AF*, latus Octaedri. Eodem modo erit *BF*, latus Octaedri. [b] *14. tertij dec.*

DEIN-

DEINDE cum BG, ſit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præſatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipſius BD, tripla ex conſtructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [a] Quocirca cum ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

[a] 15. tertij dec.

PRAETEREA quia, ex eiſdem corollariis, B H, eſt media proportionalis inter A B, B E, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Eſt autem, ex cõſtructione AB, ipſius BE, quintupla: Erit quadratum rectę A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter ſphæræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex coroll. 1. propoſ. 16. huius lib. Erit B H, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli: Eſt autem H I, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. [b] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, ſimul; Ac proinde [c] cum quadratum rectæ B I, æquale ſit quadratis rectarũ B H, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiuſdem. [d] Quam ob rem B I, latus eſt Icoſaedri.



[b] 10. tertij dec.

[c] 47. primi

[d] 16. tertij dec.

DENIQVE, cum BG, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius ſegmentum, latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

QVOD uero ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cum demonſtratum ſit, diametrum ſphæræ eſſe potentia ſeſquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perſpicuum eſt, qualiũ partium 6 fuerit quadratum diametri, talium 4 eſſe quadratum lateris Tetraedri, talium uero 3. quadratũ lateris Octaedri.

Diamet.	6.
Tetræd.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

Octaedri;& denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis,ſeu Tetraedri,eſſe potentia ſeſquitertiũ lateris Octaedri,potẽtia uero duplũ lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterũ lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum,Tetraedri nimirum,Octaedri,& cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportioné inter ſe habent,quam numerus ad numerum,[a] Ac propterea diameter ſphæræ & latera dictarum figurarum lineę ſunt commenſurabiles; atque adeo cum diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt conſtat ex coroll. propoſ 24. lib 8 Erũt huiuſmodi lineæ, nimirũ diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri & latus cubi, logitudine incommenſurabiles ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles.

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi.

AT uero latera Icoſaedri & Dodecaedri, quoniam ſunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc verò Apotome, vt demonſtratum eſt, nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum ſint diametro ſphæræ commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. quod eſt abſurdum. oſtenſum enim eſt. ipſa eſſe Irrationalia.

SED neque inter ſe ullo pacto cõmmenſurabilia sũt dicta latera Icoſaedri & Dodecaedri. Si namque credãtur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cum latus Dodecaedri ſit Apotome,[c] erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cum latus Icoſaedri ſit linea Minor,[d] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantum, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo. quod latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotome, & Minor

[c] 104. deci.

[d] 106. dec.

[e] 16. tertiædo.

& Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphęræ, ideoque Rationalia exiſtant, duo vero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri, Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri. Hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras conſtruximus. Quæ forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim *AG*, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quã AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3.

EODEM modo oſtendemus latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam *BG*, cubi latus.

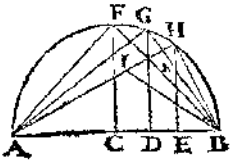
LATVS autem cubi *BG*, maius eſſe latere Icoſaedri BI, hac arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę *AB*, nonuplum quadrati rectę *BD*, cũ nonupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ *AB*, talium 3. eſt quadratum rectæ BG; [b] quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ *BD*, talium partium 1 relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ *AB*, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant propor-

[a] *20. ſexti.*

[b] *15. tertiidecimi.*

tio-

tionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [a] erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectę GD, maius eſt quadrato rectæ BH, ideoq; recta GP, maior quã recta BH. Rurſus quia diameter ſphęrę *AB*, cõponitur ex BH, ſemidiametro circuli, ex quo Icoſaedrũ cõſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI eiuſdẽ circuli, per coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. cõſtat latus decagoni HI, minus eſſe tertia parte rectæ AB, hoc eſt, minus recta BD. Nam ſi HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertijs partibus, nẽpe ipſi AD; *Ac* propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi BD; Atque adeo, cum quadratum rectę AB, nonuplum ſit oſtenſum quadrati rectę BD, erit idem quadratum rectæ AB, nonuplum quadrati rectæ BH. Quod eſt abſurdum. quintuplum enim eſt demõſtratum. Non ergo HI, tertia pars eſt ipſius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectę AB, & proinde dupla ipſius HI, maior quam duę tertiæ, hoc eſt, quam AD, erit BH, minor quã tertia pars BD. Quare quadratũ rectę *AB*, maius erit, quam nõcuplum quadrati rectæ BD. Quod magis eſt abſurdum. Non igitur maior eſt *HI*, tertia parte ipſius AB: Sed neque æqualis tertię parti, vt oſtendimus. *Minor* ergo eſt quã tertia pars, hoc eſt, quam *BD*. Itaque cum rectę *GD*, *DB*, maiores ſint rectis BH, HI, vt demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [b] Eſt autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectę BI, quadratis rectarũ *B* H, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus ſcilicet *Ic*oſaedri.



MAIVS denique eſſe latus Icoſaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patebit. Cum rectæ BG, diuiſæ

[a] 10. quin.

[b] 47. primi.

extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit B K, & minus G K; erit rectangulum ſub B G, B K, maius rectangulo ſub BG, GK; atque adeo rectangula ſub BG, BK, & ſub BG, GK, ſimul maiora duplo rectanguli ſub BG, GK: [a] Eſt autem rectangulis ſub BG, BK, & ſub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis ſub B G, G K, æqualia ſunt duo quadrata rectæ B K. (Nam cum ſit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; [b] erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo ſub BG, G K, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis ſub BG, G K.) Maius igitur quoque eſt quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, ſex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ B H, (Cum enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B G, & quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quam quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinq; quadrata rectæ BH, maiora erunt ſex quadratis rectæ B K; Ac proinde vnũ quadratum rectæ B H, maius erit uno quadrato rectæ B K. (Si namque æquale eſſet quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora ſex quadratis rectæ B K. quod eſt abſurdum, cum illa quinque hiſce ſex maiora ſint demonſtrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta BK; Ac proptereа cum B I, maior ſit quam B H, multo maior erit BI, latus uidelicet Icoſaedri, quam BK; latus Dodecaedri. Latera igitur quinq; figurarũ expoſuimus, & inter ſe comparauimus. Quod erat faciendum.

[a] 2. ſecundi

[b] 17. ſexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonſtrant, præter dictas quinque figuras, non poſſe aliam conſtitui figuram ſolidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter ſe æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, ſolidus angulus conſtitui non poteſt, cum ſaltem tres anguli plani requi-

quirantur ad ſolidi anguli conſtitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, conſtat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX quinque, angulus Icoſaedri;

EX ſex autem huiuſmodi triangulis ad idem punctũ coeuntibus fieri non poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propoſ 32. lib. 1. Erunt eiuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc eſt, quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus conſtituetur. Nam ſolidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex planis eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. 120 unde.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus cõficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus enim recti quatuor erũt. Multo ergo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus cõſtabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cũ enim quinque anguli pentagoni æquales ſint ſex rectis, vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnũ rectũ, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erũt quatuor rectis, ideoq; ex ipſis angulus ſolidus cõſtituetur. Sed ex quatuor huiuſmodi angulis, nullus ſolidus angulus cõfici poteſt. Cum enim vnus, vt dictum eſt, maior ſit recto, eo quod continet vnũ rectum, & inſuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus ſolidus ex ipſis conſtituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. Nec ſane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis cõſtitui poterit angulus ſolidus. Nam cũ ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, vt ad propoſ. 32. lib. 1. eſt demonſtratum; Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectũ, ac præterea duas partes ſextas vnius recti; continebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes recti, hoc eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo cõponetur angulus ſolidus; Atque idcirco multo minus ex pluri-

bus eiuſmodi angulis, quam tribus, angulus ſolidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpicuum eſt, preter dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, que planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramidis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrũ viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in unius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidiũ eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangul

gula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium eſt rurſus 12. numerus laterum Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiut 60. quorum dimidium eſt 30. numerus laterum Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum conſtituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, ſunt 60. quorum dimidium eſt rurſus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD ſi quis rurſus interrogauerit, quotnam angulos ſolidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omnium baſium anguli; Quia vero tres, quatuor, vel quinque ſemper anguli baſium in vnum conueniũt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, diuidendi ſunt omnes anguli in numerum angulorũ, qui ſimul coeunt ad angulũ ſolidum conſtituendũ, vt numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM: Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi diuidantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3 (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidum cubi) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorũ vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidũ angulum Octaedri.) conficiũt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicẽtur in 3. numerũ angulorũ vnius trianguli, fiũt 60. anguli, qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituũt angulum ſolidum Icoſaedri) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot. n. anguli conueniunt ad conſtituendum angulũ ſolidũ Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.

DENIQVE conſideratione etiam dignum eſt, cubum & octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet ſex baſes,

& octo angulos ſolidos, octaedrum vero octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solum Tetraedrum, (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes totidēq; ſolidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinę ſocietatem commendatus, longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque diſſererent aliquando deſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorũ, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ a ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderũt. Ego autẽ poſtea incidi

in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidẽ cæpi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis cõſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geometria verſatus, ſcite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ conſuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt prooemio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi aſcribuntur: Duo vero ſubſequentes a plerique Hypſicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui ſolent: in quorũ quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrũ, & Dodecaedrũ, tam ſecundum ſuperficies, quam ſolidi tates: In poſteriori vero exponuntur deſcriptiones aliquot figurarũ regularium vnius intra alteram; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non inuenda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inſcriptiones vnius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atq; problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuo inſcribũtur. Quæ in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanũ, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operã, & ſedulam

ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim nõ ſolum inſequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; verumetiam integrum librũ, qui ordine decimusſextus eſt, adiũxit, in quo proprietates illuſtres de diſtis corporibus proponit. Caterum præcipuum fuiſſe Hypſicles inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & dodecaedri, facile intelligi poteſt ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.

QVONIAM vero in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quam in earundem ordine, & inter ſe, & a Franciſco Fluſſate, ideoque a nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior vero Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hac nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemque in Campano intellige, ſi forte loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.

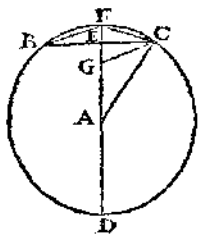
THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE, in vtram-

vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. [a] Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; [b] erunt baſes CF, BF, æquales; [c] ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiuſdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, ſuntque anguli contenti recti; [d] erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferẽtiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualiũ 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. [e] Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: [f] Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF, duplus erit anguli CAF: [g] Atqui angulus CGF, externus, æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, vt oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium eiuſdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; [h] ac proinde & latera AG, CG, æqualia: Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FC, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atq; idcirco e contrario erit AE, ducta videlicet perpedicularis in pẽtagoni latus, dimidia duarũ ſimul AF, FC, nẽpe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni



[a] 3. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 28. tertij.
[d] 4. primi
[e] 33. ſexti
[f] 20. tertij
[g] 32. primi
[h] 6. primi.

goni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductã ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hac linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

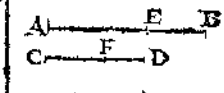
HINC quoque fit, perpendicularẽ ex centro ad latus pẽtagoni ductã, æqualẽ eſſe utriq; lineæ ſimul, et ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam. n. vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul; Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propo. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 4. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECEN-

SECENTVR binæ rectæ *A B*, *C D*, extrema ac media ratione in *E*, & *F*. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe vt *A B*, ad *CD*, ita *AE*, ad *CF*, & *EB*, ad *FD*; Item vt *AE*, ad *EB*, ita *CF*, ad *FD*, &c. Cum enim ſit, vt *AB*, ad *AE*, ita *AE*, ad *EB*; & vt *CD*, ad *CF*, ita *CF*, ad *FD*; [a] erit rectangulũ ſub *AB*, *EB*, æquale quadrato rectæ *AE*; & rectangulum ſub *CD*, *FD*, æquale quadrato rectæ *CF*. Quamobrem erit vt rectangulum ſub *AB*, *EB*, ad quadratum rectæ *AE*, ita rectangulum ſub *CD*, *FD*, ad quadratum rectæ *CF*; (eſt enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quadruplum rectãguli ſub *AB*, *EB*, ad quadratum rectæ *AE*, ita quadruplum rectanguli ſub *CD*, *FD*, ad quadratum rectę *CF*: & componẽdo, vt quadruplũ rectanguli ſub *AB*, *EB*, & quadratum rectę *AE*, ad quadratum rectę *AE*, ita quadruplum rectanguli ſub *CD*, *FD*, & quadratum rectę *CF*, ad quadratum rectę *CF*: [b] Sed quod quater continetur ſub *AB*, *EB*, vna cum quadrato rectę *AE*, æquale eſt quadrato lineę compoſitę ex *AB*, *EB*; Et quod quater continetur ſub *CD*, *FD*, vna cum quadrato rectę *CF*, æquale eſt quadrato lineę compoſitę ex *CD*, *FD*. Igitur erit quoque, vt quadratum lineæ compoſitæ ex *AB*, *EB*, ad quadratũ rectæ *AE*, ita quadratum lineæ compoſitæ ex *CD*, *FD*, ad quadratum rectæ *CF*; [c] Ac proinde, vt recta compoſita ex *AB*, *EB*, ad rectam *AE*, ita recta compoſita ex *CD*, *FD*, ad rectam *CF*: Et componendo vt compoſita recta ex *AB*, *EB*, & recta *AE*, hoc eſt, dupla ipſius *AB*, ad rectam *AE*, ita recta compoſita ex *CD*, *FD*, & recta *CF*, id eſt, dupla ipſius *CD*, ad rectam *CF*; [d] Vt permutãdo, vt dupla ipſius *AB*, ad duplam ipſius *CD*, ita *AE*, ad *CF*; [d] Vt autem dupla ipſius *AB*, ad duplã ipſius *CD*, ita eſt *AB*, ad *CD*. Erit ergo vt *AB*, ad *CD*, ita *AE*, ad *CF*; Ac propterea, cum ſit vt tota *AB* ad totam *CD*, ita *AE*, ablata ad *CF*, ablatam; [e] erit quoque reliqua *EB*, ad reliquam *FD*, vt tota ad totam. Quare vt *AE*, ad *CF*, ita erit *EB*, ad *FD*, cum vtraq; proportio eadem ſit proportioni *AB*, ad



[a] 17. ſexti

[b] 8. ſecundi

[c] 22. ſexti

[d] 15. quin.

[e] 19 quin.

ad CD: Et permutãdo, erit vt AE, ad EB, ſic CF, ad FD: & ſic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, oſtendemus & totas lineas, & earundem partes eſſe proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonſtrabimus hoc ſequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodẽ circulo deſcriptorum eãdem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.

QVONIAM, n. [a] latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione ſectam; & recta ſubtendens pentagoni angulum ſecta extrema ac media ratione facit maius ſegmentum, latus ipſum pentagoni: [b] fit vt eadem ſit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris ſegmenti ad minus, quæ maioris ſegmenti recta angulum pentagoni ſubtendentis ad minus. Cum ergo ſit, vt maius ſegmẽtum ad minus, ita tota ad maius ſegmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta ſubtendens anguli pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod eſt propoſitum.

EX hac quoque propoſitione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

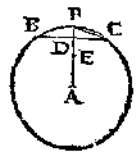
[a] *9. tertiidecimi.*

[b] *2. quartidecimi.*

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpẽdiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus

nus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum.

EX centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inſcripti, ſecetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius ſegmentum A E, eſſe æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ducta, minus vero ſegmentum E D, æquale eſſe dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli.



Extenſa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propoſ. 1. huius lib. arcus B C, nempe quinta pars totius circumferentiæ, biſariam ſecetur in F; [a] *Ac proinde recta compoſita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, ſecta erit extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum A F, latus hexagoni, minus vero ſegmentum F C, latus decagoni. Quare vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit vt tota A D, diuiſa ſecundum extremam ac mediam rationem, ad totam compoſitam ex A F, F C, ſimiliter diuiſam, ita A E, maius ſegmentum ad A F, maius ſegmentum; & E D, minus ſegmentum ad F C, minus ſegmentum:* [b] *Eſt autem tota A D, dimidium totius compoſitæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipſius A F, ſemidiametri, & E D, ipſius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per corollarium propoſitionis 12. lib 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis ſit dimidio ſemidiametri; perſpicuum eſt, maius ſegmentum A E, æquale eſſe dictæ perpendiculari, minus vero E D, dimidio lateris decagoni.*

[a] 9. tertij decimi.

[b] 1 quarti decimi.

2. 4.

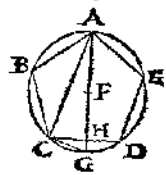
THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilate-

rum

rum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarũ CD, AC, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13 diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H; erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoque recta ſubtenſa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla eſt rectæ FG; erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratũ rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: [a] Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atq; adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdẽ rectæ FG; [b] Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirũ ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.



[a] 47. primi

[b] 10. tertiædec.

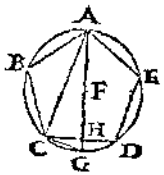
COROL-

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiuſmodi.

SI in ſphæra eadem cubus, & dodecaedrum inſcribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiã ſphæra deſcripti; eritque ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadẽ ſphæra deſcripti. [a] *Perſpicuum eſt autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris ſcilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla eſſe quadrati ſemidiametri F G, &c.*



[a] 3. quartidecimi.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.

SECETVR. n. *AB*, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentũ AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdẽ circuli. Sit. n. *AD*, latus decagoni eiuſdem circuli, adiungaturque in rectum

rectum ipsi *AB* [a] eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum *BA*: Ponitur autem & AB, secta in C, similiter. [b] Igitur erit vt *BD*, tota ad maius sui segmentum *AB*, ita *AB*, tota



ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt BD, tota ad maius sui segmentum *AB*, ita AB, maius segmentū ad *AD*, segmentum minus, per definitionem lineæ sectę extrema ac media ratione. Igitur erit vt *AB*, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea *AC*, *AD*, æquales erūt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est *AB*; erit & *AC*, eiusdem circuli latus decagoni.

[a] *9. tertij decimi.*

[b] *2. quarti decimi.*

ALITER. Adiungatur ipsi AB, in rectū recta *AD*, æqualis maiori segmento AC; [c] eritque tota recta BD, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, per ea, quę demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipsi AD, latus erit decagoni in eodē circulo descripti, cuius *AB*, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

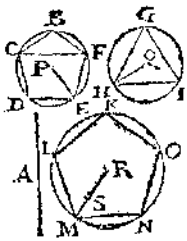
[c] *5. tertij de.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. 2. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triāgulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptū & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundē circulū circumscribere & pentagonum BCDEF, & triāgulū GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circum

ſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat.n. circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, [a] ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoque quodlibet ipſorũ æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; [b] eritque maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtẽdat quoque recta CF, angulum B, pẽtagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdẽ propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione; [c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmentum ad RS, maius ſegmentum; [d] Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo, per ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio ppoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectę RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [e] Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoq; quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cũ hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ



[a] 16. tertiidec.
[b] 4. quartidec.
[c] 2. quartidec.
[d] 22 ſexti.
[e] 10. tertiidec.

&æ RS. Sed qm̃, (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinque quadrata rectę MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; [b] sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectę MN, æqualia quindecim quadratis rectę QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectę PE, æqualia quindecim quadratis rectę QH; ac propterea vnum quadratum rectę PE, vni quadrato rectę QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrãdum.

[a] 3. quarti dec.

[b] 12. tertij decimi.

THEOR. 6. PROPOS. 6. 3. 6.

SI ex centro circuli pentagonũ Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.



EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulũ sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis.n. rectis ex F, ad oẽs angulos pentagoni, resoluetur pẽtagonũ in quinq; triãgula æqualia, ex coroll. prop. 8. lib. 1. cũ

bina latera vnius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *F*, recta HI, parallela ipſi CD, occurrés duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex *C*, *D*, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum *C* I, contentum ſub HC, hoc eſt, ſub F *G*, & *C D*,

[a] *41. primi.*



[a] Quoniam vero rectangulum C I, duplum eſt trianguli F C D, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi FCD, æqualium; erit rectangulum *C* I, quinquies ſumptum, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pẽtagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia ſint vni pentagono; Atque adeo ſextuplum rectanguli *C* I, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum C I, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorũ pentagonorum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

[b] *41. primi*

ALITER. Facta eadem figuræ conſtructione, [b] cũ rectangulum CI, duplum ſit trianguli *F* C D, hoc eſt, æquale triangulo FCD, bis ſumpto; Erit rectangulũ *C*I, trigeſies ſumptũ æquale triangulo FCD, bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei *D*odecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis, conſtabũt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triãgulis. Atq; idcirco triãgulum FCD, ſumptum ſexageſies æqualis erit ſuperficiei *D*odecaedri.

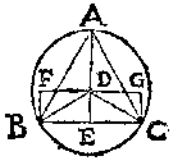
3. 7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circũſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod

quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.

EX centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri *A* B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum ſub D E, & B C, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis nã que rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *D*, recta *F G*, parallela ipſi BC, occurrens in *F*, & G, duabus perpendicularibus *BF*, CG, ex B, C, ductis ad B C; eritque rectangulum B G, contentum ſub *F B*, hoc eſt, ſub *D E*, & BC.[a] Quoniã vero rectangulũ BG, duplum eſt trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulũ BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triãgulo Icoſaedri; *A*tq; adeo idẽ rectangulum trigeſies ſumptũ, nẽpe decuplũ rectãguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triãgulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirũ decuplo duorũ triangulorũ Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triẽgulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendũ.



[a] 41. primi

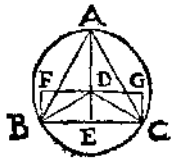
ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ,[b] cũ rectangulum *B*G, duplum ſit trianguli D B C, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectãgulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo D BC, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria cõficiunt vnũ.

[b] 41. primi

Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

IT AQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contectum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pẽtagoni Dodecaedri in latus dictũ, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.



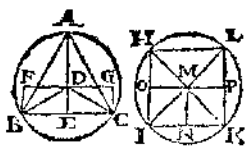
[a] *Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto;* [b] *Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.* [c] *Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.*

[a] 6. quarti dec.
[b] 7. quarti dec.
[c] 15. quinti

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reli quorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Te-

Tetraedri; *In octaedro vero & cubo duodecies ſumptum, ſuperficies Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulũ Tetraedri ABC, circumſcriptũ a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, adlatus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icoſaedri dictum eſt. Dico rectangulum BG, ſexies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Tetraedri.* [a] *Quoniam enim rectangulum BG, duplum eſt trianguli DBC, hoc eſt æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit ipſum ſexies ſumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula conſtituant totã ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipſi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis æquale.*



[a] *41. primi*

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Octaedri. [b] *Cum enim rectangulũ BG, duplum ſit trianguli DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor huiuſmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperficiei Octaedri.*

[b] *41. primi*

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, deſcribatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipſi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum ſub OI, hoc eſt, ſub MN, & IK, ſumptum duodecies, æquale eſſe ſuperficiei cubi. [c] *Quoniam enim rectangulũ IP, duplum eſt trianguli MIK, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale vigintiquatuor eiuſmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula conſtituant ſex*

[c] *41. primi*

quadrata, id eſt, totam ſuperficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi. Quod eſt propoſitum.

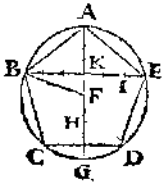
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (ſunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, ſit dimidium lateris HI, nempe æqualis ipſi MN) conſtituent duodecim talia rectangula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiem cubi.

4. 8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti; æquale eſt dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres ſint AH: Angulum vero A, ſubtendens recta BE, ſecetur in ſex partes æquales, quarum quinque ſint BI, & vna IE, ita vt BI, ſit quintupla ipſius IE. Dico rectangulũ cõprehenſum ſub AH, BI, æquale eſſe pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, cõtinet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum ſit ſemidiameter, erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. ppoſ. 10. lib. 13. in puncto K; cõtinebit tã KB, q̃ KE, tres ſextas rectæ BE; atq; adeo cũ BI, cõtineat quinq;, cõtinebit KI, duas; Ac proinde & KB, ipſius



ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; [a] atque idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub mediis AF, KB. [b] Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eãdem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub AH, KI, duplum erit eiuſdem trianguli ABF. [c] Eſt autem & rectangulum ſub AH, KI, duplum rectanguli ſub AH, IE; propterea quod & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim KI, duas ſextas partes ipſius BE, & IE, vnam.) eademque ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum ABF, & rectangulum ſub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum eſt triãguli ABF, quod pentagonum in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis e centro F, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum vero ſub AH, BI, quintuplum eſt rectanguli ſub AH, IE; quod & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eademque ſemper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16. ſexti
[b] 41. primi
[c] 1. ſexti
[d] 1. ſexti

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, (comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris

[e] 5. quartidecimi.

lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirum ſub BI, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

4. 8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

IN circulo ABCD, [a] circunſcribente & pentagonũ Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni BD, & triãguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deniq; H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. *Quoniam enim lateris* cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt BD, latus Dodecaedri, ex coroll 2. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione maius ſegmentũ eſt EF, ex coroll propoſ. 2. huius lib. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius ſui ſegmentum, ita EG, tota ad EF, maius ſui ſegmentum; [c] Ac proinde rectangulum ſub extremis H, EF, æquale erit rectangulo ſub mediis BD, EG. [d] Quia uero eſt, vt H, ad AD, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum ſub AD, EF, cum baſes ſint H, AD, altitudo vero ſemper eadem EF; Erit quoque vt H. ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quod eſt æquale rectãgulo ſub H, EF,) ad idem rectangulum ſub AD, EF. Quare cum, ex coroll. propoſ 7. huius lib. ſit, vt rectãgulum ſub BD, EG, ad rectangulum ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri



[a] 5. quarti decimi.

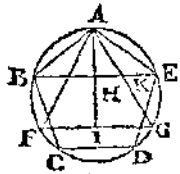
[b] 2. quarti decimi.

[c] 16. ſexti

[d] 1. ſexti

caedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque, vt *H*, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

ALITER. [a] Circumſcribat pentagonum Dodecaedri *A*BCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A per centrum H, recta AI, quę per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quę latus erit cubi, ex corol. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextę partes ſint BK. *Dico* rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiē Icoſaedri. Quoniam. n. rectāgulum ſub AI, BK, ęquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub AI, IF, ęquale eſt triangulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum FG, baſis trianguli dupla ſit ipſius IF, baſis rectanguli: Erit vt rectangulum ſub AI, *BK*, ad rectangulū ſub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: [b] Eſt autem vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita BK, ad IF, cum baſes ſint BK, IF, & altitudo eadem ſemper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum *A*FG, ita BK, ad IF; Ac proinde, (ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, ęquemultiplicētur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & rectam IF, ęquemultiplicentur per numerum 20, [c] erit quoque vt pentagonum *A*BCDE, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigeſies ſumptū, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta BK, duodecies ſūpta ad rectā IF, vigeſies ſumptā: Atqui recta BK, duodecies ſumpta ęquiualet lateri cubi BE, decies ſumpto; (Nam cum BK, contineat quinq; ſextas partes ipſius BE; continebit eadē BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdē BE, quę efficiūt decē integras



[a] 5 quarti decimi.

[b] 1. ſexti

[c] ſchol. 22. quinti.

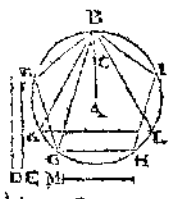
gras rectas BE) Recta vero IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eo quod FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptum ad latus Icosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, [a] cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

[a] 15. quin.

4. 9. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex A, centro, ad intervallum AB, circulus describatur, in quo cõstituatur & pentagonum æquilaterũ BFGHI & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam uero AC, maius segmentum semidiametri AB, secta extrema ac media rõne, [b] est latus Decagoni



[b] 4. quartidecimi

cagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus eſt Hexagoni; a poterit BE, latus pentagoni & totâ AB, latus videlicet hexagoni, & maius ſegmentum AC, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſsit iam & recta M, totam AB. & minus ſegmentum BC, per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D, latus propoſitum cubi ad E, latus propoſitum Icoſaedri, vt eſt BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC b. Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum eſt quadrati ſemidiametri AB: c Item quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum rectæ M, ipſis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratũ rectæ AC: Eſt autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, ſectæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BF, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib 13. eo quod BG, eſt latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ;) Erit vt tota AB, ad maius ſegmẽtum AC, ita tota BG, ad maius ſegmentũ BF: Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę AC, ita quadratũ rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratũ rectę M; f Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC. Cum igitur propoſita latera D, E, cubi, & Icoſaedri, eandem habeant proportionem, quam rectę BG, BK, vt mox oſtendemus; perſpicuum eſt, vt ſe habet recta BF, potens totã AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC, ita ſe habere propoſitum

a 10. tertij dec.

b 12. tertij decci.

c 4. tertijd.

d 2. quarti decimi.

e 22. ſexti

f 22. ſexti

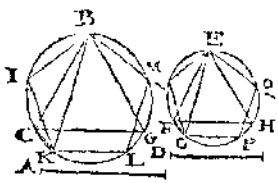
positum cubi latus *D*, ad Icosaedri propositum latus *E*. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK; *demonstrabimus hoc proposito theoremate.*

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, *latus cubi, &* BC, *latus Icosaedri eiusdem sphæræ: Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra.* Dico *esse vt* A, *ad* BC, *ita D, ad* EF. *Perfectis namque triangulis* Icosaedrorum BCG, EFH, *et circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona æquilatera* BIKLM, ENOPQ, *connectãturq; rectæ* BK, CK, EO, FO. [a] *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & ponitur* BCG, *triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus lateris* A: Erit BIKLM, *pentagonũ Dodecaedri in eadem cũ ipsis sphæra descripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta* BK, *latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoq; ipsi* A, *æqualis. Simili argumento æqualis erit recta* EO, *lateri cubi* D. *Rursus quia arcus* BIK, ENO, *similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circumferentiæ.) Item arcus* BGC, EHF; *(vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli* BCK, EFO, *ex definitione segmẽtorum similium, æquales inter se, quã anguli*



[a] 5. quartidec.

guli BKC, EOF; inter ſe, cum tam illi, quam hi in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. prop. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulū. a Quare erit, vt BK, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icoſaedri, ita EO, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad EF, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum. a 4 ſexti.

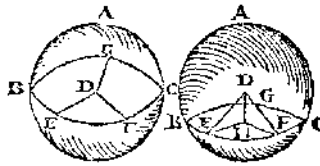
PERSPICVVM eſt igitur id, quod in demonſtratione aſſumebatur, ni rum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.

LEMMA I.

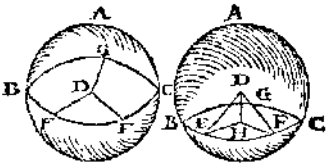
SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.

SECETVR ſphæra ABC, *cuius centrum* D, *plano aliquo faciente communem ſectionem planum* BEFCG. *Dico* BEFCG, *eſſe circulum. Tranſeat enim primo planum ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum* D, *ſit in plano, ſeu communi ſectione* BEFCG; *ducanturque ex* D, *centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque* D E, D F, DG.



DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.

TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autẽ ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittãturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectantur rectæ DE, DF.



Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea cõtenta, circulus erit; eiusq; centrũ, punctũ H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.

47. primi

CO-

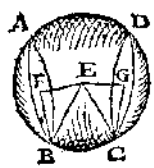
COROLLARIVM.

ITAQVE ſi planum ſecans tranſierit per centrum ſphæræ, efficietur circulus idem centrum habẽs, quod ſphæra. Si vero planum ſecans per ſphæræ centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam ſphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum ſecans ducta. Nam ſemper demonſtrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli eſſe æquales, vt perſpicuum eſt.

LEMMA II.

CIRCVLI in ſphæra æquales, æqualiter diſtant a centro ſphæræ: & circuli æqualiter diſtantes a centro ſphęræ, æquales ſunt.

IN ſphæra ABCD, cuius centrum E, ſint circuli æquales AB, DC. Dico ipſos ęqualiter a centro E, diſtare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. prȩcedentis lemmatis in ipſorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectę EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectę EC, quadratis

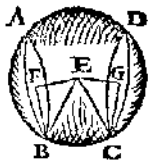


[1] 47. primi.

dratis rectarum E G, G C, æquale : Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares E F, E G. Quam ob rem circuli A B, D C, æqualiter diſtant a centro E.

47. primi

SED iam æqualiter diſtent circuli A B, D C, a centro ſphæræ E. Dico ipſos eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius, oſtendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia eſſe quadratis rectarum EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, EG, cum circuli æqualiter ponantur diſtare a centro, reliquum quadratum rectæ F B, reliquo quadrato rectæ GC; atque adeo æquales erunt rectæ F B, G C, ſemidiametri ſcilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur A B, D C, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.



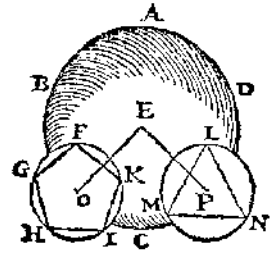
THEOR. 11. PROPOS. 11.

4. 10.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra.

IN

IN ſphæra *A B C D*, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum F G H I K: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum L M N. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in una eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra A B C D, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangunt; ſi per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in ſphæra F G H I K, L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N, Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro ſphæræ diſtabũt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales ſunt E O, E P, æquales erunt. Non aliter oſtendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icoſaedri deductæ æquales. Quare ſi ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & baſes ipſarum æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemque modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarũ altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidũ Dodecaedri. [b] Quoniã aũt eſt, vt baſis F G H I K, ad baſin L M N,



[a] 6. quarti dec.

[b] 6. duodec.

LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriuſque eadem ſit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demõſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt, vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: [a] Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atq; adeo, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, [b] *ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra:* [c] *Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemq; ſphæræ, vt eſt linea potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum:* [d] *Item ita eſſe Dodecaedrũ ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri*

[b] 9. quartidecimi.

[c] 10. quartidec.

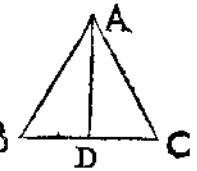
[d] 11. quartidec.

dri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 0. 11.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineę perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero *A* B C ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, perpendicularis *A* D. Dico quadratum lateris A B, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniã. n. ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erũt duo anguli B, & *D*, trianguli A D B, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, vel A B, *A* C, æqualia. [b] *Igitur &* reliqua latera B*D*, CD, æqualia ſunt; ac propterea latus B*C*, hoc eſt, latus A B, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cũ igitur quadrato rectæ *AB*, æqualia ſint quadrata rectarum AD, B D; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ B*D*; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum A D, B D, talium 1 erit quadratum rectæ B*D*, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ *AD*. Quare quadratum rectæ *AB*, partiũ 4, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ *AD*, partium 3. *Latus igitur* trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] *5. primi.*

[b] *26. primi*

[c] *47. primi*

COROLLARIVM.

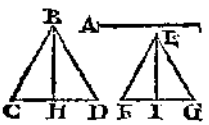
HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt B D, & C D, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam a perpendiculari A D. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & baſis BD, baſi CD, æqualis; Erunt et anguli B AD, C AD, æquales, id eſt, angulus B AC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari A D.

[a] 8. primi.

0. 13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphærę diameter Rationalis A. *Dico* tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphęra, eſſe Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphęrę, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera oppoſita CD, FG, perpendiculares BH, EI. [b] Quoniã igitur quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri BC, [c] & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6.4.3. [d] ideoque commenſurabilia erunt. Quare lineę ipſæ A, BC, EF, commenſurabiles exiſtent, ſaltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales *B* C, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.



[b] 13. tertiædecimi.
[c] 14. tertiædec.
[d] 6. decimi.

RVR-

RVRSVS, a quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectę BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, ſeſquitertium eſt; habebunt tã quadrata rectarum B C, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. b ideoque tam illa, quam hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam CH, ipſi BC, quam FI, ipſi EF, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. c Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoq; BH, EI, Rationales. d Quoniã vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. e cum oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tã CH, quam FI, qualium 3. eſt tam BH, quam EI,) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commenſurabiles: f Ac proinde tam rectangulum ſub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus cõtentum, Medium erit: Sunt autem triãgula BCD, EFG, æqualia rectangulis ſub CH, BH, & ſub FI, EI, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum C D, F G, duplę ſint baſium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri triangulo BCD, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum BCD, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo EFG, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum E F G, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphęrę diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quã Octaedri in ea ſphæra, Media.

Quod erat oſtend.

a 12. quarti decimi.
b 6. decimi.
c 12. dec.
d 9. decimi.
e 12. quarti decimi.
f 22. deci.

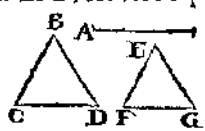
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub CH, BH, & ſub FI, EI, hoc eſt, triangula BCD, EFG, ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

10. 14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribãtur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

SIT ſphæræ diameter *A*, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ BCD; Octaedri vero baſis triangulũ EFG. *Dico* triangulum BCD, ſeſquitertiũ eſſe trianguli EFG; At vero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialterã ſuperficiei Tetraedri. [a] Quoniã n. quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri CD; duplũ vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt quaſi ũ partiũ 6. fuerit quadratũ diametri A, taliũ 4. ſit quadratum



[a] *13. tertiidecimi.*
[b] *14. tertiidec.*

dratũ lateris CD,& taliũ 3.quadratũ lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG:Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triãgulum BCD, ad triangulum EFG. (a quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habent laterum CD,FG, duplicatam, cum ſint ſimilia.)Igitur & triangulũ BCD,ſeſquitertium eſt trianguli EFG.

a 20. et 19. ſexti.

RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulum BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG;Ac propterea qualiũ partium 4.fuerit triangulum BCD, talium 3.eſſe triangulum EFG; Efficitur, vt triangulum EFG, octies ſumptum,hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earũdem partium 24;At triangulum BCD,quater ſumptum, id eſt,tota ſuperficies Tetraedri, earũdem partium 16.Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphęræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

0. 15.

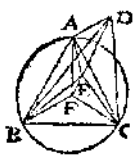
RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad dictam baſim.

SIT Tetraedrum ABCD, cõtentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus *A*BC, DA*B*, DB*C*, DC*A*, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E,centrum ſphæræ recta DEF, incidens in baſim ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis *A*BC,& DF,perpendicula



rem

rem eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex cẽtro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & baſes AD, CD,



æquales, cum ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. a Igitur anguli AED, CED, æquales erũt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquialent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, ſi conſiderentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, triãguli EAF, æqualia ſunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipſis contenti, oſtenſi æquales; c Erunt baſes FA, FC, æquales. Sic quoq; æquales erunt FB, FC, ſi conſiderentur triãgula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales; d erit F, centrũ baſis ABC, ſeu circuli eam circumſcribentis.

a 8. primi.
b 13. primi
c 4. primi.
d 9. tertij.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli ABC, demiſſa in centrum circuli cadit; effi citur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis ſit ad planum circuli, ſeu baſis Tetraedri ABC. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque ſit demonſtratum centrum eiuſdẽ circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra, quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

D. 16.

OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æqua-

æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis vero vtriuſque eſt quadratũ ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in ſphæra deſcriptum, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, q̃ æquales ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphęrę, ductæ videlicet e cẽtro ad ſuperficiẽ ſphęrę: [a] qm quadratum diametri ſphęrę duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri, AG, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphęræ talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratũ rectę AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cũ ergo quadratum rectæ AG, æquale ſit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; [b] Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGB, recti. [c] Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectũ erunt cõiunctæ; [d] atque adeo rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtẽt plano; [e] Ac propterea rectæ earũ extrema cõnectentes AB, BC, CD, DA, in eodẽ plano erunt cũ ipſis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrũ in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum baſis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides ęquales ſunt & ſimiles ex defin. 10. lib. 11. cũ quælibet conſtet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia ſũt & ſimilia, & baſi cõmuni ABCD. Dico iam earum altitudines eſſe ęquales, & baſin ABCD, eſſe quadratũ ſubduplum



[a] 14. tertij decs.

[b] 48. primi

[c] 14. primi.
[d] 2. vndec.
[e] 7. vndec.

duplũ quadrati diametri ſphæræ. Quoniam.n. oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri AB, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; [a] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis AG, DG, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, [b] ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, DG, ductum, nempe ad baſin pyramidum. Quare E G, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus FG, altitudinem eſſe pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia AC, eſt diameter ſphæræ; [c] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ AD, DC. [d] Quare angulus ADC, rectus eſt: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere octaedri AB; [e] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 48. primi

[b] 4. undec.

[c] 14 tertij dec.

[d] 48. primi

[e] 12. tertij dec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propoſitionẽ demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur a Campano, nõ habita ratione conſtructionis octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

0. 17. THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum.

ſitum ad Octaedrum in eadē ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri,& ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphæræ.

VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadē ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quę potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earūdem triū quartarum partium lateris tetraedri contentum,ad quadratum diametri ſphærę.

SIT Tetraedrum ABCD,& octaedrum EFGHIK, in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo *D*,per centrum L, diameter ſphæræ D *M*, incidens in baſin A B C, ad punctum N.[a] Erit igitur N, centrum baſis *ABC*, & DN, perpendicularis ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri,eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll.2.propoſ.13.lib.13. Erit DL, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; *Ac* propterea D N, talium 4. *D*ucatur deinde, ex ſcholio propoſ.15.lib.11.per centrum L,planum OPQ, paralle lum

[a] *15. quartadecimi*

[16. vnde.] lũ plano ABC; Eruntq; rectæ QO, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac ppea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, [b] cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulũ erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sũt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. [c] Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, [d] ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, [d] cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hęc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt cõstat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex ppos. 2. lib. 8. [e] Rursus, [e] quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triãgulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RV. [f] Eritque latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectę DP, taliũ 27. erit quadratum rectæ RV: Erat autem earũdem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintiseptẽ sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, vt

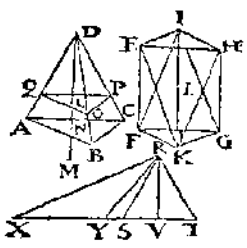
[10. vnde.]
[17. vnde.]
[8. duode.]
[20. sexti.]
[12. quarti dec.]

Y, vt ſit TY, talium partium 32. qualium 27. eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe ſeſquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27. eſt ſeſquitertia.) Ac propterea qualium partium TY, eſt 32. Quare linea TY, cõtinet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK, vt rectãgulum cõtentum ſub recta RV, (q̃ põt vigintiſeptẽ ſexageſimas quartas partes quadrati lateris DC) & ſub recta TY, (q̃ cõtinet octo nonas partes eiuſdẽ lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

CVM enim ductis rectis RX, RY, triãgulum RTX, [a] duplum ſit triãguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY: [b] Eſt autem & rectangulum ſub RV, TY, duplum eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo ſub RV, TY. [c] Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idẽ triangulum RST: [d] Eſt autẽ triangulum RTX, ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectãgulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD: At vero vt triangulũ QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nã cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planũ QOP, ex ſcholio prop. 14. lib. 11. ideoq; ſphæræ ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: [e] Octaedrum autẽ EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarũ baſis cõis quadratum EFGH, dimidiũ quadrati diametri ſphęręs & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſch. pp. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidẽ EFGHI; Ac propterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratũ diametri

[a] 1. ſexti
[b] 41. primi
[c] 7. quinti
[d] 1. ſexti
[e] 16. quarti decimi.

metri ſphæræ DM, ita pyramis QOI D, ad duplum pyramidis EFGHII, hoc eſt, ad Octaedrũ EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt re ctangulum ſub RV, potente viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC & ſub T Y, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitũ ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

QVONIAM vero De, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC *: ac proinde,* [a] *cum recta* RT, *ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV; erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32. qualium 27. ST, ſeu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare cõſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum* EFGHIK, *vt rectangulum ſub* RV, *quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

[a] 12. quartadecimi

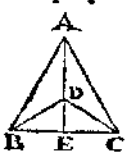
0. 17.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppo

oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro triāguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum *ABC*, cuius centrum *D*. Ducatur ex *A*, per *D*, recta *AE*, quæ perpendicularis erit ad *BC*, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico *AE*, triplam eſſe rectæ *DE*, quæ ſcilicet perpendicularis eſt e centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis *BD*, *CD*, cum latera *DA*, *DB*, trianguli *ADB*, æqua lia ſint lateribus *DB*, *DC*, trianguli *BDC*; (e cẽtro enim ducuntur;) ſit autem & baſis *AB*, baſi *BC*, æqualis: Erunt triangula *ABD*, *BDC*, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula *ADB*, *ADC*. Quare ob æqualitatem trium triangulorum *ADB*, *BDC*, *CDA*, triangulum *ABC*, triplum eſt trianguli *BDC*. Quoniam vero rectangulum ſub *AE*, *EB*, triangulo *BDC*; & rectangulum ſub *DE*, *EB*, triangulo *BDC*, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſis trianguli *BC*, dupla ſit baſis *BE*, vtriuſque rectanguli: Erit quoque rectangulum ſub *AE*, *EB*, triplum rectanguli ſub *DE*, *EB*: Eſt autem vt rectangulum ſub *AE*, *EB*, ad rectangulum ſub *DE*, *EB*, eiuſdē altitudinis *EB*, ita baſis *AE*, ad baſin *DE*. Igitur & *AE*, tripla eſt ipſius *DE*. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendum.



a 1. ſexti

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE; qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundē partiū 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

EX quibus rurſus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam eſſe.

0. 17. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum ſphæræ inſcribatur; erit ſemidiameter ſphęrę potentia tripla eius perpendicularis, que ex centro ſphærę in baſin quamcunque octaedri ducitur.

SIT baſis aliqua octaedri *in* ſphera, *cuius* centrum D, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, *in* quod e centro ſphęræ *D*, perpendicularis demittatur DE; ducaturque ſemidiameter ſphærę *DB* Dico ſemidiametrum DB, potentia *triplam eſſe* perpendicularis DE. Cum enim ex corolli. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpẽdicularis DE, *in* centrum circuli ſphæræ, qui triangulum *ABC*, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; [a] quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphęrę DB, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partiũ 12. erit quadratum lateris *AB*, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ DB, 3. [b] Quia vero quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris *AB*. Quare [c] cum quadratũ rectæ *DB*, æquale ſit quadratis rectarum BE, DE; ſit autem quadratum rectæ *DB*, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum ſphæræ *inſcribatur*, &c.



[a] *14. tertij dec.*

[b] *12. tertij dec.*

[c] *47. primi.*

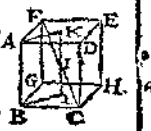
THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

o. 18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphęrę deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphęra collocati: Perpendicularis autem a centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, ęqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum I ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam baſin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem eſſe dimidio lateris cubi. Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi, id eſt, toti ſuperficiei cubi.



[a] 15. tertij dec.

PRODVCTA autem KI, ad baſin oppoſitam BCHG, vſque in punctum L; cum KL, recta ſit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. Rurſus, [b] quia AB, KL, parallelæ ſunt, quod rectæ ſint ad planum AE; ducatur per ipſas planum faciens in planis oppoſitis parallelis AE, BH, communes ſectiones, lineas rectas AK, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter ſe; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniã vero perpendicularis KL, e cẽtro ſphęræ I, cadit in baſes AE, BH, ad pũcta K, & L, erũt K, & L, cẽtra circulorũ dictas baſes ambientiũ in ſphæra, per coroll. lẽmatis 1. prop. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariã ſecabitur a dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. oſtendimus; Ac propterea

[b] 6. vndec.

[c] 16. vnde.

cum KL, oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, ſolidum, quod ſit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſſe cubo. [a] *Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphæræ;* [b] *Perſpicuum autem eſt, ſolidum, quod ſit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe ſolido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiæ parti quadrati diametri ſphæræ, eo quod dicta ſolida habeat et baſes, et altitudines æquales. Itaq; cum dicta duo ſolida compleant totum cubum, manifeſtum eſt, id, quod ſit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum.*

[a] 15. tertij. dic.

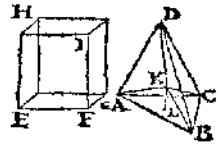
[b] 31. vndec.

ALITER proponi poteſt hoc corollarium, vt dicamus, ſolidum, quod ſit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphæræ: Vt perſpicuum eſt.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem ſolidum, quod ſit ex perpendiculari e centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sic enim, corpus regulare quodcunque

tunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, ſolidum autem EFGH, cõtentum ſub EI, tertia parte ſuperficiei corporis ABCD, & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad baſin ABC. Dico ſolidũ EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nã ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint; ipſi æqualiter a centro diſtabunt, per lemma 2. propoſ. 15. huius lib. Ac propterea perpẽdiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contẽtum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplũ eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.

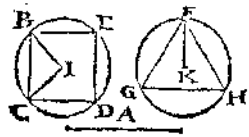


THEOR. 21. PROPOS. 21. 0. 11.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eũdem circulum cir-

cumſcribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc eſt, circulos BCDE, FGH, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint. n. rectæ e cẽtris IB, KF. [a] Quia igitur quadratum diametri A, triplũ eſt quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadrantem;) [b] Ac proinde quadratum rectę BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectę BI (qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A. talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratũ rectæ BI. Rurſus [c] quia quadratum diametri A, duplũ eſt quadrati lateris octaedri FG; [d] & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectę FK, ex cẽtro ductę; qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & taliũ 1. quadratum rectę FK. Cum igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectę BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipſę, & circuli ex ipſis deſcripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 15. tertij decimi.

[b] 47. primi.

[c] 14. tertij dec.

[d] 12. tertij dec.

COROLLARIVM.

HINC ſit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorũ, qui baſes oppoſitas tam cubi, quam octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex cẽtro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorũ ipſas circũſcribẽtiũ, ex coroll. lẽmatis 1. prop. 10. huius lib. qui cum ſint æquales oſtenſi, æquilater diſtabunt a centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitorum baſium connectunt. (Nam ſi producantur, perpendiculares

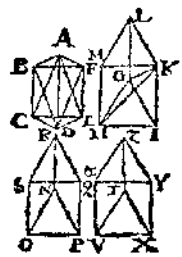
[e] 31. quarti dec.

lares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. propterea quod parallela ſunt oppoſita baſes in octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodũ & oppoſitæ baſes cubi parallela ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod eſt propoſitum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

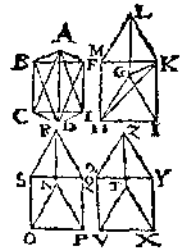
SI octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphære inſcribantur; Erit octaedrũ ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem ſphæra inſcriptum ſit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus *BF*, ad latus *HI*. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus cõmune eſt ipſa diameter AD, & vertex cõmunis A, nẽpe in BCDA, cuius baſis BCD; in BDFA, cuius baſis BDF; in CDEA, cuius baſis CDE; & in DEFA, cuius baſis DEF; quæ quidem omnes baſes infra quadratum BCEF, exiſtunt cõtinentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniã vero quælibet harum pyramidũ conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorũ cõe eſt *AD*, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtũt, *inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum cõtineãtur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus Cõſtitua-



* 8. primi.

tur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedi triplum erit, per coroll. 1 propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. a Quũ igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex iis, quę ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. prop. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrũ.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia vero priſma TVXYZα, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadem quę octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrũ ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinẽ tetraedri: Eſt autẽ altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarũ coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpẽdiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atq; vt latus cubi ad altitudinẽ tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nã *tam quadratum lateris* cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quã quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito. n. quadrato diametri ſphærę 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex prop. 15. lib. 13. & quadratũ altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2 pp. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratũ altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphærę 6. b erit quadratum lateris octaedri 3.



a 14. *quartidecimi*

b 18. *tertiidec.*

&

& quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandũ erat.

COROLLARIVM.

*EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. * Nam & quadratum diametri ad quadratũ lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.*

* 13. tertij dec.

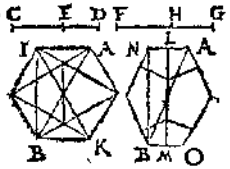
THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptum Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde

de Icoſaedri oppoſita AI, B K, connectantur recta I B, quæ ſubtendet unum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus cõpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. [a] erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cũ ſint inter ſe æquales, (Ducta enim alia diametro I K; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia ſint lateribus KB, BI; & baſes quoque AB, IK, æquales; [b] Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt; [c] ideoque quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, ſit maius ſegmentum ipſius CD, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius IB, ſimiliter diuiſæ; [d] Nam IB, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt IA, latus Icoſadri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, [e] maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi IA, lateri Icoſaedri. [f] Cum enim ſit vt CD, ad C E, ita IB, ad IA; [f] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectę CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ IA: Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [g] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

[a] 29. primi.



[b] 8. primi.

[c] 47. primi

[d] 8. tertij dec.

[e] 2. quarti dec.

[f] 22. ſexti.

[g] 14. quinti

RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita AN, BO, ſecẽtur bifariã in L, & M punctis quæ recta LM, & ipſa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales,

æquales, parallelę ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13., erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Eſt autem recta LM, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, [b] Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale ſit poſitum quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, ſit minus ſegmentum ipſius FG, ſectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt, ipſius LM, ſimiliter diuiſę, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. ęquale erit HG, minus ſegmentũ ipſi NA, lateri Dodecaedri Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus CE, maius ſegmẽtum æquale eſſe ipſi IA, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 33. primi

[b] 47. primi

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphera deſcripti duplum minoris ſegmenti.

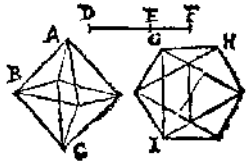
POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius ſegmentum DE, & minus EF, rectę DF, ſectę extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem ſphęrę inſcriptum Icoſaedrum GHI, cuius latus GH, & ſubtendens angulũ pẽtagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter HI. Dico quadra-

quadratum lateris G H, duplum eſſe quadrati minoris ſegmenti EF. Cum enim GH, ſit latus pentagoni, cuius vnum angulum ſubtendit recta GI; [a] erit GH, maius ſegmentum ipſius G I, diuiſæ extrema ac media ratione;

[a] 8. tertij de.

[b] 5. tertij decimi.

[c] 47. primi



[b] Ac proinde compoſita recta ex GI, GH, ſecabitur ſimiliter in G, puncto extrema ac media ratione, [c] Quia vero quadratũ diametri HI, æquale eſt quadratis rectarũ GI, GH, quod angulus IGH rectus ſit, vt in præcedenti propoſ. oſtenſum eſt; & quadratum lateris A B, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris A B, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarũ DE, EF: [d] Eſt autem quadratum diametri H I, duplum quadrati lateris octaedri A B. Igitur & quadrata rectarum G I, G H, dupla ſunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita eſt quadratũ rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (Nã cũ ſit vt GI ad GH, ita DE, ad EF. [f] Erit quoq; vt quadratũ rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratũ rectæ DE, ad quadratũ rectæ EF; & cõponendo, vt quadrata rectarum GI, GH ad quadratũ rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF. Et permutãdo, vt quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum DE, E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ G H, duplum quoque eſt quadrati rectæ EF. Quare ſi latus Octaedri potuerit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod erat oſtendendum.

[d] 14. tertiidecimi.

[e] 2. quartidecimi.

[f] 22 ſexti.

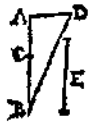
THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuiſa extrema ac media ratione cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubten-

datur:

datur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius B D. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua A D, vel A C, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propos. 17. lib 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmẽtum AC, vel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphęrę potentia tripla maioris segmenti B C, nempe lateris cubi:[a] Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphęrę, æquale erit quadratis rectarũ AB, AD, hoc est, quadrato rectę BD; Ac proinde recta B D, diameter est sphæræ.[b] Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta B D, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 4. tertiide.

[b] 14. tertijdec.

COROLLARIVM.

[c] *QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi B C, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, vt constat ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum B C, sit ma-*

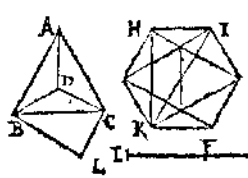
[c] 18. tertijdec.

ius ſegmentum, & AD, minus recta AB, extrema ac media ratione diuiſæ: Perſpicuum eſt, ſi linea quauis recta (nimirum BC,) ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum (nimirum AD,) eſſe latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineę rectæ extrema ac media ratione ſectę: latus Icoſaedri eidem ſphęræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius ſegmentum EF, & minus FG, rectę EG, diuiſæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icoſaedri HIK, eiuſdem ſphęrę. Dico HI, rectâ potẽtia eſſe ſeſquialteram minoris ſegmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, connectaturque recta IK, diameter.



[a] Quia igitur HI, eſt maius ſegmentum rectæ HK, diuiſę extrema ac media ratione; [b] Erit quoque compoſita KHI, diuiſa eodem modo in H, maiuſque ſegmentum HK, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulũ BCL, ita vt BL, recta ipſi EF, & CL, ipſi FG, ſit æqualis, [d] Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt, rectas EF, FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus, vt propoſ. 23. huius lib. oſtendimus; Eſique

[a] 8. tertij dec.
[b] 5. tertij dec.
[c] 22. primi & 48. primi

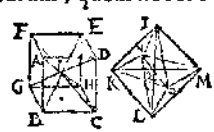
[a] Eſtque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [b] Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula ſunt, [c] Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CK: [d] Atqui IK, diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & H I, latus Icoſaedri erit potentia ſeſquialterum ipſius CL, hoc eſt, minoris ſegmenti FG. Si latus itaque Tetraedri poſsit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 2. quarti. dec.
[b] 6 ſexti.
[c] 4. ſexti.
[d] 13. tertiædec.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphęra deſcriptum, eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

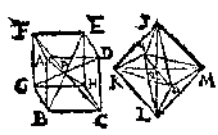
SINT in eadem ſphæræ cubus A B C D E F G H, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eâ eſſe proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad ſuperficiem Octaedri; nec nõ, quam habet cubi latus ad ſemidiametrum ſphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, reſoluetur cubus in ſex pyramides æquales, quod habeant & baſes æquales, & altitudines, (Cum enim circuli deſcripti circa pyramides, ſeu cubi baſes æquales, ſint æquales, ac propterea æqualiter a centro ſphæræ diſtent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob cauſam. Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triãgulum; æqualiter diſtabũt baſes pyramidũ cubi,



[e] 21. quartidecimi

& Octa-

& Octaedri a centro ſphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi,& Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs,quæ in ſcholio propoſ.4. lib.5. demonſtrauimus, vt ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe,ad pyramidem Octaedri,ita ſextuplum baſis pyramidis cubi,ſuperficies videlicet tota cubi,ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoque rurſus,ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum,ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur

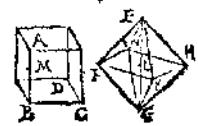


SINT rurſus in eadē ſphæra cubus ABCD,& Octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex ſemidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum,in quas Octaedrū ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. [a] ſeſquialterum eſt quadrati BD,lateris cubi BC: Eſt autem & recta AB, recta BM, ſeſquialtera,ex conſtructione;reciprocabuntur baſes IFKH, BD,& altitudines AB,BM: [b] Ac propterea parallelepipedum ſuper baſim IFKH,& ſub altitudine BM,æquale erit parallelepipedo ſuper baſim BD, & ſub altitudine AB,nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL,rectæ EN, tripla eſt;erit & parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine EN, vt in ſcholio propoſ.14. lib.12.oſtendimus:Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IFKHE,ex corollario 1. propoſ.7. lib.12 Igitur pyramis IFKHE,æqualis erit parallelepipedo ſuper baſim IFKH,& ſub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper

[a] 18. tertiædecimi.

[b] 34. vndec.

ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, [a] ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis EN.



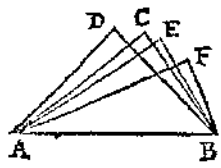
[a] 16. quartidecimi

Item Octaedrum EFGHIK, duplum eſt pyramidis IFKHE. Aequale igitur erit parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, æquale eſt oſtenſum cubo ABCD; Et parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVIA demonſtratum eſt [b] *diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialterã potentia lateris Tetraedri, ita vt, ſi quadratũ diametri ponatur 3. partium, earũdem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; per ſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratũ duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtẽdimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodẽ ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratũ lateris*

[b] 13. tertiædec.



Tetraedri. Vt si diameter sphæræ ponatur A B, *ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ* AC, *continens duas tertias partes, quadrati diametri* AB; *Vel si constituantur duo quadrata rectarum* AC, BC, *quadrato diametri* AB, *æqualia, ita vt quadratum rectæ* AC, *duplum sit quadrati rectæ* B C; Erit *recta* AC, *latus Tetraedri.*

a 14. tertij dec. *RVRSVS* a *cum ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri* AB, *dematur quadratum rectæ* A D, *quod dimidium sit quadrati diametri* AB; *Vel si constituantur duo quadrata rectarum* AD, BD, *quadrato diametri* A B, *æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis, secundum doctrinam scholij propos. 33. lib. 6. rectam* AD, *latus esse Octaedri.*

b 15. tertij decimi. *DEINDE,* b *quoniam docuimus, diametrum sphæræ potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri* A B, *auferatur quadratum rectæ* BC, *quod tertia pars sit quadrati diametri* AB; *Vel si quadrato diametri* AB, *cõstruantur duo quadrata æqualia rectarum* AC, BC, *ita vt quadratum rectæ* AC, *duplum sit quadrati rectæ* BC, *iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam* B C, *cubi latus existere. Vel certe cum diameter* A B, *possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri* A B, *auferatur quadratum lateris Tetraedri* AC, *relinqui quadratum lateris cubi* BC: *Quemadmodum e contrario, si ex quadrato diametri* A B, *tollatur quadratum lateris cubi* BC, *remanet quadratum lateris Tetraedri* A C.

PRAETEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum c; *Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri* AB, *exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum* A E, BE, *proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmen-*

c 23. quarti idec.

segmentum; Rectam minorem B E, *esse Icosaedri latus.*

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totã aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; [a] *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri A B, constituantur duo quadrata æqualia rectarum A F, B F, proportionem habentium, quam quæcunq; recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam* B F, *latus esse Dodecaedri.*

[a] 23. quartidec.

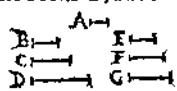
HACTENVS ergo Hypsicl s, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt: Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adijciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineę rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectę A, B, C, D, continue proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt *A*, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertię ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secũdę ad

ſecundam,& proportionem D,ad G, quartæ ad quartã, eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10.lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B,ad rectam A ; [a] habeat autem & quadratum



rectæ B,ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B,ad rectam A: Erit vt recta C,ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, vt recta F,ad rectam *A* , ita quadratum rectæ *E*, ad quadratum rectæ A: Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A , ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur eſt quadratum rectę B , ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam *A*; & quadratum rectæ A , ad quadratum rectæ E, vt recta *A* , ad rectam F;

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

Erit ex æquo quadratum rectæ B , ad quadratum rectæ E, vt recta C, ad rectam F: [b] Eſt autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B , ad rectam E . Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata eſt proportionis rectæ B , ad rectam E. Quod eſt primum .

RVRSVS cum recta D, ad rectam *A*, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [c] habeat autem & cubus rectæ *B*, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectã A, ita cubus rectæ B , ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectã A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A ; Et conuertendo vt recta *A* , ad rectam G , ita cubus rectę A , ad cubum *E*. Quia ergo eſt cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ *A*, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectę E, vt recta D, ad rectam G: [d] Eſt autem proportio

Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E, Recta G,

[a] *10. ſexti.*
[b] *20. ſexti*
[c] *33. vnde.*
[d] *33. vnde.*

portio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata eſt proportionis rectę B, ad rectam E. Quod eſt ſecundum. Itaque ſi ſint quatuor lineę rectæ, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

HOC idē demonſtrauimus ad propoſ. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitū BC, recta perpendicularis AD, quæ bifariam ſecabit latus BC, vt in coroll. propoſ. 12. huius lib. demonſtratum eſt; Ac propterea B D, dimidium eſt lateris AB. [a] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris AB, ad triāgulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris AB, ad rectam E. Cum enim rectangulo ſub AD, BD, æquale ſit triangulum ABC, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. [b] Sit autem eidem rectangulo ſub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum ABC, & quadratum rectæ E. [c] Quoniam uero quadratum late-



[a] *13. ſexti*

[b] *17. ſexti*

[c] *20. ſexti*

ris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E; Conſtat, quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.

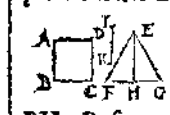
COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter AD, DB, æquale eſſe triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpẽdicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiuſuis ABCD, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E ad latus oppoſitum FG, deducta diuidens FG, lat s bifariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem EH. Poſita enim inter EH, FH, media proportionali IK; cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum ſit quadrati



[a] 18. tertij dec.

quadrati lateris cubi AB, [a] ſit autem & duplum rectanguli ſub latere EF, & dimidio eius FH, eo quod dictũ quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum ſub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; [b] Ac propterea AB, media proportionalis erit inter EF, FH, hoc eſt, tres rectæ FH, AB, EF, cõtinue erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales, ex conſtructione. Igitur cum omnium antecedens ſit FH, [c] erit proportio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiã, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cum & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectę IK, hoc eſt, ad triangulum EFG, (eſt enim ex coroll. propoſ 29. huius lib. quadratum rectę IK, æquale triangulo EFG,) [d] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulũ Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphera deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 1. ſexti.
[b] 17. ſexti.
[c] 28. quarti dec.
FH. AB. IK. EF. EH.
[d] 20. ſexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis vero, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulũ ABC, & altitudo, ſeu axis Tetraedri DE, latuſq; cubi eiuſdẽ ſphęrę F. Dico latus Tetraedri AB, eſſe potẽtia ſeſquialterũ axis DE: Axem vero DE, potentia ſeſquitertiũ lateris cubi F. Nã circa

[a] 5. quarti.



triangulum, deſcripto circulo A B C; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur A D, ſemidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratũ lateris A E, hoc eſt, lateris A B, [b] æquale eſt quadratis rectarum A D, D E, [c] & triplum quadrati ſemidiametri A D; Fit, vt poſito quadrato lateris A B, ſeu A E, partium 6. quadratum rectę A D, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

[b] 47. primi
[c] 12. tertiidec.

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, [d] potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris A B; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis DE. Igitur quadratum axis D E, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

[d] 13. tertiidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, poſito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri ſphęræ talium partium eſt 9. [e] *quod diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Earundem uero partium 4. oſtenſum eſt quadratum axis DE; perſpicuum eſt, diametrum ſphęræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde,* [f] *cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri. Seſquialteræ enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. appareat. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propoſ. 13. lib. 15.*

[e] 13. tertiidecimi.

[f] 20. ſexti

COROL-

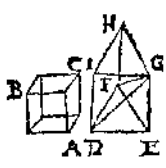
COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita eſſe axem, ſeu altitudinẽ Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. Quia videlicet tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad latus oppoſitum deductæ, quam ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi. [a] 12. quartidec.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidẽ ſphæræ inſcripti.

DESCRIBANTVR in eadem ſphæra cubus *ABC*, & Tetraedrum *DEFG*. Dico cubum Tetraedri eſſe triplum. Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [b] Quoniam igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendiculam ex angulo quouis baſis DEF, ad latus oppoſitum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendiculare dictam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, ſeu priſmatis ABC; Erit baſis priſmatis ABC, ad baſim priſmatis DEFGH, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 9. lib. 12. demonſtrauimus, æqualia erunt priſmata *ABC*, DEFGHI, cum ipſorum baſes & altitudines reciprocentur. Atqui priſma



[b] 30. quartidec.

ma DEFGIII triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiuſdem tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphęræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM

VNDE priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Oſtenſum enim eſt, cubum ABC, æqualem eſſe priſmati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

ET SOLIDORVM QVINTVM vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus

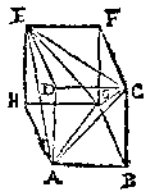
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

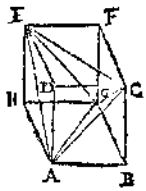
IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFG*H*, oporteat deſcribere pyramidẽ, ſeu tetraedrũ. *A*b vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarũ extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus baſibus. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potẽtia duplæ ſint



late-

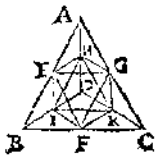
laterum æqualium quadratorum, vt in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; perſpicuum eſt, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; ac propterea pyramidem, ſeu tetraedrum conſtitui ex ipſis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur, manifeſtũ eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptũ, ex defin. 31. lib 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.



2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum deſcribere.

SIT in pyramide, ſeu tetraedo *A* B C D, deſcribendum octaedrum. Diuiſis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis E F, F G, G E, *H*I, I K, *K*H, E I, *I*F, F K, KG, GH, H E, cõſtituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, ſupra planum EI*K*G; quatuor autem IFE, EFG, GF*K*, *K*FI; infra idem planum cõſtituunt. Quoniam vero latera AE, *A*H trianguli *A*EH, æqualia ſunt lateribus AG, A*H*, triãguli AGH, quod ſint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, G A H, æquales, quod ſint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: æquales erunt baſes EH, G H. Eademque ratione æquales erunt rectæ E H, H I, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin 31. lib. 11.



* 4 primi.

intra

intra tetraedrum deſcriptum eſt; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex conſtructione. In data igitur pyramide octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

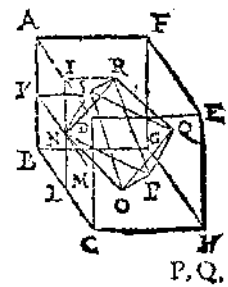
QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt æqualia, ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecãtia, vt in coroll. 1. prop. 14. lib. 13. demonſtrauimus; quorum quodlibet pyramidem A B C D, ſecat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipſam diuidit in pyramidem H I K D, & priſma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI, & priſma EFCGKI; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe æqualem, & priſma priſmati: [a] *Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem A B C D.) Manifeſtum eſt, ſi in tetraedro octaedrum inſcribatur, tetraedrum bifariam ſecari tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant.*

[a] 3. duo de.

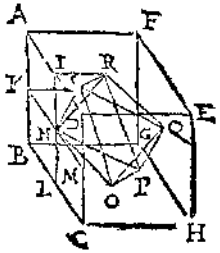
PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

IN dato cubo octaedrum deſcribere.

DESCRIBENDVM ſit octaedrum in cubo dato A H. Diuidãtur latera baſis A B C D, bifariã in punctis I, K, L, M, quę connectantur rectis IL, KM, ſecantibus ſeſe in N, pũcto, quod quidem centrum eſt quadrati A B C D, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum baſium centra O,



P,Q,R,S. Erunt igitur omnes rectæ, ex dictis centris ductæ ad media puncta balíú, cuiuſmodi ſunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, ſeu quadratorum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Poſtremo ſi præfata centra coniungantur quodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planú NOQR; quatuor autẽ OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AE; [a] angulus NIR, æqualis ſit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidiũ lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris.



[a] 15. vnd.

[b] 4. primi.

centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

ALITER. [a] In cubo dato inscribatur pyramis; [b] In hac deinde pyramide Octaedrũ figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propos. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonstratione propos. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi; atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

[a] 1. quintidecimi.

[b] 2. quintidecimi

COROLLARIVM.

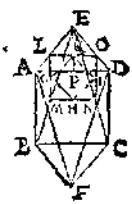
QVIA vero diametri Octaedri in cubo descripti NQ, RO, si ducerentur, se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarũ: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum se se mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

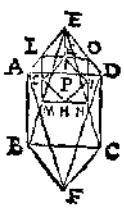
IN dato octaedro cubum inscribere.

DATVM octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangulę continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli octaedri, & quęlibet duę octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triãgula vero ęquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quę ducantur



rectę

rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus *AB*, BC CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, cõmune triangulis EMN, NEO; & denique EO, cõmune triãgulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triãgulũ LME, triãgulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostẽdemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sũt.



[a] Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; [b] Est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum [d] parallelum est plano ABCD; ipsa quoque inter se parallela erunt, atq; adeo, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12. lib.

[a] 18. quinti.
[b] 2. sexti.
[c] 10. vnde.
[d] 15. vnde.

12.lib.13. [a] Erunt & baſes KL, KO, æquales. hoc eſt, recta LO, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam ſecabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum ſint laterũ quadrati LN, dimidia, æquales inter ſe erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [b] æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; ([c] cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus ſint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propoſ 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus GKI; Eademq; ratione recti erũt anguli KGH, GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi

[b] 4. primi

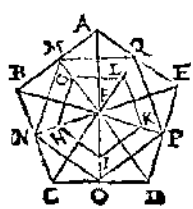
[c] 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

5.
6.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pẽtagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices vero, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius baſis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF,



CDF, DEF, EAF, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectâtur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. bifariâ ſecabũt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales ſint, quę cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. Cum enim latera FB, BM, trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia ſint, continentque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; erunt baſes FM, FN, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam vero & rectę FG, FH, FI, FK, FL, nimirum ſemidiametri circulorum ęqualium triangula æquilatera æqualia circũſcribentiũ, ęquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quã anguli BNM, MNO, ONC, æquales ſunt duobus rectis. Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplę ſunt ipſarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll propoſ. 18. lib. 14. parallelæ erunt



a 4. primi.
b 8. primi.
c 4. primi.
d 4. primi.
e 13. primi.
f 4. primi.
g 2. ſexti.

læ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ, QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt.[b] Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntque in recta HI; ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 10. vnde

[b] 15. vnde.

COROLLARIVM.

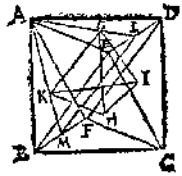
ITAQVE cum omes rectæ e centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atque adeo eorundem diſtantiæ exiſtant a centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemm. 2. eiuſdem propoſ. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

o. 5.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in octaedro *ABCDEF*. In pyramide octaedri ſuperiori ABCDE, ſumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerſo ſibi reſpondentium AED, BEC; *Item in pyramide inferiori ABCDF*, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerſo quoque ſibi correſpondentium CFD, AFB: quæ quidem centra coniũgantur ſex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, vt fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, ſecantes latera oppoſita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, [a] quæ ipſi *BE*, vel *FD*, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales ſint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ DE, BF, oppoſitorũ in quadrato EF.



[a] 33. primi

Quoniam vero rectæ AL, AM, ſectæ ſunt proportionaliter in G, & K, pũctis, quod AG, AK, dupla ſint ipſarum GL, KM, ex coroll. propoſ. 18. lib 14. [b] Erunt GK, LM, parallelæ; [c] Ac propterea, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triãgula ALM, AGK, ſimilia. [d] Quare erit vt AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, vt AL, ad AG, ita LM, ad GK: Eſt autẽ AL, ipſius AG, ſeſquialtera; quod GL, ſit tertia pars ipſius AL, ideoque AG, eiuſdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc eſt, ipſi æqualis DF, ſeſquialtera erit ipſius GK. Hac eadem arte oſtẽdemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentiũ ſeſquialtera eſſe latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes inter ſe eſſe æquales, hoc eſt, triangula æquilatera æqualia ex ipſis confici,

[b] 2. ſexti.
[c] 4. ſexti.
[d] 18. quartidecimi.

confici, ideoque Tetraedrum cõſtitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor baſium octaedri, deſcriptum erit ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

ALITER. [a] In octaedro dato inſcribatur cubus, [b] & in cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli conſiſtant in centris baſium octaedri; & in angulis cubi collocẽtur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

[a] 4 quinti-decimi.
[b] 1. quinti-decimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero oſtenſum eſt, vtramque GK, DF, parallelam eſſe ipſi LM; [c] *ac propterea & GK, ipſi DF, atque adeo ipſi BE, parallelam eſſe; Atque eadem ratione KH, ipſis FC, EA, parallelam eſſe;* [d] *Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum eſſe plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula; Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingula videlicet binis oppoſitis.*

[c] 9. vndec.
[d] 15. vnde.

COROLLARIVM II.

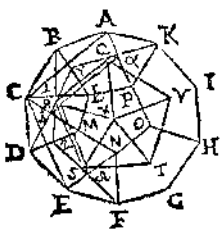
PRAETEREA, cum octaedrum circumſcribat & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptũ, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur; Atque adeo recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoceſt, ſphæræ circumſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, vt

conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

0. 7. IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VX, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuidunt latus oppoſitum BL, & ad angulos rectos, ideoq; in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdem propoſitionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant, (conſtat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus ſubtendere æquales.) Igitur Aα, Cβ, parallelæ ſunt rectæ BY; atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM; quæ æquales ſunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM,



a 28. tertij. b 28. primi g. vndec. c 4. primi.

DM, æqualia ſint, angulosque contineant æquales. Rectæ ergo ipſas connectentes AC, αδ, æquales erunt, & parallelę. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectę CL, EN, per centra R, S, rectę ducãtur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales eſſe ipſas CE, γδ: [b] Sunt autem AC, CE, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt verſus X, vt figura monſtrare videtur, ſed extrorſum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter cum & rectę Xα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales ſint, (NãYQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualiũ, qui nimirum pentagona æqualia circumſcribunt, [c] atque adeo æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, diſtantię ſunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulorum æqualium, [d] ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt,) [e] Erunt quoque anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales ſint; [f] æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorũ copulantes. Quare triãgula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri LM, OP, conſtituta, æquilatera erũt, & æqualia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtruantur: (Habet enim dodecaedrũ viginti angulos ſolidos.) quæ quidem latera habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 33. primi.
[b] 4. primi
[c] 14. tertij.
[d] 14. tertij.
[e] 8. primi.
[f] 4. primi.

o.
8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubum deſcribere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inſcribendus ſit cubus, *ALCDE*, *EFGHA*, *AHIKB*, *BKLMC*, conuenientia ad latus *AB*; duo quidem *ABCDE*, *ABKIH*, ſecundum latus idem commune *AB*; alia autem duo *AEFGH*, *BCMLK*, ſecundum angulos *EAH*, *CBK*. In his vero pentagonis ſubtendantur anguli *A*, *B*, *D*, *I*, rectę *EH*, *CK*, *CE*, *HK*, quadrilaterum efficientes *EHKC*. [a] Quoniam igitur rectæ *AE*, *BC*, æquales, auferũt ex circulo pentagonum *ABCDE*, circumſcribente arcus æquales; [b] Erunt ex ſcholio prop. 27. lib. 3. rectę *AB*, *CE*, parallelæ. Eademque ratione parallelę erunt *AB*, *HK*. [c] Quare & *EC*, *HK*, inter ſe parallelæ erunt; [d] Ac propterea rectæ *EH*, *CK*, quæ ipſas connectunt, parallelæ erunt, [e] in eodemque cum ipſis plano; ideoque parallelogrammum erit *EHKC*; quod dico eſſe æquilaterum. Cum enim omnia latera *AE*, *AH*, *DE*, *DC*, *BC*, *BK*, *IH*, *IK*, æqualia ſint, angulosque contineãt æquales, ex hypotheſi; [f] æquales erũt baſes *EH*, *HK*, *KC*, *CE*. Quia vero planũ *ECKH*, productum communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. propoſ. 10 lib. 14. circa quadrilaterum *EK*, deſcriptum; [g] Erunt tam anguli oppoſiti *E*, *K*, quam *C*, *H*, duobus rectis æquales; [h] Ac propterea cum oppoſiti *E*, & *K*, ſint æquales, necnon & oppoſiti *C*, & *H*; erunt omnes quatuor anguli *E*, *C*, *K*, *H*, recti. Quare *EK*, quadratum erit, collocans ſuos angulos in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pẽtagonis ſimiliter octo angulis octo alię rectæ ſubtendan-



[a] 28. tertij.
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 7. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 22. tertij.
[g] 34. primi.

dantur eodem ordine; cõstitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, [a] eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt; cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis resident. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum. [a] 4. primi.

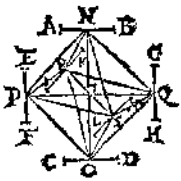
COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CE, ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9. O. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum AB, CD; EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. [b] Quo circa duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN,



[b] 4. primi.

[a] 4. primi

QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, [a] æquales erũt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineãtur; Ac proin de octo triãgula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentq; octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrũ descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pẽtagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, cõmuni pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex pũctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, EE, QM, EH; [b] quoniam Dodecaedrũ in sphera describitur; si planũ trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. Ac propterea angulus CAH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus osten-



[b] 17. tertij decimi

[c] 31. tertij

oſtendemus rectos eſſe angulos C R H, K R E, K Q E, R Q M, C Q H. [a] Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti æquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autẽ quadrata diametrorum æqualium C H, K E, R M, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarũ C K, K H, quadratis rectarum C R, R H, & quadratis rectarum K R, R E, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non & quadratis rectarum C Q, Q H. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium K H, R H, R E, Q E, Q M, & Q H, (Hæ enim rectæ cum ſubtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehenſos, [b] æquales ſunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum C K, C R, R K, K Q, R Q, & C Q; Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula C K R, C K Q, K R Q, R C Q, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt C K R Q: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrum.

[a] 47 primi

[b] 4. primi

ALITER. [c] In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur; [d] & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideant; perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[c] 8. quinti-dec.

[d] 1. quinti-decimi

PROBL. 11. PROPOS. 11.

O. 11.

IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

[e] DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrũ; [f] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cũ.n. anguli cubi reſideãt in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in cẽtris baſiũ Icoſaedri collocẽtur; tangẽt anguli cubi eadẽ cẽtra baſiũ Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quam ob rẽ in dato Icoſaedro cubũ deſcripſimus. Qd faciẽd. erat.

[e] 5. quinti-dec.

[f] 8. quinti-decimi

PROBL.

O. 12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

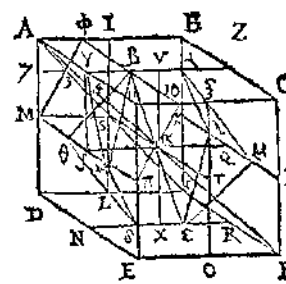
IN dato Icoſaedro [a] cubus deſcribatur, [b] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [c] Cum enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; [d] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri; Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 13. *quintidecimi*
[b] 1. *quintidec.*
[c] 11. *quintidec.*
[d] 1. *quintidec.*

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.

SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrum. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mπ, KP, NR, nuſquâ inter ſe coëuntibus, ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, ſed vna duntaxat, quæ rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ ſe mutuo in centro ϰ, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius lib. docuimus, ſuntq; lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia recta-



rectarum Y Z, M π, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, δ, κ, vt ſint maiora ſegmenta, Yβ, Zγ, Mδ, πκ, ductis rectis Yρ, Yκ, βδ, βκ. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & ρκ, ΣV, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: [a] Sunt autem quadrata rectarum YV, ΣV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, ρκ, tripla eiuſdem quadrati rectæ Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yρ, ρκ, æquale ſit quadratũ rectæ Yκ, [c] quod angulus Yρκ, rectus ſit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rurſus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [d] recta eſt ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus βYκ, ex defin. 3. lib 11. Ac propterea quadratũ rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ. (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam ſunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Yκ, triplum ſit oſtẽ ſum quadrati rectæ Yβ.) Ideoque rcum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit reca βκ, rectę Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplę proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Eſt autem & δκ, dupla ipſius ρκ, quod minora ſegmenta θρ, κρ, rectarum æqualium Mρ, πρ, æqualia ſint. [g] Erit igitur vt Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipſius Yβ, ad θκ, duplam ipſius ρκ: Eſt autem Yβ, maius ſegmentum ad ρκ, rectam minori ſegmento ΣV, æqualem, vt tota ad maius ſegmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit vt tota ad maius ſegmentum; Ac proinde θκ, erit maius ſegmentum rectę βκ, ſectę extrema ac media ratione. Eadem ratione oſtendemus θκ, maius eſſe ſegmentum rectę βθ, extrema ac media ratione ſectę, ſi nimirum ducatur recta Yϑ. Quare æquales erũt βθ, βκ, conſtituentes triangulum Iſoſceles βϑκ, ſimile illi, quod ab Euclide conſtructum eſt propoſ. 10. lib. 4. vt poſtea demonſtrabimus; Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βϑκ, circumſcribente deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 11. propoſ. lib. 4.

INTELLIGATVR iam planum trianguli βϑκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipſi Mϖ, parallela,) per parallelas Mϖ, φ 10. vt ſit planum extenſum φπ, occurrens

[a] 4. tertii decimi.
[b] 47. primi
[c] 29. primi.
[d] 4. vndec.
[e] 47. primi
[f] 20. ſexti
[g] 15. quinti

rens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipſi Aφ, parallela, connectaturque MS, [a] quæ parallela eſt vtrique Aφ, 73. Quoniam igitur, per coroll. prop. 4. lib. 6. triangulum A73 ſimile eſt triangulo AMS; [b] ac proinde vt A7 ad AM, ad MS, ita eſt A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erũt quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad Aφ, ita M7. ad 73. Eſt autem Aφ, maius ſegmentum rectæ MA, diuiſæ extrema ac media ratione. ([c] quod æquales ſint Aφ, Yβ, necnõ & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc eſt, 7A, maius ſegmentũ erit rectę M7. extrema ac media ratione ſectæ; [d] Ac propterea tota MA, diuiſa erit extrema ac media ratione in 7. maiuſque ſegmentum erit M7. [e] Atqui vt M7. ad 7A, ita eſt S3 ad 3A. Secta eſt ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiuſque ſegmentũ eſt S3. [f] Quia vero Sα T, parallela eſt ipſi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela ſit ipſi MS; ſi per Sα T, planũ ducatur parallelũ plano φπ, ducto per Mπ, [g] ſecabũtur rectæ AS, Aπ, in eaſdẽ rũnes, in punctis 3. & 4. Atque idcirco, cũ AS, ſecta ſit in 3. extrema ac media ratione, ſecta erit eodem modo Aα, ſemidiameter cubi, in 4. maiuſq; ſegmẽtum erit α4.

a 33. primi
b 4 ſexti
c 34. primi
d 5. tertij d.
e 2 ſexti
f 33. primi
g 17. vnde.

IISDEM argumentis oſtẽdemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, ſemidiametrum cubi ſecari in 9. pũcto extrema ac media ratione a plano φπ, vt perſpicuũ eſt, ſi cubus inuertatur, vt in hac figura ſecunda apparet. Sunt. n. lineamẽta omnino ſimilia lineamẽtis prioris figuræ, licet baſes cubi ſedes mutauerint, ita vt quadratũ AG, locũ quadrati HF; & quadratũ HF, locũ quadrati AC, obtineat in hac ſecũda figura. Qđ tñ in prima figura, ſine hac inuerſione probabitur ẽt hoc modo. Ducta diametro cubi HC, ſecta figu-

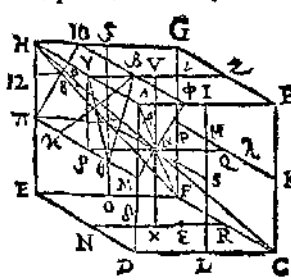
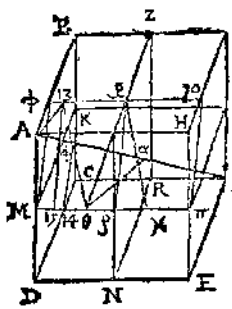


figura. (*Hęc deeſt in figura, quã tñ quilibet ducere poterit*) quã planũ $\phi\pi$, ſecet *in* 9. ppe pũctũ A; intelligaturq; per rectam AH, planũ plano $\phi\pi$, parallelũ. Quoniam igitur rectæ $A\alpha$, $H\alpha$, *in centro* α, conueniũt, ſecanturq; planis parallelis *in* punctis A, H, & 4, 9; erit vt α 4. ad 4 *A*, ita α 9. ad 9 H. Cum ergo αA, ſecta ſit *in* 4. extrema & media ratione, erit quoque α H, *ſimiliter* ſecta. quæ quidem demõſtratio locum etiã habet *in* hac cubi inuerſione *in* ſecunda figura. Oſtendamus nunc, ſi rectæ *iungantur* β 4. β 4, β 9. κ 9. rectilineum $\beta 4\kappa\beta 9$. in plano $\phi\pi$, exiſtens pentagonum eſſe æquilaterum, & æquiangulũ.

[a] *17. vnde.*

INVERTATVR rurſum cubus, vt quadrata $ADE H$, ABGH, quæ nimirũ continẽt triangulũ $\beta\vartheta\kappa$, ſiue planũ $\phi\pi$, hũc ſitũ habeãt, quẽ mõſtrat tertia hęc figura. Deinde in plano $\phi\pi$, recta cõiuncta ϑ 4. extendãt vſque ad rectã ϕ 10. in punctum 13. Quoniã igitur ducta recta K P, & iũctis rectis M K, π P, [b] planũ M P, parallelum eſt plano A G, (*quod & rectæ* P K, K M, *parallelę ſint rectis* GB, BA,) [c] ſecatq; cubũ bifariã; ideoq; per cẽtrũ α, trãſit, per ea, quæ in ſchol. prop. 39. lib. 11. oſtenſa ſunt; ſi per rectas α 4 *A*, & 4. 13. planũ extẽdatur, [d] fient $\alpha\vartheta$, A 13. cões ſectiones planorũ MP, AG, parallelæ, Ac proinde triãgula $\alpha\vartheta$ 4. α 13 4. æquiãgula erũt; [e] Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita ϑ 4. ad 4. 13. Quare cũ α A, *in* 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtẽdimus; eodẽ modo erit ſecta ϑ 13. *in* 4. Rurſus plano NZ, per centrũ α, tranſeũti, parallelũ ducatur planũ per punctũ 4. ex ſchol. propoſ. 15. lib. 11. ſecãs planũ $\phi\pi$, recta 4. 14. [f] Eſt autẽ eidẽ plano NZ, parallelũ planũ DB. [g] Rectę igitur αA, ρ M, in caſdẽ rónes ſecabuntur in pũctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media róne minuſq; erit ſegmentũ 14. M, ideoq; æquale minori ρ S, ipſius Mρ. Quare cũ ex ρ 14. maiori ſegmento ipſius



[b] *15. vnde.*

[c] *32. vnde.*

[d] *16. vnde.*

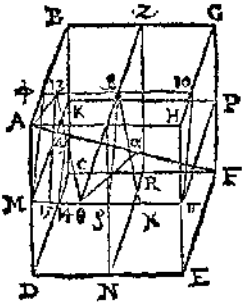
[e] *4. ſexti*

[f] *15. vnde.*

[g] *17. vnde.*

sius ρM, auferatur ρϑ, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ρ 14. diuisa in ϑ, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit ρϑ. Postremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallelæ secabũtur rectę ϑ13. ϑ15. proportionaliter; Ac proinde & ϑ15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ϑ14. [b] Quapropter erit vt ρϑ, maius segmentũ ad ϑ14. minus, ita ϑ14. maius ad 14.15. minus: Vt autem ϑ14. ad 14.15. ita est tota ϑ15. ad ϑ14. maius segmentum. Igitur erit vt ρϑ, ad ϑ 14. ita ϑ15. ad eandem ϑ14 Ac propterea rectę ρϑ, vel ρκ, & ϑ15. æquales erũt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelũ per 4.14. ductum, secantur plano φϖ, [c] erunt communes sectiones βρ, 4.14. parallelę, ideoque & 13 15. βρ, parallelę erunt, [d] angulusque externus βρκ, interno 13.15 ϑ, æqualis. Cum igitur & latera βο, ρκ, lateribus 13.15.15 ϑ, sint æqualia, [e] æquales erunt quoque rectę βκ, 13 ϑ; Ac proinde & earum segmenta maiora ϑκ, ϑ4 (Ostensum enim est ϑκ, esse maius segmentum ipsius βκ,) æqualia erunt. Eadem arte & β4 ipsi βγ, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basim βγ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem ϑκ, βγ, æquales erunt κϑ. β9. Aequilaterum ergo est pentagonum β4θκ9; quandoquidem βγ, θκ, rectę æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt YV, ZV, πρ, Mρ. Sed & æquiangulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triãgula, nimirum ad singulas rectas Mϖ, YZ, NR, IL, ΣO, KP; bina ipsi βϑκ, similia, & æqualia construantur (Ita enim ad Mϖ, duo huiusmodi triangula vides

βθκ



[a] 3. sexti

[b] 5. definit. sect.

[c] 16. vnde.

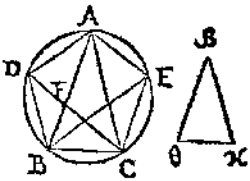
[d] 29. primi

[e] 4. primi.

βθκ, δθκ) & ipſorũ officio duodecim pentagona ipſi βφξκ 9. ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis Mπ, YZ, Nℜ, IL, ξO, KP, bini nimirũ in ſingulis, octo uero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quę ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta φ. & 9. in ſemidiametris Aα, & Hα, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptũ eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrũ, quãuis nõ proprie, cũ non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi cõſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

LEMMA

QVOD autem triangulum βθκ cuius baſis θκ. maius ſegmentum exiſtit vtriuſque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diuiſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles ABC, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuiſiſque angulis A BC, A C B, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propoſ. 11. lib. 4. tradimus, ſecentque ſe mutuo rectæ AB, CD, in F. [a] *Quoniam ergo AB, in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiuſque eius ſegmentum eſt AF, æquale lateri BC:* [b] *Erit vt AB, tota ad maius ſuum ſegmentum*

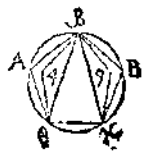


[a] 8. tertii decimi.

[b] 2. quarti dec.

tum BC, *ita* β ϑ, *tota ad maius suum segmentum* ϑ κ; *Eodemque modo, vt tota* A C, *ad maius segmentum* CB, *ita* β ϑ, *tota ad maius segmentum* κ β: *Est autem quoque vt* A B, *ad* A C, *ita* β θ, *ad* β κ, *vtrobique enim est proportio æqualitatis.* [a] *Triangula igitur* β ϑ κ, A BC, *proportionalia habentia latera, ęquiangula sunt, ęqualesque erunt anguli* θ, B; *Item* κ, C, & β, A; *proptereaque vterque angulorum* θ, κ, *duplus erit anguli* β; & *triangula* β θ κ, A BC, *similia.*

PENTAGONVM *vero* β 4 ϑ κ 9, *ęquilaterum, esse quoque ęquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum* β ϑ κ, *circulus* β A ϑ κ B; *qui si transeat per puncta* 4, & 9, *perspicuum est ex ijs, quę ad propos.* 16. *lib.* 4. *docuimus, pentagonum ęquiangulum esse. Si vero non incedat per puncta* 4, & 9. *Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos.* 11. *lib.* 4. *pentagonum æquilaterum & æquiangulum* β A ϑ κ B. *Quoniam igitur tam rectę* A ϑ, A β, *quam rectę* 4 ϑ, 4 β, *æquales sunt rectæ* ϑ κ, *cum* & β 4 ϑ κ 9, & β A ϑ κ B, *pentagonum sit æquilaterũ; Erunt tã duę rectæ* ϑ A, ϑ 4, *quam duę* β A, β 4, *ęquales. quod fieri non posse demonstratum est propos.* 7. *lib.* 1. *Transit ergo circulus triangulo* β θ κ, *circumscriptus per puncta* 4, & 9. *Ac proinde pentagonum* β 4 θ κ 9, *ęquiangulum est.*



SCHOLIVM.

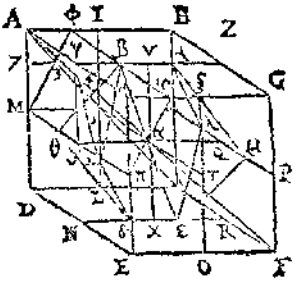
EX *his colligere licebit sequentes propositiones.*

DIA-

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri βε, intelligaturq; coniuncta recta γε, [a] *aequalis existens & parallela lateri cubi VX, quod & Vγ, Xε, aequales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus βVX, rectus est;* [b] *rectus quoque erit angulus βγε, ad γ, constitutus,* [c] *Ac proinde quadratum diametri βε, aequale erit quadratis laterum βγ, γε, nempe Dodecaedri, & cubi.*



[a] 33. primi

[b] 29. primi

[c] 47. primi

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

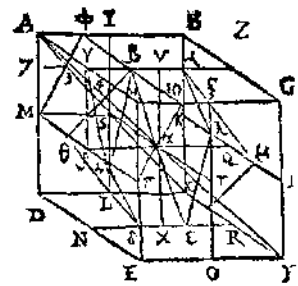
IN eadem enim prima figura, [d] *cum sit vt YV, ad βV, ita Y Z, dupla ipsius Y V, ad βγ, duplam ipsius βV; Sit autem βV, minus segmentum ipsius Y V, secta extrema ac media ratione: Erit & βγ, minus segmentũ lateris cubi YZ, secti extrema ac media ratione; composita vero ex Y β, γ Z, hoc est, recta β x, (quæ dupla fuit ostensa ipsius Y β, ideoque compositæ ex Yβ, γZ, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione βγ, esse latus Dodecaedri,* [e] *& ζx, seu βζ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentageni β 9 x, vel β 4 ζ.*

[d] 15. quinti

[e] 8. quinti dec.

III.

LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti.



NAM in prima rurſus figura, latus cubi Y Z, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Y β, γ Z; quæ conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo circumſcripti. Cum enim Y Z, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 8. propoſ. huius lib. a *Sit autem latus illius pentagoni maius ſegmentum lateris Y Z, ſecti extrema ac media ratione. Erit βθ, exiſtens quoque maius ſegmentum eiuſdem lateris Y Z, vt iam demonſtrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris Y Z, circumſcripti.*

a 8. tertij decc.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

IN prima enim figura, recta connectens puncta β, δ, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri βπ, oppoſiti, b *æqualis eſt rectæ V X, (quod & βV, δX, æquales ſint, & parallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.*

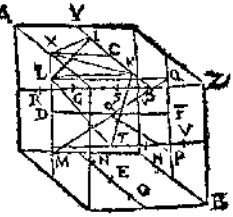
b 33. primi

PROBL

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icoſaedrũ deſcribere:

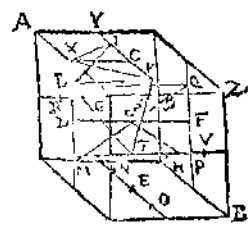
CVBVS datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrum, ſit AB, per cuius baſium cẽtra C, D, E F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nuſquã inter ſe conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione ſecentur, ita vt maiora ſegmenta prope centra ſint in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I. & N, &c. vt conſtituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, ISI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim ſubtenduntur duodecim cubi lateribus, poſteriora vero octo eiuſdem cubi octo angulis ſubſternuntur. Cõnectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia ſunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; & anguli contenti, recti, quod XC, parallela ſit ipſi AY; [b] Erunt & baſes XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta eſt ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK; Ac propterea cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia ſint lateribus LX, XK, trianguli LXK, & anguli contenti, recti; [c] æquales erunt baſes LI, LK. Rurſus [d] quoniam quadratũ rectæ LI, æquale eſt quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX quadrato rectæ IY; quadratum uero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI eſt æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera ſint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale eſt tribus qua-



[a] 39. primi.
[b] 4. primi
[c] 4. primi.
[d] 47. primi

dratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quæ tripla sunt quadrati rectæ CI. (a Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdē quadrati rectę CI) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoq; quadrati rectæ CI; Ac propterea, cū eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectę KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarū LI, IK, ideoq; & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterū igitur est triangulū IKL, lateri cubi AG, subſtratū.

a 4. tertij d cimi



NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triāgula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triāgulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune est triangulo IKL; & latus KT, triangulo TVK; & latus TL, triangulo LMT; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hac propositione sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DV-

DVCTA enim recta LQ, [a] qualateri cubi DF, parallela eſt, & æqualis, quod & DL, FQ, parallelæ ſint, & æquales; [b] manifeſtum eſt, quadratum diametri QM, æquale eſſe quadratis rectarum LM, lateris Icoſaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icoſaedrũ deſcriptum eſt, [c] cum anguluſ MLQ, ſit rectus, quod & LDF, rectus ſit.

[a] 33. primi
[b] 47. primi
[c] 29. primi.

II.

BIFARIAE ſectiones ſex oppoſitorum laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſe ſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus.

NAM huiuſmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cũ coniungant centra baſium cubi oppoſitarum, æquales ſunt lateribus cubi, ſeſeque per coroll propoſ. 2. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod ſit α, diuidunt. Quod quidem & centrum eſſe Icoſaedri, ita oſtendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FQ, trianguli αFQ, æqualia ſunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, anguloſque comprehendunt rectos, [d] æquales erunt rectæ αQ, αP. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icoſaedri prodeuntes. Igitur α, centrum eſt Icoſaedri.

[d] 4. primi

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione ſecetur, maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in dicto cubo deſcripti.

CVM enim CI, ſit maius ſegmẽtum rectæ CY; [e] ſitque vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipſius CI, ad βY, duplam ipſius CY; [f] erit quoque KI, latus Icoſaedri, ſegmentum maius lateris cubi βY.

[e] 13. quinti
[f] 2. quartidec.

IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula oppoſita, inter ſe ſunt parallela.

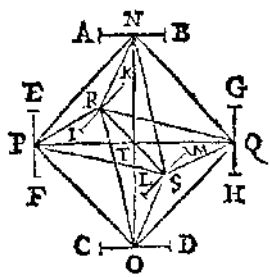
SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter ſe æqualia, angulóſque alternos habentia æquales, ex 4. propoſ. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare

a 15. unde. *quælibet latera oppoſita parallela erunt; a Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela.*

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

EXPONANTVR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita, *AB CD*, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſe ſe in centro T, bifariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ. præcedentis oſtenſa ſunt; ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS OQ; PR, PS; QR, QS, conſtituẽtes octo triãgula SNP SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum ſint rectarum æqualiũ dimidia) anguloſque continent rectos, vt dictum eſt; Aequales erunt baſes NS, NP: Eodemq; modo reliquę omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo



b 4. primi

ergo dicta triangula æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia; ideoq; Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum eius anguli reſideant in bifariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaq; Icoſaedro Octaedrũ deſcripſimus. Quod faciẽdum erat.

CO-

COROLLARIVM

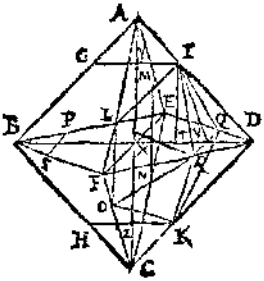
SEQVITVR hinc, idem eſſe centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. Quoniam ſcilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icoſaedri incedentes, diametri ſunt Octaedri NPOQRS, ſibi inſcripti. Quare T, centrum Icoſaedri, vbi ſe interſecant, centrum quoque eſt Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.

DATVM Octaedrum, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, ſit ABCDEF. Cũ a quolibet angulo quatuor latera exeant, ſumantur à ſingulis bina non proxima, ſed ſibi e regione reſpondentia, hoc eſt, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppoſitos cadunt, ſumendo ſemper bina iuxta angulos oppoſitos eiuſdem quadrati, qualia ſunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppoſitos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppoſitos A, C, quadrati AECF; (Nã a quolibet angulo ſumẽda ſunt tm̃ duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eoſdẽ angulos A, C, iã ſumpta fuere,) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppoſitos E, F, quadrati EBFD; (Nã latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eoſdẽ angulos, E, F, iam accepta ſunt,) q̃ omnia ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora ſegmenta ſint prope angulos, a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a ſingulis ad quinque proximas ſectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK, Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & ſic de cæteris, quamuis non omnes ductæ ſint in figura, ad euitandam linea-

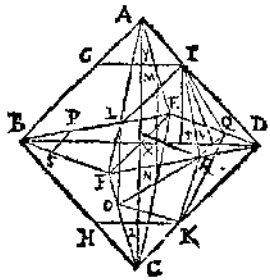
linearum confusionē. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt.n. tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum est pyramidē constituunt; alia aūt duo sunt in duobus lateribus duorū triangulorum octaedri, quæ habent cōe illud latus, in quo punctū acceptū est. Vt q̄a punctū acceptū est *R*, in latere D*F*, qd cū tribus *DE*, D*A*, D*C*, pyramidē cōstituit in vertice D, & est cōe triāgulis octaedri *DFA*, D*FC*; ppea ex R, ad quinque pūcta horū quinque laterum ductæ sunt lineę rectę, & sic de cæteris. Post hec, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, sese in cētro X, secantibus bifariā, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. prop 14. lib. 13. quarū AC, *B*D, secāt rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX Qm̄ ergo latera DQ, DI, triāguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI; (Sunt.n DQ, *D*R, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF.) & angulos cōprehendunt æquales, nēpe triangulorū Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cū sit, [b] vt BG, ad GA, ita *D*I, ad IA; [c] erit GI, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR, ipsi *EF*, parallela; [d] Ac proinde vt *DI*, ad I*A*, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratione Rursus quia est vt AX, ad XD, ita *A*Y, ad Y*I*, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD per coroll. propos. 4 lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & *A*Y, ipsi YI, ęqualis. Quare YI, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualē; ideoq; GI, rectam, bifariā in Y; similiterq; *QR*, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, triāguli DQR, (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; cōprehendant rectos,



[a] 4. primi.
[b] 2. quartidec.
[c] 2. sexti
[d] 4. sexti

ctos, nempe quadratorum ABCD, DEBF.[a] Aequales ei ſũt baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendẽtur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtẽdunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, cõplectunturq; duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmẽtum maioris ſegmenti XY, diuiſi extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad prop. 5. lib. 13. Eſt autẽ XY, rectę XV, æqualis, (cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD,)[b] & YI. rectæ XT; erit XT, maius ſegmẽtum ipſius XV, & ideirco TV, ſegmẽtum minus eiuſdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius IT, (cum & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmẽti,[d] tripla ſunt quadrati rectę XT, maioris ſegmenti; Atq; adeo quadratum rectæ IV,[e] æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, triplum eſt eiuſdẽ quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarũ IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV:[f] At quadratis rectarũ IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR,[g] qđ anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & ſubtẽſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoq; recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectę VR, quadruplum quoq; ſit per ſcholium prop. 4. lib. 2. quadratum rectę QR; Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triãgula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe. quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis

[a] 4. primi.
[b] 34. primi
[c] 34. primi
[d] 4. tertij de.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 8. primi.



mentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua subtendãt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum cõtentos singulos duobus segmentis laterũ Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius triãguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, subtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehensos minoribus segmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia sunt. Eodem modo latera IQ, IL, equalia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorũ ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic vero segmentis AL, AI, maiore & minore quoque. Non secus latera IR, GL, æqualia erũt. Aequalia igitur sunt triangula IQR, GIL, per corollarium propos. 8. lib. 1. Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum, Ergo & GIL, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED; GLS, in AFB; HOS in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia, cum horũ latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triãgula, quorum quina in singulis sectionibus laterũ octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (vt vides in quinque RQI, RII, RLO, RÖK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum cum Icosaedri duodecim anguli duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

Co-

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmẽti. Cum. n. in triãgulo æquilatero ADE, maius ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, oſtenſa æqualis rectæ GI, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AI, cum quadratum rectæ GI, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perſpicuum eſt, & rectam IQ, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris AI. * 47. primi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS fit, cum octo Icoſaedri baſes collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. Suſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulum AED, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri IMQ, ſitq; C, centrum trianguli AED, ex quo rectæ educãtur CA, CE, CD; CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtẽdimus; Erũt baſes CM, CQ, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.



CO-

COROLLARIVM III.

NON difficile eſt denique ex dictis colligere, idē centrum eſſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, cētro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunque duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia ſint lateribus YF, FO, trianguli XFO, (Nã XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO, ſegmenta minora laterū æqualium Octaedri ſectorū extrema ac media ratione) angulosque complecta ſint æquales, ſemirectos videlicet; (cū AC, EF, diametri ſint quadratorū ABCD, EAFC; ac proinde, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1, angulos quadratorum biſariam ſecent) æquales erunt & baſes XG, XO. Eodemque argumēto oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri.



[a] 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

[b] 16. quintidecimi. [c] 5. quintidec.

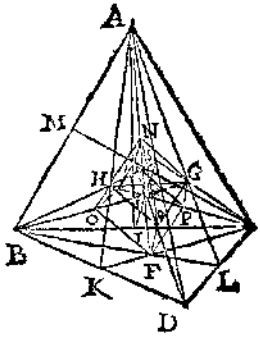
[b] INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrū; & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarum octo concētricæ ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem cētris octo baſium Octaedri, reliquos autē duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binæ ſingulis ex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quan-

quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere poteſt. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubũ deſcribere.

DETVR pyramis *ABCD*, in qua cubus iubetur deſcribi, ſitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur *AE*F, *BEG*, *CEH*, *DEI*, quæ cadent in centra baſium oppoſitarum *F*, *G*, *H*, *I*, eruntque perpendiculares ad eaſdẽ baſes *BCD*, *ACD*, *ABD*, *ABC*. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur A H *K*, A G L, A*I* T, B*F L*, B H S, C*I* M, C F K, C G S, ſecantes baſes oppoſitas B D, C D, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis *K*, L, *M*, S, T. Secentur quoque rectæ ex ſolidis angulis p centrum E, demiſſę *AF*, BG, CH, D*I*, b fariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis cõiungãtur, vt N, cũ G, H, *I*; O, cũ F, H, *I*; P, cũ F, G, *I*; & Q, cũ F, G, H. Dico ſolidũ NF, contẽtum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, F*I*, cubũ eſſe. Cũ.n. latera A*F*, *FK*, trianguli A F *K*, æqualia ſint lateribus AF, FL, triãguli AFL, (qđ F*K*, FL, cũ ppendiculares ſint ad *BD*, CD, ex cẽtro F, ductæ oſtẽdãt æquales diſtãtias rectarũ æqualium



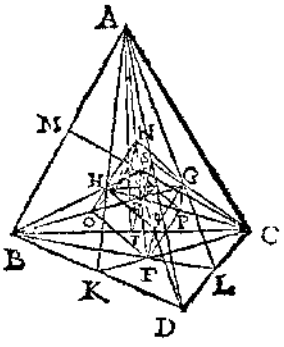
a 15. quarti dec.

æqualium BD, CD, a centro F, angulosque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [a] Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, triãguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABD, ACD) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; [b] Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendentur æquales rectæ QG, QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si. n. recta ducatur FT, cũ latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK, (Sunt namque FT, FK, distantiæ rectarum æqualium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABC, ABD;) angulosque contineant æquales: [c] Æquales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.

[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 4 primi.



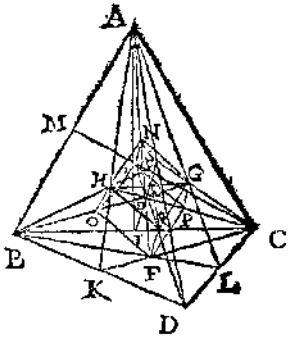
ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum

F, cum & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia BC, AD. Quocirca cum idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit ST, per E, centrum pyramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. [a] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter ſecantur, [b] atque idcirco HG, parallela eſt lateri BC, ſecatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars eſt trianguli BSC,) proportionaliter; ideoque & SR, tertia pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rurſus [c] quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundē partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadē ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter ſecentur, [d] recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars eſt triāguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac proinde SR, duæ tertię partes eiuſdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R; ſecabitur SE, a rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipſæ HG, NQ, in eodem ſe ſe puncto interſecabunt. [e] Quare in eodem ſunt plano, propterea quæ & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum NQ. Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

CVM oſtenſa ſit HG, ipſi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, ſimile triangulo SBC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [f] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Eſt autem SH, tertia pars ipſius SB: Igitur & HG, tertia pars erit late-

[a] 18. quarti decimi.
[b] 2. ſexti.
[c] 15. quarti decimi.
[d] 2. ſexti
[e] 2. vndec.
[f] 2. ſexti

ris BC. Haud ſecus oſtendemus NQ, tertiam eſſe partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, ſint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum ſubtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; [a] æquales erũt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cũ ipſi ſint quatuor rectis æquales, vt oſtendimus ad [a] propoſ. 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent: qui ideo pyramidi dicetur inſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, vt conſtat.



[a] 8. primi.

ALITER. In data pyramide deſcribatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi ſtatuuntur in cẽtris octo baſium octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis, vt conſtat ex prop. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipſis, vt mox oſtendemus; fit, vt quatuor anguli cubi reſideant in centris quatuor baſium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demõſtratione dictum eſt. Rurſus quia reliquæ quatuor baſes octaedri parallelæ ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. (b cum enim rectæ EG, EH, parallelæ ſint rectis BC, BD; c erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter ſe parallela, & ſic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoque ad illas qua-

[b] 2. ſexti.
[c] 15. vnde.

quatuor reliquas baſes octaedri perpẽdiculares, ex ſcholio prop. 14 lib. 11. Quare cũ prædictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. [a] Et quia dictæ quatuor baſes octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariã; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 17. vnde.

COROLLARIVM I.

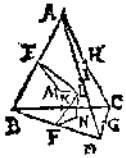
CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorũ laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis GNHQ, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat; Recta RS, dupla ipſius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, oſtenſa ſit tertia pars ipſius ST; perſpicuum eſt, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis AD, BC, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi RS.

LEMMA.

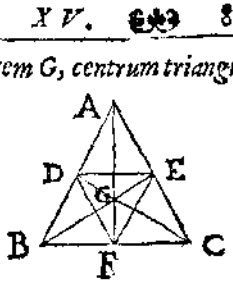
IDEM autem eſſe centrum Pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti, ideaque centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti, ita demonſtrabimus. Sit primum pyramis ABCD, cuius omnia ſex latera bifariã ſecẽtur in E, F, G, H, I, K; & ex L, cẽtro Pyramidis in baſes ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas baſes circumſcribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniã latera LM, ME, triãguli LME, æqualia ſunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli baſes ABD, BCD, circumſcribentes ſint æquales, æqualiter diſtabunt ipſi a centro L, per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14; Ac propterea eorum diſtantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, diſtantiæ rectarum æqualium AB, BD, a centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11.



14. primi. *Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hiſce æquales erunt, & interſe rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide deſcripti conſtituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propoſ. huius lib. conſtat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos ſint æquales. Cũ igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea deſcripti.*

SIT deinde in baſe pyramidis ABC, baſis octaedri DEF, quæ ſecabit illius latera bifariam, vt patet ex

ex propoſ. 2. huius lib. ſit autem G, centrum trianguli A B C, *a quo ad angulos vtriuſque baſis rectæ ducantur. Quia igitur latera* AG, *AD, lateribus* BG, BF, *æqualia ſunt, anguloſq; continẽt æquales, nimirũ ſemiſſes angulorum æqualium trianguli æquilateri, erunt & baſes* G D, G F, *æquales: Eademque ratione erit* GE, *vtrique* GD, GF, *æqualis. Igitur G, centrum eſt trianguli* D E F. *quod eſt propoſitum.*



[a] 4. primi

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATAE Pyramidi ABCD, [b] inſcribatur octaedrũ EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumãtur ex ſingulis angulis ſibi reſpõdentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum octaedri cadentia, vt in propoſ. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum pũctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrũ in dicto octaedro, vt cõſtat ex prop. 16. huius lib. habẽs oẽs duodecim angulos in duodecim pfatis ſectionibus duodecim laterũ octaedri. Cũ ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſiũ Pyramidis ſint ducta; manifeſtũ

[b] 2. quinti decim.

eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſiũ pyramidis cõſtitui, ternos ſcilicet in ſinguli quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nã in baſi ABC, exiſtunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11 cuius quidem quatuor baſes MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt cõſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrũ deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum deſcribere.

[a] 19. quintidec.
[b] 5. quintidec.

PYRAMIDI datæ [a] inſcribatur Icoſaedrum, [b] & in hoc Dodecaedrũ habens viginti ſuos angulos in centris viginti baſium Icoſaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus; cõ ſiſtẽt quatuor anguli Dodecaedri dicto icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt. n. dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll. propoſ. 16. huius lib. Deinde, quia cubus Dodecaedro inſcriptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inſcriptus, [d] quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictũ eſt, quatuor autem reliquos in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem bifariis ſectionibus perpendicularium dictarum: ſuperſunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictũ Dodecaedrũ deſcriptũ eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiam ſi non proprie. Quam ob rẽ in data Pyrami-

[c] 8. quintidec.
[d] 18. quinti decimi.

de

de Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21. 13.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphæræ datum ſolidum cõplectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex corol. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter a centro diſſent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque ſolidorum regulariũ in quatuor reliqua inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 18. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti eõſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta. a In octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim pũctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione ſecãtur. Deinde b Icoſaedro imponitur Dodecaedrũ, q eidẽ octaedro inſcri-

a 16. quinti decimi

b 5. quinti decimi

ſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ. 17. huius lib. Poſt hac in Dodecaedro deſcribitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra baſium octaedri poſſident; ac propterea & cubus ipſe in octaedro deſcriptus eſt. Denique in cubo Pyramis includitur, qua ideo in octaedro dicetur eſſe deſcripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.

[a] 1. quintidecimi
[b] 1. quintidecimi

NEQVE vero pratereundum eſt, Dodecaedrum, ſibique inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſſideant, conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido conſtat, ſphæram Dodecaedro circumſcriptam complecti quoq; cubum atque pyramidem, cum ſphæra illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.

[c] 1. quintidecimi.
[d] 8. quintidec.

PARI ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, vt demonſtratum eſt: In centris quidem, baſium Icoſaedri, propoſ. 5. 11. & 12. In centris vero baſium octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium pyramidis propoſ. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptioneſve quinque ſolidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrum, propoſ. 2. 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ. 1. 3. 14. 13. In Icoſaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum propoſ. 10. 9. 8. 7. deſcripſimus. At vero poſteriori vnica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMEN-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM,

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, a Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

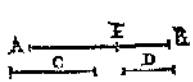
QVEMADMODVM *libro 14. traditæ ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur,

tur,& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectę lineę diuisę extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quã habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cũ enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusq; in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadẽ sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadẽ sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demõstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circũscripti ad D, latus Dodecaedri eidẽ cubo inscripti, vt AE, maius segmentũ ad EB, minus. Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatã lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris segmenti, AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedrõ cubus inscribatur, &c. Quod erat demõstrandũ.

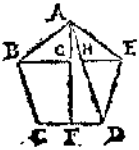


THE-

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum CD, perpendicularis demittatur AF. *Dico* AF, a recta BE, ſubtẽdente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione.



Ducta enim recta AD, quæ ſecet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, [a] ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter; [b] Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentũ DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2. ſexti

[b] 18. tertij decimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectę oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt ꝓpe quẽuis angulũ ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem

quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit *A* B C, cuius latera secentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, cõstituentes GHI, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis B *K*, CL, AM. Dico has rectas suis sectionibus producere triãgulũ Icosaedri GHI, hoc est, rectam B *K*, transire per puncta G, I; & rectam CL, per puncta *H*, *I*; & rectam *A* M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipsi B C, parallela; erit triangulum F*H*O, triangulo FEC, simile, ex coroll propos. 4. lib. *6.* ideoque & æquilaterum, cum & FE*C*, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo *A*B*C*, per idem coroll. Quare *H*O, recta æqualis est rectę F*H*, maiori segmento rectæ *F*E, seu DF, ipsi æqualis: (Est enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidijs scilicet æqualiũ laterum eiusdem trianguli comprehensos, [a] ideoque æqualia sint.) [b] Est autem & N H, æqualis toti D F, in parallelogrammo DH, [c] propterea quod FH, *DF*, parallelæ sunt rectis AB, BC, seu NO. Igitur recta NO, composita ex NH, tota, & HO, maiori segmento, [d] secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ *B*C, NO, DF, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonstrauimus



[a] *4. primi.*
[b] *34. primi.*
[c] *2. sexti.*
[d] *5. tertij. def.*

uimus ad propoſ. 4. lib. 6. fecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam AM, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus BK, per puncta G, I, & CL, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB; Atque idcirco rectæ BK, CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI

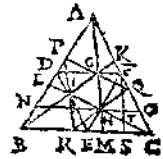
AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FE, cuius maius ſegmentum fuit FH, hoc eſt, FO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius ſegmentum rectæ AF; [a] ac proinde tota AO, ſecta in F, extrema ac media ratione: [b] Eſt autẽ vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & vt AG ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AIL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, ſegmẽta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia uero eſt [c] vt AQ, maius ſegmẽtum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius ſegmentum; Et eſt AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum erit lateris AB, maiusq; reliqua BP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, ſecabit extrema ac media ratione, atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales triangulo æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, [d] æqualia inter ſe ſunt; erit triãgulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL; ſecabuntur PQ, LC, in eaſdem rationes, ex ijs, quę ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulũ ACL, in quo FH, parallela eſt lateri AL, [e] ſecans propor-tio-

[a] 5. tertij decimi.
[b] 2. ſexti.
[c] 2. quar. tidec.
[d] 4. primi
[e] 2 ſexti.

portionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ bifariam ſecatur in G. Eademque eſt ratio de reliquis QR, RP. Ac propterea triangulum Icoſaedri GHI, inſcriptum eſt triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, H, I, ab angulis baſis Icoſaedri GHI. Quapropter, ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi poteſt, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media rõne, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. GHI, triangulum ſit Icoſaedri in octaedro, cuius baſis DEF, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, eſt æquale, recta FS, parallela rectæ AM, ſecans MC, HO, in S, & T. [a] *Cum igitur MC, bifariam ſecetur in S, ob triangulum AMC;* [b] *ſitque MS; ipſi GF, æqualis, ob parallelogrãmum GS; Erit & SC, æqualis eidem GF, minori ſegmento rectæ DF; Ac propterea cum tota DF, EC, æquales ſint; erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori ſegmento æqualis: Ideoque EC, in S,* [c] *ſecta erit extrema ac media ratione. Deinde* [c] *quia FE, FS, ſimiliter ſecantur; ſecatur autem FE, extrema ac media ratione; ſecabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit FT, recta* [d] *æqualis exiſtens lateri Icoſaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.*



[a] 2. ſexti.
[b] 34. primi
[c] 2. ſexti.
[d] 34. primi.

THE-

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti.

BASIS Pyramidis ſit ABC, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, baſim Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli ABC, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in prop. præcedenti demonſtratum eſt. Dico AP, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri HI. Cum enim PQ, dupla ſit potentia minoris ſegmenti AP, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla ſit rectæ PG, hoc eſt, ſibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.



COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. [a] *Cum enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis; ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale,* [b] *cũ diametro potentia ſit cõmenſurabile.* [c] *Quare minus ſegmentũ lateris Pyramidis extrema ac media rõne ſecti Apotome erit; Atq; adeo* [d] *cũ minori*

[a] 13. tertiædec.
[b] 6. dec.
[c] 6. tertiædecimi.
[d] 6 decimæ

minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile; (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus vero Pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo deſcriptę diameter ſit baſis cubi, vt conſtat ex propoſ. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum baſis cubi, hoc eſt, quadrati lateris cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Manifeſtum eſt, latus cubi dimidium eſſe potentia lateris Pyramidis in cubo illo deſcriptę.

RVRSVS, quia rectę coniungentes bifarias ſectiones laterum Pyramidis conſtituunt octaedrum in pyramide deſcriptum, vt liquet ex propoſ. 2. lib. 15. Eſt autem latus trianguli æquilateri duplum rectę coniungentis bifarias eius ſectiones, cum ea recta æqualis ſit dimidio lateris trianguli, vt conſtat ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Nam cum ſit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perſpicuum eſt latus pyramidis duplum eſſe longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti.

[a] 2. ſexti

DENIQVE [b] quia diameter ſphęræ, ſeu octaedri potentia eſt dupla lateris octaedri; Eſt autem latus cubi æquale diametro Octaedri ſibi inſcripti, cum diameter octaedri coniungat centra baſium cubi oppoſitarum, vt in coroll. propoſ. 3. lib. 15. diximus: patet, latus

[b] 14. tertij. dec.

tus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [a] existat denique latus cubi dimidium potẽtia lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

[a] 5. sexti. dec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrũ, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus deniq; Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum.n. ex ijs, quę in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, mi-

A
B
C

nus ſegmentum ſit eiuſdem lateris cubi: Planum ſit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmentum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplũ eſt lateris cubi in ea deſcripti.

CVM enim per ea, quæ propoſ. 18. lib. 15. ſunt demõſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti, (oſtenſum. n. eſt ibi, GH, diametrum baſis cubi inſcripti tertiã eſſe partem lateris Pyramidis BC,). Et quadrata proportionem habeãt laterum duplicatam: Erit quadratũ lateris Pyramidis nõcuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cũ noncupla proportio ſit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cũ quadratũ diametri baſis cubi duplũ ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſit, vt ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratũ lateris cubi 1. quadratũ eiuſdẽ baſis diametri ſit 2. & quadratũ lateris pyramidis 18. Quamobrẽ latus Pyramidis potẽtia octodecuplũ eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.

*a 20. ſexti

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentũ latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus quoque ſit Pyramidi, cui illud dodecaedrũ inſcribitur, vt docuimus in ſcholio prop. vlt. lib. 15. b Erit latus Pyramidis potẽtia octodecuplũ lateris cubi ſibi, & Dode

b 8. ſextidc.

caedro

caedro inſcripti: Huius autē lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. ppoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectę extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplū minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentiū prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta GI, ſubtēdens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehenſum;) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare, * cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſsit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum. * 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT vna ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis quadratū ABCD, triangula vero ad E, vertice, ABE, EBC, CED, DEA, ſintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelę. Quod ſi coniungantur rectę

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro deſcripti, vt demonſtrauimus propoſ. 4. lib. 15. Qm autem ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ EH, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium



* 2. ſexti. 2. erit EH. Atqui vt EO, ad EH, ita eſt EB, ad EL. Igitur qualium partiũ 3. continet EB, talium 2. erit EL, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac proptera quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum K LMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum ſit quadrati GI, ſibi inſcripti, per ea, quę in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Eſt enim LN,

* 33. primi quadratum ex diametro quadrati GI, deſcriptum; * cum GI, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in eo deſcripti. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuiſum efficit maius ſegmentũ latus Dodecaedri, cui inſcribitur, per corol. 2. prop. 13. lib. 15. Inſcribũturque Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidẽ octaedro, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. Perſpicuum fit, octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. Eſt enim eiuſmodi recta latus cubi eidem octaedro inſcripti, cuius quadruplũ ſeſquialterum potentia eſſe oſtẽdimus latus octaedri.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM *Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera* oppoſita *in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ. 14. lib. 15. eiuſque ſcholio. Et in bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. eiuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ. 14. lib. 15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. [a] Atqui diameter ſphæræ, ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.

[a] *14. tertij dec.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionẽ habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmẽtum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extre-

ma ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.

OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Minus ſegmẽtũ lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum proportionẽ habeat duplicatã proportionis totius lineę ad maius ſegmentũ, vel maioris ſegmẽti ad minus, (quod tota linea, maius ſegmentũ, atque minus, ſint tres rectæ continue proportionales:) liquido conſtat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis maioris ſegmenti ad minus duplicatam.

PRAETEREA, cum cõſtet ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. maius ſegmentũ lateris cubi extrema ac media ratione diuiſi latus eſſe Dodecaedri, cui cubus inſcribitur; manifeſtũ eſt eſſe vt latus Dodecaedri, hoc eſt, maius ſegmẽtum, ad latus cubi in ipſo deſcripti, hoc eſt, ad totam lineam extrema ac media ratione ſectam, ita minus ſegmentum ad maius. Cum enim ſit, vt tota linea ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus; Erit quoq; conuertendo, vt maius ſegmentum ad totam lineam, ita ſegmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ Pyramidis.

SIT vna ſex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius baſis quadratũ ABCD, triangula autẽ ad verticẽ E, ſint ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorũ cẽtra F, G, H, I, quæ rectis iungãtur FG, GH, HI, IF, quadratum

dratum cubi in Octaedro deſcripti conſtituentibus, vt docuimus in propoſ. 4. lib. 15. Quoniã vero Pyramis in cubo deſcripta, deſcribitur quoq; in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. expoſuimus; Eſtque latus pyramidis in cubo deſcriptæ diameter baſis cubi, vt cõſtat ex ppoſ. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto deſcriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, ſeſquialterũ eſſe lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. ipſæque EK, EL, ſeſquialterę erunt rectarum EG. EI, per coroll. prop. 18. lib. 14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulũ EGI, ſimile triangulo EKL. Quare erit, vt EK, ad KL, ita EG, ad GI; & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI; ideoque cũ EK, ſeſquialtera ſit ipſius EG, erit & KL, ſeſquialtera ipſius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis ſit ipſi KL, quod & BK, CL, æquales ſint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri ſeſquialterum lateris Pyramidis GI, ſibi inſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.



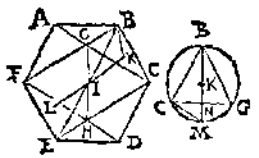
[a] 2. ſexti.

[b] 33. primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplũ quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertium quadrati lateris Icoſaedri.

SIT Icoſaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrũ I; triangula vero oppoſita & parallela, per coroll. 4 propoſ. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex cẽtro I, ad planũ BCG, perpẽdicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. in



centrum *K*. Producta igitur *KI*. perpendicularis quoque erit ad planum *EFH*, parallelum plano *BCG*, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in *I*coſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium *I*coſaedri, vt cõſtat ex propoſ 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit *K*L. diameter cubi in *I*coſaedro deſcripti, tranſiens per *I*, centrum *I*coſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum *I*, tranſeant, erit *I*. quoque centrum cubi inſcripti, ideoque *IK*, *IL*, ſemidiametri æquales: Conũcta autem *K* B, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis, erit angulus B *K I*, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [a] Ac proinde quadratum rectæ B*I*, æquale quadratis rectarum B *K*, *KI*. *I*gitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri *B I*, vt in ſcholio propoſ 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum *BCG*, circumſcribentis, & *K*L. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris *B*K, *KI*, deſcriptorum. *A*blato ergo quadrato diametri cubi KL, ([b] quod triplum eſt quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri *I*coſaedri BE; remanet quadratũ diametri circuli triangulũ *BCG*, circũſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris *I*cõſaedri BC. Deſcribatur enim ex centro *K*, cui ea triangulũ æquilaterũ BCG circulus, extenſaq; B*K*, vſque ad M, quæ ſecet C G, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur *BN*, per centrũ *K*, ducta perpendicularis eſt ad *CG*, per ea, quæ oſtẽdimus in ſchol. propoſ. 12. lib. 13. [c] erit recta BC, potẽtia ſeſquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita eſt *B* M, ad BC, quod *BC*, ſit media proportionalis inter B*M*, & BN, ex corol. propoſ. 8. lib 6. [d] cũ angulus *BC*M, rectus ſit in ſemicirculo exiſtẽs. Recta igitur BM, potentia quoq; ſeſquitertia eſt

[a] 47. primi

[b] 15. tertiædec.

[c] 12. quartidec.

[d] 31. tertiæ.

rectæ

rectæ BC; Ac propterea quadratũ diametri B M, ſeſquitertiũ eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrũ Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri B E, æquale eſſe quadratis diametri cubi K L, & diametri circuli triangulum B C G, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmẽtum eſt rectę lineę extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, vt manifeſtum eſt ex prop. 9. lib. 15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones cõiungentis diuiſę extrema ac media ratione minus ſegmentũ latus Dodecaedri, ex coroll. 4. prop. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quę duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi recta coniũgat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum.

14. terti-decimi

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodē Icoſaedro deſcribātur, vt docuimus in ſcholio prop. vltimę lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphęræ pyramidē circundantis: [a] poteſt autem diameter ſphęræ ſeſquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſim Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris Icoſaedri, vt in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circūdantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

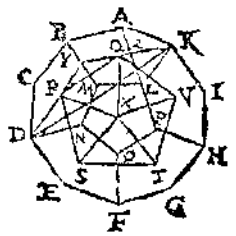
[a] 13. tertij decimi

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentū lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitū ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ,

uiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pẽtagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis *ABMLK*, *LKIHP*, *PHGFO*, *OFEDN*, *NDCBM*, *LMNOP*, quorum centra Q, *R*, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, *TV*, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni *LMNOP*, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, *K*, in cõmunem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, *K*Y,

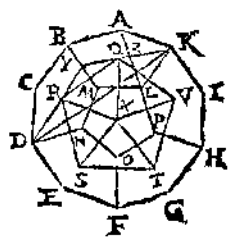


quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. conuenient in pũcto Y. Quod ſi ſubtendatur recta *AL*, angulo *K* ſubtenſa, ſecabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita eſſe latus *D*odecaedri IM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt *K*Z, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit *LM*, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodẽ ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YD*K*, proportionaliter ſecantur in R, & Q, (ſunt enim RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipſi *DK*; Ideoque triangulũ YRQ, triangulo YD*K*, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt *DK*, ad *K*Y, ita QR, ad QY. [d] Vt autem

[a] 2. ſexti. dec.

[b] 2. ſexti. [c] 4. ſexti. [d] 2. quartidec.

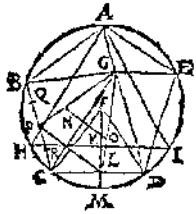
autem DK, tota ad totam K Y, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus K Z. Vt igitur L M, ad K Z, ita erit QR, ad QY; Et permutandò, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ, minus ſegmentum perpendicularis K Y, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minusq; eius ſegmentum a toto latere Icoſaedri ſublatum; a reliqua quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrũ F; & ſuper quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex *iis*, quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demonſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterũ inſcribatur AHI. Quoniã igitur arcus AEC, AED, æquales ſunt, cũ quilibet duas quintas partes totius circumfe-



cũferentiæ cõtineat, necnon & duo arcus *ABH*, AEI, cũ ſint tertiæ partes eiuſdẽ circũferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; ppeaque rectæ HI, *CD*, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib. 3. *Ad* quas ex cẽtro F, perpendicularis deducatur *FKL*, ſecans rectas HI, CD, bifariam in *K*, & L; coniunganturque rectæ FC, *FD*. Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum *GBC*, *GCD*, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur *GNP*, *GOL*, diuidentes, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. latera oppoſita BC, *CD*, bifariam, & ad angulos rectos. Itaq; recta GO, in punctum L, in quo diuiſa eſt CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt conſtat ex demouſtratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in *I*coſaedro deſcripti. *D*enique BP, dimidium lateris *I*coſaedri ſecetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori ſegmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur *C*R. Dico reliquã QR, æqualẽ eſſe lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri H *I*, ſecetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione ſecta faciat maius ſegmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propoſitionis 2. lib. 14.) ſit autem maiori ſegmento FK, æqualis recta *KM*, per coroll. propoſ. 12. lib 13. Erit ex iis, quæ demõſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13 maius ſegmentum *KM*, ſectum quoque in L, a minori ſegmento *KL*, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam F*L*, minore dimidiæ ſuiipſius ſegmento *LM*. Quoniam vero iuncta PL, eſt latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABC*DE*, deſcripti, idemque centrum *F*, habentis, ex ſcholio vltimo lib. 4. ideoque ſimilis illi; erunt triãgula FCD, FPL, (ſi recta ducatur FP,) ſimilia, per ſcholiũ propoſ. 20. lib. 6.[b] Quare vt *FC*, ad *CD*, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc eſt, ſibi æqualis FM, excedit rectã *FL*, minore ſegmento dimidij ipſius FM, nempe minore ſegmẽto rectæ KM, vt oſtendimus. Recta igitur C*D*, vel ſibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore ſegmento dimidij ipſius B*C*, nimirum minore ſegmento rectæ

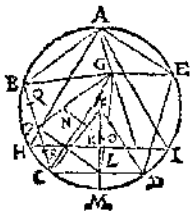
[a] 3. tertij.

[b] 4. ſexti

BP,

BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rurſus quia GP, GL, proportionaliter ſecantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ ſint ipſarum NP, OL, per coroll. propoſ. 18. lib. 14.) [a] parallelę erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Eſt autem GP, ipſius GN, ſeſquialtera, per coroll. propoſ. 18 lib. 14. Quare & PL, hoc eſt, ſibi æqualis CQ, ſeſquialtera erit ipſius NO; Ac proinde, cum CQ, ſeſquialtera quoq; ſit rectæ QR. (Nam qualium partiū 3. eſt CQ, talium 1. eſt CR, per conſtructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR, ipſi NO, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Si dimidium itaque lalateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

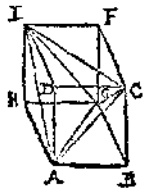
[a] 2. *ſexti.*



THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt.

IN cubo AF, deſcripta ſit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum eſſe. Cum enim inſcriptam pyramidem æquilaterā circumſtent quatuor pyramides fundatæ ſuper quatuor baſes ipſius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus nō reſident quatuor anguli pyramidis æquilaterę inſcriptę: (Nā ſuper baſin ACE, fundatur pyramis ACED; ſuper baſin AEG, pyramis AEGH, ſuper baſin CEG, pyramis CEGF; & ſuper



per baſin *ACG*, pyramis *ACGB*: quæ quidem quatuor pyramides æquales ſunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis ſimilibus æqualibusq; & multitudine & magnitudine. Quælibet. n. cõſtat tribus æqualibus & ſimilibus triangulis, dimidiis ſcilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inſcriptę. Sit autẽ cubus cuiuslibet harum pyramidum ſextuplus; (Nã exempli cauſa, pyramis *ABCG*, baſim habens *ABC*, dimidium baſis cubi *BD*, altitudinẽ vero eandem, quã cubus, rectã videlicet *BG*, tertia pars eſt, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. priſmatis eandem baſim, & altitudinẽ habentis.) Cum igitur cubus duplus ſit eiuſmodi priſmatis, quod & baſis cubi dupla ſit baſis priſmatis; manifeſtũ eſt pyramidem *ABCG*, ſextã partem eſſe cubi, propterea; cubum pyramidis illius eſſe ſextuplum. Efficitur, quatuor illas pyramides circumſtantes, quatuor eſſe ſextas partes, id eſt, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquã pyramidẽ æquilaterã *ACEG*, cubo inſcriptã eiuſdem cubi tertiam eſſe partẽ. Cubus igitur ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. Quod erat demonſtrandum. [a] 32. vndo.

ALITER. Cum cubus, & in eo deſcripta pyramis eadem ſphæra comprehendantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. Cubus vero triplus ſit pyramidis in eadem ſphæra deſcriptæ, vt demonſtratum eſt; perſpicue colligitur, cubũ triplũ eſſe ſibi inſcriptæ pyramidis, qũquidem hæc in eadẽ ſphera, in qua cubus, continetur. [b] 32. quartidec.

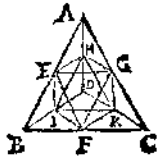
THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide *ABCD*, deſcriptũ ſit octaedrum *EIKFGH*. Dico pyramidẽ octaedri eſſe duplam. Cum enim octaedrũ circumſtent quatuor pyramides pyramidi *ABCD*, ſimiles, vt prop. 3. lib. 12. demonſtratum eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri *EGH*, *EFI*, *FGK*, *HIK*; quales ſunt pyramides *EGHA*, *EFIB*, *FGKC*, *HIKD*:

(quæ

(quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſq; numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilateræ ABCD. per coroll. propoſ. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.) [a] habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum. (cum octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidũ, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.



[a] 8. huiusce.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ. 3. lib. 15. [b] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & eiuſdem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octae-

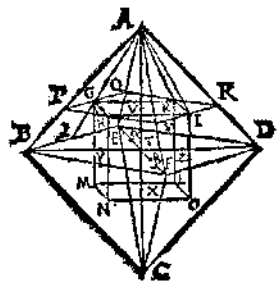
[b] 22. ſextidec.
[c] 21. ſextidec.

octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basiũ octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterũ. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum constituẽtes PQRS, vt in 4. posit. 4. lib. 15. est demonstratum; [a] quod quidẽ parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. AC proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS: [b] cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secẽt rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [c] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP,

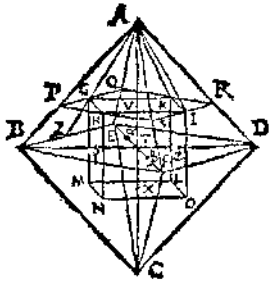


[a] 15. vnde.

[b] 17. vnde.

[c] 47. primi.

VQ, propterea q; & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS. Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur.n. latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demóſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento cócludemus X, centrũ eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX; nec non VT, XT. Recta igitur VX, cõiungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum cõnectentes ſe ſe bifariã ſecẽt in cẽtro. Iã vero, qm VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla aũt fuit & AV, ciuſdẽ VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nẽpe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cum vtriuſq; eadẽ ſit baſis GI. & altitudines æquales AV, VX:



a 17. vnde.

b 6. duode.

b Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula

huius

huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterũ, quod & recta $A\gamma$, proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidẽ PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27 conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionẽ habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, taliũ 12. eſſe cubum GO, iam demonſtratum eſt. (Nam nume 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. Quod erat oſtendendum.

[a] 8. duodec.

[b] 2. ſexti

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum eſt octaedri, atq; cubi ſibi inſcripti. oſtendimus enim T, vtriuſque eſſe centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent.

[c] *Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram qualem videlicet demonſtrauimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum.*

[c] 11. ſextidec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

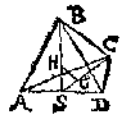
QVONIAM vt oſtendimus ad finē lib. 15. cubus, ſibique inſcripta pyramis in eodem octaedro deſcribuntur; [a] Eſt autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſquialterum; & cubus ſibi, ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis [b] triplus: quarum partium 4. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplā ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quā 27. ad 2. hoc eſt, tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 23. ſextidec.
[b] 20. ſextidec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi nōcupla eſt.

IN pyramide A B D C, cubus intelligatur deſcriptus. Dico pyramidē cubi eſſe nōcuplam. Aſſumantur enim G, H, cētra duarum baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum A D, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13, atq; propterea conuenientes in medio puncto S. Cōnexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ ſint rectarum HS, GS, ex coroll. propoſ.



18.lib.14.ac proinde proportionaliter ſecentur BS,CS, parallelæ erunt BC, HG,& per coroll.propoſ.4.lib. 6. triangulum HGS,triangulo BCS, ſimile. [b] Erit ergo vt BC,ad CS,ita HG,ad GS;& permutãdo, vt BC,ad HG, ita CS,ad GS:[c] Eſt autem CS,ipſius GS,tripla. Igitur & BC, tripla erit ipſius HG. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi,vt in propoſ.1.lib.15. demonſtratum eſt; Recta vero connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentiũ diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti,vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ.18.lib.15. (Ibi enim recta GH,iungens centra G,H, baſium ACD, ABD,cõmune latus AD,habẽtium diameter fuit baſis GNHQ, cubi deſcripti in pyramide.)Erit latus pyramidis BC, diameter baſis cubi pyramidem ABDC,circumſcribentis;GH, vero diameter baſis cubi in eadẽ pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum,quam latera;(Eſt enim vt diameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quod proportio vtraque ſit potentia dupla:Permutãdo ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus)habeat autem BC,diameter baſis cubi circumſcripti ad GH, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At vero cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi ABDC,proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis,vt hic 1.3.9. 27. videre licet. Quam ob rem, [e] cum cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem,quam 9.ad 1.nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.Quod erat demonſtrandum.

[a] 2.ſexti
[b] 4.ſexti.
[c] 18.quarti dec.
[d] 33.vnde.
[e] 20.ſexti dec.

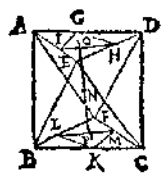
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionẽ habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ. 33. lib. 11. in demonſtratione huius propoſitionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

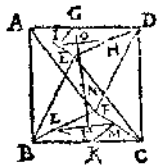
OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptũ Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

IN octaedro ABCDEF, concipiatur deſcriptũ Icoſaedrum. Dico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cũ enim vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur; ſint duæ baſes Icoſaedri GHI, KLM, in duabus baſibus oppoſitis octaedri ADE, BCF; atque ex N, cẽtro octaedri, nec non & Icoſaedri (idem enim vtriuſque eſt centrum, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſim ADE, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, triãguli ADE, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. prop. 10. lib. 14. quod quidẽ O, centrum quoque eſt trianguli GHI, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cum ergo plana oppoſita ADE, BCF, parallela ſint, ex corollario 4. propoſitionis 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholium



lium propoſitionis 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis NO: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim,& altitudinem habentis,per coroll. 1.propoſ.7. lib. 12. Erit priſma,cuius baſis ADE, & altitudo ON,æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero priſma, cuius eadem baſis ADE, altitudo autem OP, dupla altitudinis ON,duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem ADE, altitudo vero ON,per ea,quæ in ſcholio propoſ.14.lib. 12.oſtendimus. Priſma igitur,cuius baſis ADE, & altitudo OP,æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus,quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt,æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim ADE,& ſub altitudine OP, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli ADE, altitudo vero eadem OP. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem ADE, & ſub altitudine OP; cũ per ea, quæ docuimus ad prop.7. lib.12.priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint,vt baſes. Quare duo priſmata,quorum vnius baſis ADE, & altitudo OP,alterius autem baſis tertia pars baſis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia ſunt octaedro ABCDEF. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis GHI, altitudo vero OP, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: propterea que triplum huius priſmatis,nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis GHI, altitudo autem eadem OP, æquales eſſe 18.pyramidibus Icoſaedri.Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiã partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem GHI, & ſub altitudine OP,conſtituti;priſma ſcilicet,cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI,altitudo vero eadem OP; Atq; idcirco duo priſmata,quorum vnius baſis tripla ſit

trianguli GHI, altitudo autem O P, alterius vero basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia, sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes, (cum vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius ADE,) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum vnius basis tripla sit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipsius GHI, cõtinens, alterius vero basis tertia pars ipsius GHI,) Sint autem, vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli G H I; ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarũ, ad quinq; tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE, (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius G H I; (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur,) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrũ, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duę bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

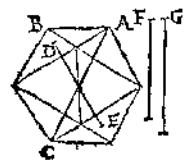


a 1 5. quinti

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphęra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat cẽtra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectã DE. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrũ in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſiũ oppoſitarum; Erit DE, diameter dodecaedri in Icoſaedro ABC, deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidẽtes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri AC, hoc eſt, in eadẽ ſphæra, in qua Icoſaedrum ABC, deſcripto, cum vtriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra Icoſaedrum videlicet, ABC, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icoſaedri ABC, ad tertiã, videlicet ad Dodecaedrum diametri DE, ſibi inſcriptũ, compo-



componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri *ABC*, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadē ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri *DE*, in Icoſaedro ABC, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem ſphæra comprehēſum, ſit vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi: (a Nā Dodecaedrum diametri AC, ad Icoſaedrū ABC, eiuſdē diametri eſt, vt G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrū diametri AC, vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiuſdē diametri AC, ad Dodecaedrū diametri DE, in Icoſaedro videlicet ABC, deſcriptū, proportionē habeat triplicatā diametri AC, ad diametrū DE, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarū cōiungentem, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionē Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptū Dodecaedrū diametri DE, cōponi quoq; ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectā DE. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionē habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

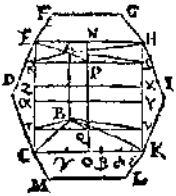
a 11. quarti dec.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis a quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

QVO.

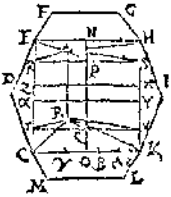
QVONIAM ex demonſtratis prop. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtẽdũt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientiũ; ſint huiuſmodi pẽtagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum latus idem commune AB, alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribẽtis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pẽtagona ABCDE, ABKIH, per hypoteſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, [b] æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, p 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Sectis. n. lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quã cadunt perpendiculares AP, BQ, demiſſæ in planum EK, vt conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX,



[b] 4. primi.

[b] 4. primi.

VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) *Erit* vtraque recta AB, PQ, maius ſegmentũ lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadẽ propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducanturre ctæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT, SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atque adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. *Ductis* deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cũ & earũ baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum AB TVSR. [a] Quoniam autẽ AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cum cõiungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [b] parallela erunt plana triangulorũ ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll prop. 8. lib. 1. cum latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrãmis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.



IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes cõtineat VY, tertia vero pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; [c] vtriuſque vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta, [d] quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB, vtriquepyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadẽ QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, vt demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item eiuſdem

a 33. primi

b 15. vnde.

c 6. duode.

d 1. ſexti.

dem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes cõtinet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. quod & basis TY, duas partes tertias cõplectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido QBKHAE, habens basin rectangulum cõtentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoq; a base cubi deficientem rectangulo a X, contentõ sub latere cubi a Y, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadẽ altitudine QB, quæ æquális est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases a base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis a base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmẽti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur

[a] 1. *sexti.*

uidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque Cβ, maius ſegmentum, & βK, minus bifariã in γ, δ; atque ex βK, abſcindatur βε, æqualis ipſi βγ, ſeu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars maioris ſegmenti Cβ, æqualis ſit ipſi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Poteſt autem ex minori ſegmento βK, abſcindi recta æqualis ipſi Cγ, dimidio maioris ſegmenti; quia βK, maior eſt, quam dimidium maioris ſegmenti Cβ. Cũ enim ſit, vt CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; ſit autẽ CK, minor, quam dupla ipſius Cβ, quod Cβ, ſit ipſius maius ſegmẽtum, erit quoque Cβ, minor, quã dupla ipſius βK, hoc eſt, erit βK, maior, quam dimidium ipſius Cβ. Quoniã igitur eſt, vt tota CK, ad maius ſegmentũ Cβ, ita maius ſegmentum Cβ, ad minus βK; * erit quoq; vt CO, dimidia ipſius CK, ad Cγ, vel βε, dimidiã ipſius Cβ, ita Cγ, vel βε, ad βδ, dimidiã ipſius βK; Ac proinde ſi CO, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum Cγ, vel βε, & minus βδ. Quare & βδ, minus ſegmentum ſecabit βε, maius ſegmẽtum extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad prop. 5. lib. 13. eritq; maius ſegmentum βδ, minus autẽ δε; Ac propterea rurſus δε, minus ſegmẽtum ſecabit rectã δK, maiori ſegmẽto βδ, æqualẽ, extrema ac media ratione, minuſq; ſegmẽtum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi CK, minore ſegmẽto εK, rectæ δK, vel ſibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmẽtũ minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo dodecaedrũ excedit ſibi inſcriptum cubum a baſe cubi deficere rectãgulo cõtento ſub latere cubi, tertiaq; parte minoris ſegmẽti eiuſdẽ lateris cubi; altitudinẽ vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrũ excedit cubum ſibi inſcriptũ parallelepipedo, &c. Quod erat demõſtrãdum.

* 15. quinti

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum

vnius

vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentũ exiſtit; Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubũ a Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius paralellepipedum, compoſitum erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonſtratum eſt.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione tripli-

cata

cara eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter ſit AC, & recta coniungens centra baſium oppoſitarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icoſaedri in eadẽ ſphæra cum cubo deſcripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icoſaedri. Cum enim anguli Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti reponantur in centris baſium Dodecaedri, atque adeo anguli oppoſiti in cẽtris baſium oppoſitarum; erit recta DE, centra baſium Dodecaedri oppoſitarum connectens, diameter Icoſaedri inſcripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem ſphæra cũ Icoſaedro intra Dodecaedrũ ABC, collocato deſcribetur, cum eandem habeãt diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icoſaedro eiuſdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, deſcripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demõſtrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, ſecundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, deſcripti ſecundæ magnitudinis ad Icoſaedrum in Dodecaedro ABC, deſcriptum, tertiam magnitudinem; Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Dodecaedrum

11. quartidecimi.

vero

vero diametri *DE*, ad Icoſaedrum eiuſdē diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro *ABC*, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus *Icoſaedri*; liquido conſtat proportionem Dodecaedri *ABC*, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cuius ſcilicet diameter *DE*, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri *AC*, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione *F*, lateris cubi, ad G, latus *Icoſaedri*, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaque ad ſibi inſcriptum *Icoſaedrum* proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes cõtinet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmẽti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadē pyramide est descriptus, vt ad finē lib. 15. tradidimus; Cubus autē pyramidis, in qua describitur, nona pars est, *cū pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

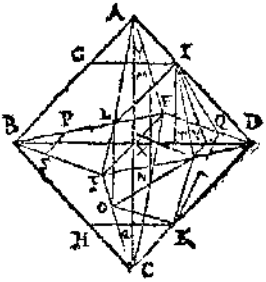
* 15. sextidec.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

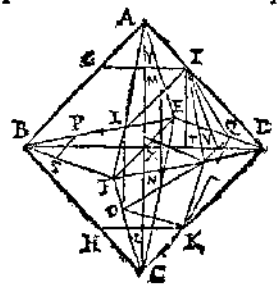
OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrū. sit ABCDEF, repetita figura prop. 16. lib. 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrū inscriptū cōponentia esse IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia

omnia eius latera extrema ac media ratione; Ité rectam IT, perpendicularé ad BD, æqualé eſſe maiori ſegmẽto XY, ſemidiametri *AX*. Dico octaedrũ ABCD*EF*, ſupera re Icoſaedrũ ſibi inſcriptũ parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratũ lateris Icoſaedri QR, altitudo vero IT, ma ius ſegmentũ ſemidiametri AX. Cũ. n. in quatuor baſib⁹ octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulũ ſolidũ octaedri D, conſtituẽtibus poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri *I*MQ, *I*LR, KNQ, *K*OR; remanebũt iuxta angulũ ſo lidũ *D*, in eiſdẽ quatuor ba ſibus octaedri quatuor triã gula IQD, IRD, KQD, KR*D*, quibus ſi accedant duo triãgula Icoſaedri, QIR, KQR, & cõe triangulũ DQR, conſtituentur duæ pyra mides ſuper cõem baſem DQR, nempe *I*DQR, KDQR, inter ſe æquales, per coroll. prop. 5. lib. 12. cum earũ alti tudo ſit recta eadẽ IT, maius videlicet ſegmẽtũ ſemidia metri octaedri. (Nã quemadmodum AX, ſecta eſt a recta GI, in Y, extrema ac media rõne, ita quoq; ſecta eſt CX, a recta HK, in Z. Quare ſi ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR; erit ea æqualis rectæ ZX, maiori ſegmẽto ſemidiametri CX hoc eſt, ipſi IT.) Quæ quidẽ pyramides extra Icoſaedrum in octaedro deſcriptũ cõſiſtũt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinq; angulos octaedri conſtituentur binæ py ramides & inter ſe & dictis duabus æquales, extra co ſaedrum prædictum: Ita vt octaedrum ſuperet Icoſae drum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus æqua libus. Quia vero triangulum DQR, dimidiũ eſt quadrati lateris DQ; (Cum DQ, DR, rectæ æquales ſint mino ra ſcilicet ſegmenta laterum octaedri, angulumq; conti neant rectum.) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius QR, duplum erit quadra ti lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Priſma igitur, ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadra



34. primi

tum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale est tribus pyramidibus earũ duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarũ pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidũ quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Æquale quoq; erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptũ; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplũ Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratũ lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifariam sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demõstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidẽ Pyramidi esse inscriptum; [a] *octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum*

[a] 21. sexti dec.

tum lateris Icoſaedri, nempe recta QK, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri, recta videlicet IT, ſeu YX: Fit, vt octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur, (quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti octaedri) ſuperet idem Icoſaedrũ in octaedro, ideoque & in Pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifariam ſectiones latera Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata a nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

* 15. ſextidec.

DE QVINQVE CORPORVM Regularium deſcriptione in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino.

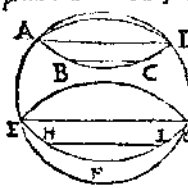
QVONIAM Euclides libro 13. quinq; corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde vero eadem a ſphæra comprehendi, noua demonſtratione confirmauit; nõ vrit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cũ eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam cõſtructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda ſunt, quorum aliqua etſi per elementa ſpharica Theodoſij demonſtrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere cenſeri poſſumus; quippe cum propoſitiones ſphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poſſint. In citandis autem

autem Theodoſii propoſitionibus ſequemur ordinem noſtrorum commentariorum, quos in eadem elementa conſcripſimus. Hinc ergo initium ſumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, dataq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN ſphæra ſint duo circuli parallelι ABCD, EFG; ſitq; primũ in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda ſit diameter parallela. Ducatur, vt in ſcholio prop. 18. lib. 11. docuimus, g datæ metrũ AD, planũ rectũ ad circulum ABCD, faciens in ſphæra ſuperficie circulũ AEGD. Quoniã igitur circulus AEGD, circulũ ABCD, bifariã, & ad angulos rectos ſecat, erit circulus AEGD, maximus, tráſibitq; per polos circuli ABCD, ex ſchol. ppoſ. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG, b cum paralleli eoſdem polos habeant: c ideoq; eũ bifariã ſecabit. Cõmunis ergo ſectio EG, eius diameter erit: d qua cum ſit ipſi AD, parallela, patet propoſitũ.



DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, nõ ſit eius diameter, cui ducẽda ſit diameter parallela in circulo EFG. e Ducatur ipſi BC, g centrũ circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime oſtendimus. Quoniam igitur vtraq; BC, EG, eidem AD, parallela eſt, ex conſtructione, & ipſa quoq; BC, EG, inter ſe parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.

EADEM ratione recta BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, a diametro EG, diuerſa, qua ipſi BC, æqualis ſit, ſi modo BC, maior non ſit diametro EF. Nam ſi in circulo EFG, ducatur ipſi BC, parallela HI, & æqualis, vt ad propoſ. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

LEMMA II.

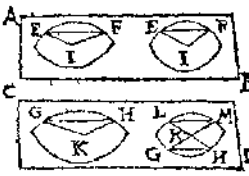
SI in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ abſcindãt arcus ſimiles; erunt duæ rectæ coniungentes extrema

vnius

a 1. 1. Theodoſii.
b 1. 2. Theodoſii.
c 15. 1. Theodoſii.
d 16. vnde.
e 31. primi
f 9. vndec.

vnius rectæ cum cẽtro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectę cũ cẽtro cõiungunt.

IN planis parallelis AB, CD, deſcripti ſint duo circuli, in quibus rectæ EF, *GH, primum parallelæ ſint, ad eaſdẽ partes centrorum I, K; auferantq; arcus ſimiles* EF, *GH, ac tandẽ iungãtur ad cẽtra rectæ* EI, FI, *GK, HK. Dico tã* EI, *GK, quam* FI, *HK, parallelas eſſe.*



Quoniam enim arcus EF, *GH, ſimiles ſunt, erunt anguli* I, K, *æquales, ex ſcholio prop. 22. lib.* 3. [a] *Igitur reliqui anguli* E, F, *reliquis angulis* G, H, *æquales erunt.* [b] *Cum ergo tã illi, quã hi, ſint inter ſe æquales; erit tam angulus* E, *anguli* G, *quã angulus* F, *anguli* H, *æqualis. Quoniã igitur in planis parallelis rectæ* EF, *GH, parallelæ ſunt, & rectæ* EI, GK, *ad eaſdẽ partes plani per* EF, *GH, ducti efficiunt cũ ipſis æquales angulos* E, G, *erunt ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 11. demonſtrauimus,* EI, GK, *parallelæ: Eademque ratione* FI, HK, *parallelæ erunt.*

[a] 32. primi

[b] 8. primi.

DEINDE *ſint* EF, *GH, parallelæ, non ad eaſdẽ partes cẽtrorũ I,* K. *Dico tam* EI, *HK, quam* FI, GK, *eſſe parallelas. Productis enim* GK, HK, *iũgatur recta* LM. *Et quia latera* GK, HK, *lateribus* LK, MK, *ſunt æqualia,* [c] *angulorque ad verticẽ K, æquales cotinent;* [d] *erũt & baſes* GH, LM, *& anguli* H, L, *æquales, & anguli* G, M. [e] *Igitur arcus* GH, LM, *æquales ſunt,* [f] *& rectæ* GH, LM, *inter ſe parallelæ: Ac pinde cũ vtraq;* EF, LM, *ipſi* GH, *ſit parallela,* [g] *erunt &* EF, LM, *parallelæ inter ſe. Quia igitur* EF, LM, *parallelæ ſunt abſcindentes ad eaſdem partes centrorum arcus ſimiles* EF, LM; *(Nam cum arcus* GH, *ſit arcui* EF, *ſimilis, erit quoque arcus* LM, *qui arcui* GH, *æqualis eſt, eidem arcui* EF, *ſimilis.) erunt tam* EI, LK, *hoc eſt,* EI, HK, *quam* FI, MK, *hoc eſt,* FI, GK, *parallelæ. Quod eſt propoſitum.*

[c] 15. primi.

[d] 4. primi.

[e] 28. tertij.

[f] 27. primi.

[g] 9. vndec.

LEMMA III.

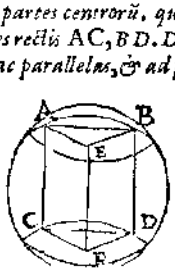
SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ &

æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelę ſunt, & ad plana circulorũ perpendiculares.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *in quibus ſint duæ rectæ æquales & parallelæ* AB, CD, *ad eaſdem partes centrorũ, quarum extrema iungantur ad eaſdem partes rectis* AC, BD. *Dico rectas* AC, BD, *æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ ſunt,* [a] *erunt* AC, BD *in eodem cum ipſis plano. Quare cũ* AB, CD, *ſint etiã æquales;* [b] *æquales quoque erunt ac parallelæ* AC, BD, *quod eſt primum.*

[a] 7. vndec.

[b] 33. primi



EX cẽtris deinde E, F, *ductis rectis* EA, EB; FC, FD, *iunctaq; recta* EF; *erunt tam* AE, CF, *quam* BE, DF, *parallelæ, ex* 2. *lemmate: Sunt autẽ & æquales ob circulorum æqualitatẽ.* [c] *Igitur & AC,* EF, *& BD,* EF, *parallelæ erunt, & æquales.* [d] *Quoniam vero circuli* AB, CD, *paralleli circa eoſdẽ polos ſunt,* [e] *recta per eorũ polos ducta tranſibit per eorundẽ centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorũdem recta erit. Quocirca recta* EF, *eorum cẽtra coniungens, per eorũ polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra ducantur tranſire, nimirum recta* EF, *& recta per eorum polos extẽſa. quod eſt abſurdũ. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum cõmune* EF. [f] *Igitur* EF, *ad plana circulorum* AB, CD, *recta eſt:* [g] *Ac propterea & vtraque* AC, BD, *ipſi* EF, *parallela, ad eaſdem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.*

[c] 33. primi.

[d] 1. 2. Theo.

[e] 10. 1. Theodoſii.

[f] 10. 1. Theodoſii.

[g] 8. vndec.

HÆC demonſtratio locũ etiam habet, quando parallelæ AB, CD, *ſunt circulorum diametri, ſed tunc* EA, EB, FC, FD, *erunt partes diametrorum, vt patet.*

LEMMA IIII.

SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductę ſint duę rectę parallelę & æqua-

& æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema pũcta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: Rectæ vero earundẽ parallelarum extrema pũcta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

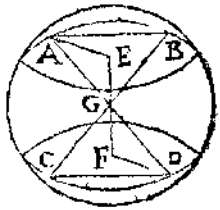
IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *& in iis duæ rectæ parallelæ & æquales* AB, CD, *non ad eaſdem partes centrorum, quarum punctæ extrema primum non ad eaſdem partes iungantur rectis* AD, BC. *Dico & has* AD, BC, *in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ ſunt;* [a] *Erunt* AD, BC, *in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuo interſecabunt, vt in puncto* G: *quod dico eſſe cẽtrum ſphæræ. Connectantur.n. circulorum centra* E, F, *rectis* EA, EG; FD, FG. [b] *Et quia anguli* AGE, CGD, *ad verticem æquales ſunt:* [c] *Itẽ tam alterni anguli* BAD, CDA, *quã alterni* ABC, DCB; *æquiangula erũt triangula* AEG, CDG. [d] *Igitur erit vt* AE, *ad* EG, *ita* DC, *ad* CG: *Item vt* AB, *ad* AG, *ita* DC, *ad* DG. *Cum ergo* AB, CD, *ponantur æquales,* [e] *erunt quoque tam* EG, CG, *quam* AG, DG, *inter ſe æquales. Rurſus quia* AE, DF, *ſemidiametri circulorum æqualium æquales ſunt; ſunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [f] *ideoque anguli alterni* EAD, FDA, *æquales; erunt duo latera* EA, AG, *duobus lateribus* FD, DG, *æqualia, angulosque comprehendent æquales.* [g] *Igitur & baſes* EG, FG, *& anguli* AGE, DGF, *æquales ſunt. Et quia*



[a] 17. undec.
[b] 15. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. ſexti.
[e] 14. quinti
[f] 29. primi.
[g] 4. primi

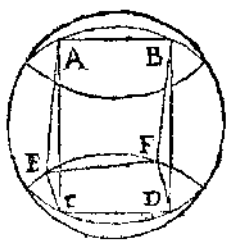
[a] 7. vndec. [b] 2. vndec.

[a] Et quia AD, in eodem plano eſt, in quo parallelæ AE, DF; [b] & EG, FG, in eodē plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum conſtitutæ, propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Procło ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum ſphæræ tranſibit, vt in præcedenti lemmate demonſtrauimus, [c] perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales ſint oſtenſæ, erit G, centrū ſphæræ, [d] propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter a centro ſphæræ abſunt; inæqualiter vero abeſſent, ſi centrum ſphæræ in recta EF, diceretur aliud punctū quam G. Quocirca AD, BC, diametri ſphæræ ſunt, & inter ſe propterea æquales quod eſt primum.



[c] 10. 1. Theodoſii. [d] 6. 1. Theodoſii.

SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad eaſdem partes iungātur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter ſe eſſe, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, eſſe rectos. Quod enim ſint parallelæ & æquales, [c] manifeſtum eſt, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, ſint perpendiculares, ita oſtendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpēdiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti ſunt, erunt ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, ſemicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, ſemicirculi erunt, [f] & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales ſunt, [g] ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11.



[c] 33. primi. [f] 31. tertij. [g] 9. vndec.

lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramq; EC, EA, & ad vtramq; FD, FB, vt oſtendimus, perſpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: ac propterea & CD, AB, ipſi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod eſt ſecundum.

[a] 4. vndec.

[b] 8. vndec.

LEMMA V.

SI in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt: Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erunt, rectoſque cum ipſis angulos conficient.

SINT in ſphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis AC, BD, *Dico* AC, BD, *æquales eſſe. Quæ enim parallelæ ſunt* AB, CD; *erũt* AC, BD, *in eodem cum ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano, & fiat in ſphæra circulus* A B D C, *in quo cum parallelæ ſint* A B, CD; *erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus* AC, BD, *æquales: ideoque & rectæ* AC, BD, *æquales erunt. Quod ſi parallelæ* AB, CD, *fuerint æquales, ita vt quadrilaterum* ABDC, *in circulo habent duo oppoſita latera* AB, CD, *parallela, & æqualia; erit ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3.* ABDC, *parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli* A, B, D, C, *recti erunt. Quod eſt propoſitum.*



[c] 7. vndec.

[d] 1. 1. Theodoſii.

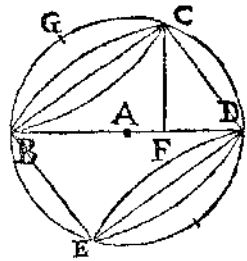
[e] 29. tertij.

LEMMA

LEMMA VI.

IN data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter ſphæræ ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera.

SIT ſphæræ centrum A, *per quod planum ductum faciat circulum maximũ* BCDE, *cuius diameter* BD, *ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta aũt* BD, *in* F, *vt* BF, *ipſius* FD, *dupla ſit; erit* BD, *taliũ partium 3, qualium 2. eſt* BF; *ac proinde* BD, *ipſius* BF, *ſeſquialtera eſt. Ducta quoq;* FC, *ad* BD, *perpẽdiculari, iungãtur rectæ* BC, DC, *ductaq;* DE, *ipſi* BC, *parallela, connectatur recta* BE. [a] *Et quoniam tam duo anguli* BCD, EDC, *quam duo* BED, CBE, *duobus rectis æquales ſunt.* [b] *eſtq; tam* BCD, *quam* BED, *rectus; erit quoq; &* EDC, *&* CBE, *rectus. Igitur ex ſcholio prop. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum* ECDE, *parallelogrammum eſt;* [c] *ideoque rectæ* BC, DE, *æquales ſunt. Diuiſo iam arcu* BC, *bifariam in* G, *erit quoque arcus* EGD, *diuiſus bifariã in* G, *quod ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus quoque* BE, CD, *æquales ſint. Polo igitur* G, *& interuallis* GB, *GE, circuli in ſuperficie ſphæræ deſcribantur tranſeuntes per* C, D, *ob æqualitatẽ tam arcuum* GB, GC, *quam* GE, GD; [d] *qui paralleli erunt, cum eoſdem habeant polos.* [e] *Et quia circulus maximus* BCDE, *per polos ſecat circulos* BC, ED, *bifariam; erũt* BC, ED, *diametri ipſorum, quæ cum æquales ſint oſtenſæ, erunt & circuli* BC, ED, *æquales. Dico diametrum ſphæræ* BD, *ad vtramque diametrum* BC, ED, *proportionẽ habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. tres rectæ* DB, BC, BF, *continuè proportionales ſunt; erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt* BD, *ad* BF, *ita quadratum*



[a] *29. primi*

[b] *31. tertij.*

[c] *34. primi.*

[d] *2. 2. Theodoſii.*

[e] *15. 1. Theodoſii.*

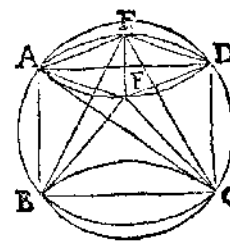
dratum ex BD, *ad quadratum ex* BC: *Eſt autẽ* BD, *ipſius* BF, *ſeſquialtera, vt oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex* BD, *quadrati ex* BC, *atque adeo & quadrati ex* DE, *ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter ſphæræ* B D, *vtriuſque diametri* B C, DE, *potentia ſeſquialtera eſt. quod eſt propoſitum.*

HIS demonſtratis, hoc modo in ſphæra data deſcribemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data ſphæra Pyramidem deſcribere.

DESCRIBANTVR in data ſphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, *æquales, & paralleli, quorum diametrorũ potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur* ABCD, [a] *qui eos ad angulos rectos, ac bifariam ſecabit, ac proinde cum eis cõmunes ſectiones faciet diametros* AD, BC. *Ducatur in circulo* AD, *alia diameter* EF, *ſecans* AD, *ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur* EB, EC, FB, FC. *Dico* EBCF, *eſſe pyramidẽ, hoc eſt, quatuor triãgula* EBC, BCF, CFE, EFB, *eſſe æquilatera & æqualia. Iũctis.n. rectis* AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; *erit* AC, *diameter ſphæræ, ex lemmate 4. &* AB, DC, *æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique* AEDF, *quadratum erit in circulo* AD, *deſcriptum, vt conſtat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ* AC, *ſeſquialterum eſt quadrati ex* AD, *diametro circuli; ſi ponatur quadratũ ex* AC, 3. *erit quadratum ex* AD, 2. *Cum ergo quadratum ex* AC, [b] *æquale ſit quadratis ex* AD, DC, *quod angulus* ADC, *rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex* DC, 1. *ac proinde*

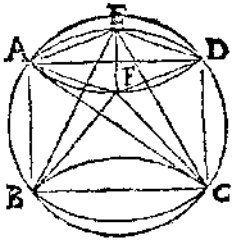


[a] 15. 1. Theodoſii.

[b] 47. primi.

de quadratum ex AD, *quadrati ex* DC, *duplum erit: Eſt autem & quadratum ex* AD, *quadrati ex* DF, *duplum, ex ſcholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex* DC, DF
a 47. primi. *quibus cum æquale ſit quadratum ex* CF, *quod angulus* CDF, *ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; erit quadratũ ex* CF, *quadrati ex* DF, *quoque duplum, propterea aq; quadrato ex* AD, *æquale. Recta igitur* CF, *rectæ* AD, *hoc eſt, ipſi* BC, *æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur* BF, *eidem* BC, *æqualis; ideoque* BCF, *triangulum eſt æquilaterum.*

RVRSVS quia quadratum ex AD, *quadrati ex* DC, *duplum eſt oſtenſum; eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex* DE: *æqualia erunt quadrata ex* DC, DE:



b 47. primi *quibus cum æquale ſit quadratum ex* CE, *quod angulus* CDE, *ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex* CE, *quadrati ex* DE. *Æqualia ergo ſunt quadrata ex* CE, AD, *propterea quæ recta* CE, *rectę* AD, *hoc eſt, rectis* BC, EF, *æqualis eſt, atq; adeo & recta* CF, *quę ipſi* BC, *oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur* CEF, *æquilaterum etiam eſt, & ipſi* BCF, *æquale, ob laterum æqualitatẽ. Non aliter demonſtrabimus, triangulum* BEF, *eſſe æquilaterum, & ipſis* BCF, FCE, *æquale. Ex quo ſequitur &* BCE, *triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cum latera* BE, CE, *ipſi* BC, *oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt* EBCF, *ex defin. 26. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cum eius anguli ſolidi* E, B, C, F, *in ſuperficie ſphæræ conſiſtant, quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

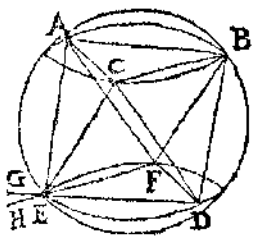
HINC ſequitur, diametrum ſphæræ potentia eſſe ſeſquialteram lateris pyramidis in ea ſphæra deſcriptæ. Namlatus pyramidis eſt æquale diametro AD, *vt oſtendimus, & ex cõſtructione diameter ſphæræ potentia eſt ſeſquialtera diameteri* AD.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, *ita vt ſphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera.* [a] *Deſcripto autem triangulo æquilatero* ABC, *in circulo* ABC, *ducatur per primum lemma, recta* AB, *in circulo* DEF, *parallela & æqualis* DE, *ad diuerſas partes centrorum: qua latus etiam erit triãguli æquilateri in circulo* DEF, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero* DEF, *erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus triãguli* ABC, *æqualia & parallela: æqualia quidem,*

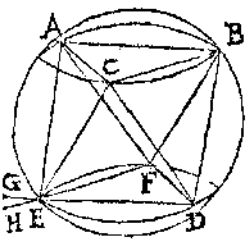


ob laterum AB, DE, *æqualitatem; parallela vero, ex ſchol. propoſ. 10. lib. 11. Cum enim parallelæ ſint* AB, DE, *& anguli* ABC, DEF, *æquales; productis rectis* DE, FE, *ad* G, H, *erunt quoque anguli* ABC, GEH, *æquales. Cum ergo parallelæ ſint* AB, GE, *& BC, EH, ad eaſdẽ partes plani per* AB, GE, *ducti; erunt quoque* BC, HE, *hoc eſt,* BC, EF, *parallelæ ex illo ſcholio propoſ. 10. lib. 11. Eadem ratione parallela erit* DF, *ipſi* AC. *Connectantur demique* AE, EC, CD, DB, BF, FA, *vt in figura. Dico* AD, *octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula* ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ* AB, DE, *æquales ſunt & parallelæ ad diuerſas partes centrorũ, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ* AD, BE, *(quas tamẽ confuſionis vitãdæ gratia nõ duximus) diametri ſphæræ, & rectæ* AE, BD, *æquales etiã erũt, ac perpendiculares ad ipſas* AB, DE. [b] *Quadratum igitur ex* BE, *duobus quadratis ex* BD, DE, *æquale erit: Poſito autem quadrato*

[a] 2. quarti.

[b] 47. primi

quadrato ex diametro ſphæræ BE, *6. quadratum ex* DE, *eſt 3. (Nam cum per conſtructionem diameter ſphæræ potentia ſit ſeſquialtera diametri circuli* DEF: *poſito quadrato ex* BE, *6. erit quadratum diametri circuli* DEF, *4. At poſito quadrato diametri circuli* DEF, *4. quadratum lateris trianguli æquilateri* DE, *eſt 3. quod ex coroll. 1. prop. 12. lib. 13. diameter circuli potentia ſit ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex* BD, *eſt 3. ac proinde quadrata ex* DE, BD, *æqualia ſunt, & rectæ ipſæ* DE, BD, *æquales. Eſt autem* DE, *ipſi* AB, *per conſtructionem, &* BD, *ipſi* AE, *per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ* AB, BD, DE, EA, *æquales erunt, conſtituentq; quadratum* ABDE, *cum anguli ad* A, B, D, E, *recti ſint ex eodem 4. lemmate.*



RVRSVS quia BC, EF, *parallelæ ſunt & æquales ad diuerſas partes centrorum; erũt quoque iunctæ rectæ* BE, CF, *non ad eaſdem partes, diametri ſphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ* BF, CE, *æquales inter ſe, atque ad* BC, EF, *perpendiculares, eritque rurſus, vt prius, quadratum* BCEF. *Non aliter oſtendemus,* ACDF, *quadratum eſſe, cum iunctæ rectæ* AD, CF, *ſint quoque ſphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata* AD, BE, CF, *conſtructa ſint ſuper latera æqualia* AB, BC, CA, *nimirum ſuper latera trianguli æquilateri, eiũ* AB, *latus ſit quadrati* AD; *& BC, quadrati* BE; *& CA, quadrati* CF; *erũt omnia triãgula octo* ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera, & inter ſe æqualia. Octaedrum ergo eſt* AD, *ex defin. 27. lib. 11. ſphæræ in data deſcriptum, cum eius anguli ſolidi,* A, E, D, E, C, F, *ſphæræ ſuperficiem attingant. quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

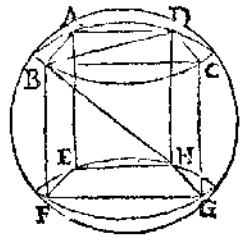
COLLIGITVR ex his, ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris octaedri in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum

ſtratum enim eſt, quadratũ ex BE, diametro ſphæra duplum eſſe quadrati ex DE, latere octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data ſphæra cubum deſcribere.

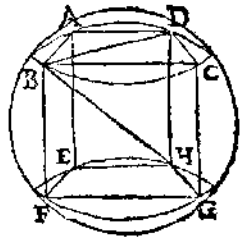
DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales ac parallelι ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ. [2] Deſcripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, ducatur per 1. lẽmatis rectæ AD, in circulo EFGH, parallela EH, & æqualis ex eadẽ parte centrorum, qua latus quoque erit quadrati in circulo EFGH, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterũ AD, EH, æqualitatem; parallela vero ex ſcholio propoſ. 10. lib. 11. Nã quia parallelæ ſunt AD, EH, ſuntq; anguli æquales ADC, EHG, nimirum recti; erunt quoque DC, HG, parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per AD, EH, ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ AE, BF, CG, DH, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico AG, eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, eſſe quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis BH, BD, erit ex lemmate 4. BH, diameter ſphæræ; at BD, diameter circuli ABCD, quippe qua diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur per conſtructionem, quadratum ex BH, ſeſquialterum eſt quadrati ex BD; quadratum autem ex BD, quadrati ex BC, duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſi ſtatuatur quadratum ex BH, 3. erit quadrati



[2] 6. quarti.

dratum ex B D, 2. & quadratum ex DC, 1. atq; adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplum erit. Rursus quia quadratum ex B H, eſt 3. & quadratum ex B D, 2. [a] eſtque quadratum ex BH, æquale quadratis ex B D, DH, quod angulus B D H, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, tripli eſt quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratũ ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo ſunt quadrata ex D C, D H, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. [b] Cum ergo oppoſitis lateribus GH, CG, æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata oſtendentur: Sed & AC, EG, quadrata ſunt ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data ſphæra deſcriptus, cum eius anguli ſolidi A, B, C, D, E, F, G, H, ſuperficiem ſphæræ contingant. quod eſt propoſitum.

[a] 47. primi.



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ B H, triplum eſſe quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundẽ circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis eſt circulo ABC, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſitio. 21.

PRO-

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.

REPERIATVR[a] *recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ data, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cũ pẽtagono deſcripti: Fiatq; ex coroll. prop. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdã lineæ, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrum, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data,*[b] *accommodetur in eo recta, quæ inuentæ ſemidiametri ſit dupla, cum hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam, ſi per eam rectã planum ducatur rectũ ad circulum illũ maximum,*[c] *faciet id circulũ ABC, in ſphæra, cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde*[d] *inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiatq; vt 3. ad 1. ita per coroll. prop. 6. lib. 10. quadratũ rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo ABC, parallelus: quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad prop. 1. lib. 4. demõſtrauimus, & per eam rectã planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectũ, ex ſcholio propoſ. 18. lib. 11. Nam per idem ſcholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelũ,*[e] *faciet q; in ſphæra circulũ, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alij duo æquales ac paralleli deſcribantur GHI, KLM: quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.*[f] *Deſcripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis ſit vni lateri trianguli æquilateri in*

[a] 12. ſexti

[b] 1. quarti.

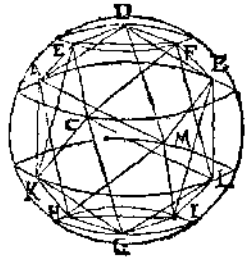
[c] 1. 1. Theodoſii.

[d] 12. ſexti

[e] 1. 1. Theodoſii.

[f] 2. quarti.

circulo ABC, deſcripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipſi EF, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, deſcripti. Completis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipſi DF; at BC, MK, GI, ipſi DE: quod probabitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. vt in problemate ſecundo oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confuſionem parcret, ſed tantum laterum extrema puncta notauimus. Poſtremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF: ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico DG, eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur, oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16. lib. 13.) ſuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulos in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notauimus.



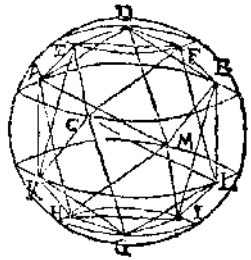
SIT igitur in ſphæra deſcriptũ Icoſaedrũ DG, duodecim angulos ſtatuẽs in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinq; rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales ſunt, cũ ſint latera triangulorũ æquilateroru̇ æqualiũ, ſi ex polo D, per E, in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta A, M, B, F; ac propterea pentagonum EAMBF, in

vno

uno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eiuſ latera ſint æqualia, vtpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex ijs, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt a nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinq; latera Icoſaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinq; Icoſaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK. Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinq; latera Icoſaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: At tandem GLFEK, ob quinque Icoſaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8 lib. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta AB, ipſi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipſi DF, parallela in pentagono AKCFD. Et BC, iuncta parallela ipſi DE, in pentagono DECLB. [a] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela ſunt, [b] faciuntque circulos parallelos in ſphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipſi IL, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipſi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipſi GH, in pentagono LBMHG: At propterea circuli in ſphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipſi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipſi EF, in pentagono GLFEK, [c] Igitur EF, HI, cum ſint eidem iuncta AB, vel KL, parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt. Eademque ratione DE, GI, cum ſint eidem iuncta BC, vel KM, parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propterea quæ plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter ſe

[a] 15. vnde.
[b] 1. 11. Theodoſii.
[c] 8. duodec.

ſunt, & tam circuli DEF, GHI, inter ſe æquales, ob triangula æquilatera in illis deſcripta æqual. a, q̃ circuli ABC, KLM, inter ſe etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in iſis, quæ ex mactis AB, BC, CA, & KL, LM, MK, conſtituuntur: quippe cum latera hæc ſint recta ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.



QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad eaſdem partes extrema K, B parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphæra diameter eſt, & angulus EAK, rectus, ex 4. lemmate, quod KA, connectat ad eaſdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; a erit quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rurſus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, ſubtendit: Vt autem recta angulum pentagoni ſubtendens ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad EF, vel AK, ipſi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco b cum latus pentagoni poſſit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum; erit diameter ſphæræ KB, (quæ ambas AB, AK, poteſt, vt oſtendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus eſt hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare ſphæræ diameter KB, ad iunctã AB, proportionẽ habet, quã pẽtagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eã, quã latus pẽtagoni habet ad latus decagoni: c Ac proinde cũ ta AB, latus triãguli æquilateri in circulo ABC, quã EF, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum ſit ſemidiametri ſui circuli; erũt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales ſunt, illi, quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri

a 47. primi.

b 10. tertij dec.

c 12. tertij dec.

tri initio inuenta, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

HIS demonstratis, facili negotio concludemus, solidam figuram a nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæra diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: [a] ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni. [a] 20. primi.

COROLLARIVM II.

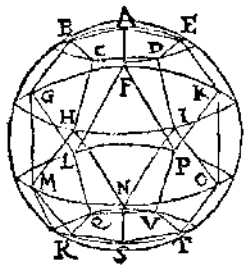
COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione; erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctam AB: [b] Est autem latus hexagoni in circulo ABC, hoc est, semidiameter potentia subtriplum rectæ iunctæ AB, [b] 15. tertij dec.

AB, quod AB, *ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo* ABC, *potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo* ABC, *deſcripti.*

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR in data ſphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propoſ. ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, *ita vt ſemidiametri circulorum* ABCDE, QRSTV, *ſint potentia ſubtripla duarum rectarum, ad quas diameter ita ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni, ſemidiametri vero circulorum* FGHIK, LMNOP, *potentia ſint ſubtripla duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto autem in circulo* ABCDE, *pentagono* ABCDE, *æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri* CD, *ad eaſdem partes centrorum parallela* HI, *in circulo* FGHIK, *& æqualis lateri pentagoni eiuſdem circuli, ex 1. lemmate: Rectæ autem* HI, *ad diuerſas partes centrorum agatur eodem modo parallela* LP, *in circulo* LMNOP: *Huic tandem* LP, *ad eaſdem centrorum partes ducatur parallela* QV, *in circulo* QRSTV. *Completis autem pentagonis in hiſce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confuſionem vitaremus, non duximus, ſed eorum tantum extrema puncta notauimus,) erunt ſingula latera eorum ſingulis lateribus pentagoni* ABCDE, *parallela, eo ordine, quo lateri* CD, *parallela ductæ ſunt: quod demonſtra-*



monſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erũt ipſi BC, &c. Poſtremo ex quolibet 20. pentagonorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico AS, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona AEC DE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera eſſe, æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrãdum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſuos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.

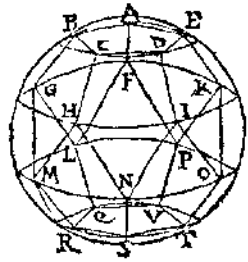
SIT ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos ſtatuës in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtẽdens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipſi AE, in pentagono AEKPF, & FG, ipſi AB, in pentagono ABGLF; & ſic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FG, parallelæ ſunt; [a] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelũ erit planum per FG, GH, ductum; quod hæ rectæ rectis AB, BC, ſint parallelæ. Igitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter ſe parallela ſunt, cum eidẽ plano pentagoni ABCDE, ſint parallela; atque adeo, ex eodem ſcholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter oſtendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in ſphæra [b] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos

[a] 15. vnde.

[b] 1. 1. Theodoſii.

parallelos efficient QRSTV, LMNOP. Eruntq; tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter ſe æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL.

[a] 4. primi. [a] quæ omnes æquales ſunt, cum ſubtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.



DEINDE quia ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ ſunt in pentagonis CHNID, BGMLC; [b] erunt quoque ipſæ iunctæ ND, MB parallelæ. Sūt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqua-

[b] 9. vndec.

[c] 33. primi libus ſubtendant. [c] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quod vtraq; lateri DI, ſit parallela. [d] Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus eſt, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ ſunt oſtenſæ. Non ſecus oſtendentur parallelī circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli ſunt.

[d] 15. vnde.

RVRSVS quoniam iunctæ rectæ EF, OV, cum ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æquidiſtent, [e] parallelæ ſunt; nec non & inter ſe æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus ſubtendant,

[e] 9. vndec.

[f] 33. primi [g] 7. vndec. [f] erunt & rectæ iunctæ EO, FV. parallelæ & æquales. Quadri laterum ergo EFVO, in vno plano eſt, [g] cum EF, OV, in eodem ſint plano cum parallelis EO, FV. Eſt autem & in circulo, [h] propterea quod planum, in quo exiſtit, in ſphæra circulum efficit. Igitur ex ijs, quæ ad propoſ. 31. lib. 3. demonſtrauimus, cum in eo quadrilatero oppoſita latera æqualia ſint, quadrilaterum rectangulum eſt EFVO; ac proinde cum omnia latera æqualia ſint, ſubtendētia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum poteſt lateris FE, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. hoc eſt, rectæ iunctæ FG, quod æquales ſint FG, FE, ſubtendentes angulos pentagono-

[h] 1. 1. Theodoſii.

tagonorum æqualium: ideoque qualium partium 1. ſtatuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata ſimul earundem partium 3. Quibus [a] cum æquale ſit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter ſphæræ eſt, (Nam cū æquales ſint iunctæ FG, ON, ſubtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ ſint, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter ſphæræ.) erit quoque quadratum diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt quadratum rectæ FG, hoc eſt, quadratum diametri ſphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit. [a] 47. primi

[b] Eſt autem & quadratum trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris triāguli ad quadratum lateris hexagoni; [c] atque adeo vt diameter ſphæræ ad rectā FG, ita latus triāguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni eiuſdem circuli ad latus trianguli, [d] quod FG, ſit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque vt diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad inſcriptam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis. [b] 13. tertiidec. [c] 22. ſexti

Diam. ſphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, vt iuncta recta FG, ſubtendens angulum pētagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pētagoni in circulo ABCDE, ita latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE; erit quoq; vt latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni ī eodē circulo

tum

cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo F G H I K, *ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodē circulo cū pētagono deſcripti, vt proxime demōſtratū eſt. Igitur ex æquo erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo* A B C D E, *ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodē circulo cū pentagono deſcripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque, vt diameter ſphæræ ad* E F, *latus trianguli in circulo* D E F, *ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterq; circulus* D E F, G H I, *figuræ antecedentis propoſ. vtrique circulo* A B C D E, Q R S T V, *huius figuræ æqualis. Quare circuli* A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, *ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.*

Diam. ſphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

Q V I B V S *demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram* A S, *a nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum* A B C D E, *omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.*

CORÒLLARIVM.

P E R S P I C V E *colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus* D E F, *figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo* A B C D E, *figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14 propoſ. 5.*

M A N I F E S T V M *quoque eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.*

SCHO-

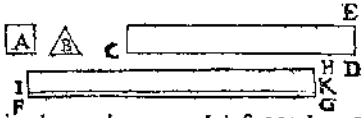
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facile etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademque ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cū poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper a minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus DE, lateri eiuſdem quadrati æquale: Eritque rectangulū CE, octuplum quadrati A, cum ſit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectāgulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſæ, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplū

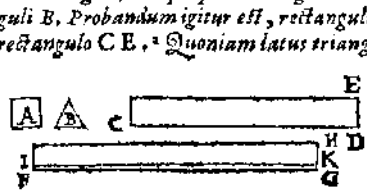


lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi GH, hoc eſt, altitudini trianguli B, [b] vigecuplum eſt trianguli B; Ei autē triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum

[a] 1. ſexti

[b] 1. ſexti

ctangulum FH, quippe cum baſis FG, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplũ trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum FH, maius eſſe rectangulo CE. [a] Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus DE, potentia ſeſquitertiũ eſt eius perpẽdicularis, hoc eſt, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potẽtia proportionẽ habet, quam 25. ad 16. quod FG, ſit 10. & CD, 8. hoc eſt, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſupernõcupartiens ſextaſdecimas, quam 4. ad 3. ſ. ſquitertia, quod maior ſit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$. [b] Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK; erit que maior quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH; [c] ac proinde maior erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipſi FG, parallela, erit vt IK, ipſi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK. [d] Igitur erit IH, rectangulũ rectangulo CE, æquale: ideo [e] FH, maius, quam CE. Quod eſt propoſitum.



[a] 12. quarti dec.

[b] 12. ſexti

[c] 10. quinti

[d] 14. vel 16. ſexti.

[e] 20. quarti dec.

II.

OCTO quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

EVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæræ deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo vero eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcriptis, quod quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæræ æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ. Quod eſt propoſitum.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit perpendicularis e centro

tro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri,& cubi ducta.

NAM [a] *quia latus octaedri maius eſt latere Icoſaedri in eadem ſphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icoſaedri. Quare ſi vtrumq; ſolidum ita intra ſphæram conſtituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius ſit parallelum, longius a centro aberit Icoſaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis e centro ſphæra ad baſim Icoſaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad baſim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi;* [b] *quod baſis cubi, & baſis octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideoque æqualiter a centro diſtent; erit quoq; perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi maior. Quod eſt propoſitum.*

[a] *18. tertij dec.*

[b] *21. quartidec.*

IIII.

SI Cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt.

QVONIAM *viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ maiora ſunt octo quadratis ex eadē ſphæra ſemidiametro deſcriptis, vt theoremate 1. demōſtrauimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri maiora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæra conſtructis, quod latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæra maius ſit, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & viginti triangula Icoſaedri multo maiora ſunt octo quadratis ex ſphæra ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem Icoſaedri conficiant, at octo quadrata ex ſemidiametro ſphæra deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2. paulo ante demonſtrato; erit quoque Icoſaedri ſuperficies maior ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.*

DE

DE COMPARATIONE Soliditatum quinque corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demonſtremus iam, Dodecaedrum maius eſſe Icoſaedro: Icoſaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icoſaedro maius eſt.

[a] *11. quartidec.*
[b] *18. tertiædecimi*

QVONIAM eſt,[a] vt cubi latus ad latus Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad Icoſaedrum:[b] eſt autem latus cubi latere Icoſaedri maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius eſt.

QVONIAM perpẽdicularis ex centro ſphæræ in vnã baſim Icoſaedri cadens, maior eſt perpendiculari ex eodem centro in vnam baſim cubi demiſſa, vt in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt: Item ex 4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior quoque eſt; Erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Icoſaedri contentum, maius ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in ſcholio propoſ. 20. lib. 14. demonſtrauimus, illud ſolidum Icoſaedro ſit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icoſaedrum, quam cubus. Quod eſt propoſitum.

III.

CVBVS Octaedro maior eſt.

QVONIAM eſt, [a] vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius. (Nam [b] cum latus cubi maius ſit latere Icoſaedri, & latus Icoſaedri, ex coroll. 1 problematis 4. ſuperioris, maius ſemidiametro ſphæræ; erit latus cubi multo maius ſemidiametro ſphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.

[a] 27. quartidec.
[b] 18. tertiædec.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius eſt.

QVONIAM baſis octaedri minor eſt baſe Tetraedri, [c] quod baſis Tetraedri ad baſem octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri demiſſa, maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad vnam baſim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam ſupra theoremate 3. oſtendimus, perpendicularem in Icoſaedro maiorem eſſe perpendiculari in octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficies octaedri ſuperficie Tetraedri maior, [d] cum illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Octaedri cadēte, & tertia parte ſuperficiei octaedri, maius eſt ſolido contento ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim Tetraedri deducta, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 14. illud ſolidum octaedro ſit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.

[c] 14. quartidec.
[d] 14. quartidec.

ALITER. Quoniam eſt, [e] vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita eſt triplum Te-

[e] 22. quartidec.

traedri ad tertiam eius partem, id eſt, ad ipſum Tetraedrū. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius ſit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam[a] quia quadratum lateris Tetraedri ſeſquitertium eſt quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem ſeſquitertia, idcoque multo minorem tripla; [b] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.

[a] 18. tertij dec.

[b] 10. quin.

[c] 17. quartidec.

ALITER. [c] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri ſphæræ; Eſt autem rectangulum illud minus quadrato diametri ſphæræ, quod eius latera minora ſint ſphæræ diametro; quippe quæ ſingula minora ſint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc eſt, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod eſt propoſitum.

[d] 32. quartidec.

[e] 27. quartidec.

ALITER. [d] Quoniam cubus triplus eſt Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri; [e] (Nam ſ cubus ad octaedrum eſt, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ; & latus cubi minus eſt, quam triplum ſemidiametri ſphæræ, quod & tota diameter, qua cubi latere maior eſt, minorem proportionem habeat ad ſemidiametrum, quam triplam.) [f] Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod eſt propoſitum.

[f] 28.

EODEM, prorſus ordine ſe mutuo ſuperant conuexa ſuperficies eorundem corporum Regularium: hoc eſt, ſuperficies conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri; Superficies conuexa Icoſaedri maior ſuperficie conuexa cubi: Conuexa ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior: Octaedri denique ſuperficies conuexa maior eſt conuexa ſuperficie Tetraedri.

QVONIAM enim[f] eſt ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri; Eſt autem cubi latus latere Icoſaedri maius, [g] vt ſupra demonſtratum eſt; Erit & ſuperficies Dodecaedri ſuperficie Icoſaedri maior.

[f] 9. quartidec.

[g] 18. tertiidec.

SVPERFICIEM vero Icoſaedri maiorem eſſe ſuperficie

perficie Cubi, demonſtratum eſt paulo ante theoremate quarto ante comparationem ſoliditatum quinque corporum Regularium.

DEINDE [a] quoniam eſt ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo oſtendimus, cubum Octaedro maiorem eſſe, demonſtratum eſt; Erit quoq; ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior. [a] 27. quartidec.

DENIQVE [b] quia ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri; perſpicuum eſt, Octaedri ſuperficiem maiorem eſſe Tetraedri ſuperficie. [b] 14. quartidec.

VIDES igitur ſuperficies & ſoliditates corporum Regularium contrario ordine reſpondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam ſuperficiem, at eo minus latus. Nam [c] vt ſupra demonſtratum eſt, Tetraedri latus eſt omnium maximum, eius vero ſuperficies atque ſoliditas, vt hic demonſtrauimus, omnium minima eſt: Item Dodecaedri latus omnium eſt minimum, eius vero conuexa ſuperficies & ſoliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, ſi Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icoſaedrum, & Dodecaedrum in eadē ſphæra deſcripta ſint, latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atque ab Euclide deſcripta, ſe mutuo ſuperant, [d] vt ſupra oſtenſum eſt; ita contrario ordine eorundem ſuperficies conuexæ, atque ſoliditates ſe mutuo ſuperant, vt hoc loco demonſtrauimus. [c] 18. tertiidec. [d] 18. tertiidec.

CÆTERVM prætereundum non eſt hoc loco id, quod a Pappo demonſtratum eſt lib. 5. Mathematicarum collectionum; ſoliditates videlicet quinque corporum Regularium, ſi iſoperimetra ſint, atque idcirco, non in eadem ſphæra conſtituta, longe aliter ſe habere, quam a nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Ita vt Icoſaedrum ſuperet Dodecahedrum, Dodecaedrū maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius ſit.

INVENTIO ANGVLI inclinationis duarum baſium cuiuſcunque ſolidi regularis, vnius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppoſitis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares ſint ad B D, communem ſectionem planorum A B D, C B D, in quibus exiſtunt. (ª Sunt.n.in triangulis AEB, A E D, anguli ad E, æquales,&c.) angulũ inclinationis AEC, baſiũ ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur FGH, triangulum æquilaterum ſuper rectam FG, lateri pyramidis æqualem conſtructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum A B D, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad F G, conſtituatur ſuper FG, triangulum FGK, habens vtrumque latus F K, G K,



ª 3. primi.

GK, æquale perpendiculari HI, hoc eſt, vtrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem eſſe angulo inclinationis AEC, baſium ABD, CBD. Cum enim latera KF, KG, æqualia ſint lateribus EA, EC; & baſis FG, baſi AC; æquales erunt anguli FKG, AEC. Dico inſuper angulum inclinationis AEC, acutum eſſe. [b] Cum enim latus AD, vel illi æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE; ideoque earundem partiũ 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cũ in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

[a] 8. primi.

[b] 12. quarti dec.

COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque a lateribus pyramidis, quale ſuit AC; [c] *omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æqua-*

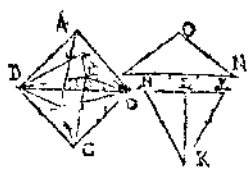
[c] 8. primi.

les ſint; ideo non & latera pyramidis eaſdem ſubtendentia?

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR Octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABF, ADE, communi, bifariam q; ſectum in G, rectæ ducãtur BG, DG; quę cũ perpẽdiculares ſint ad AE, communẽ ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtũt, (quod in triãgulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta KL, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro



* 8. primi.

metro quadrati *ABCD*, ex *AB*, latere octaedri deſcripti, triangulum *OMN*, habens verũque latus *MO*, *NO*, perpendiculari *KL*, æquale, hoc eſt, vtrique perdendiculari *BG*, *DG*, cum perpendiculares *KL*, *BG*, *DG*, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum *MON*, æqualem eſſe angulo inclinationis *BGD*, baſium *ABE*, *ADE*. Cum enim latera *OM*, *ON*, æqualia ſint lateribus *GB*, *GD*; & baſis *MN*, baſi *BD*; Æquales erunt anguli *MON*, *BGD*. Dico præterea, angulum inclinationis *EGD*, eſſe obtuſum. [a] Cũ enim diameter octaedri *BD*, dupla ſit potentia lateris *AB*; latus vero *AB*, potentia ſeſquitertium rectæ *BG*: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri *BD*, talium 4. erit quadratum lateris *AB*, earundemque 3. quadratum rectæ *BG*; ideoque ambo ſimul quadrata rectarum *BG*, *DG*, talium partium 6. erunt [b]. Quare quadratum lateris *BD*, in triangulo *GBD*, maius eſt quadratis ſimul laterum *GB*, *GD*; Ac propterea angulus *BGD*, obtuſus erit, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 2. oſtendimus.

[a] 8. primi.

[b] 14. tertiædecimi

[c] 12. quartidec.

COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes baſium octaedri æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales

sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes.

a 8. primi.

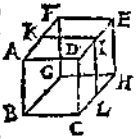
III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter se, nec non & IE, LH, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoque angulos rectos ad latus DE, efficiant, cõtinebunt KIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ IK, IL, parallelæ existentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõstituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.

b 33. primi

c 10. vnde.



CO-

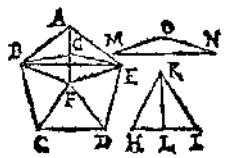
COROLLARIVM I.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum; perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

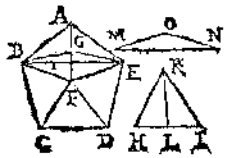
IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis ABCDEF, una ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cuius baſis pentagonum ABCCE, ex quinque Icoſaedri lateribus compoſi ſitum, vertex autem F. Diuiſo itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppoſitis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonſtratis in problemate 2. huius ſcholij, perpendiculares ſint ad AF, communem ſectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE,



BGF, angulum inclinationis basium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Hunc igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triãgulum æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatũ, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendicularis, constituatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtrique perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, FG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; Æquales erunt anguli MON, BGE. Dicõ hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB; erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaque recta BL, super rectam sibi æqualem MN, intelli-



a 8. primi.

b 19. primi.

intelligatur poni; cadet angulus *A*, extrà trianguſum *MON*, ita vt rectæ *AB*, *AE*, rectas *OM*, *ON*, prorſus includant.[a] *A*ngulus ergo *O*, maior erit angulo *BAE*: At hic obtuſus eſt. (cum enim quilibet angulus pentagoni ſex rectis ſint æquales, per ea, quæ a nobis ſunt demonſtrata in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac inſuper vnius recti partem quintam, obtuſus ergo erit, cum recto ſit maior). Multo igitur magis obtuſus erit angulus *MON*, hoc eſt, ſibi æqualis *BGE*. [a] 21. primi

COROLLARIVM.

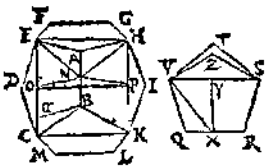
NON, obſcure quoque ex his conſequitur, omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe æquales eſſe. Nam cum ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt BG, EG, ſubtendanturque a rectis angulos pentagonorum ſubtendentibus, cuiuſmodi eſt BE:[b] *omnes inter ſe erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos ſubtendunt æquales æqualibus rectis comprehenſos,*[c] *æquales erunt.* [b] 8. primi. [c] 4. primi.

V.

ANGVLVM inclinationis duarũ baſium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM

CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus cõmune AB; alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK.

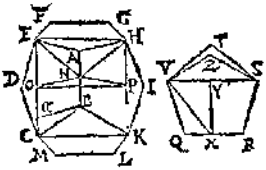


His porro pẽtagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, ſimilitum ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta

recta ſubtendatur V S, æqualis exiſtens rectæ E C, cum & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia ſint, anguloſque contineant æquales. Diuiſa deinde recta Q R, biſariam in X, ducatur a puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y; propterea que perpendicularis ad V S, cum V S, ſit parallela ipſi Q R, ex ſcholio propoſit. 8. libri 13. Ac poſtremo ſuper recta V S, triangulum fabricetur V Z S, habens vtrumque latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem eſſe angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cum latera E A, A N, æqualia ſint lateribus H A, A N: Item lateribus V Q, Q X, angulosque comprehendant æquales; [b] Aequales erunt & baſes NE, NH, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; ideoque & reſidui ex rectis, anguli videlicet E N O, H N P, V X Y, æquales erunt. Quoniã igitur anguli E N O, E O N, trianguli E N O, æquales ſunt angulis H N P, H P N, trianguli H N P; nec nõ & angulis V X Y, V Y X, triãguli V X Y; (ſunt.n. E O N, H P N, V Y X oſtenſi recti.) Et latus N E, lateribus N H, V X, æquale demonſtratum; [c] Aequalia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis lateribus N P, P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, Z S, æquales exiſtentes ipſi X Y, rectis N O, N P, æquales erunt. Iam vero, quia O E, P H, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoque recta coniuncta O P, æqualis & parallela ipſi E H, ideoque æqualis ipſi E C, hoc eſt, rectæ V S,

[a] 4. primi.
[b] 4. primi
[c] 26. primi.
[d] 33. primi

VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia fint; baſis item VS, baſi
[a] 8. primi. OP; [a] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, eſſe obtuſum. Nã ducta recta Bα, ipſi NO, parallela; cũ ſit quoq; NB, ipſi Oα, parallela, ex ſcholio prop. 8. lib. 13. Parallelogrãmum erit NOαB, ideoq; recta Bα, ipſi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppoſitum angulo CαB, qui rectus eſt, (æqualis nimirum interno CQN,) maius eſt latere Bα, hoc eſt, recta NO, vel vtraque ZV, ZS, quæ ipſi NO, oſtenſæ ſunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, rectas ZV, ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior eſt angulo pentagoni T: Hic vero, cum ſit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtuſus.



[b] 34. primi

[c] 29. primi

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri æquales eſſe inter ſe. Cum enim ſinguli

guli anguli inclinationum continentur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri *ad duo latera cubi in* Dodecaedro *deſcripti ductis; quales ſunt* NO, NP, *ſubtendant. rque a rectis, quę cubi inſcripti lateribus ſint ęquales, vel certe, quę rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum ęquales ſunt, cuiusmodi eſt recta* OP, *lateri cubi inſcripti* EH, *quod angulum pentagoni* EAH, *ſubtendit, ęqualis;* [a] *Erunt omnes inter ſe ęquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quę ipſos continent, ęquales ſint, nec non & rectę illæ omnes, quę eoſdem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales.*

[a] *1. primi.*

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX PROBLEMATVM,

QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR.

QVORVM EA, QVAE EVCLIDIS ſunt, eodem charactere ſunt expreſſa, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ vero adiecta a nobis, charactere, quo ſcholia notauimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem facilius quiſque inueniat problemata, quæ cupit, digeſſimus ea ſecundum materias, de quibus proponuntur.

ACVTANGVLVM trian gulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquila tera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquian gula figura. vide. Figura in tra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangu lum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bi fariam ſecare. pag. 97. A

Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere. pag. 99. & 902. A

Angulum rectum datũ in tres angulos æquales partiri. 176. A

Angulum rectum ad pũctum in data recta linea datum constituere. 103 A

Angulum rectum ad extremũ punctum lineæ rectæ constituere, pag. 104. & 168. A

Angulum rectum in data recta per lineam ex puncto extra rectam dato ductam constituere. 105.& 106.A

Angulum rectũ in data recta constituere per lineam ductam ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum est datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiuspiam, vel quando recta data prope extremum plani est, vel denique quando & datum punctum est uicinum extremo plani, et recta data est prope aliud extremum plani. 107. & 168. A

Angulus propositus, rectus ne sit, an obtusus, acutusve, cognoscere. pag. 40. & 41. A

Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datã rectam lineam, datumque in ea punctũ constituere. 131.& 132.A

Angulos rectilineos, & arcus circulorum reperire incommensurabiles. 918. A

Ex tribus angulis planis, quorũ duo quomodocũque assumpti reliquo sunt maiores, solidũ angulum cõstituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse. pagina 579. B

Ad datam rectam lineam, eiusq; punctum angulum solidũ constituere solido angulo dato æqualem. 590. B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire, pag. 327.A

Per datum punctum in circumferentiæ rectam, quæ circulũ tangat, ducere. 353.A

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulũ tangat. 388.& 432.A

Circulis duobus datis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque circulum tangat. 389.A

Circulum per datum punctum describere, qui alium datum circulum tangat. 391.A

Lineæ rectæ, quæ circulum secat, lineam parallelã ducere, quæ eundem circulum tangat. 394.A

Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum. 410.A

Circulum per tria puncta non existentia in linea recta, describere. 412.& 465. A

Arcum datum secare bifariam pag. 425.A

Circuli segmẽtum super datam rectam describere, in quo angulus existens sit æqualis dato angulo rectilineo. 436.A

A dato circulo segmentum abscindere

ſcindere capiens angulum angulo dato rectilineo æqualem pag. 437.A

Circulis duobus datis, quorũ vnus non ſit totus intra alium, circulum, qui vtrumque tangat, deſcribere. 449.A

In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior nõ ſit, æqualem. pag. 456.A

In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametro maior non ſit, & alteri rectæ parallelam. 457.A

Dato circulo, & duobus punctis, ſiue extra circulum, ſiue intra, dummodo neutrũ ſit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnũ punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiã ſecant, parallela ſit rectæ datæ duo puncta connectenti. 890.A

Datum arcum circuli in datã proportion m diuidere. 900.A

Datum arcum, vel angulum rectilineum in quotuis partes æquales partiri 902.A

Dato arcui circuli, ex cuius quadrante quadratrix deſcripta eſt, rectam lineam inuenire æqualem. 905.A

Dato circulo quadratum æquale conſtituere. 908.A

Dato quadrato, circulũ æqualem deſcribere. 911.A

Circulum cuicũque rectilineo æqualem deſcribere: Et circulo figurã rectilineam æqualem conſtituere, quæ cuicunque alteri ſimilis ſit. 912.A

Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire. 912.A

Datis duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum; ex altero arcum æqualem abſcindere. 913.A

Arcus circulorum, & angulos rectilineos inuenire incommenſurabiles. 918.A

CIRCVMFERENTIA. vide, Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommenſurabiles magnitudines.

An duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne, explorare. 293.B

Duabus magnitudinibus commẽſurabilibus datis, maximã earum communem menſuram inuenire. 294.B

An quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles nec ne, conſiderare. 295.B

Tribus magnitudinibus commẽ ſurabilibus datis, maximã earum mẽſuram communem inuenire. 297.B

Propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire. 301.B

Rectam inuenire, ad quam ita ſe habeat

ra complecti, qua & prædictas figuras. 739.&936.B
Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter ſe comparare. 749.B
Numerum laterum, & angulorum ſolidorum cuiuſq; corporis Regularis expedite cognoſcere. 756.B
In dato cubo pyramidem deſcribere. 827. B
In data pyramide octaedrũ deſcribere. 828. B
In dato cubo octaedrum deſcribere. 829.B
In dato octaedro cubum inſcribere. 831.B
In dato Icoſaedro Dodecaedrũ inſcribere. 833.B
In dato octaedro pyramidem deſcribere. 836.B
In dato Dodecaedro Icoſaedrum deſcribere. 838. B
In dato Dodecaedro cubum deſcribere. 840. B
In dato Dodecaedro octaedrum deſcribere. 841. B
In dato Dodecaedro Pyramidem deſcribere. 842. B
In dato Icoſaedro cubum deſcribere. 843. B
In dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere. 844. B
In dato cubo Dodecaedrum deſcribere. 844. B
In dato cubo Icoſaedrum deſcribere. 853. B
In dato Icoſaedro octaedrum deſcribere. 856. B
In dato octaedro Icoſaedrum deſcribere. 857. B
In dato octaedro Dodecaedrum deſcribere. 862. B
In data pyramide cubum deſcribere. 863. B
In data pyramide Icoſaedrum deſcribere. 869. B
In data pyramide Dodecaedrum deſcribere. 870. B
In dato ſolido Regulari ſpheram deſcribere. 871. B
Datis duobus circulis in ſphæra parallelis, datáque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam: vel etiam aliam rectam, quæ datæ rectæ ſit æqualis et parallela, dũmodo recta data maior non ſit diametro poſterioris circuli. 918. B
In data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter ſphæræ ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera. pag. 924. B
Angulum inclinationis duarum baſium cuiuſque corporis Regularis inuenire. 948. B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

A data recta linea imperatã partem auferre. 768.A
Datam rectam lineã ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit. 769. A
Datã rectam in quotuis partes æquales ſecare. 210.&770.A
Data rectã ſecare in duas partes datam

datam proportionem habentes. pag. 773.A
Datam rectam in quotuis partes Arithmetice proportionales ſecare. 776.A
Datis duabus rectis, tertiã proportionalem inuenire. 777.A
Quotuis rectas in data proportione continue proportionales reperire. pag. 778.A
Datis tribus rectis, quartã proportionalem inuenire. 780.A
Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire. 781.A
Datis tribus rectis, quartam inuenire, quæ ſit ad tertiam, vt prima ad ſecundam. 781.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 782.A
Data recta, aliam rectam (quæ minor non ſit, quàm dupla illius) ita ſecare, vt data recta ſit media proportionalis inter ſegmenta huius. 783.A
Secta recta in duas partes vtcunq; alterutram earum ita rurſus partiri in duas partes, vt omnes tres partes ſint continue proportionales. 789.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalẽ in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792.A
Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire. 793.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire. 793.A
Datis duabus rectis, minorẽ extremitatẽ in Geometrica proportionalitate inuenire. 794.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 794.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire. 795.A
Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire. 796.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 797.A
A data recta dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere. 810.A
Dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituere. pag. 839.A
Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non ſit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrãmum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato. 846.A
Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quę ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato. pag. 849.A

Datam

Datã rectã terminatã extrema, ac media rõne ſecare. 850.A
A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatũ, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterque poſitum. 869.A
Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire. 870.A
Datis tribus rectilineis, quartũ proportionale inuenire. 870.A
Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire. 871.A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint ſimiliterque deſcripta cuicunque rectilineo, habeantq; datam proportionem inter ſe. 872.A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quę cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterq; deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe datam proportionem. 873.A
Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitum dato rectilineo. 874.A
A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum datam proportionem. pag. 879.A
Dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius vel minus, ſecundum datam proportionem. 881.A
In dato quadrato aliud quadratum deſcribere in data proportione, quæ dupla maior non ſit. pag. 885.A
Datum arcum circuli in datã proportionem diuidere. 900.A
Iſoſceles triangulum conſtituere, cuius vterque angulorum æqualiũ ad reliquum habeat proportionem datam. 902.A

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commenſurabiles, & incommenſurabiles. vide. Commenſurabiles, & Incommenſurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere. pag. 831. A

Proportionem minorem ex maiore auferre. 831. A

MINVTIAE numerorum.

Duas minutias diuerſarum denominationum ad alias duas eiuſdem denominationis illis æquales reducere. 249. B

Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiã reducere. 249. B

Datam minutiam duplare, ac dimidiare. 250. B

Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere. 253. B

Data duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuenta numerent, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductã in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductã productos. 254. B

Datam minutiam ad minimos terminos reducere. 257. B

Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri poteſt, reuocare. 257. B

Minutias plures in vnam ſummam colligere. 259. B

Minutiam minorem ex maiore detrahere. 261. B

Minutiam per minutiam multiplicare. 263. B

Minutiam per minutiam diuidere. 264. B

Minutiam in minutiam inſerere. pag. 267. B

NVMERI proportionales in communi.

Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri. 800. A

Datis duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire. pag. 802. A

Datis duobus numeris, minorẽ extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 803. A

Datis duobus numeris, maiorẽ extremitatem in proportionalitate Harmo-

Harmonica inuestire. 803.A
Datis duobus numeris, maiorem extremitatē in Harmonica proportionalitate inuenire, 805.A
Datis nun eris quotcunque, reperire minimos omniū eandem rationem habentium cum ipsis. 95.B
Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continue proportionalium. pag. 96.B
Numeros reperire deinceps proportionales minimos quotcūque quis iusserit in data ratione. 110.B
Numeros quotcunque integros, & minimos continue proportionales aliter reperire, in proportione data non multiplici. 114.B
Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus 117.A
Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. pagina 210.A
Tribus numeris datis, considerare, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 211.B
Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi. 213.B
Summam quotcunque numerorum continue proportionalium inuenire. 230.B
Inuenire quotcūq; numeros continue proportionales in data proportione, quorum summa equalis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis equaliter distant. 239.B
Item quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus. 239.B
Duos numeros in data proportione inuenire, quorum summa equalis sit numero producto ex vno in alium. 239.B

NVMERVS fractus. vide. Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Dati duo numeri an sint primi, inter se, necne, considerare. 34.B
Datis duobus numeris non primis inter se; maximam eorum communem mensuram reperire. 35.B
Dati quotuis numeri sint ne primi inter se, an non, considerare. pag. 36.B
Datis tribus numeris nō primis inter se, maximā eorū communem mensuram reperire. 37.B
Datis duobus numeris, minimū numerum ab eis numeratum reperire. 97.B
Tribus numeris datis, reperire minimum ab eis numeratum. pag. 100.B

Datis

Datis quotuis numeris, inuenire minimum ab eis numeratum. pag. 102.B
Numerũ reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes. pag. 103.B
Numerum reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, vt qualibet pars contineat partem ſubſequentem. 106.B
Primis numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum. 216.B
Omnes pariter pares tantum reperire. 226.B
Omnes pariter impares tantum inuenire. 227.B
Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire. 229.B
Omnes numeros perfectos inuenire. pag. 233.B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Quadratum numerum inuenire, cũ quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum conſtituat: Et a quo idem datus numerus ſubtractus relinquat quadratũ. 265. 268. 272. & 278.A
Planos numeros, vel ſolidos duos nõ ſimiles reperire. 171.B
Planos, vel ſolidos numeros quotcunque non ſimiles inuenire. pag. 318.B
Duos numeros planos ſimiles inuenire, pares, vel impares, vel vnum parem, & alterũ imparem. pag. 366.B
Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit. pagina 367.B
Duos numeros quadratos inuenire, ita vt exceſſus eorum quadratus etiam ſit. 368.B
Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus non ſit quadratus. 368.B
Duos numeros quadratos inueuire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus. 369.B
Duos numeros inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. pag. 372.B

OBTVSANGVLVM triangulum, vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & plana parallela.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo nõ eſt, parallelum planum ducere. 565.B
A data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere. pagina 592.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammum conſtituere, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraque circa illum angulum datis duabus rectis æqualia. 165.A

Parallelogrammum ſecare bifariã per rectam per quoduis punctum ductam, quod non ſit in diametro, niſi quando diametrum ſecat bifariam. 183.A

Parallelogrammum dato triangulo æquale conſtituere in dato angulo rectilineo. 218.A

Parallelogrãmo dato æquale triãgulum conſtituere in dato angulo rectilineo. 218.A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221.A

Parallelogrãmo dato æquale triangulum conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223.A

Parallelogrammum dato rectilineo æquale conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 224.A

Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 225.A

Rectilineis duobus inæqualibus datis, exceſſum maioris ſupra minus inquirere. 226.A

Quadratum ſupra datam rectam conſtruere. 226.A

Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia inter ſe ſint, & ſimul ſumpta æqualia duobus datis ſimul ſumptis. 236.A

Quadratis quotlibet datis, ſine æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 238.A

Quadratis duobus datis, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita ut tota figura compoſita ſit etiã quadrata. 238.A

Quadratum dato rectilineo æquale conſtituere. 315.A

Dato exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem: Inuenire latus ipſius quadrati. pag. 317.A

Dato circulo quadratũ æquale conſtituere. 908.A

Dato quadrato, circulum æqualem deſcribere. 911.A

PAR, & impar numerus. vide. numerus par, &c,

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarũ, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide. Numeri Proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſita Rationali com

men-

mensurabiles inuenire, quarum vna Rationali exposita sit aqualis. 342.B

Duas Rationales logitudine & inter se, & exposita Rationali commensurabiles inuenire, quarum neutra Rationali exposita aqualis sit. 342.B

Duas Rationales longitudine quidem inter se, potentia vero tantũ exposita Rationali commensurabiles inuenire. 343.B

Rationales quotcũque longitudine inter se commensurabiles inuenire. 343.B

Duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire, quarum altera exposita Rationali sit aqualis. 348.B

Duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire, quarũ neutra sit exposita Rationali aqualis. 348.B

Rationales quotcunque potentia tantum inter se commensurabiles reperire. 349.B

Duas quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenire aliam Rationalem illis omnibus potentia tantum commensurabilem. 350.B

Duas Medias rectas longitudine commensurabiles: Itẽ duas potentia tantum commensurabiles inuenire. 357.B

Medias inuenire potentia tantũ commensurabiles, quę Rationale comprehendant. pagina 364.B

Medias inuenire potentia tantũ commensurabiles, quę Medium contineant. 365.B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quã minor, plus possit quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. pag. 373.B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quã minor plus possit quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. pag. 374.B

Duas Medias inuenire potentia tantum commẽsurabiles, quę Rationale contineant, ita vt maior plus possit, quã minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. 376.B

Duas Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ Medium cõtineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. 378.B

Duas rectas inuenire potẽtia incommensurabiles, quæ faciãt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. pagina 382.B

Duas rectas inuenire potẽtia incommensurabiles, quæ faciãt compositum quidem ex ipsarum

rum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. 384.B
Duas rectas inuenire potẽtia incommenſurabiles, quæ faciãt & compoſitum ex ipſarũ quadratis Mediũ, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. pag. 386.B
Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommenſurabiles. 387.B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 409.B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 469.B

RECTA LINEA.

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctũ ponere. 80.A
Rectam lineam æqualẽ datæ minori ex maiore detrahere. pag. 81.A
Rectam lineam datam finitã bifariam ſecare. 101.A
Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in ea dato educere. 102.A
Rectam perpendicularem ad rectã in puncto extremo erigere. pag. 104. & 106.A
Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 105. & 106.A
Rectam perpendicularem ad rectã ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum eſt vicinum datæ rectæ, vel prope extremũ plani cuiuſpiam, vel quando recta data prope extremum plani poſita eſt, vel denique quando & datum punctum eſt vicinum extremo plani, & recta data eſt prope aliud extremum plani poſita 107. & 108.A
Rectæ datæ parallelam rectam a dato puncto ducere 164.A
Rectam lineam a puncto extra datam rectam lineã propoſito ducere, quæ cũ data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 165.A
Rectam lineam datæ rectæ parallelam ducere per punctum datæ rectæ vicinum. 167.A
Inter duas rectas infinitas angulũ facientes lineã rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum vtralibet earũ faciat angulum dato angulo æqualem, dummodo datus angulus, & angulus cõprehenſus datis rectis minores ſint duobus rectis. 184.A
Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales ſecare, pag. 210. & 770.A
Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus potẽs maior, quam minor. 237.A. & pag. 326.B.
Datis duab. rectis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectã, quæ

quæ illas pōt. 236. A. & 327. B
Rectam lineam datam ſecare, vt rectangulum ſub tota,& altero ſegmēto æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti. 286. A
Datis duabus rectis, alterutri earū rectam adiungere, vt rectangulum ſub tota compoſita,& adiuncta, æquale ſit quadrato alterius. 446. A
Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadrate Quadratrix linea deſcribitur, æqualem inuenire. 905. A
Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata. 332. B
Datam rectam lineam ita ſecare, vt rectangulū ſub ſegmentis contentū æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quam quadratum a dimidia linea deſcriptum. 334. B
A dato pūcto in ſublimi ad ſubiectum planum perpendicularem rectam ducere. 560. B
Dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, perpendicularē rectam excitare. 561. B
Per rectam in plano quouis datum planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum. 571. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum,&c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram,&c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide. Numerus planus,&c.

SOLIDA figura intra, & extra ſphæra, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide. Numerus planus,&c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum,&c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangulum æquilaterum ſuper data recta linea terminata cõſtituere. 75.A

Iſoſceles ſuper data recta conſtituere. 77.A

Scalenum ſuper data recta conſtituere. 78.A

Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, conſtituere. 129.A

Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum conſtituere. 130.A

In ſcal.no, & Iſoſcele, cuius baſis minor nõ ſit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarũ vtraque ſimul vtrique lateri ſimul ſit æqualis. 185.A

In æquilatero, vel Iſoſcele, cuius baſis vtrouis latere minor ſit, quælibet duæ lineæ intra triangulum ductæ ſunt ſimul minores duobus lateribus ſimul. 187.A

In Scaleno, & Iſoſcele, cuius baſis minor non ſit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraque vtrique lateri ſit æqualis, vel maior. pag. 188.A

Triãgulum biſariam ſecare per lineam a quouis puncto in vno latere dato ductam. 199.A

Triangulo dato æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. 218.A

Triangulum dato parallelogrammo æquale conſtituere in dato angulo rectilineo. 218.A

Triangulo dato parallelogrammum æquale cõſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221.A

Triangulum dato parallelogrammo conſtituere æquale ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223.A

Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 239.A

Amblygonium triangulum cõſtituere, in quo propoſ. 12. lib. 2. numeris poſſit accommodari. 293.A

Oxygonium triangulum conſtruere, in quo prop. 13. lib. 2. numeris poſſit accommodari. 303.A

Trianguli cuiuſuis aream cognoſcere. 312.A

Iſoſceles conſtruere, quod habeat vtrumque angulorum ad baſim reliqui duplum. 468.A

Iſoſceles oxygonium conſtruere, cuius tertium latus vtrouis æqualium ſit maius. 479.A

In dato triangulo quocunque quadratum deſcribere. 884.A

FINIS.

INDEX THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR:

QVORVM EA, QVAE AB EVCLIDE demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ vero a nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem facilius quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſsimus ea ſecundum materias, de quibus demonſtrantur.

ACVTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquilatera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquiangula figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangulum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Anguli recti omnes ſunt inter ſe æquales. 66.A

Anguli oppoſiti ad verticē duarum rectarum ſe' interſecantium ſunt æquales. 111.A

Anguli quatuor a duabus rectis ſe interſecantibus facti, ſunt quatuor rectis æquales. 112.A

Anguli quotcunq; circa idem punctum quatuor rectis ſunt æquales. 112.A

Angulus externus trianguli maior eſt vtrouis interno oppoſito. 114.A

Angulus externus figuræ quadrilateræ maior eſſe poteſt quouis interno oppoſito. 115.A

Anguli duo trianguli quomodocunque ſumpti duobus rectis ſunt minores. 117.A

Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij ſunt acuti. 118.A

Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Iſoſcelis ſupra baſem, acuti ſunt. 119.A

Anguli tres cuiuſcunque trianguli æquales ſunt duobus rectis: Et externus æqualis eſt duobus internis

ternis oppoſitis ſimul. 169.A
Anguli omnes interni cuiuſcunque figuræ rectilineæ quot rectis angulis æquiualeãt. 171. & 172.A
Anguli omnes externi cuiuſcunq; figuræ rectilineæ, productis ſingulis lateribus ordinatim verſus eandem partem, quatuor rectis ſunt æquales. 173.A
Anguli quinque, q̃ fiunt ex cõcurſu binorũ laterũ pẽtagoni p̃ductorũ æquales sũt duobus rectis. 174.A
Angulus cõtactus vere angulus eſt, contra Peletarium, vbi eius ſophiſmata diſſoluuntur. 354. vſque ad 387.A
Angulo quouis contactus dari poteſt alius minor, & hoc alius minor vſq; in infinitũ: Item maior, & hoc alius maior ĩ infinitũ. 361.A
Anguli contactus, quo modo inter ſe ſint æquales, & qui æquales ſint. pag. 363.A
Anguli cõtactus, quotquot ſint, efficiunt aggregatũ omni rectilineo acuto angulo minus. 365.A
Anguli contactus Apologia aduerſus Peletariũ. 366. vſq; ad 387.A
Angulus quiſpiam poteſt in infinitum augeri, & alius in infinitũ minui; & tamẽ augmẽtũ illius, quantũcunq; ſit, minus ſemper erit decremento huius. 387.A
A minori angulo trãſitur ad maiorẽ, et per oẽs intermedios, nũquã tamẽ p̃ æqualẽ. 387. & 430.A
Anguli oppoſiti in quadrilatero intra circulũ deſcripto æquales sũt duobus rectis. 401.A
Angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis eſt ei, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A
Angulus rectus in cẽtro inſiſtit quadrãti; acutus uero arcui quadrãte minori; & obtuſus maiori. Et cẽtra, angulus in cẽtro quadrãti inſiſtẽs, rectus eſt; inſiſtẽs uero arcui quadrãte minori, acutus; & maiori, obtuſus. 417.A
Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis eſſe poteſt. 634. A
Si duæ rectæ ſe mutuo tãgẽtes, ad duas rectas ſe mutuo tãgẽtes ſint parallelæ, non autẽ in eodẽ plano; illę angulos æquales cõprehendent. 558.B
Idem euenier, ſi omnes illa recta ſint in vno plano. 558.B
Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur; Ex his duo quilibet vtut aſsũpti tertio ſunt maiores. 573.B
Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis cõtinet. 574.B
Si fuerint tres anguli plani, quorũ duo vtlibet aſſumpti reliquo ſint maiores, cõphendãt aũt ipſos rectę lineę æquales; fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulũ cõſtituatur. 576.B
Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumq; vtriquę; in ſublimibus aũt lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his

ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpẽdiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent. 609.B

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ æquales cum lineis primum poſitis angulos continentes æquales, vtrumque vtrique: Erunt a punctis extremis linearum ſublimiũ ad plana angulorum primum poſitorum demiſſę perpendiculares, inter ſe æquales. 611.B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circulus a diametro bifariam diuiditur. 45.A

Circulus a recta, quæ diameter non ſit, diuidatur non bifariã. 46.A

Si in circulo recta aliqua linea rectam quampiam bifariam ſecet, & ad angulos rectos; in ſe cante centrum erit circuli, pag. 328.A

Si in circuli peripheria duo puncta coniungantur linea recta; cadet hæc recta intra circulum. 328.A

Recta circulum in vno tantum puncto tangit, ſi ita tangat, vt eum non ſecet. 29.A

Si in circulo recta linea per centrum ducta ſecet aliã non per centrum ductam bifariam; & ad angulos rectos ipſa ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eã ſecet; bifariam quoque eam ſecabit. 330.

Duobus circulis ex eod^m centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interiorem circumferentiã ſecans: erunt eius ſegmenta inter vtramq. circumferẽtiam æqualia. 331.A

In circulo duæ rectæ non per centrum extenſę, ſe mutuo bifariam non ſecant. 332.A

Duo circuli ſe mutuo ſecantes non habent idem centrum, pag. 333.A

Duo circuli ſe mutuo interius tangentes non habent idem centrum. 333.A

Si in diametro circuli a puncto, quod centrum non ſit, plurimæ rectæ cadãt: maxima omnium erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autẽ propinquior ei, quæ per centrum, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolum rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ vel maximæ. 334.A

Si intra circulum punctum ſumatur, ab eoque in circulum rectarum cadentium vna quidem ſit maxi-

maxima, vna vero minima, & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidē erunt maximæ propinquiores, æquales autem a minima vel maxima æqualiter diſtabunt. 336.A

Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verovt libet: In cauam peripheriā cadentiū rectarum, maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autē propinquior ei, quæ per cēntrū tranſit, remotiore ſemper maior eſt, &c. 338.A

Ex puncto extra circulum ſumpto, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ rectæ æquales cadunt ad vtraſque partes maximæ lineæ. 340.A

Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior vero omnibus in conuexam peripheriā cadentibus. 340.A

Punctū in circulo, a quo plures quam duæ rectæ æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli eſt. 341.A

Circulus circulum in pluribus punctis, quam duobus, non ſecat. 342.A

Recta per centra duorum circulorum ſe interius tāgentium ducta, cadit in circulorū contactum. 343.A

Recta per centra duorum circulorum ſe exterius tangentiū ducta, tranſit per circulorum contactum. 344.A

Circulus circulum non tangit in pluribus pūctis, quam vno. pag. 345.A

Si in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in eo puncto extremo, totuſq. extra eundem cadet. 347.A

In circulo æquales rectæ æqualiter a centro diſtant. Et quæ æqualiter a centro diſtant, ſunt æquales. 348.A

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſēper maior. 349.A

Ex puncto circumferentiæ in concauam peripheriam duæ tātum rectæ æquales cadunt ad vtraſq; partes diametri. 351.A

Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locū inter ipſam rectam, & peripheriā comprehenſum, altera re-

ēta non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior eſt, reliquus autem minor. 351.A

Recta ad extremū diametri ppē dicularis circulū tāgit. 353.A

Si circulū recta tangat; recta ad cōtactū ducta, perpē dicularis eſt ad tāgentē lineam. 394.A

Circulis duobus ex eodē centro deſcriptis; recta interiorē tāgentes, & vſq; ad exteriorē extēſę, inter ſe æquales ſunt, bifariāq; in punctis cōtactuum ſecantur. 395.A

Si circulū tetigerit recta; ppēdicularis ad tāgentem in puncto cōtactus, p cētrū trāſit. 395.A

In circulo, angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 396.A

In circulo ſpatium ad cētrū, duplū eſt anguli ad peripheriā, cū fuerit eadem peripheria baſis ſpatij, & anguli. 399.A

In circulo, qui in eodē ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 399.A

Si a duobus punctis quatuor rectæ ducantur, ex ſingulis bina, quæ in concurſu contineāt duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorū deſcriptus, per alterū quoq; angulum trāſibit. 401.A

In circulo quadrilaterū quodcū que habet angulos oppoſitos duobus rectis æquales. 401.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſū deſcribi pōt. 402.A

Si ex ſemicirculis, aut circulis ſimilia ſegmēta detrahātur; reliqua ſegmēta ſimilia etiā sūt. 403.A

Arcus, quibus anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtunt, ſimiles ſunt: Et anguli arcubus ſimilibus inſiſtentes ſiue ad centra, ſiue ad peripherias, æquales ſunt. 404.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abſcindunt arcus ſimiles. pag. 405. & 862.A

Si duo aut plures circuli ſe mutuo tangant interius; Rectæ a puncto contactus ductæ abſcindunt arcus ſimiles. 406.A

Si vnum latus quadrilateri in circulo producatur; angulus externus æqualis eſt angulo, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A

Segmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ſuper eadem recta linea. 407.A

Segmēta ſimilia ſuper æqualibus rectis, ſunt æqualia. 408.A

Segmenta ſimilia, & æqualia, ſunt conſtituta ſuper æquales rectas, vel ſuper eandem rectā. 409.A

In circulis æqualibus, vel eodē anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias. 413.A

In circulis æqualibus, vel eodē maior angulus, maiori peripheriæ inſiſtet. 414.A

In circulis æqualibus, vel eodē anguli æqualibus peripherijs inſiſtētes, sūt æquales. 415.A

In circulis æqualibus, vel eodem angulus maiori peripheriæ inſiſtēs maior eſt. 415.A

In circulo, duæ rectæ ſe nō interſecātes, et intercipientes arcus æquales, parallelæ sūt: Et parallelæ intercipiūt arcus æquales. 416.A

Rectæ, quæ ex medio pūcto arcus alicuiꝰ ducīū tāgēs circulū, parallelæ eſt chordæ illius arcus. 416.A

Angulus rectus in cētro inſiſtit quadrāti; acutus vero, arcui minori quadrante; & obtuſus, maiori. Et contra, angulus in centro inſiſtens quadrāti, rectus eſt; inſiſtēs vero arcui quadrante minori, acutus; et maiori obtuſus. 417.A

Recta e centro ſecans rectam aliā biſariam, ſecat quoq; arcum biſariam. Et ſecans arcum biſariam, ſecat quoque chordā biſariam. 418.A. & 712.763.B

In circulis æqualibus, vel eodēm rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 419.A

In circulis æqualib. vel eodē, maior linea maiorē arcū auſert, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus ſermo fiat: minorē vero, ſi de ſegmētis maioribus agatur. 420.A

In circulis æqualibus, vel eodē, ſi arcus ſint æquales, erunt & rectæ æquales. 420.A

In circulis æqualibus, vel eodē maior arcus habet chordā maiorē, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus loquamur: minorem vero, ſi de maioribus. 421.A

Circuli, e q̄b. æquales rectæ auferūt ſimiles arcus, æquales sūt. 422.A

Ex circulis inæqualibus rectæ æquales auferūt arcus diſſimiles. 422.A

Ex circulis inæqualibus lineæ rectæ auferentes arcus ſimiles, inæquales ſunt. 422.A

Rectæ lineæ auferētes arcus ſimiles inæquales ex quibuſuis circulis, inæquales ſunt. 423.A

Si in diametro circuli præter cētrū ſumaī pūctū, ab eoq; in peripheriā duæ rectæ nō in eaſdē partes cadētes efficiāt ad diametrū angulos æquales; rectæ illæ æquales erūt, et arcus abſcindēt æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, cōſtituēt ad diametrū angulos æquales, abſcindētq; arcus æquales. Si denīq; abſcindāt arcus æquales, erūt rectæ illæ æquales, angulosq; ad diametrū æquales cōſtituēt. 423.A

Si in diametro circuli præter cētrū ſumatur pūctū, a quo ad eaſdē partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui a minori portione diametri remotior eſt. 425.A

In ſemicirculo angulꝰ rectus eſt: In maiore ſegmēto acutus: Et in minore obtuſus. Angulus item maioris ſegmenti recto maior: minoris vero ſegmenti recto minor. 426.A

Segmētū circuli, in quo angulus rectus ē, eſt ſemicirculus, in quo vero acutus, ſegmētū maius eſt: & ī quo obtuſus, ſegmētū minus. Et ſegmētū, cuius angulus eſt recto maior, ē maius; cuius vero angulus ē recto minor, ē minus. 431.A

Circulus ex puncto mediò lateris recto angulo oppoſito in triãgulo rectãgulo deſcriptus per vnũ angulũ,trãſit quoq; p reliquos.431.A

Si per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſq. centrum recta eÿciatur: a puncto vero,ubi hæc recta poſteriorẽ circulũ ſecat, ducatur recta vtcunq;,ſecabitur eius portio intra priorẽ circulum bifariã.432.A

Si circulum tangat recta,& a cõtactu ducatur linea vtcunque ſecans: anguli ad contingentem æquales ſunt angulis in alternis ſegmentis. 434.A

Si recta ducta ad extremitatem recta circulum ſecantis faciat cũ ea angulos æquales angulis in alternis ſegmentis;recta illa ducta circulum tangit. 435.A

Si in circulo duæ rectæ ſe ſecẽt: rectãgulũ ſub ſegmẽtis vnius æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis alterius. 438.A

Si duæ recta ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub ſegmentis vnius æquale ſit rectãgulo ſub ſegmentis alterius: deſcribi poterit per quatuor earum puncta extrema circulus. 439.A

Si extra circulum ſumatur punctum,a quo ducatur recta tangens,& altera ſecãs:erit quadratũ tangẽtis æquale rectãgulo ſub tota ſecante, & eius ſegmento exteriore. 440.A

Si a puncto extra circulũ ducãtur plures rectæ ſecantes;rectangula ſub totis ſecantibus, & ſegmẽtis exterioribus æqualia ſũt.442.A

Duæ rectæ tãgẽtes circulũ ab eodẽ pũcto ductæ,ſũt æquales.442.A

Ab eodẽ puncto duæ tantũ rectæ circulũ tangẽtes duci poſſũt.443.A

Si duæ rectæ æquales ducantur ab eodem puncto ad circulum, vna autem earum ſit tangens, erit & altera tangens. 443.A

Si a puncto duæ rectæ egrediẽtes ita ſecentur in binas partes ſingulæ, vt rectãgula ſub totis, & ſegmẽtis prope punctũ, æqualia ſint: deſcribi poterit circulus per extrema reliquorũ ſegmẽtorũ.445.A

Si extra circulum pũctum ſumatur,a quo ducatur recta ſecãs, & altera incidẽs, vſq; ad circumferentiã conuexã; ſit aũt quadratum incidẽtis æquale rectãgulo ſub tota ſecante, & eius ſegmẽto exteriore: Incidẽs circulum tanget. 447.A

Si a puncto duæ tangentes ad circulum ducantur, aut duæ ſecantes æquales: Recta ab eodem puncto per centrũ ducta diuidit angulũ ab eis cõprehenſum,bifariam. Et contra,Recta ſecãs angulum bifariam,per centrum circuli tranſit. 448.A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferũt arcus inæquales,maiorque eſt arcus minoris circuli, quam vt ſimilis ſit arcui circuli maioris. 863.A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus ſimpliciter inæquales

inæquales, maiorq; eſt arcus circuli minoris ſimpliciter, & non ſolum maior, quam vt ſimilis ſit arcui circuli maioris. 864. A

Si in circulo, ductis duabus diametris ſeſe ad angulos rectos ſecãtibus, altera earũ producatur, eiq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremũ punctium proximæ parallelæ recta ducatur cõueniens cũ diametro producta: Erit tota recta inter punctũ concurſus, & cõcauã peripheriã circuli, oĩbus parallelis, vna cum diametro, quæ producta eſt, ſimul ſumptis, æqualis. 865. A

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurrentes duabus perpẽdicularibus; erit rectãgulũ ſub vtralibet ſecantiũ, & eius ſegmẽto interiore cõprehenſum quadrato diametri æquale. 887. A

Si in circulo duæ diametri ſeſe ad rectos angulos ſecẽt, & ab vnius extremo recta ducatur vtrunque ſecans circumferentiam, & alteram diametrũ ſiue producta, ſiue intra circulum; erit rectangulum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremũ prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum vero inter idem punctũ extremum, & circumferẽtiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto. 888. A

Circumferentia circuli ad eius diametrum quã proportionem plus minus, habeat. 907. A

CIRCVMFERENTIA: vide. Circulus.

COMMENSVRABILES & incommenſurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus ꝓpoſitis, ſi a maiore auferatur maius quã dimidium; & ab eo quod reliquũ eſt, rurſus detrahatur maius quam dimidiũ: & hoc ſemper fiat: relinquetur tandẽ quædã magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine. 289. B

Idem eueniet, ſi dimidium auferatur, &c. 290. B

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedẽtẽ metiatur: incommenſurabiles erũt ipſæ magnitudines 291. B

Si duabus magnitudinibus incommẽſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã relinqua præcedentẽ metiatur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper

ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã reliqua præcedentẽ metietur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commẽ menſurabilibus propoſitis, detrahatur ſẽper minor de maiore, alterna quadã detractione: metietur quædã reliqua præcedẽtẽ. 293. B

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earũ mẽſurã communẽ. 295. B

Magnitudo metiẽs tres aut quotcũque magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem. 298. B

Si ſint quotcunque magnitudines, & totidẽ numeri, qui bini in eadem ratione ſumãtur, in qua bina magnitudines: et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 298. B

Commẽſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quã numerus ad numerum. 300. B

Commẽſurabiles magnitudines proportionem habent eãdem, quam numeri, per quos earum menſura communis maxima ipſas metitur. 301. B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt magnitudines. 302. B

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem nõ habent, quam numerus ad numerum. 304. B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: incommenſurabiles erunt magnitudines. 305. B

Si ſint tres quãtitates continuæ proportionales, & aliæ tres continuæ quotq; proportionales, ſitq; vt prima illarum ad tertiã, ita prima harũ ad tertiã; erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam. 306. B

Idem ſequitur ſi plures quantitates ſint, quam tres, &c. 306. B

Quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus ſiũt quadrata, inter ſe proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter ſe proportionẽ habẽtia, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; & latera habebũt lõgitudine cõmenſurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incõmenſurabilibus ſiũt quadrata; inter ſe proportionẽ non habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratũ numerũ; neq; latera habebũt lõgitudine cõmẽſurabilia. 307. B

Rectæ longitudine commẽſurabiles, omnino & potẽtia ſunt cõmenſurabiles; quæ vero potentia cõmenſurabiles ſunt, non omnino & lõgitudine cõ mẽſurabiles ſunt. Et q̃ lõgitu

di

dine ſunt incõmenſurabiles, nõ oĩno & potentia incõmenſurabiles ſunt, quæ vero põtẽtia incõmenſurabiles ſunt, omnino & lõgitudine incommenſurabiles ſunt. 310.B

Si quatuor magnitudines ſint ꝓportionales, prima vero ſecũdæ ſit cõmẽſurabilis; & tertia quartæ cõmenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommẽſurabilis erit. 315. B

Recta media proportionalis inter duas rectas potẽtia tantũ cõmenſurabiles, vtrilibet illarũ incommenſurabilis eſt lõgitudine et potẽtia ac proinde appellabitur Irrationalis, ſi alterutra illarũ ſtatuatur Rationalis. 321. B

Quæ eidẽ magnitudini ſunt cõmenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles. 321.B

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera vero ſit vni cuipiã commẽſurabilis; erit & reliqua eidẽ cõmenſurabilis. 323. B

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidẽ eidẽ ſit cõmenſurabilis, altera vero incõmenſurabilis; incommenſurabiles erũt magnitudines. 324.B

Si ſint duæ magnitudines cõmenſurabiles, altera autem ipſarũ magnitudini cupiã incõmenſurabilis fuerit; Et reliqua eidẽ incõmẽſurabilis erit. 325.B

Quæ incommenſurabilibus ſunt cõmenſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt. 326.B

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima vero tãto plus poſsit, q̃ ſecũda, quantũ eſt quadratũ rectæ ſibi cõmenſurabilis lõgitudine; Et tertia tanto plus poterit q̃ quarta, quantũ eſt quadratũ rectæ ſibi lõgitudine cõmẽſurabilis. Q̃d ſi prima tãto plus poſsit q̃ ſecũda q̃tũ eſt quadratũ rectę ſibi incõmẽſurabilis lõgitudine; Et tertia tãto plus poterit q̃ quarta q̃tũ eſt quadratũ rectę ſibi lõgitudine incõmẽſurab. 328.B

Si duæ magnitudines cõmenſurabiles cõponantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarũ cõmenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarũ cõmẽſurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt. 329.B

Si tota magnitudo ex duabus cõpoſita, cõmenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ commenſurabilis eſt. 330.B

Si duæ magnitudines incõmẽſurabiles cõponant, & tota magnitudo vtriq; ipſarũ incõmẽſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarũ incõmenſurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines incommenſurabiles erunt. 330.B

Si tota magnitudo ex duabus cõpoſita incõmenſurabilis ſit alteri ipſarũ; eadem & reliquæ incommenſurabilis eſt. 331.B

Si ſint duæ rectę inæquales, quartæ aũt parti quadrati, q̃d ſit a

minore, æquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiẽs figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; Maior tãto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tãto plus poſsit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; In partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. 336.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; Maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectę ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſsit, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autẽ parti quadrati quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiẽs figura quadrata; In partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet. 338.B

Diameter quadrati longitudine incommenſurabilis eſt lateri. pag. 656.A. & 130.B. & 516.B

Inuentis rectis lineis lõgitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. pag. 519.B

COMPOSITI inter ſe numeri. vide. Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide. Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide. Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide, Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide. Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide. Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterũ in circulo habet oppoſitos angulos duobus rectis æquales. 401.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt. pag. 402. A

Quadrilateri in circulo angulus externus æqualis eſt ei, qui opponitur ei deinceps. 407. A

Quadrilaterũ in circulo, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum. 433. A

In omni triangulo, cui circulus inſcribitur, duo quauis latera ſuperant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateribus comprehenſo in cauam peripherium ducta, & ſub ſegmento eius exteriore. Quod ſi angulus cõprehenſus ſit rectus, ſuperabunt duo illa latera latus recto angulo oppoſitũ diametro circuli triangulo inſcripti. Vel duo quauis latera ſuperant reliquum duabus rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpoſitis. 462. A

Si centrum circuli triangulo circũſcripti cadit intra triangulum, omnes eius anguli acuti ſunt: Si in vnum latus, angulus oppoſitus rectus eſt: Si denique extra vnũ latus, angulus oppoſitus obtuſus eſt. 464. A

In triangulo acutangulo centrum circuli circumſcripti cadit intra: In rectangulo, in latus recto angulo oppoſitum: In obtuſangulo denique extra latus angulo obtuſo oppoſitum. 464. A

Quadratũ circulo circumſcriptum duplum eſt quadrati eidem circulo inſcripti. 468. A

Pentagoni circulo inſcripti, hoc eſt, æquilateri, & æquianguli, angulus quilibet continet tres quintas duorum rectorum, vel ſex quintas vnius recti. 471. A

Si in circulo figura quauis æquilatera & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum excitentur perpendiculares, conſtituent hæ perpendiculares ſimilem figuram circulo circumſcriptam. 474. A

Hexagoni circulo inſcripti latus, æquale eſt ſemidiametro circuli. 479. A

Si in circulo ab eodem puncto inſcribantur latera duarũ figurarum regularium; continebit arcus inter illa incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Figura autem inſcribenda continebit tot latera, quot vnitates ſunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto. 482. A

Omnis figura æquilatera circulo inſcripta, eſt quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circũſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar, &c. 483. A

Omnis figura aquiangula circulo circũſcripta, eſt quoq; aquilatera: at non omnis figura aquiãgula circulo inſcripta, aquiangula quoque eſt, niſi quando numerus laterum &c. 488. A

Si bifaria ſectiones laterũ regularis figura rectis coniũgantur, inſcripta erit ſimilis figura, idem centrum habens. 497. A

Solum triangulum aquilaterum, quadratum, & Hexagonum aquilaterum atque aquiangulũ, ex omnibus figuris regularibus, locum replent. 499. A

In figura aquilatera, & aquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contra, recta linea diuidens angulũ bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam. Si vero numerus angulorum eſt par, recta linea ex quouis angulo ad oppoſitum angulũ ducta ſecat vtrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam, cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam etiam diuidit. 866. A

Si baſis quadratricis intra quadrãtem & quadratum deſcripta ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli; eius latus, ſiue ſemidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c. pagina 906. A

Quæ in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata. 625. B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint; æquiangulum erit ipſum pentagonum. 704. B

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant lineæ rectæ; hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri. pag. 705. B

Recta ſubtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela eſt oppoſito lateri. pag. 706. & 841. B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum componantur; tota recta linea extrema atque media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum ſit hexagoni latus. 707. B

Si latus hexagoni ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum eſt latus decagoni. pag. 708. B

Si linea diuiſa extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli, erit minus ſegmẽtum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius ſegmentum latus hexago-

ni

ni eiuſdem circuli. 708. B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum. pag. 710. B

Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ imparium laterum, diuidit & latus oppoſitum bifariã, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus ſubtendit. pag. 712. B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus potẽtia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur. 717. B

Diameter circuli potentia eſt ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. 718. B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; diameter ex vno angulo ducta diuidit & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito. pag. 719. B

Sphæræ diameter potentia eſt ſeſquialtera lateris pyramidis in ea deſcriptæ. pag. 720. & 926. B

Diameter ſphæræ potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri circuli circa baſem pyramidis in ea ſphæra conſiſtentis deſcripti. 723. B

Perpendicularis ex cẽtro ſphæræ ad baſim pyramidis in ea ſphæra conſiſtentis demiſſa, ſexta pars eſt diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. 723. B

Altitudo pyramidis intra ſphæram continet duas tertias partes diametri. Et diameter potentia eſt dupla ſeſquiquarta altitudinis pyramidis. 724. B

Sphęræ diameter potẽtia eſt dupla lateris octaedri in ea deſcripti. 725. & 928. B

In octaedro tres diametri ſe mutuo ad angulos rectos ſecant. pagina 726. B

Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales; quarum baſis communis quadratum lateris octaedri, altitudo vero ſemidiameter ſphæræ vel octaedri pag. 727. & 795. B

Si tetraedrum, & octaedrũ in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. pag. 728. & 749. B

Octaedri baſes oppoſitæ ſunt inter ſe parallelæ. 728. & 927. B

Sphæræ diameter potẽtia eſt tripla lateris cubi in ea deſcripti. 729. & 930. B

Omnes diametri cubi æquales ſunt, ſeſeq; bifariam ſecant in centro ſphæræ. Itẽ rectæ coniungentes cẽtra baſiũ oppoſitarũ ſe mutuo bifariã ſecãt in eodẽ cẽtro. 731. B

Poten-

Potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi æqualis eſt potentiæ laterum tetraedri & cubi ſimul. 732.B

Si diameter ſphæræ ſit Rationalis linea; latus Icoſaedri in ea eſt Irrationalis linea, quæ vocatur Minor. 733.B

Sphæra diameter potentia eſt quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis. pagina 738.B

Diameter ſphæræ compoſita eſt ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli. pagina 738.B

Icoſaedri latera oppoſita ſunt parallela. 739. & 931.B

Si diameter circuli ſit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea deſcripti eſt Irrationalis linea, q̃ vocat Apotome. 739.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmẽtum eſt latus Dodecaedri eiuſdẽ ſphæra. 746.B

Latus cubi æquale eſt rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 746.B

Si recta ſecetur extrema ac media rõne, minuſq; ſegmentũ ſit latus Dodecaedri; maius ſegmẽtũ erit latus cubi eiuſdẽ ſphæræ. 747.B

In Dodecaedro ſunt ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariã quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. 747.B

Si recta duidẽs oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmẽtum eſt latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 748.B

Plura corpora Regularia, quam quinque, conſtitui non poſſunt. pag. 754.B

Cubus & octaedrum: Item Icoſaedrum & Dodecaedrum, reciprocantur, quod ad numerũ baſium & angulorum attinet. Solum tetraedrum tot baſes habet, quot angulos ſolidos. 757.B

Quæ ex cẽtro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti. 761.B

Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis eſt vtriquæ rectæ ſimul, & ei, quæ ex cẽtro ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. 763.B

Latus hexagoni ad latus decagoni eiuſdem circuli eandem proportionem habet, quã recta ſubtendens angulum pentagoni, ad latus ipſius pentagoni. 765.B

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodẽ cen-

tro ad latus trianguli æquilateri ducta, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli. 766.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. 767. B

Si in ſphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inſcribantur; quadratũ lateris cubi, et quadratũ lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pẽtagonũ dodecaedri circũſcribentis. 768.B

Si latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media rõne; maius, illius ſegmentũ erit latus decagoni eiuſdẽ circuli. 768.B

Idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphærę inſcriptorum. pagina 769. & 940.B

Si ex centro circuli pẽtagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectangulũ trigeſies ſumptum Dodecaedri ſuperficiei æquale. 771.B

Si ex cẽtro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale. 773. B

Superficies cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri cuiuſcunque, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentũ ſub latere Icoſaedri, & perpẽdiculari ducta ex cẽtro triãguli Icoſaedri in illud latus. 774. B

Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel octaedri, ſiue quadratum cubi, circumſcribentis perpẽdicularis ducatur ad vnũ latus; Erit quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri: In octaedro vero & cubo, duodecies ſumptum ſuperficiei octaedri, & cubi æquale. 774.B

Rectangulum contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineę ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono. 776. B

Rectangulum contentum ſub perpendiculari ex angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti, æquale eſt pentagono Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 777. B

Superficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadē ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri. pag. 778. B

Si recta linea ſecet extrema ac media rōne; erit vt recta potens id, quod a tota, & id, qđ a maiori ſegmēto, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minore ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti. 780. B

Quam proportionem habent latera cubi & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum. 782. B

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit. pag. 783. B

Si planum ſecans tranſit per centrum ſphæræ, fit circulus idem centrum habens cum ſphæra: Si vero non tranſit per centrum, fit circulus, cuius centrum punctū eſt, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad circulum ducta. 785. B

Circuli in ſphæra æquales æqualiter diſtant a centro ſphæræ: Et circuli æqualiter diſtantes a centro ſphæræ, æquales ſunt. 785. B

Dodecaedrum ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum eſt, vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eadēque ſphæra. 786. B

Eadem proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri, quæ ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & eius ſegmentum minus; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ. pag. 788. B

Baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt baſis octaedri eiuſdem ſphæræ: Superficies autem octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 792. B

Recta ex angulo Tetraedri per cētrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad baſim. 793. B

Tetraedrum ad octaedrum eiuſdem ſphæræ ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente viginti ſeptē ſexageſimas quartas partes lateris Tetraedri, & ſub linea cōtinente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ. 797. B

Sphæræ ſemidiameter potentia tripla

pla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſim octaedri eiuſdē ſphæræ cadit. 802. B

Duplū quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ: perpendicularis autem a centro ſphæræ in baſim cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi. 803. B

Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictū cubum comprehendentis, æquale eſt cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiā partem eius quadrati. 804. B

Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcunque corporis Regularis in baſim demiſſa, in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori Regulari. 804. B

Idem circulus cōprehendit & cubi quadratū, & octaedri triangulū eiuſdē ſphæra. 805, et 930. B

Rectæ coniungentes centra baſium oppoſitarum tam in cubo, quam in octaedro, æquales ſunt. 806. B

Octaedrum ad triplum Tetraedri eiuſdē ſphæræ eſt, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. 807. B

Altitudo Octaedri ad altitudinē Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri: Item diameter ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. 809. B

Si recta propoſita potuerit totam aliquam rectam extrema ac media ratione ſectam, et maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum; Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta ppoſita diameter eſt. 809. B

Si latus Octaedri potuerit maius & minus ſegmentum recta extrema ac media ratione ſecta; poterit latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ duplum minoris ſegmenti. 811. B

Si recta diuiſa extrema ac media ratione, cum minore ſegmento angulum rectum cōſtituat, cui recta ſubtendatur; erit recta, quæ potentia ſit ſubdupla eius rectæ ſubtenſæ, latus Octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri. 813. B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum erit latus Dodecaedri eiuſdem cum Octaedro ſphæræ. 814. B

Cubus ad Octaedrum eiuſdē ſphæræ eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrū ſphæræ. 815. B

Alia inuentiō laterum quinq; corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum. 817. B

Quadratum cubi ad triangulum

Tetraedri eiuſdem ſphæra eſt, vt latus Tetraedri ad perpendiculare ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum ductam. 822.B

Latus Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, uel altitudinis ipſius: Axis vero Tetraedri potentia ſeſquitertium eſt lateris cubi eiuſdem ſphæræ. 823.B

Diameter ſphæræ ſeſquialtera eſt axis Tetraedri illius ſphæræ. pag. 824.B

Axis Tetraedri ad latus cubi eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. 825.B

Cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. 825.B

Priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo eiuſdem ſphæræ. pag. 826.B

Si in Tetraedro Octaedrum inſcribatur; Tetraedrum bifariam ſecatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. 829.B

Rectæ connectentes centra baſium cubi oppoſitarum ſe mutuo ſecãt & bifariam, & ad angulos rectos. 831.B

Idẽ eſt centrum Icoſaedri, atq; ſibi inſcripti Dodecaedri. 835.B

Si Tetraedrum Octaedro inſcribatur, erunt quatuor baſes Tetraedri octo baſibus Octaedri parallelæ, ſingula binis. 837.B

Item rectæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungens, ſeſquialtera eſt axis Tetraedri. 838.B

Diameter Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrũ inſcribitur. 851.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione; minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti. Maius vero ſegmẽtum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti. 851.B

Latus cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, et Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti. pagina. 852.B

Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur. 852.B

Diameter Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri & cubi Icoſaedri ambientis. 854.B

Bifaria ſectiones ſex oppoſitorũ laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus. pag. 855.B

Si latus cubi extrema ac media ratione ſecetur; maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in eo cubo deſcripti. 855.B

Icoſaedri tam latera, q̃ triangula oppoſita ſunt parallela. 855.F

Idem

Idem eſt centrũ Icoſaedri, & octaedri in eo deſcripti. 857. B

Idem eſt centrum baſis octaedri, & baſis Icoſaedri in eo deſcripti. quod intelligendum eſt de octo baſibus Icoſaedri in octo baſibus octaedri collocatis. 861. B

Idem eſt centrum octaedri, & Icoſaedri in eo deſcripti. 862. B

Idem eſt centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. 867. B

Recta contingens biſarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, eſtque tripla lateris cubi in pyramide deſcripti. 867. B

Idem eſt centrum pramidis, & octaedri in ea deſcripti. 868. B

Idem eſt centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti. quod intelligendum eſt de quatuor baſibus octaedri in quatuor baſibus pyramidis iacentibus. pag. 868. B

Quæ ſolida Regularia, in quibus proprie deſcribantur, & quæ nõ: Et alia de hac inſcriptione mutua. 871. B

Si in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum; erit proportio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus recta linea extrema ac media ratione diuiſa. 874. B

Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ ſecantes oppoſita latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſim Icoſaedri in ea pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa biſariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri productæ. pag. 876, B

Latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius ſegmentum eſt recta diuiſa extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. 878. B

Minus ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti, potentia duplum eſt lateris Icoſaedri in ea deſcripti. pag. 879. B

Latus cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcriptæ: Latus vero pyramidis duplum eſt lõgitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri. 880. B

Latus Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia dimidium poteſt lateris pyramidis ſibi inſcriptæ. 881. B

Si in cubo deſcribatur & Icoſaedrũ, & Dodecaedrũ; Latus Icoſaedri mediũ proportionale erit inter

latus cubi, & latus Dodecaedri pag. 881. B
Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. 882. B
Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. pagina 882. B
Si in octaedro Icoſaedrum deſcribatur, erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi. 883. B
Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti. 883. B
Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterũ recta extrema ac media ratione ſecta, cuius maius ſegmẽtum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. pag. 884. B
Latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. 885. B
Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus recta extrema ac media ratione ſecta. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ linea. 885. B
Latus octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcripta pyramidis. pag. 886. B
Si ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertiũ quadrati lateris Icoſaedri. pag. 887. B
Diameter Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in eo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. 889. B
Latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, quæ duplum poteſt lateris Icoſaedri in eo deſcripti. 889. B
Diameter Icoſaedri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris pyramidis in eo deſcripta ſeſquialterum. 890. B
Latus Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione ſectæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſita. 891. B
Si dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſecetur, minusque eius ſegmentum, a toto latere Icoſaedri detrahatur; a reliqua quoq; recta pars rurſum tertia dematur; relinquetur

quetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. 892.B
Cubus ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. 894.B
Pyramis ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. 895.B
Cubus ſibi inſcripti octaedri ſextupla eſt. 896.B
Octaedrum ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. pag. 897.B
Idem eſt centrum Octaedri, atque cubi in eo deſcripti. 899.B
Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eſt, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo deſcripti. 899.B
Octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt. 900.B
Pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. 900.B
Cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, eſt vt 27. ad 1. pag. 902.B
Octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. 902.B
Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarũ coniungentem. 903.B
Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: at vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. 906.B
Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit: alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit; ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. 911.B
Dodecaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum

cubo deſcripti. 912.B

Dodecaedrum pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique lateris eiuſdē cubi deſicit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentū eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdē ſegmentū minus exiſtit, ita vt amborū altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdē cubi ſint æquales. 913. B

Octaedrum excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrū parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratū lateris Icoſaedri, altitudo vero maius ſegmētū ſemidiametri octaedri extremæ ac mediæ rone ſectæ. 914. B

Pyramis excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratū lateris Icoſaedri, altitudo vero recta biſarias ſectiones oppoſitorum laterū Icoſaedri coniungens. 916. B

Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes cetrorum; rectæ harum parallelarum extremæ puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 920. B

Si in ſphæra ſint duo circuli parallelis & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extremæ puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: rectæ vero earundem parallelarum extremæ puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſint, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt. 921. B

Si in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ; rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt. Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erūt, rectoſque cum ipſis angulos conficient. 923. B

Sphęræ diameter ad latus Icoſaedri in ea deſcripti eſt, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiuſdē circuli cuiuslibet. 935. B

Latus Icoſaedri maius eſt ſemidiametro ſphæræ, in qua deſcribitur. 935. B

Sphæræ diameter potentia eſt tripla lateris pentagoni deſcripti in circulo, qui per tres angulos Icoſaedri eius ſphæræ incidit, parallelusque eſt vni trianguli Icoſaedri. 935. B

Iidem circuli ſphæra ſuſtinent & angulos Icoſaedri, & angulos Dodecaedri in ea ſphæra deſcriptorum. 940.B

Si quadratum, & triangulũ æquilaterum æqualia habeant latera; erũt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul. 941.B

Octo quadrata ex ſemidiametro ſphæra deſcripta, æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti. 942.B

Si octaedrũ, cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit perpẽdicularis ex cẽtro ſphæra ad vnam baſim Icoſaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro ſphæra ad vnam baſim octaedri, & cubi ducta. pagina. 943.B

Icoſaedri ſuperficies maior eſt ſuperficie cubi in eadem ſphæra deſcripti. 943.B

Dodecaedrum Icoſaedro maius eſt. pag. 944.B

Icoſaedrum cubo maius eſt. pagina. 944.B

Cubus Octaedro maior eſt. 945.B

Octaedrum Tetraedro maius eſt, pag. 945.B

Superficies Dodecaedri ſuperficiem Icoſaedri ſuperat, & hæc ſuperficiem cubi, & hæc ſuperficiem Octaedri, atque hęc denique ſuperficiem Tetraedri. 946.B

Latus Tetraedri maius eſt latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icoſaedri, atque hoc denique maius latere Dodecaedri. 749.B

Si corpora regularia ſint Iſoperimetra; illud, quod plures habet baſes, maius eſt: Vt Icoſaedrũ maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atque hoc denique maius Tetraedro. 947.B

Omnes inclinationes duarum baſium cuiuſque corporis Regularis æquales ſunt. 948.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem eſt altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes. 751.A

Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habent altitudines, vel eandem. 754.A

Triangula & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines. 754.A

Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant. 755.A

Si ad vnũ triãguli latus parallela ducta ſit, hęc ſecabit duo latera reliqua proportionaliter. Et ſi duo latera ſecta ſint proportionaliter; recta linea ſectiones iungens,

iungẽs, parallela erit reliquo lateri. 756.A
Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecãs autem angulum recta linea ſecet & baſim: baſis ſegmenta ita ſe habebunt inter ſe, vt reliqua duo latera. Et ſi baſis ſegmenta ita ſe habeant, vt reliqua duo latera: recta a vertice ad ſectionẽ ducta, bifariam ſecabit angulum trianguli. 758.A
Aequiangulorum triangulorum proportionalia ſũt latera circa æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. pag. 759.A
Recta linea vni lateri trianguli parallela aufert triangulum toti triangulo ſimile. 760.A
Si ex duobus punctis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineã, duæ parallelæ inter ſe educantur ad eaſdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam recta inter ipſas, & alterum punctum extremum includens: Recta coniungẽs extremum vnius earum, cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ. 761.A
Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo oppoſito ducta ſecat parallelam, & latus illud in eaſdem rationes. pag. 762.A
Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, & æquales habebũt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtẽduntur. 763.A
Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualeſque habebunt angulos, ſub quibus latera homologa ſubtenduntur. pag. 764.A
Si duo triãgula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero ſimul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. 765.A
Si in triangulo rectãgulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta ſit; quę ad perpẽdicularem triangula tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 767.A
Item tam perpẽdicularis eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta, quam vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam baſim, & ſegmẽtum baſis ei lateri adiacens. 768.A
Si duæ rectæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet

bet ſegmentis duobus. 774.A

Si recta in quotcunque partes Arithmetice proportionales ſecta ſit, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmetice proportionales. 775.A

Si dua recta inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoq; exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum vna ad vnam poſteriorum. 776.A

Recta a quouis puncto diametri ducta perpendicularis vſq; ad circumferentiam ſemicirculi, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta. 782.A

Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera circa æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 784.A

Aequalium & vnum vni æqualē habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos, illa ſunt æqualia. 785.A

Si quatuor rectæ proportionales ſint; rectangulū ſub extremis æquale eſt rectangulo ſub medijs. Et ſi rectangulum ſub extremis æquale ſit rectangulo ſub medijs, illæ quatuor rectæ proportionales ſunt. 786.A

Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, ſed tantum æquiangula. 787.A

Si tres rectæ ſint proportionales; rectāgulum ſub extremis quadrato mediæ æquale eſt. Et ſi rectangulū ſub extremis quadrato mediæ ſit æquale; illæ tres proportionales ſunt. pag. 788.A

Recta, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub duabus rectis quibuſcunque, media proportionalis eſt inter eas duas rectas. pag. 788.A

Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, æquiangula tamen. 789.A

Triangula ſimilia inter ſe ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. 814.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiā, ita eſt triangulum ſuper primam ad triangulum ſuper ſecundā ſimile, ſimiliterque deſcriptū. pag. 815.A

Similia polygona in ſimilia triāgula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habēt rationem homologorum laterum. 817.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam,

ita

ita eſt polygonum ſuper primam, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum. 819.A

Similia polygona æquilatera, & æquiangula, diuidentur in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis rectis a centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos. 821.A

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. pag. 823.A

Si quatuor rectæ ſint proportionales: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia ſunt. Et ſi a rectis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia ſint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt. 823.A

Æqualia rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, ſunt ſuper æquales rectas. 825.A

Si tres rectæ ſint proportionales; erit quoque rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ab eis proportionalia, &c. 826.A

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent ex lateribus compoſitam. 837.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia proportionem habẽt ex lateribus circa æqualẽ angulũ cõpoſitã. 830.A

Triangula vnũ angulo vni angulo æqualẽ habentia, eandẽ proportionem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulũ æqualem contenta. 832.A

Parallelogramma æquiangula eandem rationem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulũ æqualem contenta. 833.A

Triangula & parallelogramma inter ſe rationem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. pagina. 833.A

In parallelogrammo parallelogrammra circa diametrum, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia. pag. 835.A

Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare. 837.A

Si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit ſimile toti, & ſimiliter poſitum, cõmunem cum eo habens angulum; hoc circa eandem cum toto diametrum conſiſtit. pag. 840.A

Idem eueniet, ſi angulũ habeant non communem. 842.A

Parallelogrammorum ſecundũ eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis ei, qđ a dimidia deſcribitur; maximum id eſt, quod ad dimidiũ applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui. pag. 844.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis

quæuis a latere rectum angulum ſubtendẽte deſcripta æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ a lateribus rectum angulũ cõtinẽtibus deſcribũtur. 852. A

Si figura, q̃ ab vno latere triãguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ reliquis duobus lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis: angulus ſub reliquis his lateribus comprehenſus, rectus eſt. 854. A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulũ compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint parallela; tũ reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 855. A

In circulis æqualibus, anguli eãdem habent rationem cũ peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſup vero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. 856. A

In circulis æqualibus, eſt ſector ad ſectorẽ, vt angulus ad angulum in centro. 859. A

Vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad totã circunferentiã. Et cõtra. 859. A

Similia circulorum ſegmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias. 861. A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Recta ex centro ducta abſcindunt arcus ſimiles. pag. 405. & 862. A

Si in circulo duæ rectæ ſe mutuo ſecent: erunt ſegmenta vnius ſegmentis alterius reciproca. 875. A

Si extra circulum ſumatur punctũ aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ circulum ſecantes; erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto rectæ ducatur circulum tangens; erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, et eius ſegmẽtũ exterius. 875. A

Si duæ rectæ ſe inuicem ſecent, & a duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarũ vna inter vnum terminorum, & ſectionem, altera vero inter ſectionem, & prioris lineæ ſumptæ perpendicularẽ interiecta, aliis duabus eodem modo incluſis reciproce. 876. A

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelę ſe mutuo ſecantes, diuidũt parallelogrammum in quatuor parallelogrãma proportionalia. 877. A

Omne quadrilaterũ a duab. diametris diuiditur in quatuor triãgula proportionalia. 877. A

In triãgulo rectãgulo, in quo perpẽdicularis ab angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione; tria latera ſunt continue proportionalia. Et ſi tria

latera

latera trianguli rectanguli ſint continuè proportionalia; perpendicularis ad baſim ex angulo recto demiſſa, ſecat baſim extrema ac media ratione. 878.A

Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis ducantur recta vſque ad peripheriam quadrantis ex eodem centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem baſi parallelæ: Erunt arcus quadrantis inter ſemidiametros interiecti, perpendicularibus, vel ſegmetis ſemidiametri intra parallelas poſitis, proportionales. 898.A

Si quadrãtis & Quadratricis idẽ centrum ſit; erunt arcus quadrantis, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continuè proportionales. 904.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, quæ ſit. 907.A

Si ſint duæ rectæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum primæ ad rectangulum ſub illis duabus contentum. Et vt ſecunda ad primam, ita rectãgulum ſub ipſis ad quadratum primæ. 344.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad ſecundam, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratum ſecundæ. 375.B

Si ſint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur. 377.B

Si recta linea ſecetur in partes duas inæquales; erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectãgulum ſub tota & priore parte aſſumpta, ad rectangulum ſub tota, & altera parte contentum. 380.B

Si recta ſit ſecta vtcunque; erit rectangulum ſub partibus cõtentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum ſub tota, & vna parte contẽtum, mediũ proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis. 416.B

Si duæ rectæ parallelis planis ſecentur; In eaſdẽ rationes ſecabuntur. 568.B

Si ſolidum parallelepipedũ plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. 585.B

Idem conuenit in omne priſma. *pag.* 587.B

Si priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectio eſt figura æqualis, & ſimilis planis oppoſitis. 590.B

Solida parallelepipeda ſub eadẽ altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes. 602.B

Si parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. 603.B

Similia ſolida parallelepipeda, inter

inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterũ. pag. 603.B

Si ſint quatuor rectæ continue proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſt parallelepipedum ſuper primâ deſcriptum, ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. 605.B

Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocãtur. Et quorum ſolidorum parallelepipedorũ baſes & altitudines reciprocantur; illa ſunt æqualia. pag. 605.B

Hac quinque, quæ proxime de parallelepipedis dicta ſunt, conueniunt etiam priſmatis, in quibus duo plana oppoſita ſunt triãgula. 608.B

Si tres rectæ ſint proportionales; quod ex illis fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, qđ æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto. 612.B

Si parallelepipedum ex tribus rectis deſcriptum, æquale ſit parallelepipedo ſibi æquiangulo a media recta deſcripto; erunt tres rectæ continue proportionales. pag. 613.B

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & ſolida parallelepipeda, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quę & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia; & ipſæ rectæ lineę proportionales erunt. 614.B

Eodem modo ſi fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia, ſimiliterque deſcripta ex eis, proportionalia, etc. pag. 616.B

Idem quoque quadrat in priſmata triangularium planorum oppoſitorum ex quatuor rectis, vel tribus, continue proportionalibus deſcripta, ſi ſimilia, ſimiliterque poſita ſint. 616.B

Circuli inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata. 626.B

Circulus ad circulum eſt, vt polygonum in illo deſcriptũ ad polygonum ſimile in hoc deſcriptum. 629.B

Sub eadem altitudine exiſtẽtes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes. 635.B

Si pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. 637.B

Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes. 638.B

Idem verum eſt de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vna baſim habet plurium angulorum, quam altera. 639.B

Pyramides quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinẽ. 641. B

Pyramis quælibet tertia pars eſt priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem. Siue priſma quod libet triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim & altitudinẽ. 642. B

Eodem modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſi, & altitudinem altitudini æqualem. 644. B

Priſmata eiuſdem altitudinis ſuper quaſcunque baſes, inter ſe ſunt, vt baſes. 644. B

Si priſmata quarumcũque baſium inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. 645. B

Quæ de priſmatis dicta ſunt, intelligi debent de ijs, quę habent plana oppoſita baſibus æqualia, & ſimilia. 646. B

Similes pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorũ laterum ratione. 647. B

Similes pyramides, quarum baſes plura latera, quã tria continent, habent proportionem homologorum laterũ triplicatam. 648. B

Similia priſmata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 649 B

Pyramides multangulæ ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. 651. B

Priſmata multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. pag. 651. B

Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habẽtium reciprocantur baſes, & altitudines; illæ sũt æquales. 651. B

Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſunt triangulares, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes & altitudines, illa ſunt æquales. 652. B

Idẽ conuenit priſmatibus. 654. B

Sub eadẽ altitudine exiſtẽtes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. 658. B

Atque hoc verum eſt, ſiue coni & cylindri recti ſint, ſiue ſcaleni. pag. 661. B

Si coni & cylindri quicunque inter ſe ſint, vt baſes, ipſi ſub eadem altitudine erunt. 661. B

Coni & cylindri ſimiles, in triplicata ratione ſunt diametrorũ, quæ in baſibus. 662. B

Idem hoc locum habet in conis & cylindris ſcalenis. 665. B

Si cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 667. B

Idem

Idem intelligatur de cylindro ſcaleno. 668.B

Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. 668.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 669.B

Item priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. 670.B

Coni et cylindri tã recti, q̃ ſcaleni: Itẽ priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionẽ habẽtes eãdem, quam altitudines, baſes habebunt æquales. 672.B

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorũ reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales. 672.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 674.B

Sphęrę inter ſe sũt in triplicata rõne ſuarũ diametrorũ. 685.B

Ex quo fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum ſimile in hac deſcriptũ. 688.B

Si recta linea ſecũdũ extremã & mediam rationẽ ſecetur; maius ſegmẽtũ aſſumẽs dimidiã totius, quintuplũ poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati. 689.B

Si recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplũ poſsit; Duplæ prædicti ſegmẽti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ a principio, rectæ. 691.B

Si recta linea ſecũdum extremã & mediam rationem ſecetur; minus ſegmẽtum aſſumens dimidiã maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. 693.B

Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentũ aſſumens dimidiũ maioris ſegmẽti quintuplũ poſſit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione. 695.B

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla sũt eius, quod a maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. 696.B

Si recta inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. 697.B

Si recta ſecũdũ extremã et mediã rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentũ, quintuplũ põt eius, q̃ a maiori ſegmẽto deſcribitur, quadrati. Et ſi recta inæqualiter ſecetur, totaq; aſſumens minus ſegmentum poſſit quintuplum eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur, quadrati; Recta illa ſecundũ extremã & mediã rationẽ ſecta eſt. 698.B

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturq; ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quę a principio, recta linea. 699.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmẽtum minus; erit maius ſegmentum ſectiũ extrema ac media ratione, et maius ſegmẽtum eſt illa linea, qua prioris linea minus ſegmentum erat. 700.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti; erit quoq; dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius linea. 701.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectã deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 722.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione ſecẽtur; ipſę ſimiliter ſecabuntur, in eaſdẽ ſcilicet proportiones. 763.B

Si ſint quatuor rectæ continue proportionales, necnon & aliæ quatuor, ita vt ead m ſit antecedes omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata. 819.B

Si duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmẽtum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; recta connectens puncta ſectionum duplum poteſt minoris ſegmenti. 861.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione. 875.B

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide, Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRA-

IRRATIONALES magnitudines, vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Trian gulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Si sint tres rectæ Arithmetice proportionales: rectangulum sub extremis, vna cum quadrato exceſſus, æquale erit quadrato lineæ mediæ. 271 A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atque Harmonicæ, ſiue Muſicæ, proprietates variæ. 293. *vſque ad* 632.

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit. 643. A

Si ſint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinũ ęqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices; quam multiplex eſt vnius vna magnitudo, tã multiplices erunt & omnes omnium. 675. A

Si prima ſecũdę ęque fuerit multiplex, atq; tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ: erit & compoſita prima cum quinta, ſecũdæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta quartæ. 676. A

Idem ſequitur, ſi prima & tertia, æquales ſint ſecundæ & quartę; at quinta & ſexta, æque multiplices ſecundæ & quartę: Vel prima et tertia, ęque multiplices ſecundę & quartę; at quinta & ſexta, æquales ſecundæ ac quartæ: Vel denique ſi tam prima & tertia, quam quinta ac ſexta, æquales ſint ſecundæ ac quartæ. pag. 677. A

Si ſit prima ſecũdæ æque multiplex, atq; tertia quartæ: ſumãtur autẽ ęque multiplices primæ ac tertiæ: Erit & ex ęquo ſumptarum vtraque vtriq; æque multiplex, altera alterius

ſecundæ, altera autem quartæ. 678.A
Si prima ad ſecundã habeat eandẽ rationem, quam tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebũt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint. pag. 679.A
Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales ſunt. 681.A
Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 683.A
Si duæ magnitudines duarũ magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædã ſint earundem æque multiplices: Et reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarũ multiplices. 685.A
Æquales ad eãdem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. 687.A
Eodem modo, æquales ad æquales eandẽ habent rationem. 688.A
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorẽ rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorẽ. 688.A
Quæ ad eandem, eandẽ habent rationem, æquales ſunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoque ſunt. 691.A
Ad eandem magnitudinẽ rationẽ habentiũ, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt. 692.A
Quæ eidẽ ſunt eędẽ rationes, & inter ſe ſunt eædem. 693.A
Quæ eiſdem ſunt eadẽ rationes, & inter ſe ſunt eadem. 694.A
Si ſint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnã conſequẽtiũ, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes cõſequentes, 695.A
Si prima ad ſecundam, eandẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartam maiorem rationẽ habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quã quinta ad ſextam. 696.A
Si prima ad ſecundã, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, minorẽ rationem habebit quam quinta ad ſextã. 697.A
Si *prima ad ſecundam, maiorẽ habuerit rationem, quã tertia ad quar-*

quartam; tertia itē ad quartā, maiorē habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoq; ad ſecundam, maiorem habebit, quā quinta ad ſextam. Quod ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quā tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorē, quam quinta ad ſextam: Prima quoq; ad ſecundam, minorem rationē habebit, quā quinta ad ſextam. 697.A

Si prima ad ſecundā ſit, vt tertia ad quartam; ſit autem prima maior, quam tertia: erit & ſecūda maior quam quarta. Et ſi æqualis, æqua is: Et ſi minor, minor. 698.A

Eodē modo, ſi ſecūda maior fuerit quā quarta; erit et prima maior quā tertia: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 699.A

Partes cū pariter multiplicibus in eadē ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur. 700.A

Magnitudines quatuor proportionales, vicißim quoq; proportionales ſunt. 701.A

Si ſint quatuor magnitudines proportionales, ſit aūt prima maior q̄ ſecunda: erit quoq; tertia maior q̄ quarta: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 702.A

Si compoſitæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt. 703.A

Si diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoq; cōpoſitę proportionales erunt. 705.A

Si ſit, vt totum ad totū, ita ablatum ad ablatum: erit quoque reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 708.A

Si ſint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoquę per conuerſionem rationis proportionales erunt. 709.A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadē ratione ſumantur; ſit autem ex æquo prima maior, quam tertia; erit & quarta maior quā ſexta; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor. 710.A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, fuerintq; perturbata earum proportio: ex æquo aūt prima maior fuerit q̄ tertia: Erit & quarta maior quā ſexta: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 711.A

Si ſint quotcūq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, q̄ binæ in eadē rōne ſumātur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 713.A

Si ſit prima ad ſecundā, vt tertia ad quartā: habebūt æquemulti plices primę ac tertię ad ſecūdā & quartam, eādem rationem: Itē æquemultiplices ſecundæ & quartæ ad primā ac tertiā. Et contra, eandem rationem habebūt ſecunda & quarta ad æque multiplices prima ac tertię: Itē

prima ac tertia, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ. 715. A

Si ſint tres magnitudines, alieq; ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 716. A

Si ſit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam; Item quinta ad ſecũdam, vt ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta ad ſecũdam erit, vt compoſita tertia cum ſexta ad quartam. 717. A

Si duæ magnitudines ad duas eandem habeant rationem, & detracta ex prioribus ad eaſdẽ poſteriores eandem quoque habeãt rationem: Et reliqua ad eaſdem poſteriores eandem rationem habebunt. 718. A

Si quatuor magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 719. A

Si tres magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima maiores erũt, quam dupla reliqua. pag. 720. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationẽ, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecũda ad primam, minorem rationẽ, quã quarta ad tertiam. pag. 721. A

Si prima ad ſecundã habeat minorẽ proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecũda ad primã, maiorẽ rõnẽ, quã quarta ad tertiam. 721. A

Si prima ad ſecundã habeat maiorem rationẽ, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiã, maiorẽ rationem, quã ſecunda ad quartã. 722. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, qua tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, minorem rationem, quam ſecunda ad quartam. 722. A

Si prima ad ſecundã habeat maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 723. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam minorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 724. A

Si compoſita prima cum ſecũda ad ſecundam, maiorem habeat rationem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam. pag. 724. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam minorem rationẽ habeat, quam tertia cũ quarta ad quartam

tam: habebit quoque dividendo prima ad ſecũdam minorem rationem, quam tertia ad quartam. 725.A

Si compoſita prima cum ſecũda ad ſecundam habeat maiorẽ rationem, quam compoſita tertia cũ quarta ad quartã: habebit per converſionem rationis, prima cũ ſecunda ad primam, minorem rationem, quam tertia cũ quarta ad tertiam. 726.A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem habent rationẽ, quam tertia cũ quarta ad quartam: habebit per converſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, maiorem rationem, quam tertia & quarta ad tertiam. 726.A

Si ſint tres magnitudines, & alię ipſis æquales numero, ſitque maior proportio prima priorum ad ſecundam, quam prima poſteriorum ad ſecundam; item ſecunda priorum ad tertiam maior, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima poſteriorum ad tertiam. pag. 727.A

Idem eueniet, ſi proportio prima ad ſecundam eadem fuerit, quæ prima ad ſecundam; at ſecunda ad tertiam maior, quam ſecunda ad tertiam: Vel contra, ſi proportio prima ad ſecundam fuerit maior, quam prima ad ſecundam; at ſecunda ad tertiã eadem, quæ ſecũda ad tertiam. pag. 728.A

Quod ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoque ex æqualitate minor proportio prima ad tertiam, quam prima ad tertiam. 729.A

Idem eueniet, ſi proportio prima ad ſecundam fuerit eadem, quæ prima ad ſecundam; at ſecunda ad tertiam minor, quam ſecunda ad tertiam: Vel contra, ſi proportio prima ad ſecundam fuerit minor, quam prima ad ſecundam; at proportio ſecundæ ad tertiam eadem, quæ ſecunda ad tertiam. 729.A

Quod ſi plures ſint magnitudines tribus, ſine omnes proportiones in vno ordine magnitudinum ſint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; ſive vna tantum maior, quam vna, vel dua, &c. Erit maior vel minor proportio prima ad vltimam in vno ordine, quam prima ad vltimam in alio ordine. 729.A

Si ſint tres magnitudines, & alię ipſis æquales numero, ſitque maior proportio prima priorum ad ſecundam, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam; Item ſecunda priorum ad tertiam maior, quam prima poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quã

prima posteriorum ad tertiam. pag. 730. A

Idem eueniet, si proportio prima priorum ad secundam sit, quæ secũdæ posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam maior, quam prima priorum ad secundam: Vel contra, ratio primæ priorum ad secundam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam eadem, quæ prima posteriorum ad secundã. pag. 731. A

Quod si in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes sint minores; erit minor proportio primæ ad tertiam, quam primæ ad tertiam. 831. A

Quod si plures sint magnitudines quam tres in quolibet ordine: erit quoque maior vel minor proportio primæ ad vltimam, quam primæ ad vltimam. pag. 731. A

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quam totius ad totum. 731. A

Si fuerit minor ratio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quam totius ad totum. 732. A

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior ratio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum. 733. A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio prima ad vltimã cõponitur ex omnibus proportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 742. A

Si quatuor magnitudines sint Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoque erũt Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. pagina 458. B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut com-

positus

poſitus ex integro & fracto, in ſe multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. pag. 658. A

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 240. B

Numerator cuiuſuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia. pag. 241. B

Minutia qualibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata. 242. B

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores. pag. 243. B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem. pag. 244. B

Integrum ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorũ productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur. 245. B

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris. 246. B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionẽ, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eãdem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. pag. 247. B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, ſunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorẽ proportionem habet, quam denominator, illa maior eſt: Et maioris numerator maiorem habet proportionẽ quam denominator. 248. B

Minutia minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur. 251. B

Duæ

Dua minutia, quarum numeratores in denominatores viciſsim ducti gignunt numeros æquales, æquales ſunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores viciſsim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt: & maioris minutia numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. pag. 255. B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens eſt minutia, cuius numerator eſt numerus minor diuiſus, denominator vero maior numerus diuidens. 258. B

NVMERI proportionales in communi.

Propoſitis quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiã multiplicationem: ſi multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. pag. 650. A

Propoſitis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior ſit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum; ſi ſumantur æque multiplices primi ac tertij, item æque multiplices ſecundi ac quarti, fieri poteſt, vt multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 651. A

Propoſitis quatuor numeris, ſumptiſque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationẽ; ſi multiplex primi exiſtente maiore, quam multiplex ſecundi, multiplex tertij maior quoq; ſit neceſſario, quam multiplex quarti: Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor. Eadem proportio primi ad ſecũdum, quæ tertij ad quartum. 654. A

Propoſitis quatuor numeris, ſumptiſque primi ac tertij æque multiplicibus, item ſecundi & quarti æque multiplicibus; ſi quando contingat, multiplicẽ primi maiorẽ eſſe multiplice ſecundi, multiplicem vero tertij nõ maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum. 655. A

Datis tribus terminis Geometrice proportionalibus ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus: Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma conflata ex ſecundo et tertio ſemel, ac tertius ſemel, ſunt etiã

Geometrice proportionales. pagina 806. A

Datis tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata: ac denique tertius ſemel, ſunt Arithmetice proportionales. 808. A

Datis tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel; ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel; & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coaceruata, Harmonice proportionales ſunt. 809. A

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita ſe habet ad alterutrũ multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 12. B

Numerus ex diuiſione duorum numerorum procreatus ita ſe habet ad vnitatem, vt diuiſus numerus ad diuidentem. 13. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſq; ſimul eadẽ pars erit, quæ vnus vnius. 40. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 41. B

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 41. B

Si ſint quotcunque numeri quotcũque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars: Et omnes omniũ ſimul eadẽ pars erunt, quæ vnus vnius: pag. 42. B

Idẽ numeris fractis cõuenit. 42. B

Si ſint quotcũque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æquè multiplices: quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erũt & omnes omnium. pag. 43. B

Idem verum eſt de numeris fractis. 44. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterq; vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 44. B

Idem locum habet in numeris fractis. 45. B

Si ſint quotcũque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eadẽ partes: Et omnes omnium ſimul eadem partes erũt, quæ vnus vnius. 45. B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit qualis totus totius. 45. B

Idem locum habet in numeris fractis. 46. B

Si numerus numeri æque fuerit multi-

multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 46.B
Idem verum eſt de numeris fractis pag. 46.B
Si numerus numeri partes fuerit quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. pag. 47.B
Idem in fractis numeris verum eſt. 48.B
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſsim quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti. 49. B
In fractis numeris idem concludes. pag. 50.B
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſsim quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars. 50.B
Numeris fractis hoc idem conuenit. 51.B
Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 51.B
Idem in fractis numeris verum eſt. 52.B
Si primus ſecundũ, & tertius quartum, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem, aut partes; erit ſecundus primi, & quartus tertij eadem partes. Et ſi ſecundus primi, & quartus tertij eadem partes ſit; continebit primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter, eandemque inſuper partem, aut partes. 53.B
Idẽ verum eſt in numeris fractis, pag. 63.B
Si ſint quotcunque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedẽtes ad omnes cõſequentes. 56. B
Verum quoque hoc eſt in numeris fractis. 58. B
Si quatuor numeri proportionales ſint, Et viciſsim proportionales erunt. 58 B
In fractis idem ternitur. 60.B
Si ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumãtur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erũt. pag. 61. B
Idem in numeris fractis verum eſt. 62.B
Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſunt eædem. pag. 62.B
Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur; Et viciſsim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum. 63.B
Si numerus duos numeros multipli-

tiplicans fecerit aliquos: geniti ex ipſis eãdem rationem habebunt, quam multiplicati. 66. B

In fractis numeris idem verum eſt. 67. B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis eandem rationẽ habebunt, quam multiplicantes. 67. B

In fractis idem habet locũ. 67. B

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicantes. 68. B

Si quatuor numeri ſint proportionales; qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis eſt ei, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis ſit ei, qui ex ſecũdo & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri ꝓportionales erũt. 68. B

Verum eſt idem in numeris fractis pag. 69. B

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis æquales erunt. 69. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 69. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecundũ quam tertij ad quartũ; qui ex primo & quarto ſit, numerus, maior eſt eo, qui ex ſecũdo & tertio fit, numero: Et contra, ita in fractis numeris, quã integris. 70. B

Si tres numeri ſint proportionales; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, q a medio efficitur: Et ſi qui ſub extremis cõtinetur, æqualis ſit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt. 71. B

Ita fractis idem verum eſt. 72. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecũdũ, quã ſecũdi ad tertiũ; maior fiet numerus ex primo in tertiũ, q̃ ex ſcdo in ſe: Et contra, tã in numeris fractis q̃ integris. 72. B

Minimi numeri omniũ eandem cũ eis rationẽ habentiũ, metiuntur æque numeros eandẽ cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem. 73. B

Si tres numeri ſint continue proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi; metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium. 74. B

Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarũ proportionũ, ſiue eadẽ ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidẽ alios numeros, q̃ eaſdẽ cũ eis ꝓportionẽs hẽant, primus primũ, ſecũdus ſcdm, et tertius tertiũ. etc. 74. B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini

ni ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; etiã ex æqualitate in eadem ratione erunt. 76.B

Idem verum eſt in numeris fractis pag. 77.B

Si quatuor numeri tam integri, q̃ fracti, proportionales ſint; & conuertendo proportionales erunt. pag. 78.B

Si compoſiti numeri ſiue integri, ſiue fracti, proportionales ſint; & diuiſi proportionales erunt. 78.B

Si diuiſi numeri proportionales ſint ſiue integri, ſiue fracti; & diuiſi proportionales erunt. 79.B

Si compoſiti numeri tam fracti, q̃ integri, proportionales ſint; & per conuerſionem rationis proportionales erunt. 79.B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum; habeat autem & quintus ad ſecundum eandem rationem quam ſextus ad quartum, tam in fractis numeris, quam integris: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eãdem habebit rationem, quam tertius cũ ſexto ad quartum. 80.B

Si duo numeri ad duos numeros eadem habeant rationem; & d. tracti quida habeant ad eoſdem eandem, tam in numeris fractis, quam integris: Et reliqui ad eoſdem eande rationem habebunt. 81.B

Si primus ad ſecundum eãdem habeat rationem, quã tertius ad quartum; habeat autem & primus ad quintum eãdem, quam tertius ad ſextum, tam in integris quam fractis numeris: Etiã primus ad compoſitũ ſecundum cum quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cum ſexto. 81.A

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quãdam alium eundem, tam in fractis, quam integris numeris: habebunt quoque omnes illi ſimul ad eundem, proportionem, quam hi alij omnes ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcũque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionẽ, quã idem alius numerus ad hos omnes ſimul. 82.B

Vltima nouem propoſ. lib. 5.a Campano adiecta, qua ratione eodẽ modo demonſtrentur in numeris improportionalibus. 83.B

Maxima menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros minimos eãdem cũ ipſis proportionem habẽtes. pag. 96.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor

nor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 98. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorũ primi inter ſe ſint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 109. B

Si ſint quotuis numeri non continue proportionales, extremi vero ipſorum ſint inter ſe primi; ipſi minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. 110. B

Si tres numeri ſint minimi continue proportionales; extremi quadrati ſunt: Si autem quatuor cubi, &c. 112. B

Extremi numeri continue proportionalium quotcũque minimorum primi ſunt inter ſe. pag. 114. & 116. B

Duo numeri minimi in ſua proportione metiũtur omnes medios quotcũque minimorum in eadem ratione. 114. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius quiſquam vllum metietur. 123. B

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex; neque alius quiſquã vllius multiplex erit. 124. B

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecũdum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur: Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunq; alius cuiuſlibet ſequentiũ multiplex erit. 125. B

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quiſquam nullum a ſecundo metiatur, neq; primus ſecundum metietur. Et ſi primus vel alius quiſquam nullius a ſecundo ſit multiplex; neque primus ſecundi multiplex erit. 126. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur ſecundum. pag. 126. B

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit. 127. B

Si inter duos numeros medij cõnua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 127. B

Inter duos numeros duplã, triplã, aut quintuplã proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis non poteſt cadere medius

dius numerus proportionalis. pag. 129. & 130. B

Item neque inter duos numeros ſola vnitate, aut binario differentes. 129. B

Ex quo fit, neque Diapaſon, neq; Tonum in Muſicis diuidi poſſe biſariam. 130. B

Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione cecidẽt numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ inter vtrumque eorum, & vnitatẽ medij continua proportione cadẽt. pag. 133. B

Si numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquem, & rurſum multiplicet productum, &c. omnes producti ſunt continue proportionales ab vnitate. 132. B

Si inter duos numeros & vnitatem cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum. & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 133. B

Si quotquot numeri ſint ab vnitate continue proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps. 135. B

Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualiũ; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quã habent ſecũdi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius. 135. B

Si ſint ab aliquo numero code duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam, &c. 136. B

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, et aſſumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 138. B

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primũ poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 143. B

Primi autẽ numeri producti ſunt in duplicata rõne ꝓportionis datorum numerorum; & ſecũdo loco geniti in triplicata. &c. 145. B

Si ab

Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales; minor quicunque maiorẽ quẽlibet metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris. 186. B

In numeris ab vnitate cõtinue proportionalibus, quantũ abeſt maior quilibet a minore quouis eũ metiente, tantum ab vnitate diſtat numerus, per quem minor maiorem metitur. Item quilibet numerus ſeipſum multiplicans, producit numerum tantũ ab eo diſtantem, quantum ipſe ab vnitate abeſt. Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantum a maiore diſtans, quantum minor ab vnitate. 187. B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint; quicunque primorum numerorum ultimum metiũtur, iidem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur. 188. B

Itaque neque vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiẽs, metiri poteſt vltimũ. 190. B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint, qui uero poſt unitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus. 191. B.

Si quotcunq; numeri continue proportionales, ſint minimi omniũ eãdem rationem habentiũ cum ipſis; Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorũ, qui in eadem rõne ſunt minimi; vel certe ad alterũ erit cõpoſitus. 194. B

Si tres numeri ſint deinceps proportionales, & minimi omnium eãdem cum ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet ſimul, ad reliquũ primi erunt pag. 205. A

Si quotcũque numeri deinceps proportionales, ſint minimi omniũ eandem cum illis rationem habentium; ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul collecti, erunt primi. 207. B

Si duo numeri, primi inter ſe fuerint; non erit ut primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam. 209. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; non erit ut primus ad ſecũdum, ita ultimus ad alium quempiam. 209. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahãtur, aũt a ſecundo, & ultimo æquales ipſi primo; Erit ut ſe cũdi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes. 229. B

Quolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus,

conuerſo ordine proportionales. pag. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quottetibus reſpondentibus cõuerſo ordine proportionales. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quottentes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorũ ad quemlibet eorũ, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdẽ prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa fecit. 236. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis ſemper iidẽ primi Quotientes ordine conuerſo. 237. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omnium quottetum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quottentum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. pag. 238. B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quottentum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. pag. 238. B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides d. fin. 10. lib. 5. & deſinit. 5. lib. 6. non eſt vere additio proportionum, vt plerique falſo exiſtimant. 273. B

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 175. B

NVMERVS fractus, vide, Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot inſſerit quis, qui inter ſe multiplicati datum numerũ gignãt, repire. 749. A

Numero per numerum diuiſo; diuiſus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuiſionẽ inuenti in numerum diuidentem. 13. B

Si

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas : qui principio dati ſunt numeri, primi inter ſe erunt. pag. 32. B

Si duobus numeris inter ſe primis datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: nũquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas. 33. B

Si datis duobus numeris inter ſe cõpoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione : detractio ad vnitatẽ vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 34. B

Numerus duos numeros metiens : metitur quoque maximam eorundem menſuram. pag. 36. B

Numerus tres numeros metiẽs, uel plures ; metitur etiam maximam eorũ menſuram communem. 38. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. 39. B

Si duo numeri mutuo ſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt. 64. B

Idem in fractis numeris concludes pag. 65. B

Si duo numeri ſe mutuo multiplicauerint ; procreabitur vnus, idemque numerus. 65. B

Verum hoc etiam eſt in numeris fractis. 66. B

Primi inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eãdem cum eis rationem habentium. 84. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. pag. 84. B

Quotcunque numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionũ. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi. 85. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint ; qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit. 86. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint ; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. pag. 87. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 88. B

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint : Et qui ex eis gignẽtur primi inter ſe erũt. pag. 88. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans uterque ſe ipſum fecerit aliquẽ ; Et geniti ex ipſis primi inter

se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicãtes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semp circa extremos hoc eueniet. 89.B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorũ primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 90.B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 91.B

Omnis primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. pagina 91.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autẽ ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 92.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit. pag. 93.B

Omnem compositum numerũ, aliquis primus numerus metitur. 93.B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 94.B

Si duo numeri numerum quẽpiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 99.B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eũdem metietur. 101.B

Idem eueniet in pluribus numeris. pag. 102.B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam. 102.B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus. pag. 103.B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiũtur; minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas. 104.B

Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent. 155.B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus aliũ numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur. 193.B

Demonstratio priorum 10. propositionum lib. 2. in numeris. pagina 196.B

Nullus numerus ita diuidi potest, vt productus ex toto in vnam

par

partem, ſit æqualis quadrato alterius partis. 204. & *pag.* 222. B

Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum. 215. B

Si pares numeri quotcũq; componantur; totus par erit. pag. 216. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorũ ſit par, totus par erit. 217. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar, & totus impar erit. 217. B

Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem. 218. B

Si a pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. pagina 218. B

Si a pari numero impar detrahatur; & reliquus impar erit. pag. 219. B

Si ab impari numero impar detrahatur; reliquus par erit. pag. 219. B

Si ab impari numero par detrahatur; reliquus impar erit. pag. 220. B

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 220. B

Si par numerus parem multiplicãs fecerit aliquem; factus par erit pag. 220. B

Par in ſe multiplicatus facit parem. 221. B

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; factus impar erit. pag. 221. B

Impar numerus in ſe multiplicatus gignit imparem. 221. B

Numerus impar numerum parem metiens, per numerũ parem eum metitur. 222. B

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 222. B

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur. 223. B

Si impar numerus ad aliquẽ numerum primus ſit; & ad illius duplum primus erit. 224. B

Immo & ad quadruplum, octuplũ, ſedecuplum, & ſic deinceps in proportione dupla. 225. B

Numerorum a binario duplorũ vnuſquiſque parirer par eſt tantum. 225. B

Si numerus dimidiũ habeat imparem; pariter impar eſt tantum. 226. B

Si par numerus neque a binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem; pariter par eſt, & pariter impar. 228. B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. pag. 231. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Nullius numerus compoſitus ex integro & fracto, vel numerus fractus in ſe multiplicatus procreat numerum quadratū integrum. pag. 638.A

Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. 121. B

Duorum quadratorum numerorum unus medius eſt proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatā habet lateris ad latus rationem. 140.B

Medio proportionali tam inter duos quadrates; erit is ad vtrumuis quadratorum compoſitus. 141.B

Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 141.B

Duobus medijs proportionalibus cadentibus inter duos cubos, erunt ij, & vterlibet cuborum inter ſe compoſiti. 142.B

Si quadratus numerus quadratū numerū metiatur; & latus unius metietur latus alteri⁹. Et ſi vnius quadrati latus metiat latus alterius; & quadratus quadratū metietur, 146.B

Si cubus numerus cubū numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubū metietur. 147.B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius quadrati non metiatur latus alterius; neq; quadratus quadratum metietur. 148.B

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi unius latus alterius nō metiat, neq; cubus cubum metietur 149.B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius lateris lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris multiplex erit. Et ſi latus lateris nō ſit multiplex; neq; quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 149.B

Duorum ſimilium planorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus. Et planus ad planū duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. pag. 150 B

Medius numerus proportionalis inter

ter duos planos ſimiles, ad vtrũlibet compoſitus eſt. 151. B

Duorum ſimilium ſolidorũ numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationẽ habet lateris homologi ad latus homologum. pag. 152. B

Duo numeri medij proportionales inter duos ſolidos ſimiles, et uterius ſolidorum, ſunt compoſiti inter ſe. 153 B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; ſimiles plani erunt illi numeri. 158. B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; ſimiles ſolidi ſunt illi numeri. 159 B

Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit. 161. B

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autẽ ſit cubus; Et quartus cubus erit. 161. B

Si duo numeri rationem habẽt inter ſe, quam quadratus ad quadratum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit. 165. B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non poteſt in duobus numeris quadratis. pag. 165. B

Duo numeri in quintupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratũ. pag. 166. B

Si duo numeri rationem inter ſe habeant, quã cubus ad cubum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit. 166. B

Proportio cubi ad non cubum, reperiri non poteſt in duobus numeris cubis. 167. B

Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus ad quadratum. 167. B

Numeri proportionem habentes, quam quadratus ad quadratũ, ſimiles plani ſunt. 168. B

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus ad cubum. 168. B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, ſimiles ſolidi ſunt. 169. B

Nulli numeri habentes duplã proportionem, vel ſuperparticularẽ, vel ſuperbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter ſe, quorũ neuter primus ſit, dummodo quadrati no ſint, aut cubi; ſimiles plani ſunt, aut ſolidi. 169. B

Si ſint duo numeri plani, aut ſolidi ſimiles, ſitque minor primus; metietur minor maiorem. 170. B

Duo numeri inter ſe primi, quorum minor primus ſit, nõ poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. pag. 171. B

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant

quendam; productus quadratus erit. 173.B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciãt quadratum; ſimiles plani erunt. 174.B.
Duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes producunt quadratum. 174.B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 175.B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus, reliquus nõ quadratus erit. 175.B
Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 175.B
Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 176.B
Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. pag. 177.B
Si cubus numerus numerũ quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 177.B
Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 178.B
Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. pag. 178.B
Si numerus ſeipſum multiplicans faciat cubum; Et ipſe cubus erit. 178.B
Si compoſitus numerus numerũ aliquem multiplicans quempiam faciat; Factus ſolidus pag. 179.B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint; tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes; quartus autem eſt cubus, & duos intermittentes omnes; ſeptimus vero cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes. 179.B
Si ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri, quartus, ſeptimus, decimus, &c. ſunt cubi. Omnes vero, qui proxime ſequuntur poſitos in locis, ſexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, quæ metitur ſenarius, quales ſunt, ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. ſunt cubi ſimul & quadrati. 181.B
Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales, qui vero poſt vnitatem, ſit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

pag.

pag. 181.B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps ſint proportionales, qui vero poſt vnitatem, non ſit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem, non ſit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. pag. 184.B
Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continue, qui poſt vnitatem, non eſt cubus ſimul & quadratus; non neceſſe eſt, nullum alium eſſe quadratum ſimul & cubum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, eſt quadratus ſimul ac cubus, non exiſtente primo ab vnitate quadrato ac cubo ſimul. 185.B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ ſolidæ non Regulares, ac plana parallela.

Si in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius, linea vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti. pag. 559.B
Ad quę plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela. 563.B.
Si ſint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnum eorum recta eſt, ad reliquum quoque recta erit. 563.B
Si duæ rectæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano; Parallela ſunt, quæ per illa ducuntur, plana. 564.B
Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur; communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. 566.B
Quæ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela; vel ſi conueniunt, vnum planum efficiẽt. pag. 567.B
Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorũ parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem rectum. 571.B
Si ſolidum parallelis planis continetur; aduerſa illius plana parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia. 584.B
Si ſolidum parallelepipedũ plano ſecetur per diagonios aduerſo-

uerſorum planorum; bifariã ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. 595.B

Solida parallelepipeda ſuper eãdem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineę in iiſdem collocãtur rectis lineis, ſunt inter ſe æqualia. 594.B

Solida parallelepipeda ſuper eãdem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorũ inſiſtentes lineæ non in iiſdẽ collocantur rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. 596.B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſim, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine. 597.B

Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes cõſtituta, & in eadẽ altitudine; æqualia ſunt inter ſe. 598.B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſim. 601.B

Hæc quinque, quæ proxime dicta ſunt de parallelepipedis, conueniunt etiam in priſmatis, in quibus duo plana oppoſita ſunt triãgula. 608.B

Si ſolidi parallelepipedi eorum quę ex aduerſo, planorũ latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: Communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariã ſe mutuo ſecabunt. 617.B

In omni parallelepipedo diametri ſe mutuo bifariã diuidunt in vno puncto. 618.B

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam, per centrum tranſibit ipſum planum. pag. 619.B

Si fuerint duo priſmata planorum triangularium oppoſitorum æqualis altitudinis, quorum hoc quidẽ baſim habeat, triangulum, illud vero, parallelogrammum, duplum autẽ fuerit parallelogrãmũ trianguli; Æqualia erunt ipſa priſmata. 623.

Omnis pyramis triangularem habẽs baſim diuiditur in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis. pagina 630.B

Si fuerint duę pyramides eiuſdẽ altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarũ vtraque diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa

diuiſa ſit vtraque pyramidũ, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idq; ſemper fiat: Erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia. 633.B

Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares, ſunt inter ſe æquales. 637.B

Pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiuſdẽ & altitudinis, habent baſes æquales, vel eandẽ. 637.B

Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes quaſcunque, vel eandem, ſunt inter ſe æquales. 641.B

Pyramides multangulæ æquales, et ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem; baſes habentes æquales, vel eandem. 641.B

Omne priſma triãgulare habẽs baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habẽtes. 642.B

Priſmata eiuſdẽ altitudinis ſuper eande, vel æquales baſes quaſcunq;, inter ſe ſunt æqualia. Et priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandẽ, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdẽ altitudinis, baſes habent æquales, vel eandem. 645.B

Quæ de priſmatis dicta ſunt, intelligi debent de ijs, quæ habent plana oppoſita baſibus æqualia & ſimilia. 646.B

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eãdem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. 654.B

Atque hoc verum eſt, ſiue coni & cylindri ſint recti, ſiue ſcaleni, ſi tet non ſit idem axis conorũ, & cylindrorum. 658.B

Coni & cylindri eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes cõſtituti, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, inter ſe ſunt æquales. 661.B

Coni & cylindri æquales ſuper eandem vel æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes ſunt, vel eandem. 661.B

Si in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ abſcindãt arcus ſimiles; erũt duæ rectæ coniũgẽtes extrema vnius rectæ cũ cẽtro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cũ centro coniungũt. 919.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiuſq; æqua

lia

lia ſunt & latera oppoſita, & anguli oppoſiti, atque ipſum diameter ſecat bifariã. 177. A
Quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, parallelogrammum eſt. 178. A
Quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, parallelogrammum eſt. 179. A
Rhombus, & Rhomboides, parallelogramma ſunt. 179. A
Quadratũ, & altera parte lõgius, parallelogramma ſunt. 179. A
Quadrilaterum diuiſum bifariã ab vna diametro, non ſemper eſt parallelogramum. 179. A
Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. 180. A
Quadrati, & Rhombi angulos ſecat diameter qualibet bifariã. pag. 180. A
Rhomboidis, & altera parte longioris angulos ſecat diameter non bifariam. 181. A
Quadrati, & altera parte longioris diametri ſũt æquales. 181. A
Rhombi, & Rhomboidis diametri non ſunt æquales. 181. A
Parallelogrammi cuiuſque diametri ſe mutuo ſecant bifariam. pag. 182. A
Quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuo bifariam ſecant, parallelogramum eſt. 182. A
Parallelogrammum bifariam diuiditur a recta, quę diametrum bifariam ſecat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, ſecat diametrum quoque bifariam. 183. A
Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdẽ parallelis conſtituta ſunt æqualia. 190. A
Parallelogrãma æqualia ſuper eandem baſim, ad eaſdemque partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas. 192. A
Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt æqualia. 193. A
Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eiſdem parallelis, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 193. A
Parallelogrammorum inter eaſdẽ parallelas, quod maiorem baſim habet, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 194. A
Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum eſt. 201. A
Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes ſunt æquales, ſunt æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadẽ baſi, habent baſes oppoſitas æquales. 204. A
Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quod maiorem habet baſim oppoſitam, ma-

ius eſt: Et quod maius eſt, habet baſim oppoſitam maiorẽ. 205. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorũ oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales. 205. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, et ſuper æqualibus baſibus, quod maiorem habet oppoſitã baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim oppoſitã. pag. 206. A

Parallelogrammum duplum eſt trianguli eandem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 213. A

Parallelogrammũ æquale eſt triã gulo duplam habenti baſim, & in eiſdem parallelis conſtituto. pag. 214. A

Parallelogrammũ duplum eſt triã guli æqualem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 214. A

Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, eandemque habuerint baſim, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; in eiſdem erunt parallelis: Et ſi parallelogrammum duplũ fuerit triã guli, in eiſdemque parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem. 215. A

Si trapezium & triangulum ſuper eadẽ baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij, ſit baſis triãguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli; erit trapezium maius duplo trianguli. 216. A

Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt triãguli, quod baſim habet unum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem verò in medio pũcto lateris oppoſiti. 217. A

In parallelogrammo, complementa circa diametrum æqualia ſunt. 219. A

Si parallelogrammo diuiſo in quatuor parallelogramma, duo adueꝛſa ſint æqualia, cõſiſtent reliqua duo circa diametrũ. 220. A

Quadrata linearum æqualiũ ſunt æqualia: Et quadratorum æqualium æquales ſunt linea. 227. A

Quadratum ex diametro quadrati deſcriptum, duplum eſt ipſius quadrati. 235. A

Quadratum diametri figuræ alterа parte lõgioris, æquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium. 235. A

Parallelogrammũ, cuius vnus tantum angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 250. A

Rectangulũ quodcunq; æquale eſt alteri rectangulo ſub duabus rectis contento, quæ duobus lateribus illius ſint æquales. 251. A

Parallelogramma circa diametrum quadrati, ſunt quadrata. pag. 263. A

Qua-

Quadratum cuiuſque rectæ quadruplum eſt quadrati rectæ, cuius illa dupla eſt. Et ſi quadratum quadrati ſit quadruplum, latus lateris duplum eſt. 264. & 821. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiens quadrato, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis per applicationem factis comprehenſo. 848. A

PAR, & impar numerus. vide. Numerus par,&c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par,&c.

PERFECTVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum,&c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum,&c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum,&c.

PLANI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. vide. Numerus par,&c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum,&c.

PROPORTIO Figurarũ, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide, Numeri Proportionales in cõmuni.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum,&c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales lineæ non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe ſunt commenſurabiles. pag. 343. B

Spatium Rationali ſpatio commenſurabile,& ipſum Rationale eſt. 345.B

Quod ſub Rationalibus longitudine commẽſurabilibus rectis(quomodocunque cõmenſurabiles ſint expoſitæ Rationali)cõtinetur rectangulum; Rationale eſt. 345.B

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalẽ, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine cõmenſurabilem. 346.B

Quod ſub Rationalibus potentia ſolum commẽſurabilibus rectis continetur rectangulũ, Irrationale eſt: Et recta ipſum potens, Irrationalis Vocetur autẽm Media. 351 B

Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantũ commenſurabiles, Irrationalis eſt, quæ vocatur Media. 352 B

Rectangulum ſub duabus Rõnalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium dici poteſt. 352.B

Non omne rectangulum Medium continetur ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. 352.B

Quod a media fit, ad Rationalẽ applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quã applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem. 353.B

Omne ſpatium Medium æquale eſt rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. 353. & 355.B

Mediæ commenſurabilis, Media eſt. 355 B

Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt. 356.B

Non omnis Media recta cuilibet Mediæ eſt cõmẽſurabilis, 358.B

Quod ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Mediũ eſt. 358.B

Quod

Quod ſub Medijs potẽtia tantũ cõmenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulũ; vel Rationale eſt, vel Medium. 359.A

Quod ſub Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur, nec Rationale eſt, nec Medium, ſed Irrationale aliud, quod æquale eſt rectangulo ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 361.B

Medium non ſuperat Medium Rationali. 362.B

Rationale ſuperat Rationale Rationali. 364.

Duo ſpatia Irrationalia componere poſſunt ſpatium Rationale. 383.B

Duo ſpatia Rationalia componunt ſemper ſpatium Rationale. pag. 384.B

Si duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 387.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale cõtineãt; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima. 389.B

Quod ſub linea Rationali, & Irrationali contentum rectangulum. Irrationale eſt. 390.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs, ſecunda. 390.B

Si duæ rectæ potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis cõtinetur, Medium; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 393.B

Si duæ rectæ potentia incommẽſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Mediũ, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Mediũ potens. 394.B

Si duæ rectę potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis cõtinetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 395.B

Sex lineæ Irrationales compoſitæ, vt ea, quæ ex binis nominibus, quæ ex binis Medijs prima, quæ ex binis Medijs ſecunda, Maior, Rationale ac Mediũ potens, & bina Media potens, adynum dumtaxat punctum diuiduntur in nomina, ſingulæ. 398.B

Sex

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 406.B

Si ſex ſpatia contineantur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, ac ſexta; Rectæ ea potentes Irrationales ſunt hæ ordine; ex binis Medijs prima, ex binis Medijs ſecunda, Maior, Rationale ac Medium potens, & bina Media potens. 417.B

Quadrata ſex harum linearum Irrationalium; eius quæ ex binis nominibus, ex binis Medijs primæ, ex binis Medijs ſecundæ, Maioris, Rationale ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine ſex lineas ex binis nominibus. pag. 426.B

Rectæ longitudine commenſurabiles ſex lineis Irrationalibus prædictis, ſunt quoque eiuſdem ordinis, & nominis Irrationales. 435.B

Idem eueniet, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 437.B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens. 443.B.

Si duo Media inter ſe incõmenſurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex Medijs ſecunda, vel bina Media potens. 445.B

Ea, quæ ex binis nominibus, & alię quinq; Irrationales eam ſequentes, & inter ſe, & a Media differunt. 447.B

Recta linea media proportionalis ſecundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, per compoſitionem factæ, eſt quoque Irrationalis eiuſdem ordinis. pag. 448.B

Si a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti: *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome. 449.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis medijs prima, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. pag. 451.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; *(Vel*

ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, minus nomen auferatur) Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda. pag. 452.B

Si a recta linea auferatur recta potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidē ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur Medium; *(Vel ſi a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor. 454.B

Si a recta auferatur recta potentia incōmenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat cōpoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. pag. 455.B

Si a recta auferatur recta potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommēſurabile quę compoſito ex quadratis ipſarum; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens. pag. 457.B

Apotomę vna tantum congruit recta Rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtēs toti. 459.B

Mediæ Apotomæ primæ vna tā tum congruit recta Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens. pag. 461.B

Mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens. pag. 462.B

Minori vna tantum congruit recta, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium. pag. 464.B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciēs compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale. pag. 465.B

Ei, quæ cum *Medio Medium* totum facit, vna tantũ cõgruit recta, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitũ ex ipſarum quadratis *Medium*, & quod ſub ipſis continetur, *Medium*, incommenſurabileque compoſito ex ipſarũ quadratis. 466.B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur. pag. 467.B

Si ſex ſpatia contineantur ſub Rationali, & Apotoma prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, & ſexta; Rectæ ea potentes Irrationales ſunt hæ ordine; Apotome, *Mediæ* Apotome prima, *Mediæ* Apotome ſecunda, *Minor*, ea quæ cum Rationali *Medium* totum efficit, & ea quæ cũ *Medio* Medium totum efficit. pag. 475.B

Quadrata harum ſex linearum Irrationalium, Apotomæ, *Mediæ* Apotomæ primæ, *Mediæ* Apotomæ ſecundæ, Minoris, eius quæ cum Rationali *Medium* totum efficit, & eius, quæ cum *Medio Medium* totum efficit; ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine ſex Apotomas. 485. B

Rectæ longitudine commenſurabiles ſex lineis Irrationalibus prædictis, quę per detractionem fiunt, ſunt quoque Irrationales eiuſdem ordinis, & nominis. 493.B

Idem eueniet, ſi potentia tantũ eis ſint commenſurabiles, praterquam in Apotoma. 494.B

Medio a Rationali detracto; Recta, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 500.B

Rationali a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel *Mediæ* Apotome prima, vel cum Rationali *Medium* totum efficiens. 501.B

Medio a *Medio* detracto, quod ſit incommenſurabile toti; reliquæ duę Irrationales fiunt, vel *Mediæ* Apotome ſecũda, vel cum *Medio* Medium totum efficiens. 503 B

Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus. 504.B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam ſequentes, & inter ſe, & a *Media* differunt. pag. 505.B

Tredecim lineæ Irrationales inter ſe diuerſæ. 506.B

Quadratum Rationalis ad eã, quæ ex binis nominibus, applicatũ, latitudinẽ facit Apotomen, cuius nomina cõmen ſurabilia ſũt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotome quę fit, eundem habet ordinem, quem

ea, quæ eſt ex binis nominibus. 508.B
Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quẽ ipſa Apotome. 511.B
Si ſpatium cõtineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commẽſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta ſpatium potens, eſt Rationalis. 513.B
Rationale ſpatium cõtineri poteſt ſub duabus rectis Irrationalibus. 514.B
A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem. 515.B
Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome. 702.B
Si recta ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitq; maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum Apotome. 703.B.
Si in circulo Rationalem habẽte diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. pag. 714.B
Si ſphæra diameter fuerit Rationalis, erit ea ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media. 790.B
Triangulum æquilaterum, cuius latus eſt Rationale, ſuperficies Media eſt. 792.B
Latus Icoſaedri in pyramide deſcripti eſt Apotome. 879.B

RECTA LINEA.

Rectæ duæ lineæ non habent vnum, & idem ſegmentum commune. pag. 64.A
Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, ſi producantur ambæ, neceſſario ſe mutuo in eo puncto interſecabunt. 65.A
Rectæ duæ lineæ ſpatium non comprehendunt. 68.A
Rectæ duæ lineæ duabus eiſdem rectis lineis ſuper eadem recta liqea æquales, vtraque vtrique; non conſtituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. pag. 91.A
Recta linea alteri inſiſtens facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 108.A
Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo

lo puncto educta cum illis facit duos angulos non ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 109.A

Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ non faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cũ illis facit duos angulos ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 110.A

Rectæ duæ ſe interſecantes faciunt angulos ad verticẽ oppoſitos æquales. 111.A

Rectæ duæ ſe interſecantes faciunt quatuor angulos quatuor rectis æquales. 112.A

Rectæ quotcunq; ad vnum punctũ conuenientes faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 112.A

Rectæ duæ facientes cum alia recta in eodem puncto, non ad eaſdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum ſunt coniunctæ. 113.A

Rectæ quatuor in eodem puncto facientes binos oppoſitos angulos æquales, conſtituunt duas rectas lineas. 113.A

Rectæ lineæ interſe æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quam duæ, duci non poſſunt. pag. 116.A

Rectæ lineæ ad eandem rectã perpendiculares, plures quam vna, duci non poſſunt. 117.A

Recta linea faciente cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demiſſa cadit ad partes anguli acuti. 118.A

Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demiſſarum, minima eſt perpendicularis. pag. 121.A

Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vnius lateris trianguli interius conſtitutæ, reliquis triãguli duobus lateribus minores quidem ſunt, maiorem vero angulum continent. pag. 126.A

Rectæ duæ lineæ intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera vero non ab extremo ducitur, maiores eſſe poſſunt reliquis trianguli duobus lateribus, minoremque angulum comprehendere. pag. 127.A

Rectę duæ lineę parallelæ ſunt, ſi recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. pag. 142.A

Rectæ duę lineæ parallelę ſunt, ſi recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad eaſdem partes oppoſito æqualem; aut internos ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 143.A

Rectas duas lineas concurrere productas, ſi recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad eaſdem partes duobus rectis minores: quo modo a Proclo demonſtretur. 147.A

Rectas eaſdem duas concurrere,

qua ratione a nobis demonſtretur. 159. A

Rectarum linearum angulum conſtituentium diſtantia, ſi in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinẽ excedet. pag. 145. & 149. A

Recta linea ſecans vnam duarum parallelarum, producta ſecat & alteram. 146. A

Linea, cuius omnia puncta a recta linea, qua in eodem cum ea plano exiſtit, æqualiter diſtant, recta eſt. 150. A

Recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum mota, conſtituenſque in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet altero ſuo extremo lineam quoque rectam. 152. A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis. 154. A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ linea erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum. 155. A

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectũ, & cum altera ex eadem parte acutum; duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera vero parte ſemper inter ſe magis diſtabunt. pagina 156. A

Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad eaſdem partes æqualem, & internos duos ad eaſdẽ partes duobus rectis æquales. 162. A

Rectæ lineæ, eidem parallelę, & inter ſe ſunt parallelæ. pag. 163. A

Rectæ linea, eidem parallelæ, ſi inter ſe coeunt, conſtituunt vnã lineam rectam. 164. A

Rectæ lineæ, quæ parallelas ad eaſdem partes connectunt, æquales ſunt, & parallelæ. pag. 176. A

In figura æquilatera, & æquiangula parium laterũ, oppoſita qualibet duo latera ſunt parallela. pag. 189. A

Recta ſecans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri eſt parallela 201. A

Si fuerint duæ rectæ, ſeceturq; ipſarum altera in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorũ comprehenduntur, rectangulis. 254. A

Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturque amba in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis. 255.A

Si ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturque amba vtcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus lineis, vna cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo. 256.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunque, vel etiam in plura ſegmenta: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehendũtur, æqualia ſunt ei, quod a tota fit quadrato. 257.A

Si linea recta ſecetur in quotuis ſegmenta: quadratum, quod a tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis. 259.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prędicto ſegmento deſcribitur, quadrato. pag. 260.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunque: Quadratum totius æquale eſt quadratis ſegmentorum, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis. pag. 261.A

Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam: rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cum quadrato intermediæ ſectionũ, æquale eſt quadrato ex dimidia deſcripto. pag. 266.A

Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato rectę compoſitæ ex dimidia, & adiecta. pag. 269.A

Si recta linea ſecetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius ſegmenti, ſimul æqualia ſunt rectangulo ſub tota & illo ſegmento bis contento vna cum quadrato alterius ſegmenti. 273.A

Si recta linea inæqualiter ſecetur: Erunt quadrata ſegmentorum æqualia rectangulo bis ſub ſegmentis comprehenſo, vna cum quadrato exceſſus, quo maius ſegmentum ſuperat minus. pag. 274.A

Si recta linea ſecetur vtcunque; rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum quadrato reliqui ſegmenti, æquale eſt quadrato rectæ compoſitę ex tota, & priore ſegmento. pag. 275. A

VEL.

Si linea recta ſecetur vtcunque; eique in rectum adijciatur alia recta vni ſegmentorum ęqualis: Quadratum totius lineæ compoſitę æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub data linea, & adiecta ſiue dicto ſegmento, vna cum quadrato alterius ſegmenti. pag. 277. A

VEL.

Si linea recta ſecetur bifariam, eique in rectum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compoſitæ lineæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub linea compoſita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vna cum quadrato adiectæ. pagina. 278. A

Si recta linea ſecetur bifariam, & nõ bifariam: quadrata ſegmentorum inęqualium, ſimul dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia ſectionum. 279. A

Si recta linea ſecetur bifariam, adijciatur aũt ei in rectum quępiam recta linea: Quod a tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque ſimul quadrata dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex compoſita ex dimidia & adiecta. pag. 283. A

Perpendicularis linea ex puncto aliquo ad rectam quampiã cadens, eſt omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium breuiſſima. 321. A

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis vero laterum æqualium ſecta linea, habet vtrumque angulorum ad baſim duplũ reliqui. 470. A

Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. pag. 355. B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli ſub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. pagina. 381. B

Si recta linea non bifariam ſecetur; erit compoſitum ex quadratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis comprehẽſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem

rem ſuperat. 392. B
Si recta non bifariam ſecetur, & rurſus nō bifariam in alio puncto; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partiū minus inæqualium ſimul. 396. B
Rectę lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædā vero in ſublimi. 548. B
Si duæ rectę ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano pag. 549. B
Si duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. 550. B
Si recta linea rectis duabus ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. 551. B
Si recta linea rectis tribus ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano. 553. B
Si duæ rectæ eidem plano ad rectos ſint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. pag. 554. B
Si duæ ſint parallelæ rectæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet pūcta: Illa recta, quę ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. 555. B
Idem euenit, ſi rectæ non ſint parallelæ, in eodem tamen exiſtāt plano. 555. A
Si duæ ſint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 555. B
Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cū illa plano; hæ quoq; ſunt inter ſe parallelæ. 557. B
Dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes. 562. B
Item neque a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ perpendiculares demittentur. 562. B
Si recta plano cuipiamad rectos ſit angulos; & omnia, quæ per ipſum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. pag. 570. B
Si duo plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. pag. 572. B
Si planum ad planum rectū fuerit; & ab aliquo puncto eorū, quæ in vno ſunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit; In communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis pag. 616. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra ſphæram, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triãgula duo habẽt & baſes, & angulos æquales, ipſaq; æqualia ſunt, ſi duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosq; contentos habeant æquales. 82.A

Iſoſcelium triangulorum anguli tam ſupra baſem, quam infra, æquales ſunt. 85.A

Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales. 87.A

Triangulum, cuius duo anguli ſupra baſem æquales ſunt, habet duo latera angulis illis oppoſita æqualia. 88.A

Triangulum, cuius omnes anguli æquales ſunt, æquilaterum eſt. pag. 89.A

Triangulum, cuius duo anguli infra baſem æquales ſunt, Iſoſceles eſt. 90.A

Triangula duo habent vnũ angulum vni angulo æqualem, ſi duo latera vnum ambientia æqualia ſint duobus lateribus alterum ambientibus, & baſis baſi. 94.A

Triangula duo æqualia ſunt, & inter ſe æquiangula, ſi duo latera vnius ſint æqualia duobus lateribus

teribus alterius, & baſis baſi. pag. 96.A

Trianguli externus angulus maior eſt vtrouis interno oppoſito. 114.A

Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores ſunt. pag. 117.A

Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli ſunt acuti. 118.A

Trianguli æquilateri omnes anguli, & Iſoſceles duo ſupra baſem, acuti ſunt. 119.A

Triãguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 119.A

Scalenum habet omnes tres angulos inæquales. 119.A

Trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 120.A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans partiatur baſem inæqualiter; latera circa illum angulum inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, quod maiori ſegmento baſis adiacet. 121.A

Trianguli angulo inæqualibus lateribus comprehenſo bifariam ſecto, recta ſecans diuidit baſim inæqualiter, maiuſque ſegmentũ maiori lateri adiacet. 123.A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans diuidat baſem bifariam, latera circa eum angulum æqualia ſunt: Et ſi æqualia ſint, recta ſecans angulum bifariam, ſecat & baſim bifariam. 124.A

Trianguli duo latera quomodocunq; ſumpta, reliquo ſunt maiora. 125.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, angulum vero comprehenſum angulo maiorem, habent & baſem baſe maiorem. 132.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, baſem vero baſe maiorem, habent & angulum comprehenſum angulo maiorem. 135.A

Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, vnumque latus uni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſiue quod uni æqualiũ angulorum ſubtenditur; habent & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulũ reliquo angulo æqualem. pagina 138.A

Triangula habentia eaſdem conditiones, de quibus proxime dictũ eſt, ſunt inter ſe æqualia. 139.A

In triangulo æquilatero, vel Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidenſque vel angulum, vel baſem bifariã, perpendicularis eſt ad baſem; & ſi quidem angulum bifariã diuidat, ſecabit quoq; baſem bifariam. Si vero baſem ſecet bifariã, diuidet quoq; angulum bifariam.

Et contra, linea perpẽdicularis ad basem ducta diuidit & basem, & angulum bifariam. pag. 140. A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basem perpendicularis diuidit vel basin, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum ęqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur: si vero angulus bifariam secetur basis quoque diuidetur bifariã. pag. 141. A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi potest. 166. A

Triãguli externus angulus duobus internis oppositis est æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales sunt. pag. 169. B

Trianguli cuiuslibet omnes tres anguli simul æquales sunt tribus angulis simul cuiuscunque alterius trianguli. 174. A

Isoscelis duo anguli supra basim semirecti sunt, quando reliquus angulus rectus est. 175. A

Æquilateri trianguli quilibet angulus continet duas tertias partes vnius recti, vel vnã tertiam partem duorum rectorũ. 175. A

Æquilaterum triangulum [illegible] er pendiculari ex [illegible] gul[illegible] [illegible]sm ducta diuiditur in [illegible] ca ena orthogonia, &c. [illegible] A

Triangula super e dem b si cõstituta & in eisdẽ para lelis, sint æqualia. 195. A

Triangula, quorum uol tera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique angulum vero contentum angulo maiorem, quo pacto possint æqualia esse, & inæqualia. pagina 196. A

Triangula super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia. 198. A

Triangulum a recta ex angulo ad medium punctum lateris oppositi ducta secatur bifariam. pag. 199. A

Triangula æqualia super eadẽ basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis. 200. A

Triangula æqualia super ęqualibus basibus, & ad easdẽ partes constituta, in eisdem sunt parallelis. 202. A

Triangula æqualia inter easdem parallelas, si non habuerint eandem basim, super æquales bases sunt constituta. 203. A

Triangulorum inter easdem parallelas, quod maiorem habet basim, maius est: Et quod maius est, maiorem habet basim. pag. 203. A

Si

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutrã parallelarum bifariam, diuidit quoq; alterã bifariam. 207. A

In rectãgulis triangulis, quadratum lateris angulo recto oppoſiti, æquale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum. 229. A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. 236. A

Si ex angulo a duobus lateribus inæqualibus trianguli cuiuſuis comprehenſo ad baſim perpendicularis ducatur cadens intra triangulum; ſecabitur baſis inæqualiter, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis a perpendiculari ſecetur inæqualiter, erunt duo latera inæqualia, maiusque erit prope maiorem partem baſis. 240. A

In omni triangulo, parallelogramma quæcunque duorũ laterum æqualia ſunt parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera cõtinent, ad punctũ, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius produeantur. 241. A

Si quadratũ vnius lateris trianguli æquale ſit duobus quadratis reliquorũ duorum laterum; angulus ſub his comprehenſus, rectus erit. 242. B

Triangulorum comparationes varię, & quo modo fiant. 243. A

In amblygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti quanto maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum. 288. A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorũ acutorum ad latus oppoſitũ demiſſa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtuſi. 289. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit. pag. 290. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit, emiſſa hæc linea ad latus productũ perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus. 290. A

In oxygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo acuto oppoſiti, quanto minus ſit quadra-

dratis aliorum duorum laterum. 296. A
In quolibet triangulo perpendicularis in latus duobus acutis angulis adiacens ex oppoſito angulo demiſſa, cadit intra triangulum. 298. A
Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illi lateri oppoſitus, eſt acutus. 300. A
Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterũ, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hęc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus. 301. A
Si in triangulo a quouis angulo recta linea ducatur ſecans latus oppoſitum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, ſimul dupla duorum quadratorum, quorũ unum ex linea ducta, alterũ vero ex dimidiato latere deſcribitur. 310. A
Trianguli angulus, qui reliquis duobus eſt ęqualis, rectus eſt. 430. A
Iſoſceles trianguli, cuius vterq; angulorum ad baſim duplus eſt reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti, vterque vero ad baſim continet duas quintas duorum rectorum, vel quatuor quintas vnius recti. 469. A
Si recta ſecetur extrema ac media ratione; Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis uero laterum ęqualium data linea recta, habet vtrumque angulorum ad baſim duplũ reliqui. 470. A
Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad baſim; erit rectangulum ſub baſe, & alterutro baſis ſegmento, æquale quadrato lateris illi ſegmento adiacentis; Rectangulum vero ſub baſis ſegmẽtis æquale quadrato perpendicularis; Rectangulum denique ſub baſe, & perpendiculari æquale rectangulo ſub lateribus circa angulum rectum. 380. B
Triangulum omne in vno eſt plano. 549. B
Latus trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt perpẽdicularis ex vno angulo ad baſim demiſſæ. 718 & 789. B
Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad baſim oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad eandem baſim deducitur: ſeſquialtera vero ſemidiametri circuli triangulum circũſcribentis. 801. B

Qua-

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionẽ duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris. 21.B

Quadratũ rectæ mediæ proportionalis inter dimidiũ latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem; æquale eſt ipſi triangulo. 22.B

FINIS.

ERRATORVM POSTERIORVM DECEM Lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata.	Correctiones.
50	4	D, $\frac{7}{22}$.	D, $\frac{14}{22}$.
64	19	15.defin.	13.ſeptimi.
68	penult.	C, tertium.	in C, tertium.
80	7. a fine	ad F H,	ad E H.
145	12. a fine	D, F, I, M,	C, F, I, M,
147	3. a fine	G, ad D.	C, ad D.
163	11. a fine	I, & C	L, & C.
183	11. a fine	propoſ. 10. lib. A,	propoſ. 10. lib. 8. A,
208	7	medios B, G;	medios B, C;
212	10. a fine	64. per 1.	64. per 3.
219	3	A C, ad D E, ita C B.	AC, ad C B, ita D E,
219	4. a fine	C a B;	C B;
327	20	deleatur vox (aliter)	
768	9. a fine	PROBL. 4.	THEOR. 4.
806	5. a fine	æquilater	æqualiter

Emendentur quoque numeri paginarum in folijs I. X. Vu. Iii.

Præterea pro figura paginæ 626. deſcribatur figura paginæ 628.

REGESTVM.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii KK Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii KKK Lll Mmm Nnn Ooo.

a b c d e f.

Omnia ſunt integra folia.

ROMAE,
Apud Sanctium, & Soc.
M. D. LXXXIX.