ESSAI
DE MATHÉMATIQUES,

DÉDIÉ

A TRÉS-HAUT, TRÉS-PUISSANT,

ET TRÉS-EXCELLENT PRINCE,

MONSEIGNEUR

LE PRINCE DE BEAUVAU,

PRINCE DU St. EMPIRE ROMAIN,

GRAND D'ESPAGNE DE LA PREMIERE CLASSE,

LIEUTENANT-GÉNÉRAL DES ARMÉES DU ROI,

CHEVALIER DE SES ORDRES,

CAPITAINE DE SES GARDES DU CORPS,

ET COMMANDANT EN CHEF POUR SA MAJESTÉ EN LA PROVINCE DE LANGUEDOC.

L'Acte sera soutenu par Monsieur DE VILLELE, *le 22 Juillet 1768 dans le Collège Royal de Toulouse.*

A TOULOUSE,

De l'Impriméri̇e de JEAN-JACQUES ROBERT, Me. ez-Arts de la Faculté de Paris, Imprimeur du Collége Royal.

ESSAI DE MATHÉMATIQUES.

I.

LES Mathématiques sont une science qui a pour objet la grandeur en général. Qu'entend-t-on par grandeur ? Qu'est-ce que grandeur discrete & continue ? Comment divise-t-on les Mathématiques ? Quelles sont les différentes parties des Mathématiques pures ? Quels sont les principaux axiomes qui servent de fondement à toutes les parties des Mathématiques. On répondra à toutes ces questions.

II.

DE L'ARITHMETIQUE.

L'Arithtmétique est la science des nombres. Les regles qu'elle donne sont fondées sur une supposition arbitraire qui fixe la valeur locale des chiffres, cette valeur croît en raison décuple, en allant de droite à gauche, & décroît en raison sous-décuple, en allant de gauche à droite ; d'où il suit que les chiffres ont deux valeurs, l'une qu'on peut appeller *absolue*, l'autre qu'on nomme *relative*. Les nombres sont entiers ou fractionnaires, les uns & les autres peuvent être soumis aux mêmes opérations; mais la Méthode d'opérer est differente ; les grandeurs comparées ensemble produisent les raisons, proportions, progressions, permutations & combinaisons. Les progressions géométriques comparées avec les progressions arithmétiques produisent les logarithmes, nombres artificiels, par le moyen desquels on peut changer toute espece de multiplications en additions, & toute espece de divisions en soustractions. On détaillera les regles qu'il faut suivre pour faire l'addition, la soustraction, la multiplication & la diviſion, ſoit que les nombres ſoient complexes ou incomplexes. On démontrera qu'on ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient. On expoſera auſſi le calcul du toiſé des ſurfaces, du toiſé des ſolides & du toiſé des bois qu'on veut reduire en ſolives.

III.

DES FRACTIONS.

Les fractions ſont des quantités qui expriment le rapport d'une partie à ſon tout, elles ſont ſuſceptibles de toutes les opérations qu'on fait ſubir aux nombres entiers; mais pour pouvoir être aſſujetties au calcul, elles ont beſoin d'être préparées par des opérations qui leur ſont propres. Ces opérations ſont différentes transformations qu'on leur fait ſubir, ſans en changer la valeur; on les appelle reductions. Elles conſiſtent, 1°. A reduire une fraction en une autre fraction, ou un entier en fraction. 2°. A reduire pluſieurs fractions au même dénominateur. 3°. A reduire une fraction aux entiers qu'elle contient. 4°. A reduire une fraction à ſa plus ſimple expreſſion. 5°. A reduire une fraction ordinaire en fraction décimale. On prouvera, 1°. Que de deux fractions qui ont le même numerateur; la plus grande eſt celle qui a le plus petit dénominateur, & que de deux fractions qui ont le même dénominateur, la plus grande eſt celle qui a le plus grand numerateur. 2°. Que les fractions ſont en raiſon directe de leurs numerateurs, & en raiſon inverſe de leurs dénominateurs.

IV.

DE L'ALGEBRE.

L'Algébre eſt la ſcience des grandeurs exprimées par des lettres. Qu'entend-on par quantité algébrique? Qu'eſt-ce qu'une quantité complexe & incomplexe? Qu'appelle-t-on termes algébriques? Quand le terme eſt-il poſitif ou négatif? Qu'eſt-ce que le coefficient d'un terme & l'expoſant d'une lettre? Quelle différence y a-t-il entre l'un & l'autre. On pourra faire toutes ces queſtions. On fait ſur les lettres les mêmes opérations que ſur les nombres. L'addition ſe fait en écrivant les quantités toutes de ſuite avec leurs mêmes ſignes. Ainſi $a, + b = a + b$; $a, - b = a - b$: dans la ſouſtractions on change les ſignes de la quantité à ſouſtraire. $a -, + b = a - b$: $a -, - b = a + b$. Dans la multiplication le produit des ſignes ſemblables eſt poſitif; ſi les ſignes ſont diſſemblables, le produit eſt négatif. Ainſi $+ \times +, - \times - = +, + \times -, - \times + = -$. Les coefficiens ſe multiplient, les lettres s'écrivent ſans interpoſition de ſignes. Dans la diviſion le quotient eſt poſitif, ſi les ſignes ſont ſemblables; il eſt négatif, ſi les ſignes ſont différens. On fait la diviſion des coefficients, on efface les lettres communes, ou, ce qui revient au même on ſouſtrait les expoſans.

V.

DE L'EXALTATION AUX PUISSANCES ET DE L'EXTRACTION DES RACINES.

Après avoir exposé ce qu'on entend par premiere, seconde, &c. puissance d'une quantité, on fera voir quels sont les différens produits qui entrent dans la composition d'un binome ou d'un trinome élevé à son quarré ou à son cube. On donnera & on démontrera la méthode d'extraire la racine quarrée & la racine cubique des quantités numeriques ou algébriques, entieres ou fractionnaires. Lorsque la racine n'est pas exacte, on peut par le moyen des parties décimales en approcher si près qu'on voudra.

VI.

DE L'ANALISE.

L'Analise est l'art de résoudre par le calcul algébrique tous les problemes qu'on peut proposer sur les grandeurs. Résoudre un probleme, c'est trouver la valeur de chacune des quantités inconnues qu'on a demandées ; ou c'est faire voir qu'il est impossible de la trouver, ce qui arrive, lorsque les rapports donnés impliquent quelques contradictions. Pour y parvenir, il faut faire successivement sur chaque équation diverses opérations selon l'état où se trouvent les inconnues ; on employe la transposition, si l'inconnue fait somme ou différence avec des quantités connues ; la division, la multiplicatition, l'extraction des racines, si l'inconnue est engagée ou par voye de multiplication, ou par voye de division, ou par voye d'exaltation. On employe la substitution, pour faire évanouir successivement une ou plusieurs inconnues qui se trouvent dans un probleme exprimé par plusieurs équations. Outre les problemes du premier & du second dégré contenues dans les Leçons élementaires de Mr. l'Abbé de la Caille, on donnera la solution des deux suivants, 1°. On demanda au Roi en 1749 quel age il avoit, il répondit : si vous ajoutez ensemble les neuf dixiémes du temps qui s'est écoulé depuis le commencement du siécle jusqu'à ma naissance, & le tiers de celui qui s'écoulera depuis ma naissance jusqu'à la fin du siécle, vous aurez mon age ; on demande quel age il avoit & en quelle année il est né. 2°. Un Intendant a un certain nombre d'œufs x, trois Cuisiniers passent successivement, il donne au premier la moitié de ses œufs & la moitié d'un œuf, au second la moitié de son reste & la moitié d'un œuf, au troisiéme la moitié de son reste & la moitié d'un œuf, le tout, sans rien casser, il lui en reste 7 ; on demande combien il avoit d'œufs.

VII.

DES RAISONS, PROPORTIONS ET PROGRESSIONS.

On entend par raison ou rapport la comparaison de deux grandeurs. Si on compare deux grandeurs, pour découvrir de combien l'une surpasse l'autre, le rapport est arithmétique ; il est géométrique, si on compare les deux grandeurs, pour sçavoir combien de fois l'une est contenue dans l'autre. Tout rapport arithmétique peut être représenté par cette formule $a . a \pm d$, c'est-à-dire, que le conséquent de la raison est toujours égal à l'antécedent, plus ou moins la différence ; d'où il suit qu'une proportion arithmétique, qui est l'égalité de deux rapports arithmétiques, peut être représentée par cette formule générale $a . a \pm d : b . b \pm d$. Dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens ou au double du moyen terme, si la proportion est continue ; ainsi il sera toujours facile de trouver celui des quatre termes qui manquera dans la proportion. Toute progression arithmétique $= a . a \pm d . a . \pm 2d . a \pm 3d \ldots$ Dans toute progression arithmétique la somme des termes également éloignés des extrêmes est toujours constante ; c'est-à-dire, elle est égale à la somme des extrêmes, ou à la somme de deux autres termes quelconques également éloignés des extrêmes, ou au double du terme moyen, si le nombre des termes de la progression est impair. Un terme quelconque est égal à la somme du premier terme & du produit de la différence commune par le nombre des termes précédens. $\omega = a + dn - d$. La différence entre le premier & le dernier terme est egale au produit de la différence commune par le nombre de tous les termes de la progression moins un. $\omega - a = dn - d$. Enfin la somme de tous les termes de la progression est égale à la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes $s = \frac{an + \omega n}{2}$

VIII.

Tout rapport géométrique peut être représenté par cette formule $a : aq$, soit que le quotient resulte de la division du consequent par l'antécedent, soit qu'il resulte de la division de l'antécedent par le consequent. Pour opérer dans un ordre fixe, on est convenu de diviser l'antécédent par le consequent. Si l'on multiplie, ou si l'on divise les deux termes d'un rapport par une même quantité, la valeur de la raison ne change pas : d'où il suit que deux quantités quelconques sont en même raison que leurs doubles, leurs triples .... leurs moitiés & leurs tiers. Toute proportion géométrique $= a : aq :: b : bq$. Le produit des extrêmes de la proportion est toujours égal au produit des moyens ou au quarré du moyen proportionnel, si la proportion est continue ; il sera donc toujours facile de trouver celui des quatre termes qui manquera dans la proportion. En faisant cette opération, on sera ce qu'on appelle une regle de trois ; elle peut être directe ou inverse, simple ou composée. Les principes que l'on vient d'établir servent aussi de fondement aux regles de compagnie & aux regles de fausses positions. Les problemes qu'on resout par la regle d'alliage sont déterminés ou indéterminés. On expliquera la maniere d'opérer dans les deux cas. On démontrera que dans une suite de termes proportionnels la somme des antécedens est à la somme des conséquens, comme un antécedent quelconque est à son consequent.

IX.

Toute progression géométrique $= \div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$. Le produit de deux termes quelconques également éloignés des extremes est égal au produit des deux extrêmes, ou au produit de deux termes quelconques également éloignés des extrêmes, ou au quarré du terme moyen, si le nombre des termes est impair. Un terme quelconque est égal au produit du premier par le quotient élevé à une puissance du même ordre que le nombre des termes précedents. $m = aq^{n-1}$. On aura la somme de tous les termes d'une progression croissante à l'infini, en divisant le quotient de cette raison par un nombre plus petit qu'elle d'une unité, & en multipliant le quotient de cette division par le premier terme de la progression. On trouvera la somme d'un nombre quelconque de termes pris de suite dans une progression, en divisant le quotient de la progression par un nombre plus petit qu'elle d'une unité, en multipliant le quotient par la différence du plus grand terme au plus petit, & en ajoutant le plus petit terme au produit de cette multiplication. On pourra faire quelques questions sur les permutations & sur les combinaisons. On répondra aussi sur les logarithmes.

GÉOMÉTRIE.

LA Géométrie a pour objet l'étendue, dont elle considere trois espéces, la ligne, la surface, le solide. On la divise en Géométrie théorique, & en Géométrie pratique.

GÉOMÉTRIE THÉORIQUE.

I.

Positions des lignes droites entr'elles.

Deux lignes droites sont, ou perpendiculaires, ou obliques, ou paralleles l'une à l'autre. Deux angles de suite valent ensemble deux angles droits. Les angles opposés au sommet sont égaux. Si quatre angles rectilignes décrits dans un même plan avec un sommet commun, sont tels que les opposés au sommet soient égaux, les deux lignes qui forment ces quatre angles seront droites. Une droite qui a deux de ses points également éloignés des deux bouts d'une autre droite qu'elle rencontre, est perpendiculaire sur le milieu de cette seconde droite. La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes, qu'on peut mener d'un point à une droite; & de deux obliques qui partent de ce même point, celle qui s'écarte le plus de la perpendiculaire est la plus longue. D'un point donné, l'on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une ligne; dans un même plan une droite qui coupe deux paralleles, fait avec elles: 1°. Des angles internes externes qui sont égaux: 2°. Des angles alternes,

GÉOMÉTRIE PRATIQUE.

I.

1. D'un point donné hors d'une droite ou sur une droite, lui mener une perpendiculaire, sur le papier ou sur le terrein.

2. Diviser une ligne droite en deux parties égales.

3. Par un point donné sur le papier ou sur le terrain, mener une parallele à une droite donnée de position.

ſoit intérieurs, ſoit extérieurs, qui ſont auſſi égaux : 3°. Des angles internes, ou des angles externes, qui, pris du même côté de la ſécante, valent deux angles droits. Et réciproquement ; deux droites coupées par une troiſiéme, ſont paralleles, ſi elles ont une des propriétés qu'on vient d'énoncer.

II.

Lignes relatives au cercle.

Les lignes droites qui ont rapport au cercle, ſont des ſécantes ou des tangentes. Parmi les premieres on conſidére ſurtout les cordes. Les propriétés de toutes ces lignes combinées avec le cercle, ſervent à faire connoitre la meſure des angles. De toutes les droites qu'on peut mener d'un point qui n'eſt pas le centre, à la circonférence d'un cercle, la plus longue eſt celle qui paſſe par le centre, & la plus courte eſt celle qui y paſſeroit étant prolongée. Les autres droites, tirées du même point à la circonférence, ſont plus ou moins longues, ſelon qu'elles approchent plus ou moins du bout de celle qui paſſe par le centre. Dans un même cercle, des cordes égales ont des arcs égaux, & des arcs égaux ont des cordes égales. Dans un même demi cercle, des cordes plus ou moins grandes tendent des arcs plus ou moins grands ; & réciproquement. Une perpendiculaire menée du centre ſur une corde, coupe la corde & ſon arc en deux parties égales. Une droite abaiſſée du centre ſur le milieu de l'arc, eſt perpendiculaire à cette corde. Deux droites paralleles qui touchent ou qui coupent la circonférence d'un cercle, comprennent deux arcs égaux. Une tangente ne rencontre la circonférence qu'en un point. Une droite perpendiculaire à l'extrémité du rayon, eſt tangente du cercle. Deux circonférences qui ſe coupent ne ſe rencontrent qu'en deux points ; ce qui eſt réciproque. Les centres des deux cercles qui ſe touchent, & leur point de contact, ſont trois points en ligne droite. Lorſqu'un angle eſt formé par deux tangentes d'un même cercle, la droite tirée par le ſommet de l'angle & par le centre du cercle diviſe cet angle en deux parties égales.

II.

4. Diviſer un arc ou un angle en deux parties égales

5. Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc propoſé.

6. Faire paſſer la circonférence d'un cercle par trois points donnés.

7. Déterminer le point où deux cercles ſe touchent.

8. Par un point donné ſur la circonférence ; mener une tangente au cercle.

III.

Meſure des angles.

Les angles peuvent avoir quatre poſitions différentes à l'égard d'un même cercle, 1°. Si l'angle a le ſommet au centre, il eſt meſuré par l'arc intercepté par ſes côtés 2°. Si le ſommet eſt à la circonférence, l'angle a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, lorſ-

III.

9. D'un point donné hors du cercle lui mener une ou deux tangentes.

qu'il est formé par deux cordes ou par une corde & par une tangente. Mais si l'un des côtés étoit une sécante extérieure ; c'est-à-dire, si l'un des côtés prolongé au délà du sommet, pouvoit encore rencontrer la circonférence, l'angle auroit pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc soutenu par le prolongement de la sécante. 3°. Si le sommet est dans l'intérieur du cercle, l'angle est mesuré par la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, plus la moitié de l'arc compris entre ses côtés prolongés. 4°. Un angle qui a le sommet hors du cercle, a pour mesure la moitié de la différence des deux arcs, concave & convexe, que ses côtés comprennent.

10. Sur une corde de longueur donnée, d'écrire sans compas ni cordeau des arcs d'un nombre déterminé de degrés.

IV.

Lignes qui renferment un espace.

Les droites qui renferment un espace composent une figure rectiligne ou un poligone. Les figures prennent différens noms qui désignent le nombre de leurs côtés ou de leurs angles. Dans un triangle quelconque, 1°. La somme des trois angles est égale à deux angles droits. 2°. L'angle extérieur vaut autant que les deux intérieurs opposés. 3°. Un plus grand côté est opposé à un plus grand angle, & un plus grand angle à un plus grand côté. Deux triangles sont parfaitement égaux, 1°. Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun. 2°. Lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. 3°. Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Dans un quadrilataire, 1°. Si deux côtés sont égaux & paralleles, les deux autres le sont aussi. 2°. Si les côtés opposés sont paralleles, ils sont égaux. 3°. Si les côtés opposés sont égaux, ils sont paralleles. Un parallelogramme est divisé par sa diagonale en deux triangles parfaitement égaux. Dans un polygone quelconque, 1°. La somme des angles intérieurs vaut autant de fois deux angles droits, moins quatre, que le polygone a de côtés. 2°. La somme des angles extérieurs vaut quatre angles droits. Le côté de l'exagone régulier est égal au rayon du cercle dans lequel il est inscrit.

IV.

11. Faire un triangle égal à un triangle donné, ou faire un triangle avec trois lignes données.

12. Trouver l'angle au centre & l'angle à la circonférence d'un polygone regulier.

V.

Théorie des rapports en géneral, démontrée géométriquement.

Deux parallélogrammes ou deux triangles sont entr'eux comme leurs bases, quand ils ont même hauteur: ils sont entr'eux comme leurs hauteurs, quand ils ont même base : ils sont égaux quand ils ont un angle égal entre deux côtés réciproque : d'où il suit que dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Mais si le premier terme est trop grand ou trop petit, pour que les quatre termes soient en proportion, le produit des extrêmes sera plus grand ou plus petit que le produit des moyens. La réciproque a lieu dans tous ces différens cas. L'on expliquera les différentes régles qu'on peut suivre pour changer une proportion en d'autres proportions, & la maniere de conclure une proportion de plusieurs autres dont les rapports sont différens. On prouvera, par exemple, qu'on peut, sans détruire la proportion, faire des changemens dans ses termes, en ajoutant ou en soustrayant, en multipliant ou en divisant, en formant des puissances ou en extrayant des racines, &c. Il sera aisé d'appliquer les mêmes régles aux rapports inégaux. Dans une progression géométrique, 1°. Une puissance quelconque du premier terme est à une puissance semblable du second, comme le premier terme est à celui dont le numéro est plus grand d'une unité, que le dégré de la puissance où les deux premiers termes sont élevés. 2°. La différence des deux premiers termes est au premier, comme la difference du premier terme au dernier est à la somme de tous les termes qui précedent le dernier. Cette derniere proposition fournit le moyen de sommer les progressions finies, & les progressions décroissantes à l'infini.

VI.

Lignes proportionnelles

Si l'on coupe un triangle par une ou plusieurs droites paralleles à un côté, les deux autres côtés seront coupés proportionellement, & les segmens correspondans seront aussi proportionnels; & réciproquement. Une droite qui divise un angle en deux parties égales, partage le côté opposé à cet angle en deux segmens proportionnels aux côtés du même angle. Quatre lignes qui coupent proportionnellement les côtés d'un quadrilataire, forment un parallélogramme. Deux triangles sont semblables, 1°. Lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun; 2°. Lorsqu'ils ont les côtés ou paralleles ou perpendiculaires chacun à chacun; 3°. Lorsqu'ils ont un angle égal entre deux côtés proportionnels; 4°. Lorsqu'ils ont les trois côtés proportionnels. Si des extrémités & de différens points de deux paralleles on tire des droites indéfinies qui se rencontrent en un même point, ces paralleles seront divisées en parties proportionelles. Lorsque de deux points d'une droite partent deux paralleles inégales &

VI.

13. Diviser une ou plusieurs droites données en parties proportionelles à celles d'une autre droite.

14. Trouver une quatrieme ou une troisieme proportionelle à trois ou à deux lignes données.

15 Par un point donné mener une droite qui aille au point de concours de deux autres droites.

16. Faire un polygone semblable à un polygone donné.

& deux autres paralleles proportionnelles aux deux premieres, les deux droites menées par les extrêmités de ces lignes qui sont paralleles deux à deux vont concourir en un même point avec la premiere droite. Les droites tirées des angles correspondans de deux polygones semblables aux autres angles, divisent ces polygones en triangles semblables chacun à chacun.

VII.

SUITE. *Points semblablement placés.*

Les différentes méthodes de lever des plans sont fondées sur la théorie des points *semblablement placés*. Deux points sont semblablement placés par rapport à deux droites, lorsque les distances de ces points aux extrêmités de ces droites sont proportionnelles à ces deux droites. D'où l'on conclut que les sommets de deux angles correspondans de deux polygones semblables, sont semblablement placés par rapport à ces polygones. Deux droites terminées par des points semblablement placés à l'égard de deux autres lignes droites, sont proportionelles à ces deux autres lignes. Si trois points sont placés à l'égard d'une droite comme trois autres points à l'égard d'une autre droite, le triangle qui aura les angles aux trois premiers points sera semblable au triangle qui aura ses angles aux trois derniers. Lorsque deux points sont semblablement placés à l'égard de deux droites terminées par des points semblablement Placés à l'égard de deux autres droites; les deux premiers points sont aussi semblablement placés à l'égard des deux dernieres droites. Si l'on inscrit ou si l'on circonscrit à des cercles deux polygones semblables, les centres de ces deux cercles seront des points semblablement placés dans ces deux polygones. D'où l'on conclura que les centres de deux cercles sont semblablement placés dans ces cercles; & encore, que les rayons de ces deux cercles sont des lignes homologues par rapport à ces cercles.... les contours de deux polygones semblables sont entr'eux comme leurs lignes homologues. D'où il suit que les circonférences de deux cercles sont entr'elles comme leurs rayons.

VII.

17. Lever le plan d'un terrein de peu d'étendue.

18, Faire des cartes topographiques.

19. Représenter sur une carte le cours des Rivieres, les sinuosités des chemins, &c.

VIII.

Lignes coupées selon différens rapports.

On peut couper des lignes, 1°. En parties réciproquement proportionelles entr'elles ou à leurs totalités: 2°. En moyenne & extrême raison: 3°. En trois segmens dont l'un soit moyen proportionel entre les deux autres. Examinons ses Propriétés & les usages de ces différentes sections. Les parties de deux cordes qui se coupent

VIII.

20. Trouver entre deux droites une moyenne proportionnelle qui soit l'ordonnée, la tangente, ou la corde d'un cercle.

dans un cercle, sont réciproquement proportionnelles. D'où il suit qu'une ordonnée au diametre du cercle est moyenne proportionelle entre les deux parties de ce diametre. Si d'un point placé au dehors d'un cercle on tire deux droites qui se terminent à sa circonférence concave, les sécantes entieres seront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures au cercle : d'où il suit que si l'une de ces deux droites est tangente, elle sera moyenne proportionnelle entre la sécante entiere & sa partie extérieure. Dans un triangle rectangle, la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur le côté opposé coupe la base de telle sorte, que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entiere & le segment contigu à ce côté. Le côté du décagone régulier inscrit dans un cercle, est égal à la plus grande partie du rayon coupé en moyenne & extrême raison. Un pentagone & un décagone réguliers, étant inscrits dans un même cercle, la somme faite du quarré du rayon & du quarré du côté du décagone, sera égale au quarré du côté du pentagone ; d'où il suit que le côté du pentagone régulier est égal à l'hypoténuse d'un triangle qui a le rayon & le côté du décagone pour ces deux autres côtés. Deux diagonales d'un pentagone régulier se coupent mutuellement en moyenne & extrême raison.... On expliquera le moyen de couper une ligne en trois segmens dont l'un soit moyen proportionnel entre les deux autres, trois points étant donnés & arrangés comme on voudra dans cette droite. Les diagonales d'un quadrilataire inscrit dans un cercle, se coupent l'une l'autre en deux parties proportionnelles aux produits des côtés contigus, adjacens à chacune de ces diagonales.

21. Faire un quarré égal à une figure rectiligne quelconque.

22. Transformer un polygone quelconque en un triangle semblable à un triangle donné.

23. Convertir une figure rectiligne quelconque en un polygone qui soit semblable à un polygone donné.

24. Couper une droite en moyenne & extrême raison.

25. Deux droites indéfinies qui se coupent en quelques points, étant données de position, mener par un point donné une troisiéme droite qui comprenne avec les deux premieres un triangle égal à un triangle donné.

26. Retrancher une figure rectiligne d'une autre, par le moyen d'une ligne tirée d'un point donné au dedans ou au dehors de cette figure.

I X.

Mesure des surfaces.

Deux parallelogrammes ou deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont même base & qu'ils sont compris entre les mêmes paralleles. La surface d'un parallelogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur : celle d'un triangle vaut donc la moitié de ce produit. La surface d'un polygone régulier quelconque, est égale au produit de la moitié de son contour par son apothême : la surface d'un cercle vaut celle d'un triangle qui auroit pour base une droite égale à la circonférence, & pour hauteur le rayon de ce cercle. On trouve la surface d'un polygone irrégulier en le réduisant en triangles, dont on calcule & dont on additionne les aires.

IX.

27. Trouver l'aire d'un polygone régulier ou irrégulier.

X.

Rapport des surfaces.

Le quarré de la somme de deux lignes contient les quarrés de ces deux lignes, plus deux produits de l'une par l'autre: le quarré de la différence de deux lignes contient les quarrés de ces deux lignes moins deux produits de l'une par l'autre. La différence des deux quarrés est égale au produit fait de la somme & de la différence de leurs côtés ou de leurs racines. Les figures semblables sont proportionnelles aux quarrés de leurs lignes homologues; les cercles sont donc proportionels aux quarrés de leurs rayons. Si trois figures semblables, triangles, quarrés, polygones ou cercles, forment par leurs lignes homologues un triangle rectangle, & qu'on abaisse une perpendiculaire de l'angle droit sur l'hypothénuse; 1°. La figure qui occupera l'hypothénuse sera égale à la somme des deux autres qui occuperont les côtés de l'angle droit. 2°. Ces trois figures seront proportionnelles à l'hypothénuse entiere, & aux deux segmens correspondans. Dans tout triangle obtusangle, si l'on abaisse une perpendiculaire d'un angle aigu quelconque sur le prolongement du côté opposé à cet angle, le quarré du côté opposé à l'angle obtus sera égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, plus deux produits du côté sur lequel on a abaissé la perpendiculaire, multiplié par son prolongement jusqu'à cette perpendiculaire. Dans tout triangle où la perpendiculaire menée du sommet sur la base, tombe dans le triangle, le quarré du côté opposé à un angle aigu quelconque est égal à la somme des quarrés de la base & de l'autre côté, moins deux produits de l'entiere base par le segment contigu à ce dernier côté. Dans tout parallelogramme les deux quarrés des diagonales valent ensemble les quarrés des quatre côtés. On aura l'aire d'un triangle quelconque, en prenant la racine quarrée du produit de quatre quantités, dont la premiere sera égale à la moitié de la somme des trois côtés, & dont les trois autres seront faites de la même demi-somme dont on retranchera séparement les trois côtés de ce triangle. Le produit des deux diagonales d'un quadrilataire inscrit dans un cercle, est égal à la somme des produits des côtés opposés.

XI.

Section des Plans.

Les sections des plans ont plusieurs propriétés qui servent à la théorie des solides. Une droite menée dans un plan ne peut pas être en partie sur ce plan & en partie

X

28. Trouver des lignes droites proportionnelles à des figures semblables dont on connoît quelques lignes homologues.

29. Faire l'addition, la soustraction, la multiplication, la division des surfaces des figures semblables; & faire en sorte que la figure résultante soit semblable à celles qui sont proposées.

30. Les côtés d'un triangle étant donnés, trouver sa surface.

élevée au dessus ou abaissée au dessous. Deux droites qui se coupent sont dans un même plan. La section de deux plans est une ligne droite. D'un point pris dans un plan ou hors d'un plan on ne peut élever ou abaisser qu'une droite perpendiculaire à ce plan, & l'on sera sûr qu'une droite est telle, si elle est perpendiculaire à deux droites qui se croisent à son pied dans ce plan. Un angle plan, c'est-à-dire formé par deux plans qui se rencontrent, à même mesure que l'angle rectiligne compris entre deux droites, tirées dans ces plans perpendiculairement à leur section commune par un même point de cette section. Si un plan passe par une droite perpendiculaire à un autre plan, on conclura que le premier plan est perpendiculaire au second. Deux perpendiculaires à un même plan sont paralleles. De deux paralleles, si l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre le sera aussi. Deux droites paralleles à un troisiéme sont paralleles entr'elles, lors même qu'elles ne sont pas toutes trois dans un même plan. Si les côtés d'un angle sont paralleles aux côtés d'un autre angle, ces deux angles seront égaux, quoiqu'ils soient sur differens plans. Les intersections de deux plans paralleles avec un troisiéme plan sont des droites paralleles.

XII.

Prismes & Cylindres.

Parmi les différentes especes de solides, on considere principalement le prisme, la pyramide, la sphere. Le cylindre est un prisme. Le cône est une pyramide. La surface latérale ou convexe d'un prisme ou d'un cylindre est égale au produit de la droite qu'on appelle *directrice*, multipliée par le contour d'une section perpendiculaire à cette directrice. Deux prismes qui ont bases égales & hauteurs égales sont égaux. Le solide d'un prisme est égal au produit de la surface de la base par la hauteur.

XIII.

Pyramides & Cônes.

Une pyramide est réguliere ou irréguliere, entiere ou tronquée. On aura la surface latérale ou convexe d'une pyramide ou d'un cône réguliers, en multipliant la moitié du contour de la base par l'apothême de la pyramide ou par le côté du cône.... Si la pyramide est irréguliere, on cherchera séparément l'aire de chaque face triangulaire, & on en fera la somme. Si l'on coupe une pyramide par un plan paralleleà la base; 1°, Toutes les droites tirées du sommet à la base seront coupées proportionnellement par ce plan; 2°. La section sera une figure

XII.

31. Mesurer la surface & la solidité d'un Prisme ou d'un Cylindre.

XIII

32. Mesurer la surface d'une Pyramide réguliere ou irréguliere, entiere ou tronquée; d'un cône entier ou tronqué.

33. La hauteur d'un tronc de Pyramide ou de Cône, étant donnée avec deux côtés homologues, ou deux rayons

figure semblable à la base : 3°. Les côtés correspondans de la base & de la section, leurs lignes homologues, leurs contours, seront proportionnels à une droite quelconque tirée du sommet à la base, & à la portion de cette droite qui s'étend depuis le sommet jusqu'à la section : 4°. Les aires de la base & de la section seront proportionnelles aux quarrés de ces deux dernieres droites. On aura la surface latérale ou convexe d'un tronc de pyramide ou de cône réguliers à bases paralleles, en multipliant la moitié de la somme des contours de ses bases opposées, par une droite menée par les milieux de deux côtés correspondans ou par les extrémités de deux rayons paralleles des deux bases. Deux corps ou deux troncs pyramidaux ont la même solidité, s'ils ont des hauteurs égales, & des bases égales semblables ou non. Le solide d'une pyramide ou d'un cône est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur. Un tronc pyramidal à bases paralleles vaut le tiers du produit de la multiplication de la hauteur de ce tronc, par une base composée de l'addition des deux bases opposées de ce tronc, & d'une moyenne proportionnelle entre ces deux bases. On trouvera cette moyenne proportionnelle, après avoir déterminé l'aire de l'une des bases du tronc, par cette simple proportion : une ligne de la base dont l'aire est trouvée, est à la ligne homologue de l'autre base; comme l'aire de la premiere base est à l'aire de la moyenne proportionelle cherchée.

paralleles des deux bases du tronc, trouver la hauteur de la Pyramide ou du Cône entiers.

34. Mesurer la solidité d'un corps pyramidal entier ou tronqué.

XIV.

SPHERE. *Solides semblables.*

La surface d'une Sphere est égale à la surface convexe d'un cylindre de même diametre & de même hauteur qu'elle; elle est donc quatre fois plus grande que l'aire d'un grand cercle de la Sphere. D'où il suit encore que la surface totale du cylindre est à la surface de la sphere inscrite comme 3 est à 2. On aura la surface d'un tronçon sphérique compris entre deux plans paralleles, en multipliant la circonférence du grand cercle par la hauteur du tronçon; si ce segment est ce qu'on appelle une *calotte*, sa surface sphérique sera aussi égale à celle du cercle qui sert de base à la calotte, plus celle du cercle qui auroit la fleche de la calotte pour rayon. Une sphere est égale à un cone dont la base seroit la surface de la sphere, & dont la hauteur seroit le rayon : elle vaut aussi les deux tiers du cylindre circonscrit. On voit par là que la surface totale du cylindre est à la surface de la sphere comme le cylindre est à la sphere. Un secteur sphérique vaut les deux tiers d'un cylindre de même rayon que la

XIV.

35. Le rayon d'une Sphere étant connu, trouver la surface ou la solidité de la Sphere entiere, d'un secteur, d'un segment.

ſphere & de même hauteur que la calotte de ce ſecteur : il eſt encore égal à la ſomme de deux cônes qui auroient tous deux pour hauteur le rayon de la ſphere, dont l'un auroit la fleche de la calotte du ſecteur pour rayon de ſa baſe, & dont l'autre auroit la même baſe que cette calotte. Le ſolide d'une calotte ſphérique eſt égal à un cylindre qui auroit pour rayon la fleche de cette calotte, & qui auroit pour hauteur le rayon de la ſphere moins le tiers de la fleche. Les ſurfaces des ſolides ſemblables ſont proportionnelles aux quarrés de leurs lignes homologues : mais leurs ſolidités ſont proportionnelles aux cubes de ces lignes. Les ſurfaces & les ſolidités de deux ſpheres ont ces mêmes rapports avec leurs rayons ou avec leurs diametres.

TRIGONOMÉTRIE PLANE.

XV.

Conſtruction des tables des ſinus, &c.

On diſtingue ſix choſes dans un triangle rectiligne, trois côtés & trois angles. Trois de ces choſes étant données, la trigonométrie plane enſeigne à trouver les trois autres, ou du moins à déterminer les rapports qui ſont entr'elles. On a beſoin pour cela de connoitre le rapport qu'il y a entre une corde & ſon arc. Pour faciliter les opérations de pratique, on a calculé & renfermé dans des tables les demi-cordes, qu'on appelle *Sinus*, les tangentes & les ſécantes de tous les arcs du demi-cercle. Comme la conſtruction de ces tables eſt une partie eſſentielle de la géométrie pratique, on ne peut ſe diſpenſer d'expoſer ici les principes qui lui ſervent de fondement. Le ſinus d'un arc étant connu, l'on cherche & l'on trouve aiſément ſon co-ſinus, ſon ſinus verſe, & le ſinus droit de la moitié de cet arc ; on trouve auſſi le ſinus d'un arc double par cette proportion : le rayon eſt au co-ſinus d'un arc quelconque, comme le double du ſinus du même arc eſt au ſinus d'un arc double. Ayant pris de ſuite ſur la circonférence d'un cercle des parties égales, en ſorte que les arcs compoſent une progreſſion arithmétique dont la différence ſoit égale au premier arc ; ſi l'on tire les ſinus de ces arcs, le premier de ces ſinus ſera au ſecond, comme le ſecond eſt au troiſiéme plus le premier ; comme le troiſiéme eſt au quatriéme plus le ſecond, & ainſi des autres. Enfin les ſinus de deux arcs étant connus, on cherche & l'on trouve le ſinus de la ſomme & celui de la différence de ces deux arcs. Ces principes ſuffiſent pour conſtruire aiſément des tables

XV.

36. Conſtruire une table des Sinus, des Tangentes, des Sécantes de tous les arcs du demi cercle.

des sinus: les sinus & les co-sinus de tous les arcs jusqu'à 90 dégrés étant connus, on trouvera par de simples proportions les tangentes & les co-tangentes, les sécantes & co-sécantes de tous les arcs.

XVI.

Usages des tables des sinus, &c.

La Trigonométrie donne des regles pour la résolution des triangles, dont les unes sont propres aux triangles rectangles, & dont les autres sont communes à tous les triangles rectilignes. Lorsqu'un triangle est rectangle, on peut regarder son hypoténuse ou l'un de ses côtés comme le rayon d'un cercle : dans le premier cas, chaque côté de l'angle droit sera le sinus de l'angle aigu qui lui sera opposé; dans le second cas, l'autre côté de l'angle droit sera la tangente de l'angle aigu qui lui est opposé, & l'hypoténuse sera la sécante du même angle. Par là l'on trouvera aisément celui des trois côtés & celui des angles aigus qu'on demandera dans un triangle rectangle dont on connoîtra ou deux côtés, ou un côté & un angle aigu. Les côtés d'un triangle quelconque sont proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés. Par là, deux angles & un côté d'un triangle étant connus, on trouvera le reste. Si l'on connoit deux côtés avec un angle opposé à l'un de ces côtés, on trouvera aussi le reste, pourvu que l'on connoisse l'espece de l'angle inconnu opposé à un côté connu. Si d'un angle quelconque d'un triangle, l'on abaisse une perpendiculaire sur sa base, prolongée s'il est nécessaire, la base sera à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces deux côtés est à la différence ou à la somme des deux segmens de la base. Et alors la moitié de la différence des deux termes extrêmes de cette proportion donnera le petit segment, & la moitié de la somme des mêmes termes donnera le grand segment. Avec le secours de cette proposition on trouvera les angles d'un triangle dont les trois côtés sont donnés. Dans tout triangle la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des deux angles opposés à ces deux côtés, est à la tangente de la moitié de la différence de ces angles. Connoissant deux côtés d'un triangle avec l'angle qu'ils comprennent, on trouvera le reste.

XVII.

Mesure des arcs & des por-

L'on ne connoit point le rapport exact du diametre d'un cercle à sa circonférence; mais si l'on représente le

XVI.

37. Trouver la longueur d'une ligne à l'extrêmité de laquelle on se trouve quand on en voit l'autre extrêmité.

38. Déterminer les angles d'un triangle sans le secours d'aucun instrument propre à les mesurer.

39. Trouver la distance qu'il y a entre deux objets que l'on voit, & qui sont tous deux inaccessibles.

40. Mener par un point donné une parallele à une droite inaccessible.

41. Deux points visibles ou non visibles l'un de l'autre étant donnés sur le terrein, trouver tant de points qu'on voudra qui soient dans l'alignement des deux premiers.

42. Trois points étant vus d'un quatriéme, & les deux angles sous lesquels on les voit étant mesurés, marquer ce quatrieme point sur une carte où les trois autres sont déja placés.

XVII.

43. Rectifier la circonférence d'un cercle dont on connoit le diametre.

tions des cercles. Construction & rectification des anses de panier.

diametre par 1000000000, la circonférence sera exprimée par un nombre plus grand que 3141592653 & plus petit que 3141592654, rapport suffisant pour la pratique la plus scrupuleuse, & plus approché que ceux de 100 à 314, de 7 à 22, de 113 à 355. Le quarré du rayon est à la surface du cercle, comme le diametre est à la circonférence. D'où l'on déduit la mesure des portions de cercle. La surface de l'ellipse qui a pour grand axe le diametre d'un cercle est à celle de ce cercle comme le petit axe est au grand, Ainsi l'on aura l'aire de l'ellipse avec assez de précision, en prenant trois fois le produit des deux demi-axes; plus la septiéme partie de ce produit. A la place de la demi ellipse, les Praticiens prenent souvent *l'anse de panier*, courbe composée de plusieurs arcs de cercle, tous concaves d'un même côté, qui se raccordent sans jarrets, & qui valent ensemble 180 dégrés: ils décrivent ordinairement cette courbe à trois ou à cinq centres; & suivant différentes méthodes plus ou moins exactes, qu'on discutera si on le demande. Dans une anse de panier de trois arcs de soixante degrés chacun, l'on peut trouver la grandeur des rayons, sans employer pour les exprimer, d'autres lignes que le diametre & la montée; & l'on aura la longueur de la courbe ainsi composée, en ajoutant six fois le diametre avec dix fois la montée, & en prenant la septiéme partie de la somme. On donnera aussi le moyen de calculer la longueur d'une anse à cinq centres. Cette théorie sert à toiser les surfaces des voutes en berceau, surbaissées & surmontées.

44. Rectifier un arc dont on connoit le rayon & le nombre des degrés, ou le rayon & la corde, ou la corde & la fleche.

45. Etant donné le diametre d'un cercle ou d'une sphere, trouver par une simple proportion la surface du cercle, la surface de la sphere, la solidité de la sphere.

46. Trouver la surface d'un secteur ou d'un segment de cercle dont on connoit le rayon & le nombre des degrés, ou le rayon & la corde, ou la corde & la fleche.

47. Construire géometriquement une anse de panier à trois centres, en connoissant le diametre, la montée, & l'un des deux rayons inégaux.

48. Etant donnés le diametre & la montée, décrire une anse de panier avec trois arcs dont chacun soit de soixante degrés.

49. Construire une anse de panier à cinq centres, étant donnés le diametre, la montée; avec le rayon des arcs extrêmes, ou le rapport de ce rayon avec le suivant.

50. Rectifier la courbe d'une anse de panier à trois ou à cinq centres.

DES SECTIONS CONIQUES.

SI dans le cône on fait différentes sections par le moyen d'un plan, les lignes qui paroissent décrites à l'extrêmité de ces sections, s'appellent sections coniques. On prouvera qu'il n'est pas possible de faire dans un cône des sections d'où resultent d'autres figures que le *triangle*, le *cercle*, l'*ellipse*, la *parabole* & l'*hyperbole*. On exposera ce qu'on entend par *ordonnées* & *co-ordonnées*, *abscisses* & *co-abscises*, *parametre* de l'axe & *parametre* du diametre, *parametre* principal & *parametre* conjugué.

On

On démontrera les propriétés des sections coniques, par rapport à leurs axes & celles de l'hyperbole rapportées à ses assymptotes, en suivant la méthode de MONSIEUR L'ABBÉ DE LA CAILLE. On résoudra aussi suivant les principes du même Auteur différens problemes ; par exemple, 1°. Trouver la quadrature des sections coniques ; 2°. Déterminer le rayon de courbure en un point quelconque d'une section conique ; 3°. Mener une tangente à un point quelconque d'une section conique, &c.

FIN.