Resp PS-PL B0229/2

Libes de Béziers.

Essai sur les Mathématiques.

1770.

N° 86 3

Bisp pl B 2232

Resp P/pl B022912

ESSAI
SUR
LES ÉLÉMENS
DE MATHÉMATIQUES,
DÉDIÉ
A MESSIEURS
DE L'ACADÉMIE ROYALE
DE PEINTURE, SCULPTURE
ET ARCHITECTURE
DE TOULOUSE,

PAR Mr. LIBES, DE BEZIERS, ÉTUDIANT DE LA PREMIERE ANNÉE DU COURS DE PHILOSOPHIE, AU COLLEGE ROYAL DE TOULOUSE.

Cet Exercice, qui sera présidé par M. l'Abbé MARTIN, *Professeur en Philosophie, se fera le 18 Juillet 1770, à 3 heures après-midi, dans la Salle ordinaire des Exercices dudit College.*

A TOULOUSE,
CHEZ la Veuve JEAN-PIERRE ROBERT, Imprimeur-Libraire, rue Sainte Ursule, à Saint Thomas d'Aquin.

M. DCC. LXX.

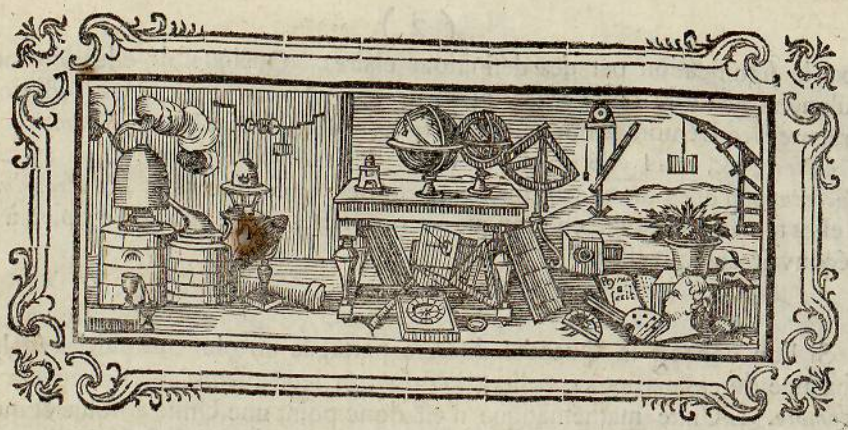
BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE

ESSAI
SUR LES ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES,

PAR MESSIEURS;

LIBES, de Beziers;
GARAY, d'Oleron;
MATHIEU, de Toulouse;
MARTIN, de Toulouse;
DE SAINTMARC, du Diocese de Condom;
DE RIEUPEYROUX, de Grenade;
DE CONTE, d'Aurillac;
CAPELA, du Diocese de Leitoure;
TINDEL, de Beziers;
FADUILHE, de Saint-Gaudens;
DUPRÉ, de Gimont;
VISTORTE, de Sainte-Livrade;
DENCAUSSE, du Diocese de Comminges;
CASSAGNOL, d'Albi;
SOZET, du Diocese de Vienne;
LAÜT, du Diocese de Bayonne;
CROS-LEYGAS, du Diocese de Vienne;
CASTILLON DE MOUCHAN, du Diocese de Condom;
DAYRIES, de Verdun;
BERTIN, du Diocese de Clermont;
LUZIÉ, du Diocese de Cahors;
GOUX, du Diocese de Condom;
ANGLADE, du Diocese de Pamiers;
MARIETTE, de la Martinique;
BARIG, de Valentine;
SOL, de Toulouse;
TARNEAUD, de Limoges;

Étudians de la premiere année du Cours de Philosophie, au College Royal de Toulouse.



ESSAI SUR LES ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.

I.

ARITHMÉTIQUE.

LES Sciences Mathématiques ont pour objet, non-ſeulement tous les Etres compoſés de quelque nature qu'ils ſoient, mais encore ceux qu'on peut conſidérer comme tels. Pour rendre cet objet auſſi ſimple qu'il eſt étendu, les Mathématiciens, peu occupés de la nature des Etres compoſés, ne les ont conſidérés que ſous le rapport qui les rend ſuſceptibles d'augmentation & de diminution. Cette propriété relative des Etres ils l'ont appellée indiſtinctement Quantité ou Grandeur. Quand ils l'ont attribuée à des aſſemblages d'Etres qu'ils ſe ſont repréſentés comme ſéparés les uns des autres, ils lui ont donné le nom de Quantité diſcrete; & lorſqu'ils l'ont attribuée à ceux qu'ils concevoient comme unis les uns aux autres, ils l'ont appellée Quantité continue. Ces deux eſpeces de Quantités ont fait naître la diviſion naturelle de cette Science en deux parties diſtinctes par leur objet & par leur nature, l'Arithmétique & la Géométrie. La méthode que la Science mathématique ſuit eſt celle-ci : d'abord elle poſe des Axiomes qui ſont des vérités prouvées par leur évidence; avant d'employer des termes nouveaux, elle en

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE UNIVERSITAIRE

fixe la ſignification par des définitions claires. Quelquefois elle demande qu'on lui accorde des vérités qu'on ne ſauroit nier ; quelquefois auſſi pour préparer ſes Démonſtrations, elle ſe ſert de *Conſtructions*, de *Lemmes*, de *Scholies* ; & enfin elle établit la vérité de ſes Propoſitions, qu'on appelle *Théorêmes* ſi elles annoncent quelque propriété de la Grandeur, & *Problêmes* ſi elles tendent à réduire en pratique les propriétés déja connues, ou bien à en découvrir de nouvelles.

I I.

Si l'on conçoit la Quantité diſcrete partagée en pluſieurs parties égales, chacune de ces parties s'appellera l'*Unité*, & leur aſſemblage s'appellera un *Nombre*. L'Unité mathématique n'eſt donc point une Unité abſolue & indiviſible, puiſqu'elle eſt partie de la Quantité ; mais elle eſt ſeulement une Unité de convention, qui devient elle-même un Nombre relativement à des Unités d'une eſpece inférieure. Pour déſigner plus commodément toute ſorte de Grandeurs par les combinaiſons des dix chiffres qui compoſent l'Arithmétique ordinaire, on eſt convenu de leur donner une valeur locale, par laquelle ceux qui ſont placés ſur la même ligne augmenteroient en raiſon décuple en allant de droite à gauche. Il eſt à remarquer que cette propriété de convention a ſeule donné lieu aux différentes méthodes qu'on emploie pour faire avec facilité les opérations de l'Arithmétique. On peut dire qu'elles ſe réduiſent à deux, qui ſont l'*Addition* & la *Souſtraction*, tandis que la Multiplication & la Diviſion ne ſont que des méthodes abrégées pour faire les opérations précédentes. La ſimplicité des procédés qu'on emploie dans l'Addition & la Souſtraction permet d'avancer que l'exécution ſeule en démontre la juſteſſe ; on en pourroit dire autant de la Multiplication. La Diviſion, un peu moins ſimple que les autres opérations, s'exécute par une méthode dont l'exactitude eſt démontrée par la Multiplication. Elle ſert à trouver la racine inconnue d'un produit dont on connoît l'autre racine ; à diviſer une Quantité en un Nombre quelconque de parties égales, &c.

I I I.

Toutes les différentes opérations dont nous venons de parler ſe font ſur les Fractions, & ſe démontrent de la même maniere. Mais avant de les pratiquer il eſt quelquefois néceſſaire de préparer les Fractions en les réduiſant au même Numérateur ou bien au même Dénominateur. Quelquefois auſſi on eſt obligé de les réduire à un Numérateur ou à un Dénominateur donné ; ou bien encore de préſenter des nombres entiers ſous la forme des Fractions, ſans changer leur valeur. Or toutes ces préparations s'exécutent facilement par des regles fondées ſur cette vérité, que la valeur d'une fraction ne change pas, ſoit qu'on multiplie, ſoit qu'on diviſe ſes deux termes par la même quantité, &

qu'ainſi il y a une infinité de Fractions de même valeur, quoique exprimées en termes différens. S'il faut, non-ſeulement préparer, mais encore ſimplifier une Fraction, on y parvient en diviſant ſes deux termes par leur plus grand Diviſeur commun; & la méthode générale de trouver ce Diviſeur commun ſe démontre aiſément. L'uſage fréquent & commode des Fractions décimales a fait ſimplifier leur expreſſion & leur calcul. On les ſouſtrait & on les additione à la façon des nombres entiers, en obſervant ſeulement de mettre les virgules en colonne : on les multiplie & on les diviſe de même; mais dans le produit on ſépare autant de décimales ſur la droite, qu'il y en a dans le Multiplicande & dans le Multiplicateur; tandis que dans le Quotient on en ſépare autant qu'il s'en trouve dans le Dividende de plus que dans le Diviſeur. La nature de cette eſpece de Fractions préſente quelques obſervations à faire : 1.° La valeur des décimales décroît en raiſon décuple en allant de gauche à droite. 2.° Une Fraction décimale eſt plus grande qu'une autre, ſi ſes premiers chiffres étant les mêmes que ceux de cet autre, elle en a outre cela quelqu'un qui ne ſoit pas zero. 3.° La ſomme de toutes les décimales qui viennent après un rang quelconque ne peut valoir une unité de ce rang. 4.° Il ſuffit d'employer deux ou trois décimales dans le calcul, à moins qu'on n'ait beſoin d'une grande préciſion. 5.° Si l'on retranche les derniers chiffres, il faut ajouter une unité au chiffre qui reſte le dernier, lorſque le premier de ceux que l'on néglige ſurpaſſe cinq. D'après ces principes il eſt aiſé de réduire une Fraction ordinaire en Fraction décimale, ou bien de s'aſſurer que cette réduction eſt impoſſible.

I V.

Mais deux choſes s'oppoſoient à l'étendue des combinaiſons dans l'Arithmétique ordinaire, la valeur fixée de ſes caracteres & ſon objet limité à des quantités homogenes. Il a donc fallu pour étendre la Science du Calcul auſſi loin que ſon objet le comporte, qu'une Arithmétique nouvelle n'employât que des caracteres indéterminés, & s'étendît à des quantités d'eſpeces oppoſées. Alors cette Arithmétique, connue ſous le nom d'*Algebre*, a ſubſtitué aux chiffres ordinaires les lettres de l'alphabet, & leur a donné ſes ſignes d'oppoſition + & —. De cette diſtinction il a dû s'enſuivre que zero ſeroit pris pour la borne de la quantité négative & poſitive; & qu'ainſi, être au-deſſous de zero ne ſeroit autre choſe pour la quantité, que paſſer dans une eſpece oppoſée, ſans rien perdre de ſa nature. L'introduction des quantités négatives & poſitives a rendu néceſſaire la réduction algébrique, & en a indiqué les regles, de même que celles de l'Addition & de la Souſtraction. Nous ferons voir que les premiers Algébriſtes étant une fois convenus que $+ \times + = +$, il a dû s'enſuivre, par une conſéquence néceſſaire, que $+ \times - = -$, & que $- \times - = +$. L'objet de la Multiplication a obligé les Algébriſtes à

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE UNIVERSITAIRE

multiplier les coëfficiens à la façon des nombres, & la ſimplicité les a fait convenir que les lettres écrites de ſuite ſe multiplieroient. Les regles de la Diviſion algébrique ne ſont qu'une ſuite de celles de la Multiplication : les unes & les autres ſe réuniſſent dans les méthodes d'extraire les racines & de former les puiſſances. Mais cette formation des puiſſances a donné lieu à quelques remarques très-utiles. 1.° Que $a^0 = 1$. 2.° Que $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. 3.° Que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Cette derniere propriété a fait voir qu'il eſt aiſé de convertir les radicaux en expreſſions de puiſſances fractionnaires, & d'aſſujettir le calcul des incommenſurables à celui des puiſſances par leurs expoſans. Cependant comme il eſt ſouvent néceſſaire de laiſſer les incommenſurables ſous le ſigne radical, nous ferons voir les principales opérations que demande le calcul des radicaux ; ſavoir, 1.° comment on peut faire entrer une expreſſion quelconque dans un radical ſans en changer la valeur. 2.° Comment on peut ſimplifier un radical en retirant une quantité hors du ſigne. 3.° Comment on peur ôter le coëfficient d'un radical. 4.° Comment on peut réduire pluſieurs radicaux au même ſigne. 5.° Comment il faut les additionner ou les ſouſtraire, les multiplier ou les diviſer. 6.° Enfin comment on les éleve à des puiſſances & on en extrait les racines. On peut auſſi employer utilement dans le calcul des incommenſurables la célebre formule de Newton $\overline{a \pm b}^m = a^m \pm m a^{m-1} b$, &c. dans laquelle nous fixerons la loi des ſignes, celle des coëfficiens, des lettres & de leurs expoſans.

V.

La méthode d'extraire les racines quelconques eſt fondée ſur la formation des puiſſances, & s'applique aiſément à des quantités ſoit numériques ſoit algébriques. Nous ferons voir l'uſage qu'on peut faire des fractions décimales dans les méthodes d'approximation pour les racines incommenſurables. Les logarithmes fourniſſent un moyen sûr & commode pour parvenir à la racine vraie ou approchée d'un nombre ; mais comme les tables ordinaires ne portent point l'approximation auſſi loin qu'une très-grande préciſion peut l'exiger, nous montrerons qu'alors on peut employer avec avantage les formules de M^r. Halley que nous étendrons à une puiſſance quelconque, ſoit en indiquant la loi qu'elles ſuivent, ſoit en faiſant voir leur formation. Si l'on examine les différentes puiſſances des nombres, on fera aiſément les obſervations ſuivantes : 1.° Un nombre compoſé de n de chiffres n'en peut avoir à ſa puiſſance p plus que pn n'en exprime : de-là vient la néceſſité de partager en tranches de deux chiffres au plus le nombre dont on cherche la racine quarrée, & en tranches de trois chiffres celui dont on cherche la racine cubique. Il ſuit encore de cette même vérité que les puiſſances parfaites ne peuvent être multiples des puiſſances du même degré, ſi ce n'eſt de celles qui ſont parfaites, &

qu'ainſi

qu'ainſi il n'y peut avoir un nombre quarré, double, triple, quintuple, &c. d'un autre nombre quarré. 2.° A quelque puiſſance qu'on éleve un nombre qui n'a que certains nombres premiers pour diviſeurs exacts, il n'en acquiert pas pour cela de nouveaux; d'où il ſuit que ſi deux nombres n'ont pas de diviſeur commun, ils n'en peuvent acquérir à quelques mêmes puiſſances qu'on les éleve. 3.° Un nombre entier joint à une fraction réduite à l'expreſſion la plus ſimple, ne peut devenir un nombre entier ſeul par ſon élevation à une puiſſance. Ainſi on ne peut aſſigner aucun nombre qui exprime exactement la racine de celui qui ne ſeroit pas une puiſſance parfaite du même degré que la racine demandée.

V I.

L'analyſe eſt l'art de réſoudre par le calcul algébrique tous les Problêmes qu'on peut propoſer ſur la grandeur. Quels que ſoient ceux du premier & du ſecond degré, elle demande ſeulement pour parvenir à la ſolution, qu'on en ait formé des équations juſtes; c'eſt-à-dire, qu'on ait traduit fidelement les conditions du Problême en langage algébrique. Cette opération ne ſauroit s'aſſujettir à des regles; ſon exactitude ne peut naître que du talent aidé par la méditation & par l'habitude. La difficulté qu'elle préſente quelquefois nous fait borner à ne réſoudre en Public que les Problêmes ſuivans du premier & du ſecond degré, qui ſont tirés des Elemens de M^r. l'Abbé de la Caille, qu'on nous a expliqué.

I. *Etant données la ſomme & la différence de deux quantités, trouver chaque quantité.*

II. *Pierre & Jean ayant enſemble 36 livres, ont perdu une piſtole au jeu; Pierre a perdu le tiers de ce qu'il avoit, & Jean le cinquieme; on demande ce que chacun avoit avant le jeu & ce que chacun a perdu?*

III. *Un Pere dans ſon Teſtament partage tout ſon bien entre ſes Enfans: il donne à ſon Fils aîné mille écus avec le ſixieme de ce qui reſtera après qu'il les aura pris; au ſecond deux mille écus avec le ſixieme de ce qui reſtera; au troiſieme trois mille écus & le ſixieme de ce qui reſtera; & ainſi de ſuite juſqu'au dernier, qui aura pour lui le reſte de la part de ſes Freres. Cette diſpoſition ayant été exécutée, chacun s'eſt trouvé également partagé. On demande combien ils étoient d'Enfans? Combien ils ont eu chacun? Et combien le Pere avoit laiſſé d'argent?*

IV. *Trouver un nombre tel qu'ôtant ſon quadruple de ſon quarré, reſtent 21.*

V. *Pierre arrivant à Paris a dépenſé le premier jour le tiers de tout l'argent qu'il avoit apporté; le ſecond jour, il en a dépenſé le quart; le troiſieme jour, la cinquieme partie; enſorte qu'il ne lui reſtoit plus que 26 livres: on demande ce qu'il avoit d'argent en entrant à Paris?*

VI. *Un Orfevre achete 318 liv. une maſſe de métal, compoſée de 3 onces d'or & de 5 onces d'argent: il achete 522 liv. une autre maſſe compoſée de 5*

onces d'or & de 7 onces d'argent. On demande la valeur de l'once d'or & celle de l'once d'argent?

VII. *Pierre, Jacques & Jean ont perdu tout leur argent au jeu, Pierre & Jacques ont perdu ensemble 10 liv. Pierre & Jean 11 liv. Jacques & Jean 9 liv. On demande ce que chacun a perdu en particulier?*

VIII. *Une Anesse disoit à une Mule : si je t'avois donné un de mes sacs, nous serions également chargées, & si tu m'en faisois porter un des tiens, j'aurois le double de ta charge. On demande combien de sacs chacune portoit?*

IX. *Pierre & Jean avoient autant d'argent l'un que l'autre avant que de jouer; Pierre a perdu 12 liv. & Jean 57 liv. de sorte qu'au sortir du jeu Pierre avoit quatre fois plus d'argent que Jean. On demande ce que chacun avoit avant que de jouer?*

X. *On demande à un homme ce qu'il a d'écus? Il répond : si vous ajoutez ensemble la moitié, le tiers & le quart de ce que j'en ai, la somme surpassera d'un le nombre d'écus que j'ai.*

XI. *Un Marchand achete trois Chevaux; le prix du premier avec la moitié du prix des deux autres, monte à 25 pistoles; le prix du second avec le tiers du prix des deux autres, monte à 26 pistoles; le prix du troisieme avec la moitié du prix des deux autres, monte à 29 pistoles. On demande le prix de chaque Cheval?*

XII. *Un Manœuvre ayant 6 liv. dans sa poche, reçoit ce qui lui est dû pour cinq semaines. Quinze jours après il ne lui restoit plus que le quart de son argent; mais ayant reçu ce qu'il a gagné pendant ces deux semaines, il se trouve avoir 21 liv. Que gagnoit-il par semaine?*

VII.

Si avec des équations simples on forme des équations composées, dans lesquelles il n'entre point de racines imaginaires, on y découvrira aisément les propriétés suivantes. 1.° Toute équation est d'un degré exprimé par le nombre des valeurs de l'inconnue, ou des racines. 2.° La somme de toutes ces racines forme le coëfficient du second terme : la somme des produits de ces mêmes racines prises deux à deux, forme le coëfficient du troisieme terme : la somme des produits de ces mêmes racines prises trois à trois, forme le coëfficient du quatrieme terme, &c. & le produit de toutes ces racines ensemble forme le dernier terme. 3.° Quand les termes d'une équation ordonnée & complette, sont alternativement précédés de signes différens, toutes les racines sont positives; quand les termes sont tous précédés du même signe, toutes les racines sont négatives : & en général il y a autant de racines positives, qu'on trouve de changemens de signes de chaque terme au terme suivant; & autant de racines négatives, qu'on trouve de répétitions de même signe. 4.° Le second terme doit manquer dans une équation, lorsque la

ſomme de ſes racines ſe réduit à zero. En général, s'il manque un terme, c'eſt une preuve que toutes les racines n'ont pas le même ſigne. 5.° Si le ſecond terme d'une équation eſt négatif, la ſomme des racines poſitives excede celle des racines négatives : & s'il eſt poſitif, la ſomme des racines négatives excede celle des racines poſitives. 6.° Si le nombre des racines poſitives eſt pair, le dernier terme eſt poſitif ; & s'il eſt impair, le dernier terme eſt négatif, & réciproquement. 7.° Une équation qui n'a pas de dernier terme, eſt d'un degré inférieur à celui qui eſt marqué par la plus haute puiſſance de l'inconnue. 8.° Si dans une équation on ſubſtitue à l'inconnue une de ſes valeurs, toute l'équation ſe réduit à zero ; ce qui prouve que l'inconnue équivaut indiſtinctement à chacune des racines de l'équation.

VIII.

La multiplication pouvant faire diſparoître les ſignes radicaux, il arrive ſouvent qu'une équation compoſée cache des racines imaginaires ſous une forme réelle. Mais pour que ces cas aient lieu, il faut que les radicaux imaginaires ſoient multipliés entre eux chacun en nombre pair ; & par conſéquent il faut que toute équation d'un degré impair ait au moins une racine réelle. D'où l'on peut conclure, 1.° que les racines imaginaires qui ſe trouvent dans une équation, y ſont toujours en nombre pair. 2.° Qu'elles ont deux à deux la même quantité ſous le radical, & ne différent que par les ſignes + & — qui précedent le radical, &c. Afin de traiter plus commodément une équation, on en fait diſparoître un terme quelconque ; & pour cela, on la tranſforme en une autre du même degré, & dans laquelle l'inconnue aura ſubi tel changement qu'on aura voulu. On ſe contente communément de faire évanouir le ſecond terme ; ce qui ſe fait en ſubſtituant à la premiere inconnue une autre plus ou moins le coëfficient du ſecond terme diviſé par l'expoſant du degré de l'équation. Ici nous expoſerons deux différentes méthodes pour trouver les racines des équations numériques de tous les degrés. La premiere, qui conſiſte à trouver tous les diviſeurs du dernier terme, & à les ſubſtituer ſucceſſivement à l'inconnue dans l'équation, ne peut réuſſir que lorſque les racines ſont des nombres entiers ; & la ſeconde, qui eſt celle des limites, s'emploie lorſque ſes racines ſont des entiers joints à des fractions.

IX.

L'on ne compare les grandeurs entre elles, que pour ſavoir de combien l'une ſurpaſſe l'autre, ou combien de fois l'une contient l'autre. La premiere façon de les comparer produit le rapport arithmétique ; la ſeconde produit le rapport géométrique. D'où il ſuit que la valeur du rapport arithmétique doit s'eſtimer de la différence qu'il y a entre l'antécédent & le conſéquent : qu'une

progreſſion arithmétique eſt une ſuite de termes qui, pris conſécutivement, ont une même différence ; & qu'ainſi la formule générale de tout rapport arithmétique eſt $a . a \pm d$; que celle de toute proportion arithmétique eſt $a . a \pm d : b . b \pm d$, & que celle de toute progreſſion arithmétique eſt $\div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d$, &c. De ces formules générales on peut tirer les conſéquences ſuivantes. 1.° Que dans toute proportion arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moyens. 2.° Que dans toute progreſſion arithmétique la ſomme des termes également éloignés des extrêmes, eſt toujours conſtante & égale à la ſomme des extrêmes, ou à la ſomme de deux termes quelconques également éloignés des extrêmes, ou au double du terme moyen, ſi le nombre des termes eſt impair. 3.° Qu'un terme quelconque de la progreſſion eſt égal à la ſomme du premier & du produit de la différence commune multipliée par le nombre des termes précédens. 4.° Que la différence entre le premier & le dernier terme, eſt égale au produit de la différence commune par le nombre des termes de toute la progreſſion moins un. 5.° Que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, eſt égale à la moitié du produit de la ſomme des extrêmes multipliée par le nombre de tous les termes ; ou bien au produit du terme moyen par le nombre de tous les termes, ſi ce nombre eſt impair. Ces propriétés des progreſſions arithmétiques conduiſent à la ſolution de ce Problême général. *Dans toute progreſſion arithmétique étant données trois de ces cinq choſes ; le premier terme* $=$ a ; *le dernier terme* $= \omega$; *la différence commune* $=$ d ; *le nombre des termes* $=$ n ; *la ſomme de tous les termes* $=$ s, *trouver immédiatement une des deux autres.*

X.

La nature du rapport géométrique fait voir que ſa valeur doit s'eſtimer du quotient d'un des termes comparés diviſé par l'autre. Si l'on eſt une fois convenu de diviſer le conſéquent par l'antécédent, & qu'on appelle l'antécédent a & le quotient q, la formule générale de tout rapport géométrique ſera $a : aq$; & celle de toute proportion ſera $a : aq :: b : bq$. Cette formule générale fait voir que la valeur d'une raiſon ne change pas, ſoit qu'on multiplie, ſoit qu'on diviſe les deux termes par la même quantité ; & qu'ainſi deux grandeurs ſont en même raiſon que leurs multiples ou ſous-multiples quelconques de la même eſpece ; qu'une raiſon doublée eſt égale à celle des quarrés, & une raiſon triplée à celle des cubes des termes d'une des raiſons compoſantes ; qu'une raiſon réciproque ſe change en raiſon directe, lorſqu'on met les deux termes d'une raiſon en fraction ſous une quantité conſtante ; que dans toute proportion le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, & réciproquement qu'on peut faire une proportion des racines de deux produits égaux, en faiſant les extrêmes des racines de l'un, & les moyens des racines de l'autre. Cette derniere propriété fait voir qu'on peut combiner par voie d'addition,

de

de ſouſtraction, de multiplication, de diviſion & de tranſpoſition les quatre termes d'une proportion, ſans qu'ils ceſſent d'être proportionnels; qu'on peut multiplier ou diviſer deux ou pluſieurs proportions terme par terme, ſans détruire la proportion; que ſi l'on prend la ſomme ou la différence de deux ou de pluſieurs proportions termes à termes, il n'en réſultera une proportion que dans deux cas: 1.° Lorſque le quotient de ces deux proportions ſera le même. 2.° Lorſque les antécédens ou les conſéquens pris dans leur ordre ſeront en proportion: que ſi l'on a une ſuite de termes proportionnels, la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent.

X I.

La formule générale pour toute progreſſion géométrique eſt celle-ci; $\div\div a : aq^1 : aq^2 : aq^3$, &c. de laquelle dérivent les propriétés ſuivantes de cette eſpece de progreſſion. 1.° Un terme quelconque eſt égal au produit du premier multiplié par le quotient élevé à une puiſſance déſignée par le nombre des termes précédens ($m = aq^{n-1}$.) 2.° Dans toute progreſſion le produit des extrêmes eſt égal au produit des termes également éloignés des extrêmes, ou bien au quarré du terme moyen, ſi le nombre des termes eſt impair. 3.° Dans une progreſſion quelconque, ſi le quotient $= 2$ ou $\frac{1}{2}$, la différence entre le premier & le dernier terme eſt égale à la ſomme de tous les termes excepté le plus grand. Si le quotient $= 3$ ou $\frac{1}{3}$, cette différence eſt égale au double de la ſomme de tous les termes excepté le plus grand. 4.° Dans toute progreſſion géométrique le premier terme eſt au troiſieme, comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond; le premier terme eſt au quatrieme, comme le cube du premier eſt au cube du ſecond. En général deux termes quelconques éloignés d'une intervalle quelconque, ſont entre eux, comme deux termes quelconques qui ſe ſuivent immédiatement, élevés à une puiſſance égale à l'intervalle de ces deux premiers termes. 5.° Des termes exprimés par les mêmes lettres avec des expoſans en proportion ou en progreſſion arithmétique, ſont en proportion ou en progreſſion géométrique. Les propriétés déja connues dans les proportions géométriques nous ſerviront à démontrer & à ſimplifier les méthodes que les arithméticiens appellent Regle de trois, Regle de compagnie, de ſociété, d'alliage & de fauſſe poſition. On pourra auſſi réſoudre les Problêmes ſuivans ſur les progreſſions géométriques: *Trouver la ſomme* s *de tous les termes d'une progreſſion géométrique, dont on connoît le premier* a, *le dernier* ω, *& le quotient* q. *Trouver cette même ſomme* s, *étant donnés le premier* a, *le nombre* n *de termes, & le quotient* q. *Connoiſſant le quotient* q, *le nombre des termes* n, *& la ſomme* s, *trouver chacun des termes de la progreſſion. Trouver le nombre des termes* n, *quand on connoît le premier* a, *le dernier* ω, *& le quotient* q. *Inſérer un nombre* m *de moyens proportionnels entre deux termes donnés* a *&* b. *Entre*

BIBLIOTHÈQUE TOULOUSE UNIVERSITAIRE

chacun des termes d'une progreſſion mettre un nombre m *de moyens proportionnels.*

X I I.

Si l'on joint terme à terme une progreſſion arithmétique à une progreſſion géométrique, les termes de la premiere meſurent les rapports des termes correſpondans de la ſeconde, & doivent, ſuivant l'étymologie du mot, en être appellés les *Logarithmes*. D'où l'on a conclu que ſi l'unité entre dans la progreſſion géométrique, & que ſon logarithme ſoit zero, le logarithme d'un nombre quelconque eſt l'expoſant de la puiſſance de *10*, qui eſt égale à ce nombre; & qu'ainſi le logarithme d'une fraction eſt négatif & égal à celui d'un entier pris à la même diſtance de l'origine de la progreſſion. La nature des logarithmes ainſi fixée, on en conclura, 1.° que ſi quatre termes de la progreſſion géométrique forment une proportion géométrique, leurs logarithmes forment toujours une proportion arithmétique. 2.° Que le logarithme d'un produit eſt égal à la ſomme des logarithmes de ſes produiſans, & celui d'un quotient à la différence des logarithmes du dividende & du diviſeur. 3.° Que pour faire une Regle de trois par le moyen des logarithmes, il faut ajouter enſemble les logarithmes des termes qu'il eût fallu multiplier, retrancher de la ſomme celui du terme par lequel il eût fallu diviſer, & le reſte ſera le logarithme du terme cherché. 4.° Que pour élever une quantité à une puiſſance quelconque, il faut multiplier ſon logarithme par l'expoſant de la puiſſance, & le produit ſera le logarithme de cette puiſſance. 5.° Que pour extraire la racine du nombre, il faut diviſer le logarithme de ce nombre par l'expoſant de la racine, & le quotient ſera le logarithme de la racine cherchée.

X I I I.

L'infini mathématique étant conſidéré comme un être compoſé, on peut lui faire ſubir toutes les opérations dont la grandeur eſt ſuſceptible; mais d'abord on démontre qu'une quantité quelconque eſt diviſible à l'infini, & qu'étant devenue infinie, elle ne peut recevoir d'augmentation ni de diminution que par le moyen d'autres quantités infinies. Enſuite on conclud qu'une quantité finie jointe ou ſéparée d'une quantité infiniment grande, ſe peut négliger dans le calcul; & qu'il en eſt de même d'un infini quelconque relativement à ceux d'un ordre inférieur. Le calcul de l'infini nous conduit à quelques notions abrégées ſur les ſuites; celles des nombres figurés ſuivent cette loi, que chaque terme eſt égal à la ſomme du terme correſpondant & des termes précédens dans la ſuite ſupérieure; & celles des nombres polygones ſuivent celle-ci, que chaque terme eſt égal à la ſomme des termes conſécutifs d'une progreſſion arithmétique, qui commence par un. Les ſuites donnent une méthode d'approximation pour extraire les racines des puiſſances imparfaites, &

pour avoir le quotient des quantités qui ne ſont pas multiples du diviſeur. La difficulté qu'on trouve à les ſommer nous fait borner à quelques formules qui dirigeront les opérations dans tous les cas de la même eſpece. Si l'on a une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, qu'on faſſe le premier terme $= \frac{d}{b}$, & le quotient $= q$, la formule de ſommation ſera $\int = \frac{dq}{bq - b}$. Si l'on a une ſuite de fractions dont les numérateurs ſoient en progreſſion arithmétique & les dénominateurs en progreſſion géométrique, comme $\frac{a}{b}$, $\frac{a+d}{bq}$, $\frac{a+2d}{bq^2}$, &c. la formule de ſommation ſera $\int = \frac{aq^2 - aq + dq}{bq^2 - 2bq + b}$. Si la marche de la ſuite la fait échapper aux méthodes, il ſuffit de la rendre tres-convergente & de ſommer quelques uns de ſes premiers termes. Les différentes puiſſances de la ſuite naturelle des nombres préſentent ces obſervations : 1.° Que le quarré du dernier terme de cette ſuite eſt égal au quarré du premier, plus deux fois la ſomme des termes précédens, plus leur nombre. 2.° Que le cube du dernier eſt égal au cube du premier, plus trois fois la ſomme des quarrés des termes précédens, plus trois fois la ſomme de ces mêmes termes, plus leur nombre. 3.° Que la quatrieme puiſſance du dernier eſt égale à la quatrieme puiſſance du premier, plus quatre fois la ſomme des cubes des termes précédens, plus ſix fois la ſomme de leur quarré, plus quatre fois la ſomme de ces termes, plus leur nombre. D'où il ſuit que faiſant un premier terme quelconque de la ſuite $= a$, le dernier $= \omega$, la ſomme $= \int$, la ſomme des quarrés $= \int^2$, la ſomme des cubes $= \int^3$, on aura les formules ſuivantes pour former ces différentes ſuites. $\int = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$. $\int^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$. $\int^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2$. On voit aiſément que ſi la ſuite commence à 1 ou à 0, il ne reſte dans la formule que les ſeuls ω. On voit auſſi que ſi la ſuite eſt infinie, la ſomme des premieres puiſſances eſt la moitié du dernier terme multiplié par leur nombre ; la ſomme des quarrés eſt le tiers du produit du dernier quarré multiplié par leur nombre; la ſomme des cubes eſt le quart du produit du dernier cube multiplié par leur nombre : de ſorte que la formule générale pour la ſommation des puiſſances quelconques de la ſuite naturelle infinie eſt $\int^m = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$. On voit que cette formule eſt auſſi bien applicable à la ſommation des mêmes racines des termes de la ſuite naturelle, qu'à la ſommation de leurs puiſſances.

XIV.

GÉOMÉTRIE.

La Géométrie a pour objet l'étendue, qu'elle considere d'abord avec une seule dimension, ensuite avec deux, & enfin avec trois. L'étendue considérée sous le premier rapport, s'appelle une Ligne; sous le second, une Surface; & sous le troisieme, un Solide.

Des Lignes.

La ligne est droite ou courbe. La ligne droite est la plus courte qu'on puisse mener d'un point à un autre. Il n'y en a qu'une espece, tandis qu'il y a une infinité de différentes lignes courbes. La position de deux points suffit pour déterminer celle d'une ligne droite; mais il en faut plus de deux pour déterminer la position d'une courbe. Lorsqu'on compare deux droites ensemble, ou elles sont situées de façon à se couper, & alors elles sont obliques ou perpendiculaires; ou elles sont situées de façon qu'elles ne puissent jamais se couper, & alors elles sont paralleles. Si deux lignes droites se coupent, leur ouverture forme un angle dont la vraie mesure est l'arc de cercle, qui a son centre au sommet de l'angle, & qui se trouve compris entre ces lignes droites. De cette façon de mesurer les angles, il suit, 1.° qu'étant connue la grandeur d'un angle, on connoît la grandeur de l'arc qu'il peut intercepter par ses côtés; & réciproquement, que sachant le nombre des degrés d'un arc qui ayant son centre au sommet de l'angle, est terminé par ses côtés, on sait la grandeur de l'angle. 2.° Que tous les angles droits sont égaux entr'eux. 3.° Que toute la circonférence d'un cercle ne peut mesurer plus de quatre angles droits. 4.° Qu'une ou plusieurs droites tombant sur une autre font avec elle des angles dont la somme est de 180°; & que si elles la coupent, cette somme est de 360°. 5.° Que dans l'intersection de deux droites, les angles opposés au sommet sont égaux. On est assuré qu'une ligne est perpendiculaire sur une autre, quand deux de ses points sont chacun également éloignés de deux points quelconques pris dans cet autre; & que si deux points d'une droite sont également éloignés d'un point fixé dans celle qui lui est perpendiculaire, tous les points de cette derniere sont également éloignés de ces deux points de la premiere. Il suit de la nature de la ligne perpendiculaire, que par un point donné dans une droite, il ne peut passer sur un même plan qu'une seule ligne de cette espece; & qu'elle est la plus courte qu'on puisse mener d'un point sur une droite. Si deux lignes paralleles sont coupées par une sécante, il en résultera des angles dont les correspondants sont égaux entr'eux, de même que les alternes-internes & les alternes-externes. Les propriétés des lignes

droites

droites dont nous venons de parler, nous ſerviront à réſo udre les Problemes ſuivants.

Problêmes.

I. *Par un point donné hors d'une droite, mener une parallele à cette droite.*

II. *D'un point donné ſur une droite, élever une perpendiculaire à cette droite.*

III. *D'un point donné ſur une droite, abaiſſer une perpendiculaire ſur cette droite.*

X V.

Après avoir comparé les lignes droites entre elles, nous les comparerons avec le cercle, & il en réſultera les propriétés ſuivantes. Si une droite eſt perpendiculaire à une corde, & qu'elle paſſe par le centre du cercle, elle partagera cette corde en deux parties égales; & réciproquement, ſi une droite partage la corde en deux également, & qu'elle paſſe par le centre, elle lui eſt perpendiculaire. De même, ſi une droite eſt perpendiculaire à une corde & qu'elle la coupe en deux également, elle paſſera par le centre. Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, les cordes égales ſoutendent des arcs égaux; les cordes inégales ſoutendent des arcs inégaux: & en même temps les cordes égales ſont à égale diſtance du centre, & les cordes inégales en ſont inégalement éloignées. Dans un même demi-cercle, ou dans des demi-cercles égaux, plus les arcs ſont grands ou petits, plus les cordes ſont grandes ou petites, & plus elles ſont près ou loin du centre, & réciproquement. Une droite qui partant du centre d'un cercle coupe la corde en deux également, coupe auſſi en deux également l'arc que cette corde ſoutend, & par conſéquent l'angle que cet arc meſure. Si l'on fait qu'une droite touche ſeulement le cercle, le rayon mené au point de contact lui ſera perpendiculaire; & réciproquement: ſi on éleve une perpendiculaire ſur l'extrêmité d'un rayon, elle ne touchera le cercle qu'en un ſeul point. Si l'on fait que deux paralleles traverſent le cercle, elles intercepteront de part & d'autre des arcs égaux. Si l'on fait que deux lignes qui ſe coupent ſoient rapportées au cercle, elles formeront un angle qui ſera déterminé de grandeur en quelque endroit que ſon ſommet ſoit placé. Eſt-il placé à la circonférence, il a ponr meſure la moitié de l'arc intercepté par ſes côtés: eſt-il placé en dedans, il a pour meſure la moitié de l'arc intercepté par ſes côtés, plus la moitié de celui qui eſt intercepté entre ces mêmes côtés prolongés: enfin eſt-il placé en dehors, il a pour meſure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe intercepté entre ſes côtés. Si quatre cordes forment un quadrilatere inſcrit dans un cercle, le produit des deux diagonales de ce quadrilatere, eſt égal à la ſomme des deux produits de chaque côté par le côté oppoſé.

Problêmes.

I. *Diviſer un arc donné en deux arcs égaux.*
II. *Diviſer un angle donné en deux également.*
III. *Faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés.*
IV. *Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné.*
V. *Continuer un arc de cercle donné en un cercle entier, ſi l'on veut.*

X V I.

Le triangle eſt la plus ſimple de toutes les figures que puiſſent former des lignes droites. La premiere propriété qu'on y remarque eſt qu'il ſe peut inſcrire dans un cercle ; & qu'ainſi la ſomme de ſes trois angles eſt de 180°. Si l'on prolonge un côté quelconque d'un triangle, l'angle extérieur eſt égal à la ſomme des deux angles intérieurs oppoſés. Si d'un point quelconque pris en dedans de cette figure, on tire des droites ſur les extrêmités d'un côté, l'angle formé par ces droites eſt plus grand que l'angle oppoſé à ce côté. Dans un triangle quelconque la ſomme des deux côtés eſt plus grande que le troiſieme, de même que le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle, & le plus petit côté au plus petit angle, & réciproquement. Dans un triangle équilatéral tous les angles ſont égaux entr'eux ; & réciproquement : ſi les trois angles d'un triangle ſont égaux, le triangle eſt équilatéral. Dans un triangle yſocelle les angles oppoſés aux côtés égaux ſont égaux ; & réciproquement : ſi deux angles d'un triangle ſont égaux, le triangle eſt yſocelle. Si d'un angle quelconque d'un triangle on tire une perpendiculaire ſur la baſe, elle tombera en dedans du triangle, ſi les deux autres angles ſont aigus ; & en dehors, ſi un de ces deux angles eſt obtus. Le triangle peut encore être circonſcrit au cercle, & alors on voit que les droites qui diviſent en deux également ſes trois angles, vont toujours ſe couper en un même point au-dedans de la figure. Les propriétés relatives des triangles conſiſtent dans leurs rapports d'égalité & de ſimilitude. Deux triangles ſont égaux, 1.° quand ils ont tous leurs côtés homologues égaux. 2.° Quand tous les angles homologues étant égaux, ils ont chacun un côté homologue égal. 3.° Quand ils ont un angle homologue égal renfermé entre des côtés homologues égaux. Deux triangles ſont ſemblables dans les cas ſuivans. 1.° S'ils ont tous leurs côtés homologues paralleles. 2.° Si en faiſant confondre un angle de l'un ſur un angle de l'autre, la baſe du premier ſe trouve parallele à la baſe du ſecond. 3.° S'ils ont tous leurs côtés homologues perpendiculaires.

X V I I.

Les propriétés du triangle nous ſerviront d'abord à démontrer les pro-

priétés ſuivantes, qui conviennent à tout polygone en général. 1.° Un polygone quelconque, tant à angles ſaillans qu'à angles rentrans, peut être réduit en autant de triangles qu'il a de côtés. 2.° La ſomme de tous ſes angles intérieurs eſt égale au produit de 180° multipliés par le nombre des côtés, moins deux. 3.° La ſomme de tous les ſupplémens des angles d'un polygone quelconque, qui n'a pas d'angles rentrans, eſt de 360°. 4.° Mais ſi le polygone a des angles rentrans, la ſomme de tous les ſupplémens des angles ſaillans, plus les angles rentrans, eſt égale à 360°, plus autant de fois 180° qu'il y a d'angles rentrans. Si l'on conſidere enſuite les différentes eſpeces de polygones, les ſymmétriques, tant à angles ſaillans qu'à angles rentrans, préſenteront les obſervations ſuivantes. 1.° Que ſi de chacun de leurs angles on mene des diagonales aux angles oppoſés, les deux triangles formés par deux diagonales voiſines, & oppoſés au ſommet, ſont égaux entr'eux. 2.° Que toutes ces diagonales ſont coupées en un même point, & chacune en deux parties égales. 3.° Que celle qui eſt menée d'un angle à l'angle oppoſé, diviſe le polygone ſymmétrique en deux figures égales & ſemblables; & qu'en général, toute droite qui paſſe par le centre de ces polygones y eſt diviſée en deux également, & diviſe le polygone en deux figures égales & ſemblables. Conſidere-t-on enſuite le polygone régulier, on verra, 1.° qu'il eſt toujours inſcriptible au cercle; & qu'ainſi les rayons tirés du centre de ce polygone à chacun de ſes angles, le diviſent en autant de triangles yſocelles & égaux qu'il a des côtés. 2.° Que chaque côté d'un polygone régulier inſcrit au cercle, eſt la corde d'un arc égal au quotient de 360° diviſés par le nombre des côtés. 3.° que celui de l'exagone régulier eſt égal au rayon du cercle dans lequel il eſt inſcrit; & qu'ainſi le rayon n'excede pas d'un vingt-unieme la longueur d'un arc de 60°. 4.° Que tout polygone régulier eſt circonſcriptible au cercle. 5.° Enfin que celui dont le nombre des côtés eſt pair, doit être néceſſairement ſymmétrique. Les propriétés énoncées dans cet article nous ſerviront à réſoudre les Ptoblêmes ſuivans.

Problêmes.

I. *Circonſcrire un cercle à un polygone régulier donné.*
II. *Inſcrire un cercle dans un polygone régulier donné.*
III. *Inſcrire dans un cercle donné un polygone régulier quelconque.*
IV. *Circonſcrire un polygone régulier quelconque à un cercle donné.*

XVIII.

Après avoir démontré que le cercle eſt un polygone régulier d'une infinité de côtés, nous ferons voir en détail les différentes propriétés qu'il a étant rapporté à ſes ſécantes, à ſes cordes, ou bien à d'autres cercles. D'abord de tou-

tes les ſécantes qui partant d'un même point hors de la circonférence, ſont terminées à la partie concave, la plus longue eſt celle qui paſſe par le centre, la plus courte eſt celle qui en paſſe le plus loin; celles qui en paſſent à égale diſtance ſont égales, & il n'y en peut avoir que deux d'égales entr'elles; mais ſi les ſécantes partent d'un même point hors de la circonférence & ſe terminent à ſa partie convexe, la plus courte eſt celle qui étant prolongée paſſeroit par le centre, la plus longue celle qui en paſſeroit le plus loin; celles qui en paſſeroient à égale diſtance, ſont égales; & enfin il ne peut y en avoir que deux d'égales entr'elles. Si on tire des droites d'un même point pris en dedans du cercle autre que le centre juſqu'à ſa circonférence, on verra revenir les mêmes propriétés que ſi on les tiroit d'un point pris en dehors juſqu'à la partie concave. Si l'on conſidere les cordes qui ſe coupent dans un cercle, on verra qu'elles ne peuvent ſe couper en deux également en tout autre point que le centre: & réciproquement, que ſi deux cordes ſe coupent en deux également dans un cercle, elles s'y coupent au centre, & ſont deux diamêtres. Enfin ſi l'on compare enſemble deux circonférences de cercle, on verra qu'elles ne peuvent ſe couper en plus de deux points; que ſi elles ont trois points communs, elles ſe confondent; & que ſi elles ne font que ſe toucher, la droite qui paſſe par leur centre, paſſe auſſi par leur point de contact. Si deux droites qui font un angle ſont coupées par pluſieurs paralleles également diſtantes les unes des autres, elles le ſeront en parties proportionnelles entre elles, & proportionnelles aux lignes entieres. De-là vient cette propriété des triangles ſemblables d'avoir tous leurs côtés homologues proportionnels; & réciproquement d'être ſemblables, parce qu'ils ont leurs côtés homologues proportionnels; ou bien encore, parce qu'ils ont un angle égal renfermé entre des côtés homologues proportionnels. Quel que ſoit le triangle, ſi un de ſes angles eſt partagé en deux également par une droite, la baſe de cet angle ſera partagée par cette droite en deux parties proportionnelles aux côtés adjacents.

X I X.

La propriété qu'ont les triangles ſemblables d'avoir leurs côtés homologues proportionnels, a fait découvrir pluſieurs propriétés remarquables dans les lignes droites, d'abord que les parties de celles qui ſe coupent entre deux paralleles ſont directement proportionnelles, tandis que les parties de deux cordes qui ſe coupent dans le cercle, ſont réciproquement proportionnelles; enſuite que ſi deux ſécantes, partant d'un même point hors de la circonférence d'un cercle, vont ſe terminer à ſa partie concave, leurs ſegmens extérieurs ſont réciproquement proportionnels aux lignes entieres; & que ſi l'une de ſes ſécantes devient tangente, elle ſera moyenne proportionnelle entre l'autre ſécante entiere & ſa partie extérieure. Une propriété principale du triangle-rectangle, eſt que ſi de l'angle droit on abaiſſe une perpendiculaire

ſur