### ÉLÉMENS

DE

# GÉOMÉTRIE PLANE,

AVEC UN VOCABULAIRE ÉTYMOLOGIQUE DES TERMES PROPRES A CETTE SCIENCE;

PAR M. DANIEL ENCONTRE,

De la Société des Sciences et Belles-Lettres de Montpellier.

> longa Ambages : sed summa sequar fastigta rerum. VIRG.

#### SECONDE ÉDITION,

PUBLIÉE

#### PAR P. A. ENCONTRE,

Docteur en médecine, Professeur de Haute-Latinité et de Grec à la Faculté de Théologie Protestante de Montauban, Membre de la Société des Sciences et Belles-Lettres de la même ville,

A MONTAUBAN, Chez P. A. FONTANEL, Imprimeur du Roi.

1820.

N. B. Les notes de l'Éditeur seront désignées par les lettres P. A. E.

# PRÉFACE.

J'AI composé cet opuscule pour mes enfans. Ils ont peur des gros livres; je leur en offre un qui sera propre à les rassurer contre ce que la Science peut avoir de trop imposant: ils ont le défaut de déchirer et de perdre leurs cahiers; l'impression m'a fourni le moyen d'en multiplier suffisamment les exemplaires. Donner la chaîne des propositions les plus utiles; démontrer ces propositions d'une manière simple, claire, et néanmoins rigoureuse; telle est la tâche que je me suis imposée. Pour la remplir avec succès, j'ai fait revivre quelques anciennes démonstrations, j'en ai proposé quelques nouvelles; mais en général, cette géométrie n'est qu'un extrait de celle que suivent les élèves nationaux. Ils y trouveront une sorte de répétition de la quatrième de mathématiques; répétition qui n'exige de leur part, ni effort de mémoire, ni contention d'esprit, et qu'ils doivent regarder comme un délassement, plutôt que comme l'objet d'une nouvelle étude.

J'ai cru devoir poser en principe, avec Archimède, comme une vérité assez évidente par elle-même, qu'une droite est le plus court chemin entre deux points. On aurait pu le démontrer, en partant de la nature même de la ligne droite, caractérisée par la similitude de ses parties, et surtout, par la propriété dont elle jouit seule, savoir, qu'une ligne parfaitement égale, lui étant appliquée d'un et d'autre côté, se confond nécessairement avec elle (a); mais j'écrivais pour des enfans,

<sup>(</sup>a) Lorsqu'on veut s'assurer qu'une ligne est parfaitement droite, on ne s'amuse pas à mesurer tous les chemins différens qui peuvent conduire d'un bout de cette ligne à l'autre bout; mais on lui applique une règle d'un et d'autre côté. Si, dans cette double épreuve, le bord de la règle demeure toujours confondu avec la ligne proposée, cette ligne est certainement droite, ainsi que

je voulais éviter tout ce qui avait l'appareil trop scientifique: je ne prétendais pas d'ailleurs, faire mieux que tant d'illustres Géomètres qui ont adopté l'hypothèse d'Archimède, et l'ont même prise pour une définition (b). Tout le monde sait que ces sortes de questions sont longues, difficiles, abstraites, et que depuis trois mille ans qu'on travaille au premier chapitre de la

la règle dont on s'est servi pour la vérifier. La parfaite similitude des parties de la ligne droite, me paraît être énoncée dans la définition qu'en donne Ecclide, in desa prapud isser, stres if son toss is inverse ou prisson unitrat. Les traducteurs n'ont peut-être pas bien entendu cette définition, parce qu'elle est trop succinctement exprimée.

(b) « On peut aller, dit La Caille, d'un point A à » un point B par une infinité de chemins; mais il en » est un plus court que tous les autres, et e'est celui-là » qu'on appelle en général la ligne droite, Archimère » n'en connaissait pas de meilleure définition. » Clavius avait dit auparavant la même chose. Beaucoup d'autres Géomètres ont été les échos de La Caille et de Clavius. Si cependant on veut se donner la peine de consulter Archimère lui-même, (de Cyl. et Sph.) on se convaincra que la proposition dent il s'agit, n'est pas mise dans la série des définitions; mais dans celle des simples hypothèses.

géométrie, on n'a pas encore eu le temps de l'achever.

La théorie des parallèles est la seule qu'on trouvera ici présentée sous une forme absolument nouvelle. Parmi les différentes démonstrations que j'avais eu occasion de voir, les unes étaient courtes, mais peu exactes; les autres étaient exactes, mais trop savantes ou trop longues: il m'en fallait une, qui fût à la fois trèsexacte, très-simple, et très-courte; je me suis permis de l'inventer.

Du reste, la géométrie étant réduite à un si petit nombre de pages, on ne doit pas s'attendre à y trouver tout ce que renfermerait un gros volume. J'ai laissé quelque chose à faire aux maîtres, en supprimant le détail de cinq à six démonstrations, dont il suffisait d'indiquer la source. J'ai soulagé la mémoire des écoliers, en leur épargnant les propositions qui m'ont paru pouvoir être détachées de la chaîne, sans lui rien faire perdre de sa force ni de sa conti-

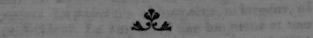
nuité. La méthode des limites est cependant traitée ici, avec plus de détail que dans les auteurs même que je voulais abréger. Cette méthode étant aujourd'hui d'un usage continuel, j'ai essayé d'en aplanir les difficultés, et quoique je me fusse imposé le devoir d'être court, je ne me suis pas dissimulé que celui d'être clair était d'une bien plus grande importance.

On trouvera, à la suite de cet opuscule, un petit vocabulaire étymologique des termes propres à la géométrie plane. L'étude des langues anciennes ayant pris faveur parmi nous, j'ai cru devoir fournir à nos jeunes mathématiciens, le moyen d'analyser les mots dont ils se servent, et de comparer le sens que ces mots avaient dans leur première origine, avec celui que le temps et l'usage leur ont donné. J'ai même eu soin d'ajouter à chaque mot français, le mot qui lui correspond dans la langue grecque; mon travail, quelque imparfait qu'il soit, sera d'autant plus utile, qu'on ne peut à cet égard s'en etre conduit d'erreur en erreur. Les anciens érudits n'étaient rien moins que géomètres (c). Excellens guides, dans tout ce qui concerne la grammaire, la géographie, l'histoire naturelle et civile, la jurisprudence même, la médecine et tous les beaux arts; ils paraissent absolument étrangers aux sciences mathématiques. Veut- on savoir, par exemple, comment se dit en grec, le rayon d'un cercle, la corde d'un arc, la tangente d'une courbe? On n'est sûr d'avoir le véritable mot, qu'autant qu'on l'a trouvé dans le texte même d'Euclide, d'Archi-

<sup>(</sup>e) Voy. dans les Bulletins de la Société des Sciences et Belles-Lettres de Montpellier, tom. II, n.º 27, une observation assez curieuse, sur la manière dont les anciens concevaient et démontraient le parallélogramme des forces. On a cru jusqu'ici qu'ils n'en avaient pas la moindre idée. Ballet et Montucla ont eux-mêmes accrédité cette erreur: j'ai fait voir qu'elle n'avait d'autre source, que les mauvaises traductions d'Abistote, dont les auteurs, n'entendant rien au langage géométrique, ont changé le grec le plus attique et le plus clair, en un latin inintelligible et barbare.

MÈDE, d'APOLLONIUS, ou des autres auteurs qui ont écrit sur ces matières. Il faut donc se donner la peine de l'y chercher. C'est ce que j'ai fait, pour mon propre usage et pour celui des autres, en indiquant avec une scrupuleuse exactitude, les sources où j'ai puisé.

La géométrie des solides, accompagnée de son vocabulaire particulier, et réduite comme la géométrie plane à ses moindres termes, paraîtra, j'espère, aussitôt que mes enfans seront en état d'en profiter.



person of accounts us, on des autres and the come qui ant conte un cosmadares. Il faux done a donner le pride de l'y charchers fiere to que jai test, pour mon propre usage et pour celui des autres, en indi-quant account acronne acropoleuse exactivales les come acropoleuse exactivales les come en en l'alignese.

Lageometrie des all les, accompagnée de son varabulaire par ignifier, et reduire concurs la gramérie plane à ses insindres terms, paratire, i pare, aussitot que mes culturs seront en état d'en profrer.

### ELEMENS

DE

# GÉOMÉTRIE PLANE.

### §. I. Notions préliminaires.

r. La Géométrie est une science qui considère les corps relativement à leur grandeur et à leur forme. Les corps sont nécessairement renfermés dans de certaines bornes ou limites. Ces limites sont appelées surfaces; les limites des surfaces sont des lignes; les limites des lignes sont des points. Le point n'a ni longueur, ni largeur, ni profondeur. La surface a une longueur et une largeur sans profondeur. Le corps ou volume a une longueur, une largeur et une profondeur.

2. On appelle droite, une ligne uniforme dans son cours, dont les parties ne peuvent différer qu'en grandeur, et dont un côté peut s'appliquer exactement contre l'autre. Il est d'ailleurs évident que la droite est le plus court chemin entre deux points, ce qui est moins une définition

qu'un axiome.

Toute ligne qui n'est pas droite ou composée de droites, est courbe. On peut même considérer

la courbe comme formée d'une infinité de petites droites. La surface plane est celle sur laquelle on peut, dans tous les sens, tracer une ligne droite. Une surface plane dont la grandeur est

indéfinie, s'appelle un plan.

3. Si la Géométrie se bornait aux pratiques de l'arpentage ou du toisé, elle ne serait qu'un art; mais elle rend compte de ses procédés, elle démontre rigoureusement les vérités qu'elle propose, c'est ce qui lui assigne un rang distingué parmi les sciences. Or, pour démontrer une vérité encore douteuse, il faut la lier à quelqu'autre vérité dont nous soyons déjà certains, de manière qu'on ne puisse nier l'une, sans nier aussi l'autre. Cela suppose qu'avant de s'occuper des vérités de la Géométrie, on connaît déjà quelques principes évidens auxquels ces vérités peuvent être rapportées. Tels sont ceux-ci:

Deux quantités égales à une troisième sont égales entrelles. — Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, les sommes seront égales, etc.

4. La Géométrie suppose aussi que l'on connaît les principaux théorèmes de l'arithmétique.

Un nombre étant multiplié par un autre nombre, si l'on divise le produit par cet autre nombre, on retrouvera le premier au quotient.

$$\frac{A \times B}{B} = A.$$

Le produit du quotient par le diviseur est

Egal au dividende. Si 
$$\frac{A}{B} = C$$
;  $C \times B = A$ .

Deux nombres étant successivement mul-

tipliés par un troisième, la somme et la différence des produits sont égales à la somme et à la différence des deux premiers nombres, multipliées par le troisième.

 $A \times B + C \times B = (A + C) \times B$ .

 $A \times B - C \times B = (A - C) \times B$ . &c. 5. Il s'agit souvent en Géométrie de prouver que si certaines conditions ont lieu, d'autres ont aussi lieu en vertu des premières. Les conditions supposées sont ce qu'on appelle l'hypothèse. Toute vérité qu'il s'agit de démontrer, doit être une conséquence nécessaire, ou de l'hypothèse, ou de quelqu'une des propositions démontrées auparavant, ou de quelqu'une de ces propositions évidentes par elles-mêmes, qu'on appelle axiomes. La définition peut être regardée comme faisant partie de l'hypothèse.

6. Deux droites indéfiniment prolongées, que l'on pose l'une sur l'autre, de manière qu'elles aient plus d'un point commun, se confondent dans tout leur cours, Car elles ne pourront se séparer qu'autant qu'elles seront de forme différente, ce qui est contre la définition. Voilà pourquoi deux points suffisent pour déterminer la position de la règle, instrument dont on se

sert pour tracer des lignes droites.

7. Deux lignes ou deux surfaces déterminées qui se couvrent ou peuvent se couvrir réciproquement, sont parfaitement égales. C'est même le plus évident des caractères d'égalité. On démontrera souvent que deux figures sont égales entr'elles, non en les posant matériellement l'une sur l'autre; mais en prouvant que si la chose était faite, les deux figures se confondraient. C'est ce qu'on appelle démontrer par superposition.

8. Mesurer, c'est chercher combien de fois une quantité qu'on ne connaît pas, contient une quantité de même nature et qu'on suppose connue. Il suit de là que les lignes se mesurent par des lignes, les surfaces par des surfaces, les volumes par des volumes. Lorsque plusieurs quantités, de même nature, sont rapportées à une mesure commune, on peut les exprimer par des nombres, ce qui donne une idée nette des relations qui se trouvent entre leurs grandeurs. Supposons, par exemple, trois distances inégales. Quoique ces distances soient saisies par l'œil, il arrivera souvent que nous ne serons pas même en état de proponcer quelle est la plus grande: mais, si nous apprenons que l'une est de 100 mètres; l'autre de 102; la troisième de 107; nous aurons tout ce qu'il faut pour les comparer. La comparaison des quantités donne naissance aux rapports, matière qui doit avoir été traitée dans l'arithmétique; mais dont il ne sera pas inutile de rappeler ici les principes fondamentaux.

### §. II. Des Rapports.

9. Deux quantités que l'on compare, pour examiner combien de fois l'une des deux contient l'autre, ou combien de fois chacune des deux en contient une troisième prise pour leur commune mesure, forment ce qu'on appelle un rapport. Les quantités que l'on compare sont les termes du rapport. Le nombre entier ou fractionnaire qui exprime combien de fois le premier terme ou l'antécédent, contient le second terme ou le conséquent, est l'exposant du rapport. L'exposant est donc un nombre abstrait.

10. Deux rapports dont les exposans sont égaux

forment une proportion. Par exemple, le rapport de 10 mètres à 3 mètres, et celui de 10 grammes à 3 grammes, ont pour exposant ; on dit que 10 mètres sont à 3 mètres, comme 10 grammes à 3 grammes; ce qui s'écrit ainsi;

10m: 3m:: 10gr: 3gr. C'est une proportion. 11. Si l'on multiplie les deux termes d'un rapport par un même nombre, l'exposant du rapport ne change pas de valeur: ainsi le rapport de 7 fois 10 mètres à 7 fois 3 mètres est égal au rapport

de 10 mètres à 3 mètres; car  $\frac{10 \times 7}{3 \times 7}$ =

comme on le démontre en arithmétique. Voilà pourquoi les nombres qui expriment le premier rapport, peuvent quelquefois être différens de ceux qui expriment le second : mais si les deux rapports sont ramenés, par la méthode du plus grand commun diviseur, à leur expression la

plus simple, ils deviendront identiques.

12. On démontre en arithmétique, que, dans toute proportion le produit des termes extrêmes est égal à celui des moyens. Que, réciproquement, si quatre termes donnent le produit des extrêmes égal à celui des moyens, ces quatre termes sont en proportion. Que la différence des deux premiers termes est à la différence des deux derniers, comme le premier est au troisième, comme le deuxième est au quatrième. Que, dans une suite de rapports égaux; la somme des antécédens està la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent. Que, si l'on multiplie une proportion par une autre, premier terme par premier terme, deuxième terme par deuxième terme.

&c., ce qui s'appelle multiplier par ordre, les produits seront en proportion. Que, par conséquent, si quatre quantités sont en proportion, leurs carrés seront en proportion, et qu'il en sera de même de leurs autres puissances. Mais ces propositions ne sont vraies, qu'autant que les proportions sont réduites à des nombres abstraits; car un des premiers théorèmes de l'arithmétique est que deux nombres concrets ne peuvent être

multiplies l'un par l'autre.

13. Il suit de là, que la théorie des proportions ne peut être appliquée aux quantités géométriques, qu'autant que ces quantités sont exprimées en nombres, au moyen d'une mesure commune: mais deux quantités de même nature ont-elles nécessairement une mesure commune? Rien ne nous autorise à l'assurer. Il est des cas où cette commune mesure peut exister sans qu'on la trouve; il en est d'autres où l'on sait qu'elle n'existe pas. Deux quantités qui n'ont point de commune mesure, sont dites incommensurables; telles sont 3 et 12.

14. Deux quantités qui n'ont pas de commune mesure se contiennent cependant l'une l'autre, et ont nécessairement entr'elles un rapport; mais nous ne pouvons nous en former une idée nette, parce que nous n'en avons pas d'expression exacte; ce qui n'empêche pas, qu'étant proposés deux rapports incommensurables A: B; C: D, on ne puisse les comparer entr'eux, et prononcer avec certitude qu'ils sont égaux ou inégaux. Si

l'on trouve, par exemple,

A=2.B+un reste. C=2.D+un reste A=2,3.B+un reste C=2,3.D+un reste A=2,36.B+un reste C=2,36.D+un reste &c. Si l'on sait d'ailleurs, qu'il en sera de même, en poussant aux millièmes, aux dix-millièmes, etc.; on est en droit d'assurer que le rapport A: B est égal au rapport C: D, quoique ni l'un ni l'autre de ces rapports ne soit exprimé d'une manière exacte (\*).

15. Si l'on renverse l'ordre des termes d'un

(\*) Soient, par exemple, proposés les rapports 3 : 1/2 et 5 : 1/2. L'approximation des quantités irrationnelles étant poussée jusqu'à la dixième décimale, on les mettra sous la forme

Si maintenant on exécute les deux divisions et qu'on s'arrête aux nombres entiers, on trouvera

$$5 = 2\sqrt{2} + \dots$$
  $5 = 2\sqrt{\frac{10}{9}} + \dots$ 

Si l'on s'arrête successivement aux dixièmes, aux centièmes, etc., on frouvera de même

$$5 = 2, 1 \times \sqrt{2} + \dots \quad 5 = 2, 1 \times \sqrt{\frac{6}{9}} + \dots \\ 5 = 2, 12 \times \sqrt{2} + \dots \quad 5 = 2, 12 \times \sqrt{\frac{6}{9}} + \dots \\ 5 = 2, 121 \times \sqrt{2} + \dots \quad 5 = 2, 121 \times \sqrt{\frac{6}{9}} + \dots$$

$$5 = 2,1213 \times \sqrt{2} + \dots \quad 5 = 2,1213 \times \sqrt{\frac{50}{9}} + \dots$$

Si l'on sait d'ailleurs que cette correspondance aura toujours lieu pour si loin que l'opération soit poussée, on dira que le rapport de 5 à  $\sqrt{2}$  est égal au rapport de 5 à  $\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

Il est aisé de voir par la que les propriétés énoncées, n.º 12, appartiennent aux proportions dont les rapports sont incommensurables, aussi bien qu'à celles dont les rapports sont commensurables.

P. A. E.

rapport, le nouveau rapport qui en résulte, est dit inverse du premier. Ainsi le rapport 3: 10 est inverse du rapport 10: 3.

16. Deux quantités sont dites en raison directe de deux autres, lorsque le rapport des deux premières est égal à celui des deux autres, le même ordre étant conservé. Par exemple, le rapport de deux quantités de marchandises de même espèce est égal à celui de leurs prix respectifs.

1.e q.té : 2.de q.té :: 1.t pr. : 2.d pr.

Les prix sont en raison directe des marchandises.

Deux quantités sont en raison inverse de deux autres, lorsque le rapport des deux premières est égal au rapport inverse des deux autres. Par exemple, si deux mobiles parcourent un même espace avec des vîtesses inégales, les temps qu'ils emploieront seront en raison inverse des vîtesses. On n'aura pas,

T.s du 1.r: t.s du 2.d:: v.e du 1.r: v.e du 2.d. Mais t.s du 1.r: t.s du 2.d:: v.e du 2.d: v.e du 1.r

17. Si l'on multiplie deux rapports l'un par l'autre, antécédent par antécédent, et conséquent par conséquent, le nouveau rapport qui en résulte est composé des premiers. Ainsi le rapport

 $\frac{10.7}{3.4}$  est composé des rapports  $\frac{10}{3}$ ;  $\frac{7}{4}$ .

18. Lorsqu'une quantité A dépend tellement de plusieurs autres B, C, D, que chacune de celles-ci venant à être multipliée par un nombre quelconque, la quantité A soit multipliée tout à la fois, par chacun des nombres qui multiplient séparément B, C, D, on dit que A est en raison composée de B, C, D. Par exemple, l'intérêt que porte une somme dépend, 1.º de la

grandeur de cette somme; 2.º du temps qu'elle demeure à la banque; 3.º du cours de l'agio ou de la somme déterminée qu'on donne pour chaque cent francs dans un temps aussi déterminé. Quadruplez le premier de ces élémens, triplez le second, doublez le troisième, vous aurez multiplié l'intérêt par 4, par 3 et par 2,

ou par  $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

Si la quantité  $\mathcal{A}$  dépend tellement de  $\mathcal{B}$  et de  $\mathcal{C}$ , que  $\mathcal{B}$  étant multiplié par un certain nombre,  $\mathcal{A}$  soit nécessairement multiplié par le même nombre; et que  $\mathcal{C}$  étant multiplié par un autre nombre,  $\mathcal{A}$  soit divisé par cet autre nombre; on dit que  $\mathcal{A}$  est en raison composée, directe de  $\mathcal{B}$ , et inverse de  $\mathcal{C}$ . Par exemple, le temps employé par un certain nombre d'ouvriers à faire un certain ouvrage, est en raison composée, directe de la quantité d'ouvrage, et inverse du nombre d'ouvriers.

Ces principes sont plus que suffisans pour l'in-

telligence de ce qui doit suivre.

### S. III. Du Cercle, des Angles, etc.

19. Si une droite (OA, fig. 1.) tourne dans un plan sur une de ses extrêmités O, et s'arrête enfin dans une position OB; l'espace AOB parcouru par cette droite, s'appelle un secteur; l'espace AFB parcouru par le point A s'appelle un arc; et si la droite achevant sa révolution, revient se placer dans la position OA, l'espace entier qu'elle aura parcouru s'appelle cercle; la limite de cet espace, ou l'espace parcouru par A, s'appelle circonférence. Le point fixe O s'appelle centre.

Il suit de la génération du cercle que tous les points de la circonférence sont à égale distance du centre, et que la circonférence est uniforme dans son cours ainsi que la droite; mais une portion de droite présente la même forme, de quelque côté qu'on la considère, il n'en est pas de même d'un arc.

20. Toute droite menée du centre à la circonférence s'appelle rayon; deux rayons disposés en ligne droite sont un diamètre. Il suit de la génération du cercle, que les rayons d'un même cercle ou de cercles égaux sont égaux, étant tous égaux à la droite génératrice; et qu'il en est de même des diamètres, puisqu'ils sont composés de deux rayons. Il s'ensuit encore que deux cercles sont égaux si leurs rayons sont égaux.

21. Une droite AB terminée d'un et d'autre côté à la circonférence est une corde; elle divise le cercle en deux segmens, et est dite soutenir

I'arc du plus petit.

Si deux arcs AFB, EG'D sont égaux, leurs cordes sont égales, et réciproquement; car en supposant qu'à des cordes inégales répondent des arcs égaux, on supposera que la circonférence est plus ou moins courbée dans une partie que dans l'autre, ce qui est contre la génération et la définition du cercle. (19.)

Par la même raison, le diamètre coupe le cercle et la circonférence en deux parties égales.

22. De plus, si deux arcs ED, EI, moindres que la demi - circonférence, sont inégaux, le plus grand EI répond à la plus grande corde. Menez les rayons OE, OI, OD, ce dernier

coupera nécessairement EI, en quelque point K.

Or, OK + KI est plus grand que OI ou OD.

Donc KI > KD. Mais EK + KD > ED. Donc, à plus forte raison, EK + KI, ou EI > ED.

23. On exécute le mouvement de la droite OA autour du point O, avec l'instrument appelé compas, dont une des pointes reposant sur O, l'autre parcourt la circonférence. Un fil tendu entre les deux pointes serait la génératrice. Nous supposerons qu'on peut toujours décrire une circonférence dont le centre et le rayon soient donnés.

24. Si deux cercles ont le même centre, et qu'on mène par ce centre commun deux droites OM, ON, qui coupent la plus petite circonférence aux points a, b, la plus grande aux points A, B, les rapports des secteurs aOb, AOB, à leurs cercles respectifs seront égaux.

En effet, si l'on considère ON comme couchée d'abord sur OM, et faisant ensuite une partie quelconque de sa révolution, une sixième partie, par exemple, il faudra que tous les points de cette droite fassent aussi une sixième partie de leur révolution; ainsi le secteur aOb sera une sixième partie de son cercle, et le secteur AOB, une sixième partie du sien; et quel que soit le rapport, exprimable ou non exprimable, de la partie de la révolution faite par ON, à la révolution entière, ce même rapport sera celui des secteurs aOb, AOB à leurs cercles respectifs.

25. Lorsque l'on considère un secteur, non dans sa grandeur absolue, mais dans son rapport au cercle entier dont il fait partie, quel qu'en soit le rayon, on l'appelle angle. Ainsi, sect. aOb est plus petit que sect. AOB; mais angle aOb = AOB parce que aOb est à son cercle comme AOB est au sien.

26. De plus les points a, A, ayant parcouru chacun la même partie de sa révolution entière, que ON a parcouru de la sienne, il en résulte que les arcs expriment comme les angles les rapports des secteurs aux cercles. Voilà pourquoi, on dit communément que les angles sont mesurés par les arcs; ce qui signifie, que le rapport de deux angles quelconques, est égal à celui des deux arcs correspondans.

27. Sur une droite donnée om, faire un

angle égal à l'angle donné MON.

Du centre O décrivez un arc qui coupe OM, ON en deux points A, B. Du centre o décrivez arc a'f qui coupe om en un point a'. Portez la distance AB de a' en b' sur l'arc a'f; enfin menez ob'n; vous aurez, mon = MON.

Car la corde AB étant, par construction, égale à la corde a'b', et le rayon étant le même, les arcs qui leur correspondent sont égaux, et par conséquent il en est de même des angles.

28 Faire une figure parfaitement égale à une figure donnée ABCD (fig. 2).

Tracez une droite ab = AB. Faites angle  $ab_{\gamma} = ABC$ . Il est évident que si l'on place a sur A, et b sur B,  $b_{\gamma}$  prendra la même

direction que BC; faisant donc bc = BC, le

point c tombera sur C.

Faites angle bcs = BCD et prenant cd = CD, vous pourrez placer a sur A, b sur B, c sur C, d sur D. Menez da, et les points a, b, c, d pouvant être placés sur les points A, B, C, D, il en sera de même des droites comprises entre ces points. Les deux figures se couvriront donc réciproquement, elles seront

donc égales.

29. Pour rendre plus commode l'usage des arcs et des angles, on divise le cercle en parties égales par des rayons OA, OB, OC, etc. (fig. 1). Les Géomètres de tous les pays et de tous les siècles s'étaient accordés à diviser le cercle en 360 degrés, le degré en 60 minutes, la minute en 60 secondes, etc., c'est la division sexagésimale. On s'est avisé, depuis quelques années, de diviser le cercle en 400 grades, le grade en 100 minutes, la minute en 100 secondes, etc. C'est la division décimale ou plutôt centésimale. Nous indiquerons le degré par d, le grade par g, la minute par ', la seconde par ".

30. Un angle de 90. dou qui embrasse le quart de la circonférence est appelé angle droit, un angle < 90. dest aigu, un angle > 90. dest obtus.

Il suit de là que tous les angles droits sont égaux, et que si OC (fig. 1.) fait un angle droit avec OA, elle en fera un avec son prolongement OE; car prenant OE = OA, et du centre O avec rayon OA décrivant une circonférence, AE sera un diamètre, ACE un demicercle; et puisque AOC, est un quart de cercle, il faut que COE soit l'autre quart.

31. Si une droite NO rencontre une autre droite AE, elle forme avec elle deux angles dont la somme vaut deux droits; car les angles AON, NOE sont la même chose que AOB, BOE dont la somme fait un demi-cercle.

Réciproquement, si AOB, BOE valent deux droits ou un demi-cercle, AE est nécessairement un diamètre et par conséquent une

droite.

On voit encore que la somme de tous les angles AOH, HOE, EOD, etc., qu'on peut former autour d'un même point, vaut quatre

droits, ou le cercle entier.

32. On appelle supplément d'un angle, ce qu'il y faut ajouter pour le rendre égal à 180 d; et complément, ce qu'il y faut ajouter pour le rendre égal à 90. d Deux angles qui ont des supplémens ou des complémens égaux, sont égaux; car se trouvant égaux après l'addition d'une même quantité, ils l'étaient nécessairement avant cette addition.

33. Les angles opposés au sommet, tels que AOB, EOH sont égaux, car ils ont l'un et

l'autre même supplément BOE.

34. Trouver, sans autre instrument que le compas, le nombre de degrés, minutes et se-

condes d'un arc donné, tel que AG.

Portez la distance AG, de G en G', de G' en G'', et ainsi de suite autour de la circonférence, jusqu'à ce qu'après une ou plusieurs révolutions, une des pointes du compas retombe sur A. Multipliez par  $360.^{d}$  le nombre de révolutions entières, et divisez par le nombre de pas qu'aura fait l'instrument, le quotient sera la valeur de l'arc. Supposez, par exemple,

qu'après avoir fait trois fois le tour du cercle, le onzième pas ait ramené une des pointes sur A, la valeur de l'arc AG sera  $3 \times 360^{d}$   $1080^{d}$ 

 $\frac{3 \times 360^{d}}{11} = \frac{1080^{d}}{11} = 98.^{d} \text{ 10}' 54''.$ 

En effet, onze arcs égaux ayant fait 3 fois 360.d ou 1080.d, il faut que chacun de ces arcs soit égal à la onzième partie de 1080.d

### §. IV. Des Triangles.

35. Une surface plane ABC, (fig. 4.) renfermée entre trois droites, s'appelle un triangle. Le triangle est équilatéral quand ses trois côtés sont égaux; isoscèle quand il a deux côtés égaux; scalène quand les trois côtés sont

inégaux.

36. Si d'un point K, pris sur un des côtés AC d'un triangle ABC, on mène une droite KB à l'angle opposé, la somme des droites AK+KB, est plus courte que AC+BC. Car KB < KC +BC: ajoutant de part et d'autre AK, nous aurons AK+KB < AK+KC+BC, ou AK+KB < AC+BC.

37. Si d'un point O, pris dans l'intérieur d'un triangle ABC, on mène à deux angles A, B, des droites OA, OB, leur somme sera plus courte que celle des côtés enveloppans CA, CB.

Car, par ce qui précède, la somme AO + OB est plus courte que AK + KB qui est plus courte

que AC + CB.

38. Deux circonférences ne peuvent se couper

qu'en deux points.

Soient d, e, f, (fig. 5.) trois points qu'on prétend être communs à deux circonférences,

dont les centres soient o, c. Tirez oc, et au moins deux des points proposés se trouveront d'un même côté de oc. Soient ces points e, d; s'ils sont communs aux deux circonférences, od, oe sont rayons de la première; cd, ce rayons de la seconde: il en résulte od+cd=oe+ce, ce qui est impossible par le N.º précédent, il est donc impossible que d, e appartiennent en même temps, aux deux circonférences. (\*)

Remarquez que les points f, d, qui peuvent appartenir aux deux circonférences, sont, l'un d'un côté, l'autre de l'autre, de la droite qui

joint les centres.

39. Deux triangles ABC, DEF, (fig. 4.) sont égaux s'ils ont un angle égal, entre côtés égaux chacun à chacun.

II. Soit g (fig. 26), le point situé sur la droite do, l'une des deux droites menées de l'autre point aux centres o, c. Menez gc. Vous aurez og + gc = od + de ce qui est absurde.

III. Supposons que le point soit en e, tirez oe, ce. Le point e étant hors du triangle ode, un des rayons qui aboutissent en e coupera un des rayons qui aboutissent en d (S'il en était autrement, ce 3.º cas rentrerait dans le 1.º Soit g le point d'intersection.

og + ge > oe cg + gd > cd. Faisant l'addition terme à terme, nous avons og + ge + cg + gd > oe + cd ou bien od + ce > oe + cd ce qui est absurde. P. A. E.

<sup>(\*)</sup> Il arrivera nécessairement que l'un des deux points tels que e se trouvera entre les droites do, de menées de l'autre point aux centres, ou qu'il tombera sur l'une de ces droites, ou qu'il tombera en dehors. La démonstration du 1. cr cas est complète; voici celle du 2. et du 5. cas.

On suppose 1.° angle ABC = DEF, 2.° AB = DE, 3.° BC = EF. Par première hypothèse, si on pose angle DEF sur angle ABC, les droites ED, EF, prendront mêmes directions que BA, BC. Par seconde et troisième, elles se termineront aux mêmes points. Les points D, E, F, seront donc sur les points A, B, C, les deux triangles se recouvriront donc réciproquement, ils seront donc égaux.

40. Deux triangles sont encore égaux lorsqu'ils ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux

chacun à chacun.

Hypothèse. 1.º AC=DF. 2.º angle BAC=

EDF. 3.º angle ACB=DFE.

Par première hypothèse on peut placer D sur A, F sur C. Par seconde et troisième, DE, FE prendront mêmes directions que AB, CB, elles se couperont donc aux mêmes points, ainsi E tombera sur B en même temps que D sur A, et F sur C, les deux triangles seront donc égaux.

41. Deux triangles sont encore égaux lorsque leurs trois côtés sont égaux chacun à chacun.

On suppose 1.° AB=DE; donc on peut mettre en même temps A sur D, B sur E.

2.º AC=DF; donc si du point D, avec rayon DF, on décrit une circonférence, le point C sera sur cette circonférence.

3.° BC = EF, donc si du point E, avec rayon EF, on décrit une circonférence, C sera sur

cette circonférence.

Or deux circonférences ne peuvent se couper du même côté de DE, qu'en un point F, donc, puisqu'en posant les deux triangles l'un sur l'autre, C se trouvera du même côté et sera sur les mêmes circonférences, il se confondra nécessairement avec le point E. Done, les trois sommets seront en même temps l'un sur l'autre, donc, etc.

### §. V. Des Perpendiculaires, des Obliques, et des Parallèles.

42. Deux droites qui se rencontrent sont dites perpendiculaires l'une à l'autre, si l'angle qu'elles forment est droit, et obliques s'il est obtus ou aigu.

43. D'un même point A (fig. 3.), on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire AC sur

une même droite BD.

Car si l'on suppose une autre perpendiculaire AE, prolongez AC d'une quantité CG = AC, et tirez EG. Les triangles ACE, GCE sont égaux, ayant un angle droit compris entre côtés égaux chacun à chacun. On aura donc angle AEC = CEG, et l'un des deux étant supposé droit, tous deux le seront; AEG sera par conséquent une droite (31), ce qui est absurde; il est donc absurde que AE soit perpendiculaire sur BD, en même temps que AC.

44. Deux perpendiculaires à une droite ne peuvent donc se rencontrer pour si loin qu'on

les prolonge.

45. Par un même point C, pris dans une droite BD, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite. Car, dire par exemple, que CA, CH sont l'une et l'autre perpendiculaires sur BD, c'est dire que angle HCB = ACB, on que la partie cet égale au tout, ce qui est absurde.

46. Deux obliques AE, AF, menées d'un point de la perpendiculaire à distances égales CE, CF de son pié C, sont égales. On le prouve par l'égalité des triangles ACE, ACF (\*).

47. Une perpendiculaire AC, est plus courte qu'une oblique AE menée du même point à la

même droite.

Car ayant pris comme ci-dessus CG = CA, on aura toujours AE = EG; or AEG ou

2AE > AG ou 2AC, donc AE > AC.

48. L'oblique AK plus éloignée de la perpendiculaire que AE est plus grande que AE. Car AKG ou 2AK>AEG ou 2AE (37), donc AK>AE. Il en résulte que d'un même point A, on ne peut mener à une droite BD, que deux droites égales, d'où l'on conclut qu'une circonférence ne peut couper une droite qu'en deux points.

49. Un point M, pris dans le plan de la figure hors de la perpendiculaire AC, est inégalement éloigné des points E, F pris sur BD, à égale

distance de son pié.

Menez FM qui coupe nécessairement AC en quelque point N; menez aussi ME, NE; vous

<sup>(\*)</sup> On peut observer ici que les triangles AKE, AKF ont les côtés AK, AE; AK, AF, égaux chacun à chacun; et que l'angle opposé au côté AE dans le premier triangle, est égal à l'angle opposé au côté AF dans le second. Ces deux triangles ne sont pas égaux. Mais deux triangles sont nécessairement égaux, quand ayant deux côtés égaux chacun à chacun, et un angle opposé à l'un de ces côtés égal; l'angle opposé à l'autre côté est de même espèce dans les deux triangles.

aurez NM+NE>ME. Mais NM+NE=MF,

à cause de NE = NF; donc MF > ME.

50. Donc si un point est également éloigné de E et de F, il appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de EF; donc si l'on détermine deux points également éloignés de E et de F, la droite menée par ces deux points, sera perpendiculaire sur EF, et passera par son milieu.

51. Par un point C donné sur une droite,

élever une perpendiculaire à cette droite.

Prenez CE = CF. Des centres E, F, avec même rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en un point A. Ce point A sera sur la perpendiculaire, puisque AE = AF, et le point C y étant aussi, AC sera la perpendiculaire cherchée.

52. Du point A, pris hors de la droite BD,

abaisser une perpendiculaire à cette droite.

Du centre A, décrivez un arc qui coupe BD en deux points, E, F Des centres E, F, avec même rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en un point G. La droite AG, aura deux points A et G, également éloignés de E et de F; elle sera donc perpendiculaire à EF, et par conséquent à BD.

- 53. Couper une droite EF en deux parties égales. Des centres E, F, avec même rayon, décrivez deux arcs qui se coupent d'un côté de la droite en A, et deux arcs qui se coupent de l'autre côté en G, la droite AG déterminera le milieu de EF, comme il est évident par N. 50.
- 54. Si la droite ab (fig. 6.) est perpendiculaire à ad et oblique à bc, toutes les perpendiculaires qu'on pourra mener de bc sur ad ne seront pas égales.

Car soit menée de perpendiculaire sur bc, ef perpendiculaire sur ad,

ef perpendiculaire sur ad est plus courte que

ea qui lui est oblique;

ae perpendiculaire sur be est plus courte que ab qui lui est oblique; donc à plus forte raison ef < ab.

55. Si une droite ab (fig. 7.) perpendiculaire sur une autre droite ad, glisse le long de ad, lui demeurant perpendiculaire, l'extrémité b

décrit une droite.

Car on ne pourra pas supposer qu'une partie de la trace bc, soit autrement faite qu'une autre partie. Si d'ailleurs bc était une courbe, elle serait concave ou convexe vers ad; dans l'un et dans l'autre cas, les perpendiculaires abaissées de ses différens points sur ad ne pourraient être égales entr'elles. — La droite bc est ce qu'on appelle une parallèle à ad.

56. La génératrice ab, étant perpendiculaire à la directrice ad, est aussi perpendiculaire à la parallèle bc. Car si elle lui était oblique, les perpendiculaires abaissées de bc sur ad, ne pourraient être toutes égales (54), ce qui est contre

l'hypothèse.

De même donc que bc est produite par le mouvement de ab, le long de ad, on pourra dire aussi que ad est produite par le mouvement de ab le long de bc, ainsi ad est parallèle à bc.

En général, pour que deux droites ad, bc soient parallèles, il suffit qu'elles soient perpendiculaires à une même droite ab; car si l'on fait glisser ab, de manière qu'elle demeure perpendiculaire à l'une des deux, ses extrémités a, b, les parcourront nécessairement l'une et l'autre.

57. Si deux parallèles ad, bc, sont coupées par une troisième droite ef, les angles ehd, bgf, formés, l'un à droite l'autre à gauche de la sécante, l'un par la parallèle inférieure, l'autre par la supérieure, (on les appelle alternes-internes) sont égaux.

Menez gk, hi perpendiculaires aux parallèles; vous aurez, dans les triangles gih, gkh; gh commun et hi=gk: ces triangles seront donc égaux, et par conséquent, angle igh ou bgf

=ghk, ou ehd.

58. Les angles alternes-externes ahf, egc sont égaux. Car ahf=ehd . . . . egc=bgf. Or on vient de trouver ehd=bgf. Donc ahf=egc.

On démontrera de même avec la plus grande facilité, que les angles correspondans tels que egc, ehd sont égaux. Que deux angles internes pris d'un même côté de la sécante sont supplément l'un de l'autre. Et qu'il en est de même de deux externes.

Ces trois nouvelles propriétés dépendent des deux précédentes, qui dépendent jelles-mêmes l'une de l'autre, de manière que l'une des cinq étant démontrée, les autres en résultent nécessairement.

59. Si deux droites, ad, bc, coupées par une troisième, ef, ont quelqu'une des propriétés

précédentes, elles seront parallèles.

D'abord si elles en ont une, elles les auront toutes cinq (58). Il suffira donc de prouver qu'elles sont parallèles si elles font les angles alternes-internes égaux.

Par g soit menée mn parallèle à ad. On aura (57) mgf=ehd, et par l'hypothèse bgf=ehd; donc mgf=bgf, ce qui ne peut être, qu'autant

que bg sera confondue avec mg, ou sera la parallèle elle-même.

60. Par un point donné g, mener une paral-

lèle à une droite ad.

Par g tirez une droite qui coupe ad en quelque point h, puis faites (27) angle hgb=ghd, la droite bg sera la parallèle cherchée, puisque bg, ad, coupées par une troisième droite, font les angles alternes-internes égaux.

61. Deux angles ehd, pqr tournés dans le même sens, et dont les côtés sont parallèles

chacun à chacun, sont égaux.

Prolongez pq jusqu'à la rencontre de hdt en s, vous aurez angle pqr=pst (58), et pst = ehd, donc pqr=ehd.

§. VI. Droites considérées relativement au Cercle. Angles dont le sommet est à la circonférence. Somme des angles d'un Triangle.

62. Une droite bd (fig. 9.) perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon oa, ne peut avoir d'autre point commun avec le cercle, que l'extrémité a du rayon. Car oe, menée par tout autre point e de bd, sera plus longue que oa, (47) le point

e sera donc hors du cercle.

Réciproquement, si bd n'a de commun avec le cercle qu'un point a, le rayon oa sera perpendiculaire sur bd; car tout autre point e, pris sur bd, étant supposé hors du cercle, oe sera plus longue que oa, qui étant la plus courte des droites qu'on peut mener de o sur bd, sera par conséquent perpendiculaire à bd.

Une droite telle que bd, qui touche la circonférence sans la couper, est appelée tangente. On mène une tangente au cercle, par un point donné sur la circonférence, en élevant une perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui aboutit à ce point.

63. Si deux cercles (fig. 9.) ont leurs centres c, o, distans d'une quantité co égale à la somme de leurs rayons, cf, of, ils se touchent au point f sans se couper; et le point de contact est nécessairement sur la ligne des centres. V. la fig.

64. Une perpendiculaire, élevée au milieu K d'une corde ah, passe par le centre, et par le milieu i de l'arc que la corde soutend. (fig. 9.)

Car elle doit passer par tous les points également éloignés de a et de h; or le centre est évidemment un de ces points, et le milieu de l'arc en est un autre.

Il suit de là que pour couper un arc en deux parties égales, on n'a qu'à élever une perpendiculaire sur le milieu de la corde qui le soutend. Ce qui s'applique indifféremment aux arcs plus ou moins grands que la demi-circonférence.

Car OK passe également par i milieu de l'arc

ab, et par q milieu de l'arc agh.

De là suit encore la méthode de couper un angle en deux parties égales.

65. Faire passer une circonférence par trois points donnés a, h, g, non en ligne droite.

Puisque ces points doivent être sur la circonférence, ah, ag, sont des cordes. Or les perpendiculaires élevées sur le milieu de chacune de ces cordes doivent passer par le centre, qui sera nécessairement le point où elles se couperont. Elevant donc ces perpendiculaires, on aura le centre; sa distance au point a sera le rayon, ce qui suffit pour décrire le cercle.

On trouve, par le même moyen, le centre

d'un arc donné.

66. Un angle dah, (fig. 9.) formé par une tangente et une corde, a pour mesure la moitié de l'arc ah soutenu par la corde; c'est-à-dire

que dah = aoi (64).

Menez om parallèle à ah, et par conséquent perpendiculaire à oi. Les alternes-internes hao, aom seront égaux (57). Des angles droits dao, iom, retranchez les angles égaux hao, aom, les restes seront égaux. Donc dah = aoi.

67. Un angle inscrit, c'est-à-dire, formé par deux cordes, tei que hal, a pour mesure la moitié de l'arc hl, compris entre ses côtés.

Menez la tangente ad. Angle dal = dah + hal. Cet angle dal a pour mesure  $\frac{1}{2}$  arc ahl, ou  $\frac{1}{2}ah$   $+\frac{1}{2}hl$ ; mais  $\frac{1}{2}ah$  est la mesure de la première partie dah; donc  $\frac{1}{2}hl$  est la mesure de la seconde hal (\*).

68. Il suit de là que les angles inscrits et appuyés sur le même arc, sont égaux, et qu'ils sont droits lorsqu'ils sont appuyés sur le diamètre.

69. La somme des trois angles a, b, c, d'un triangle, vaut toujours deux droits. (fig. 8.)

Par b menez ef parallèle à ac. Vous aurez angle eba=bac, angle fbc=bca (57) Mais eba + abc+fbc=deux droits, donc bac+abc+bca = deux droits.

Elever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite sans la prolonger.

Par un point donné hors d'un cercle mener une tangente à cc cercle.

Décrire sur une droite donnée un segment capable d'un angle donné.

<sup>(\*)</sup> Cette proposition donne la solution de plusieurs problèmes intéressans, et entrautres de ceux-ci:

Un triangle ne peut donc avoir qu'un angle droit et à plus forte raison qu'un obtus. Il est appelé rectangle, obtusangle ou acutangle, selon qu'il a, ou un angle droit, ou un angle obtus, ou tous les angles aigus (\*).

70. Remarquez que dans un triangle rectangle les deux angles aigus sont complémens l'un de l'autre; et que si l'on prolonge un des côtés ac d'un triangle abc, l'angle extérieur bcd = cab + abc.

71. Dans un triangle abc (fig. 8.) le plus grand côté est opposé au plus grand angle et réciproquement.

Abaissons bg perpendiculaire sur ac, il peut arriver, ou que les deux obliques soient d'un même côté de la perpendiculaire, ou qu'elles soient l'une d'un côté, l'autre de l'autre. Le premier cas ne présentant aucune difficulté, il suffira de démontrer le second. Soit menée l'oblique bh = ba, le point h sera entre g et c, parce que bh doit être plus courte que bc, et que la plus longue oblique est la plus écartée de la perpendiculaire. Donc angle gbh on son égal gba est plus petit que gbc; donc il a un plus grand complément. Or bac est le complément de gba (70), et bca de gbc. Donc bac>bca.

2.º Soit abc>acb, je dis que ac>ba. Faisons dans l'angle abc, l'angle cbk = acb.
La droite bk coupera nécessairement ac en quelque point k entre a, et c. Abaissons km perpen-

<sup>(†)</sup> Si deux triangles out deux angles égaux chacun à chacun, le troisième angle du premier triangle est aussi égal au troisième angle du second.

P.A.E.

diculaire sur bc, les triangles égaux kmb, kmc, donneront bk = kc. Or ak + bk > ab; donc ak + kc, ou ac > ab.

Il suit de là qu'un triangle qui a deux angles égaux est isoscèle; qu'un triangle isoscèle a deux angles égaux; que les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux.

# §. VII. Des Polygones en général, et en particulier des Parallélogrammes.

72. Si dans une figure de plusieurs côtés (un polygone) on joint, par une droite, les extrémités de deux côtés consécutifs, ae, ed (fig. 10.), et qu'on retranche le triangle aed, on diminuera d'un, le nombre de côtés, car on ôtera deux des anciens côtés, et on en fera paraître un nouveau; or retrancher deux et ajouter un, c'est retrancher un.

Ainsi donc, en retranchant chaque fois un triangle, on diminuera d'une unité le nombre de côtés du polygone, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un triangle abc; et le polygone sera décomposé en un nombre de triangles, égal au nombre d'opérations plus un; mais le nombre de côtés du polygone est égal au nombre d'opérations plus trois, puisque chaque opération en a ôté un, et qu'après la dernière, il en a resté trois; donc le polygone sera décomposé en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux.

73. Puis donc que la somme des angles des triangles composans, est nécessairement la même que celle des polygones qu'ils composent, celle-

ci vaut autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux (\*). Ainsi la somme des angles d'un quadrilatère vaut quatre angles droits, d'un pentagone six, d'un hexagone huit, etc.

Remarquez que lorsque les triangles sont disposés comme dans la figure 11, l'angle rentrant abd, doit se mesurer dans l'intérieur de la figure, et vaut plus de 180.d

74. On appelle polygone régulier, celui dont tous les angles et tous les côtés sont égaux. Dans le quadrilatère régulier, qu'on nomme carré, chaque angle est nécessairement droit. Dans le pentagone régulier, chaque angle est égal à 6 × 90.

108.4 reveniers bedieven si

75. On peut faire passer une circonférence par tous les sommets des angles d'un polygone régulier.

Soit abcde, etc. (fig. 12.) le polygone. Je puis d'abord faire passer une circonférence par les sommets a, b, c, (65); soit o le centre de cette circonférence, pour prouver qu'elle passera par d, il suffit de prouver que od=oc.

P. A. E.

<sup>(\*)</sup> Si l'on prolonge les côtés d'un polygone, toujours dans le même sens en faisant le tour du polygone, la somme des angles extérieurs vaudra quatre angles droits.

Soit N le nombre des côtés du polygone. La somme des angles extérieurs réunie à celle des angles intérieurs vant évidemment 2N droits. Or la somme des angles intérieurs vant 2N droits moins quatre droits; il reste donc quatre droits pour la somme des angles extérieurs.

Or les triangles isoscèles et égaux aob, boc donnent, angle abo=cbo=bco, donc abo, et cbo sont chacun la moitié de l'angle abc. Donc leur égal bco est la moitié de bcd égal à abc. Donc bco=dco.

Maintenant les triangles, boc, cod, ayant oc, commun, be = cd par hypothèse, et angle bco = deo par ce qui vient d'être prouvé; sont par-

faitement égaux; donc oc = od.

On prouvera de même que la circonférence

passe par e, etc.

76. On appelle angle au centre, un angle tel que aob formé par deux rayons menés aux sommets de deux angles consécutifs du polygone. Les angles au centre d'un polygone régulier étant nécessairement égaux, on détermine la valeur d'un de ces angles, en divisant 360. d par le nombre d'angles ou de côtés de polygone.

Une droite menée du sommet d'un angle à un autre dans l'intérieur d'un polygone quel-conque, s'appelle une diagonale; telle est ac.

Une perpendiculaire abaissée du centre sur un des côtés d'un polygone régulier s'appelle apothème. Le reste du rayon, quand on en a retranché l'apothème, est la flèche.

Il n'est pas nécessaire de démontrer, que tous les apothèmes d'un polygone régulier sont égaux, et qu'il en est de même de toutes les flèches.

77. Si les droites ab, ed, (fig. 13.) sont parallèles entr'elles, et qu'il en soit de même des droites ad, bc, le quadrilatère abcd s'appelle parallélogramme.

Quand les quatre angles sont droits, ce qui est possible (72), le parallélogramme est rec-

tangle.

78. Dans un parallélogramme abcd, et dans un triangle acd, une perpendiculaire ce abaissée du sommet d'un angle sur le côté opposé, s'appelle hauteur, et le côté opposé ad, s'appelle base.

Il suit de la nature des parallèles, que deux parallélogrammes ou deux triangles, qui ont même hauteur, peuvent être compris entre mêmes parallèles; et que s'ils sont compris entre mêmes parallèles, les côtés pris pour bases étant sur une de ces parallèles, ils ont même hauteur.

Dans un rectangle, un des côtés étant pris pour base, la hauteur se confond avec l'autre

côté.

79. Dans un parallélogramme abcd les côtés

opposés sont égaux.

Il faut prouver que ab = cd. Abaissez sur ad les perpendiculaires bf, ce, les triangles abf, cde, auront un côté égal et tous les angles égaux, ils seront donc égaux, et par conséquent ab = cd. On prouvera de même que bc = ad.

80. Donc, si deux côtés contigus d'un parallélogramme sont égaux, les quatre côtés sont égaux; dans ce cas, le parallélogramme s'appelle rhombe, et si en même temps, les angles sont

droits, c'est un carré.

81. Une diagonale ac, partage un parallélogramme abcd en deux triangles égaux, car le côté ac est commun aux deux triangles, et les autres sont égaux chacun à chacun. (79).

Ces deux triangles peuvent être considérés comme ayant même base et même hauteur que le parallélogramme. Réciproquement, tout triangle, est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.

S. VIII. De l'Egalité des Surfaces, de leur Comparaison, de leur Mesure.

82. Si le triangle abc (fig 10), est égal au triangle abc (fig. 11), et que adc soit aussi égal à bdc, les quadrilatères abcd, acdb, sont nécessairement égaux en surface, quoique leur forme soit très-différente. Les figures égales ensurface, mais qui ne sont pas, en même temps, égales par les angles et par les côtés, s'appellent équivalentes.

83. Si un rectangle abcdet un parallélogramme defg (fig. 14), ont bases égales ad, dg, et hauteurs égales, étant compris entre mêmes pa-

rallèles bf, ag, ils sont équivalens.

Prolongez ed, fg, jusqu'à la rencontre de ba, cd, en h, et k. Les triangles hbe, kcf sont évidemment égaux, ainsi que had, kdg. Des quantités égales hbe, kcf, retranchez les quantités égales had + cde; kdg+cde, les restes, abcd, defg ont nécessairement même valeur.

84. Deux parallélogrammes quelconques, de bases et hauteurs égales, sont équivalens, chacun étant équivalent à un même rectangle, et il en

est de même de deux triangles.

85. La droite ab (fig. 7) perpendiculaire sur ad, et qui est la génératrice de la parallèle bc, décrit évidemment un rectangle, en se mouvant le long de ad. De plus si le point a parvenu en k, a parcouru une partie quelconque commensurable ou incommensurable, de l'espace ad; chaque point de ab, et par conséquent la droite entière, a parcouru une partie semblable du chemin à faire pour parvenir en cd; ainsi le rectangle abgk est au rectangle abcd comme

ak: ad: c'est-à-dire, que deux rectangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, ou que deux rectangles de même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.

86. Si deux rectangles sont exprimés en nombres, au moyen d'une commune mesure, ils seront entr'eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, les bases et les hauteurs étant aussi exprimées en nombres.

Pour le démontrer, disposez deux rectangles quelconques abcd, agkf, de manière qu'ils aient un angle commun a (fig. 15.), et par conséquent une partie commune abef; vous aurez,

abcd: abef::ad:af. abef:agkf::ab:ag.

Multipliant par ordre et divisant le premier rapport par abef, il vient abcd: agkf::adxab: afxag. Ge qu'il fallait démontrer.

87. Donc, s'il s'agit de comparer un rectangle abcd'à un carré mnmn, on aura abcd: mnmn : ab × ad: mn×mn. Et si l'on prend mn pour unité de ligne, mnmn pour unité de surface, le nombre d'unités de ligne contenu dans ab, multiplié par le nombre d'unités de ligne, contenu dans ad, donnera le nombre d'unités de surface contenu dans abcd.

88. Trouver ainsi le nombre d'unités de surface contenues dans un rectangle, c'est mesurer

ce rectangle.

Supposons, par exemple, que mn soit un mètre linéaire, mnmn sera un mètre carré. Que ad contienne 6,5.mn, et ab, 3,2.mn. Nous aurons pour la surface de abcd, ab × ad = 20,8 mètres carrés.

89. Puisqu'un triangle quelconque est égal à la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur, en multipliant sa base par sa hauteur, on aura la surface du rectangle dont il est la moitié, donc, en prenant la moitié du produit, on aura la surface du triangle lui-même.

90. Il est aisé de concevoir que toute surface plane peut se décomposer en triangles. On n'aura donc qu'à mesurer chaque triangle pris à part, et leur somme sera la mesure de la surface totale (\*).

## §. IX. Des Droites proportionnelles et des Triangles semblables.

91. Si dans un triangle quelconque ABC (fig. 16.), on mène une droite DE parallèle à l'un des côtés BC, on aura cette proportion, AB: DB:: AC: EC.

Menez BE, CD, les triangles BAC, BDC, ayant leurs bases sur une même droite, et même sommet, ont même hauteur, ils sont

<sup>(\*)</sup> Un quadrilatère tel que BDEC (fig. 16), dont deux côtés seulement sont parallèles, s'appelle trapèze. Si on le divise en deux triangles par la diagonale BE, ces deux triangles auront une hauteur commune, qui multipliée par la demi-somme des bases, ou par  $\frac{DE+BC}{2}$ , donnera la surface du trapèze. On démontre

à l'aide de la théorie des droites proportionnelles, qu'une droite menée du milieu de BD au milieu de CE, est égale à la demi-somme des bases.

donc comme leurs bases. Il en est de même des triangles BAC, BEC. On a donc

BAC: BDC::BA:DB. BAC: BEC::CA:EC.

Mais BDC, et BEC ont même valeur ayant même hauteur et même base, donc les premiers rapports de ces deux proportions sont égaux, donc les seconds le sont aussi, donc AB: DB: AC: EC.

92. On conclud de là, par une propriété

connue des proportions,

BA - BD : BA :: CA - CE : CA.

ou AD: AB:: AE: AC. C'est-à-dire qu'il y a proportion entre les côtés entiers et les parties mesurées depuis le sommet jusqu'à la parallèle.

93. Si une droite De coupe les deux côtés du triangle ABC, de manière qu'on ait AD: AB:: Ae: AC, cette droite sera la même que la parallèle DE.

Car par hypothèse AD: AB::Ae: AC. Et par (92.) ... AD: AB::AE: AC. Donc Ae: AE::AC: AC. Donc Ae = AE. Donc le point e est le même que le point E; donc De ne peut avoir la propriété qu'on lui suppose sans être confondue avec DE.

94. Si l'on mène EF parallèle à AB, on aura par ce qui précède, AC: AE:: BC: BF. Or BF = DE (79), donc AC: AE:: BC: DE. Le premier de ces rapports étant égal au rapport AB: AD (92), ils sont tous trois égaux, donc AB: AD:: AC: AE:: BC: DE.

On appelle semblables les triangles tels que ABC, ADE qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun, et leurs côtés proportionnels.

Remarquez qu'il faut comparer entr'eux les

côtés opposés aux angles égaux. Je compare AD avec AB, parce que angle AED = ACB. Les angles égaux et les côtés proportionnels, sont dits angles et côtés homologues.

95. Deux triangles équiangles ABC, abc sont semblables (fig. 16.), c'est-à-dire que s'ils ont les angles égaux, chacun à chacun, ils auront aussi les côtés proportionnels.

Hypothèse A=a, B=b, C=c.

Prenez AD = ab, et menez DE parallèle à BC. Le triangle ADE est parfaitement égal au triangle abc, or il est semblable à ABC, donc abc lui est aussi semblable.

96. Deux triangles qui ont leurs côtés proportionnels, sont en même temps équiangles et

par conséquent semblables.

Prenez AD = ab, AE = ac et tirez DE. Par hypothèse AB: AD::AC: AE, donc DE est parallèle à CB (93); donc triangle ADE est semblable à ABC. Mais par hypothèse AB: abou AD::BC:bc, et par  $N.^{\circ}$  94, AB:AD::BC:DE, donc bc = DE; donc triangle abcest parfaitement égal à ADE, qui est semblable à ABC; donc abc est semblable à ABC.

97. Si deux triangles ont un angle égal et que les côtés qui comprennent cet angle soient proportionnels, ces deux triangles seront semblables.

L'hypothèse est que AB: ab:: AC: ac, et que angle A = a. La même construction que ci-dessus donnera abc égal à ADE, qui est semblable à ABC; donc abc et ABC sont semblables.

98. Deux triangles sont équiangles, et par

conséquent semblables s'ils ont leurs côtés paral-

lèles chacun à chacun.

Cela est d'abord évident (61), si les deux triangles sont placés comme ABC, abc; les angles formés par les côtés parallèles étant tournés dans le même sens.

S'ils sont tournés en sens contraire, comme ABC, a'bc, on achèvera le parallélogramme a'bac, ce qui donnera a'bc = abc qui est semblable à ABC; donc a'bc est semblable à ABC.

99. Deux triangles ABC, A'B'C' sont encore semblables s'ils ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun.

Elevez sur B'A', B'C' les perpendiculaires A'a,  $C_P$ . Et par un point K pris sur C'A', la perpendiculaire  $K_R$ . Ces trois perpendiculaires formeront en se rencontrant un triangle a'b'c', dont les côtés étant parallèles chacun à chacun à ceux du triangle ABC, ces deux triangles seront semblables; il suffira donc de prouver que a'b'c' est semblable à A'B'C'.

Or, 1.º B'C'A' est complément de A'C'c' à cause de l'angle droit B'C'c'; b'c'a' est aussi complément de A'C'c' à cause du triangle rectangle

C'c'K. Done BiCiA' = b'c'a'.

2.º B'A'C' est complément de b'A'C' ou de son égal a'A'K. b'a'c' est complément du même angle a'A'K; donc B'A'C' = b'a'c'; donc ces deux triangles sont équiangles; donc ils sont semblables.

100. Si d'un même point t (fig. 18), on mène une tangente à la circonférence, et une sécante tb, terminée à la partie concave de la même circonférence, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière, et sa

partie extérieure.

Menez ab, ad, les triangles abt, adt, ont un angle commun en t, de plus les angles, tad, abd ou abt, ont pour mesure, chacun la moitié de l'arc ad; ils sont donc égaux, les deux triangles sont donc semblables, et la comparaison des côtés homologues donne,

tb: ta::ta: td.

101. Deux sécantes tb, tc, sont entr'elles en raison inverse de leurs parties extérieures.

tb: tc::te: td. On le prouve par la simili-

tude des triangles the, tdc.

no2. Deux cordes be, cd, qui se coupent en un point f, se coupent en parties réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire que bf: cf: fd: fe. On le prouve par la similitude des triangles bfc, dfe, qu'on forme en menant les cordes des arcs cb, de.

103. Trouver une quatrième proportionnelle

à trois droites données.

Faites un angle PAQ. (fig. 16). Portez la première droite donnée sur AP; de A en B, la seconde sur AQ, de A en C, et menez CB; portez la troisième sur AP, de A en D, et tirez DE parallèle à AC. La quatrième proportionnelle sera AE; car AB: AC::AD: AE.

104. Diviser une droite AD en parties proportionnelles à celles d'une autre droite (fig. 17).

Menez PQ parallèle à AD. Prenez sur PQ une droite ad égale à la droite déjà divisée et qui ait les mêmes points de division, b, c, etc. Menez 'Aa, Dd, et prolongez-les] jusqu'à ce qu'elles concourent en S. Par S et par les points de

division b, c, .... menez des droites qui couperont AD en B, C.... le problème sera résolu.

Car les triangles semblables ASB, aSb donnent BS:bS:AB:ab. Les triangles semblables BSC, bSc donnent BS:bS:BC:bc:CS:cS, donc AB:ab:BC:bc:CS:cS. Les triangles CSD, CSC, donnent CS:CS:CD:cC. Donc CSC ab:CSC concert CS concert C

105. Si ad était divisée en parties égales, AD se trouverait divisée en parties égales. Voilà donc un moyen de diviser une droite donnée, en tant de parties égales qu'on voudra.

no de Diviser une droite ab, (fig. 19) en moyenne et extrême raison. Elevez la perpendiculaire ac = ½ ab. Tirez bc. Prenez cd = ac, et be = bd; le problème sera résolu; vous aurez ab: be: be: ae.

Pour le démontrer, du point c, avec rayon ca ou cd, décrivez une circonférence que bc prolongée rencontrera en f. Vous aurez (100); bf: ba: ba: ba: ba ou be. Donc bf—ba: ba—be::ba: be: ba. Mais bf—ba=bd=be; ba—be=ae. Donc be: ae::ba: be; donc ba: be::be: ae. Ce qu'il fallait prouver.

107. Deux polygones abcde, fghik (fig. 20), sont appelés semblables, s'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun, et leurs côtés proportionnels.

L'hypothèse est que a=f, b=g, c=h, d=i, e=k; et que ab:fg::bc:gh::cd:hi::de:ik.

108. Si des angles homologues a, f, on mène

des diagonales ac, ad, fh, fi, les deux polygones seront décomposés en triangles semblables.

1.º abc, fgh sont semblables ayant un angle

égal compris entre côtés proportionnels.

2.º Il en résulte ac:fh:bc:gh:cd:hi. Donc ac:fh:cd:hi; d'ailleurs, des angles égaux bcd,ghi, retranchant les angles égaux bca, ghf, les restes acd, fhi seront égaux. Les triangles acd, fhi, ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels, ils sont donc semblables. Même raisonnement pour les autres triangles.

On prouvera aussi, que si deux polygones sont composés de triangles semblables et semblablement disposés, ils sont semblables.

109. Une droite étant donnée pour côté homologue au côté ab du polygone abcde, construire sur cette droite un polygone semblable.

Portez cette droite de a en p sur ab, par p menez pq parallèle à bc, jusqu'à la rencontre de la diagonale ac; par q, menez de même une parallèle à cd, jusqu'à la rencontre de l'autre diagonale, et ainsi de suite, vous formerez un polygone évidemment semblable au polygone abcde, puisqu'ils seront composés l'un et l'autre, de triangles semblables et semblablement disposés.

#### S. X. Du Carré de l'Hypoténuse, suite de la Comparaison des Surfaces.

le côté opposé à l'angle droit s'appelle hypoténuse, les autres retiennent proprement le nom de côtés.

Si de l'angle droit b, on abaisse une perpen-

diculaire bd sur l'hypoténuse, on divisera le triangle en deux autres qui lui seront semblables; car ils auront chacun un angle aigu commun avec le triangle abc, et un angle droit.

111. Le carré construit sur l'un des côtés ab équivaut au rectangle construit sur l'hypoténuse

et sur le segment ad correspondant à ab.

I. Démonstration. ad (petit côté de abd): ab (hypoténuse): ab (petit côté de abc): ac (hypoténuse);  $donc\ ab \times ab = ad \times ac$ . Donc un carré qui aura pour côté ab, sera égal à un rectangle dont un côté sera ad et l'autre ac.

II. Démonstration. Soit construit en effet le carré, abef, et le rectangle adgh, ah étant égal à ac, et lui étant perpendiculaire. Soient de plus

tirées fc, bh.

Les triangles fac, bah sont égaux ayant ab = fa, ah = ac, et les angles fac, bah étant chacun composé d'un angle droit et du même angle bac. De plus le triangle fac vaut la moitié du carré abef, ayant même base af et étant compris entre mêmes parallèles. Par une raison semblable bah vaut une moitié de adgh. Or les moitiés étant égales, les touts sont égaux; donc abéf = adgh.

le carré construit sur bc, est égal au rectangle cdgi, dont un côté est le segment cd, et l'autre est égal à l'hypoténuse. Donc la somme des carrés construits sur ab, bc, vaut la somme des rectangles adgh, cdgi ou le carré de l'hypoténuse. (\*)

<sup>(\*)</sup> Donc, étant donnés un côté et l'hypoténuse, on aura l'autre côté, en prenant la racine de la diffé-

Il en résulte aussi que les carrés construits sur ab, bc, étant exprimés par  $ad \times ac$ ;  $dc \times ac$  sont entr'eux: ad:dc; en divisant par ac, les deux termes du rapport.

113. La perpendiculaire bd est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypo-

ténuse.

Car les triangles semblables adb, bdc donnent en comparant les côtés homologues ad: db::db: dc.

On prouvera de même que chaque côté est moyen proportionnel entre le segment correspondant et l'hypoténuse entière.

114. Trouver une moyenne proportionnelle

entre deux droites données.

Soient ces deux droites ad, dc, (fig. 22.) placées bout à bout. Sur leur somme ac, comme diamètre, décrivez une demi-circonférence, la perpendiculaire élevée au point d jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence en b, sera la moyenne proportionnelle cherchée.

Car si l'on mène ba, bc, l'angle abc appuyé sur le diamètre sera droit, ac sera donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle et bd la moyenne

proportionnelle entre les deux segmens.

rence du carré de l'hypoténuse au carré du côté connu; et étant donnés les deux côtés, on aura l'hypoténuse, en prenant la racine de la somme des carrés des côtés connus.—Soit un triangle isoscèle rectangle, un des côtés étant désignés par un nombre quelconque a, l'autre côté sera aussi désigné par a, et l'hypot par  $\sqrt{2} a^2 = a \sqrt{2}$ . Ainsi un côté est à l'hypoténuse, comme a est à  $a \sqrt{2}$ , ou comme  $a \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas, l'hypoténuse et le côté sont évidemment incommensurables.

r 15. Les surfaces de deux triangles semblables sont entr'elles comme les carrés de leurs côtés

homologues.

Soient AH, ah, les hauteurs des triangles semblables ABC, abc. (fig. 16) On aura AB: AH:: ab: ah. Et AB: BC:: ab: bc. Multipliant par ordre AB × AB: BC × AH:: ab × ab: bc × ah, ou AB × AB: ab × ab:: BC × AH: bc × ah. Or le second rapport est égal à celui des deux triangles, donc le premier lui est aussi

égal.

ri6. Les surfaces des polygones semblables sont entr'elles comme les carrés de leurs côtés homologues. Car par ce qui précède nous avons dans la figure 20.° abc: fgh::ab²:fg²...acd: fhi::cd²:hi²::ab²:fg²...ade:fik::de²:ik²::ab²:fg²...ade:fik::de²:ik²::ab²:fg²...ade:fik::de²:ik²::ab²:fg²...ade:fik::acd:fhi::ade:fik. Or la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; donc abc+acd+ade:fgh+fhi+fik::abc:fgh::ab²:fg². Donc abcde:fghik::ab²:fg².

117. Etant donnés deux polygones abcde, fghik, en construire un troisième qui leur soit semblable et qui soit égal à leur différence.

Il suffit de trouver un côté ap du troisième polygone, puisque ce côté une fois trouvé le  $N.^{\circ}$  109.° enseigne à construire le polygone. Or nous avons 1.° polyg: 2.d::  $ab^2$ :  $fg^2$ ; donc 1.° - 2.d:  $ab^2$  -  $fg^2$ :: 1.°:  $ab^2$ :  $ab^2$ : ab

Elevez sur fg la perpendiculaire fm. Du centre g avec rayon ab, décrivez un arc qui coupe fm en quelque point n, fn sera égale à la droite cherchée ap, car  $fn^2 = gn^2 - fg^2 = ab^2 - fg^2$ .

On trouvera, avec encore plus de facilité, un polygone égal à la somme de deux autres et qui leur soit semblable. Toutes ces construc-

tions se font par le triangle rectangle.

118. Construire un polygone semblable à un autre et qui en soit les  $\frac{3}{3}$ , ou les  $\frac{3}{4}$ , ou qui ait avec ce polygone tout autre rapport donné n: m.

Prenez, sur une même droite (fig. 22.) deux parties ad, dc qui soient dans les rapports m: n. Sur ac comme diamètre, décrivez une demicirconférence. Elevez au point d une perpendiculaire qui rencontrera la demi-circonférence en un point b, tirez ba, bc. Sur ba prenez be égale à un des côtés du polygone donné, menez ef parallèle à ac, et bf sera, pour le polygone à construire, le côté homologue à celui du polygone donné qu'exprime be.

Car, à cause des triangles semblables,  $be^2$ :  $bf^2$ ::  $ba^2$ :  $bc^2$ . Et, à cause du triangle rectangle abc,  $ba^2$ :  $bc^2$ :: ad: cd:: m: n; donc, etc.

#### S. XI. Des Polygones inscrits et circonscrits.

les sommets de tous ses angles sont sur la circonférence, et circonscrit quand tous ses côtés sont tangents à la circonférence.

Donc pour inscrire au cercle un polygone régulier, il suffit de diviser la circonférence en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés; les cordes des arcs égaux étant égales, et les angles inscrits appuyés sur des arcs

égaux étant égaux.

Et comme un arc peut toujours être divisé en deux parties égales, étant donné un polygone inscrit, on peut toujours en inscrire un autre qui ait le double de côtés. Réciproquement, étant donné un polygone inscrit, d'un nombre pair de côtés, on peut en inscrire un qui en ait la moitié moins.

120. Inscrire un hexagone.

Le rayon porté sur la circonférence donne le côté de l'hexagone, qui est en effet égal au rayon. Car soit ab (fig. 12.) le côté de l'hexagone, l'angle aob est de  $60.^d$  Les deux autres angles sont égaux parce que oa = ob, ils valent donc chacun  $\frac{120}{2}$  ou  $60.^d$  Le triangle est donc équilatéral et par conséquent ab = oa.

L'hexagone étant inscrit, on peut inscrire le triangle équilatéral, le dodécagone et en général tous les polygones dont le nombre de côtés

est quelqu'un de ceux de la suite.

Il est évident que deux diamètres perpendiculaires entr'eux, divisent la circonférence en quatre parties égales, et donnent par conséquent l'inscription du carré (119).

On en déduit celle de tous les polygones dont le nombre de côtés est quelqu'un de ceux de la

Divisez le rayon en moyenne et extrême raison. La plus grande partie du rayon ainsi divisé sera le côté du décagone. Soit Ab (fig. 23.) le côté du décagone. Menez les rayons OA, Ob, et divisez angle ObA

en deux parties égales par la droite bc.

Par hypothèse, angle AOb = 36.4 Les deux autres angles du triangle AOb étant égaux, chacun vaut  $72^d$ , et AbO, ayant été divisé en deux parties égales, cbO, cbA sont chacun de  $36^d$ ; d'où il résulte que le triangle cOb est isoscèle, et que le triangle Abc est en même temps isoscèle, et semblable à AOb.

Donc OA: Ab:: Ab: Ac. Et parce que Ab = bc = Oc; OA: Oc:: Oc: Ac. Le rayon est donc divisé en moyenne et extrême raison au point c; et puisque Oc = Ab, la plus grande partie du rayon ainsi divisé, est le côté du

décagone.

On en déduit l'inscription des polygones dont le nombre de côtés se trouve dans la suite 5; 10; 20; 40. . . . . .

123. Inscrire un pentédécagone.

Il suffit pour cela de déterminer l'arc de 24.d Or, retranchant l'arc du décagone de celui de l'hexagone, ou 36.d de 60.d, le reste sera 24.d On peut donc inscrire tout polygone dont le nombre de côtés se trouve dans la suite 15; 30; 60; 120 (\*); .....

124. Etant donné un polygone inscrit au cercle

en circonscrire un semblable.

Soit bd le côté du polygone inscrit (fig. 23). Menez Ob, Od indéfiniment prolongés. Abaissez

<sup>(\*)</sup> On a fait dernièrement quelques découvertes intéressantes sur l'inscription des polygones. Voy. Disquisitiones arithmetica auctore GAUSS. Voy. aussi Inscript. de l'ennéagone et divis. du cercle par ENCONTRE.

sur bd la perpendiculaire Oa, prolongée jusqu'à la rencontre de la circonférence en A. Sur OA, élevez la perpendiculaire BAD, prolongée de part et d'autre de A, jusqu'à la rencontre des rayons prolongés en B, et D. La droite BD, sera un côté du polygone circonscrit. Car, 1.º BD touche le cercle étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon. 2.º Les triangles DOB, dOb, sont évidemment semblables. Or, si pour chaque côté du polygone inscrit, on fait la même opération, il en résultera un polygone circonscrit semblable, puisqu'il sera composé de triangles semblables.

125. Le contour d'un polygone régulier est évidemment égal à un de ses côtés multiplié par leur nombre, et sa surface à un de ses triangles bOd, multiplié aussi par leur nombre, qui est le même que celui des côtés. Or le triangle bOd = bd ×½ Oa. = le côté multiplié par la moitié de l'apothème: la surface totale égale donc le nombre de côtés × le côté × la moitié de l'apothème, ou le contour multiplié par la moitié de l'apothème.

126. Deux polygones réguliers semblables, inscrits dans différens cercles, ont leurs contours, comme les rayons et leurs surfaces, comme les

carrés des rayons.

Car soient (fig. 1.) ab, AB, les côtés de deux polygones inscrits semblables. Leurs contours seront évidemment comme ab: AB Et leurs surface comme  $ab^2$ :  $AB^2$ . Or ab: AB: Ob: OB. Et par conséquent aussi  $ab^2$ :  $AB^2$ ::  $Ob^2$ :  $OB^2$ . Donc, etc.

127. Etant donnés en nombres, le côté bd

d'un polygone inscrit, et le rayon Ob, trouver

son apothème Oa; et sa flèche aA.

On a par (112), fig. 23,  $Oa^2 = Ob^2 - ba^2$  ou le carré de l'apothème égal au carré du rayon moins le carré de la moitié du côté donné. Il faut donc faire le carré du rayon, en retrancher le carré du demi-côté, et prendre la racine du reste, ce sera l'apothème.

L'apothème retranché du rayon donnera la

flèche.

128. Les mêmes choses étant données, trouver le côté bA d'un polygone qui a deux fois autant

de côtés que le polygone proposé.

On a  $bA^2 = ba^2 + aA^2$ . Il faut donc faire le carré du demi-côté donné, y ajouter le carré de la flèche, et prendre la racine de la somme.

129. Les mêmes choses étant données, trouver le côté du polygone circonscrit semblable.

Les triangles bOd, BOD, donnent Oa: bd:: OA: BD; donc  $BD = bd \times \frac{OA}{Oc}$ . C'est-à-dire

qu'il faut multiplier par le rayon le côté du polygone inscrit, et le diviser par l'apothème.

130. A mesure qu'on double le nombre de côtés d'un polygone, on en augmente le contour; car la brisée bAd, est plus grande que la droite bd:

Et plus un polygone régulier a de côtés, plus chacun de ses côtés est petit, parce que répondant à un plus petit angle au centre, il est la corde d'un plus petit arc.

131. Pour si petite que soit une ligne, on pourra trouver un côté de polygone inscrit, plus

petit encore.

Car cette ligne portée sur la circonférence sera la corde d'un certain arc qui, répété un certain nombre de fois, fera la circonférence entière ou quelque chose de plus. Or, quelque grand que soit ce nombre, on pourra toujours diviser la circonférence en un nombre de parties égales encore plus grand, par la continuelle bissection des arcs d'un polygone inscrit quelconque; on trouvera donc des arcs plus petits et par conséquent des cordes plus petites, qui répondant à des arcs, parties aliquotes de la circonférence, pourront être des côtés de polygones inscrits.

132. A plus forte raison, la slèche peut devenir aussi petite qu'on voudra, car elle est plus petite que le côté, étant à la moitié du côté, comme cette moitié est au rayon augmenté de l'apothème.

# §. XII. Théorie des Limites. Application au Cercle.

133. Lorsque, étant donnée une quantité on en déduit une autre par une certaine opération; que de cette autre, on en déduit une troisième par une opération semblable, et que l'on continue à opérer de la même manière, l'ensemble de ces quantités s'appelle suite ou série, et chacune de ces quantités est un terme de la série. Si, par exemple, étant donnée la quantité numérique 1, on en prend la moitié, puis la moitié de cette moitié, puis la moitié de cette autre moitié, etc.; on formera la suite:

Plus généralement, une suite ou série est l'ensemble d'un nombre indéfini de quantités, qui se suivent selon une loi quelconque. Par exemple, (49)

si l'on prend le premier terme de la suite A, pour premier terme de la suite B; la somme des deux premiers termes de A, pour second terme de B; la somme des trois premiers termes de A, pour troisième terme de B, etc.; on formera la suite:

 $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{7}{8}$ ;  $\frac{11}{16}$ ;  $\frac{31}{32}$ , etc. . . . . B (\*).

Les quantités géométriques forment aussi des séries. Par exemple, étant donné un triangle équilatéral inscrit, si l'on s'en sert pour inscrire un hexagone, un dodécagone, un icositétragone, etc., les apothèmes, les flèches, les contours, les surfaces de ces polygones qui se suivent toujours, selon la même loi, forment autant de séries géométriques.

ontinuellement d'une certaine quantité, et peuvent en approcher d'aussi près qu'on voudra sans néanmoins pouvoir l'atteindre, cette quantité est dite limite de la série. Par exemple, la

La suite des nombres triangulaires qui se forme de celle des nombres naturels, comme la suite B de la suite A.

La suite des nombres pyramidaux qui se forme de celle des nombres triangulaires, comme la suite B de la suite A.

<sup>(\*)</sup> On considère en arithmétique dissérentes suites qu'il est important de connaître. Telle est d'abord la suite des nombres naturels:

<sup>1; 2; 5; 4; 5; 6; 7.....</sup> 

<sup>1; 3; 6; 10; 15; 21; 28. . . .</sup> 

i; 4; io; 20; 35; 56; 84... Et une foule d'autres. P. A. E.

diffère de ½; le 2<sup>d</sup> de ¼; le 3<sup>e</sup> de ½, etc. Donc, 1.º cette différence va toujours en diminuant; 2.º elle peut devenir aussi petite qu'on voudra; car, en prenant la moitié, la moitié de la moitié, etc., il n'est point de degré de petitesse qu'on ne puisse passer ou atteindre. 3<sup>o</sup> Cette différence ne peut jamais être nulle, puisque la différence qui suit, est toujours la moitié de celle qui précède.

De même dans les séries géométriques, le rayon est la limite des apothèmes successifs. Car 1.º les apothèmes croissent continuellement, les côtés devenant toujours plus petits, 2.º ils approchent du rayon, d'aussi près qu'on veut, 3.º enfin, ils ne peuvent cependant pas devenir égaux aux rayons, les flèches n'étant jamais

nulles.

135. De la définition des limites il suit, que si deux quantités C, X, sont limites d'une même série, ces deux quantités sont égales. Car si elles ne l'étaient pas, l'une des deux scrait plus grande que l'autre d'une certaine quantité D; soit X la plus grande, on aura X = C + D; or les termes de la suite ne pouvant atteindre jusqu'à C, différeront de X d'une quantité nécessairement plus grande que D, ce qui est contre la définition des limites (\*).

136. Soit une suite A; B; C; D;.... dont la limite est P. Soit une autre suite a; b; c; d; ...

<sup>(\*)</sup> Cette proposition est la première du plus fameux ouvrage sorti de la main des hommes. Philosophiæ nasuralis Principia mathematica.

dont la limite est p. Si l'on prend les rapports des termes correspondans, on formera une troisième suite  $\frac{A}{a}$ ;  $\frac{B}{b}$ ;  $\frac{C}{c}$ ;.... Or les numérateurs de ces fractions ont pour limite P, leurs dénominateurs ont pour limite p, donc ces fractions elles-mêmes ont pour limite  $\frac{P}{p}$ ; c'est-à-dire, que la limite des rapports est le rapport des limites. (\*)

Que si les rapports  $\frac{A}{a}$ ;  $\frac{B}{b}$ , etc. étaient tous égaux, ils seraient encore égaux au rapport des limites. Ces propositions toutes simples qu'elles doivent paraître, sont la base des mathématiques transcendantes.

137. Si un polygone abcd (fig. 24.) embrasse un autre polygone aefgh qui n'ait pas d'angles rentrans, le contour du 1.<sup>1</sup>, sera plus grand que le contour du 2.<sup>d</sup>

Prolongez ae, ef, fg jusqu'à la rencontre du contour du polygone abcd, en k, l, m.

La brisée abk est plus longue que la droite ak; donc contour abcd>contour akcd. Par la même raison, contour akcd>aelcd>aefmd>aefgh; donc contour abcd>aefgh.

138. Si un polygone enveloppe un cercle, le contour de ce polygone est plus grand que la circonférence du cercle.

Il faut prouver, par exemple, que le quadri-

<sup>(\*)</sup> On prouve pareillement que la limite des produits est égale au produit des limites. P. A. E.

latère ABCD; (fig. 25.) est plus grand que la circonférence du cercle qu'il renferme. Par un point p de cette circonférence, soit menée une tangente EF. Quoiqu'il soit vrai que la tangente et la circonférence n'aient qu'un point commun, il est également vrai qu'elles paraîtront se confondre pendant un certain espace pq. Par q menez une autre tangente GH, elle paraîtra aussi se confondre avec la circonférence pendant un certain espace qr. On formera de cette manière un polygone par, etc. dont le contour ne sera pas la circonférence même; mais qui en différera si peu, que la différence ne sera pas apercevable. Or ce contour qui diffère insensiblement de la circonférence, est sensiblement plus petit que le quadrilatère abcd, donc la circonférence est aussi plus petite.

139. On peut toujours trouver un polygone inscrit dont le contour diffère du circonscrit semblable, d'aussi peu qu'on voudra: car le contour du circonscrit est égal à celui de l'inscrit, multiplié par le rayon et divisé par l'apothème. Or l'apothème peut différer du rayon aussi peu qu'on voudra, donc le circonscrit différera de l'inscrit aussi peu qu'on voudra.

140. Si l'on forme une suite de polygones inscrits, en doublant toujours le nombre de leurs côtés, la circonférence du cercle sera la limite de leurs contours. Car 1.º le contour de ces polygones va toujours en croissant (130); 2.º il peut approcher de la circonférence autant qu'on voudra, puisqu'il peut approcher, autant qu'on voudra, de celui du polygone circonscrit, plus grand que la circonférence; 3.º il ne peut jamais l'atteindre, parce que le contour du

contenant, est toujours plus grand que celui du contenu.

On prouve de la même manière que la surface du cercle est la limite de la surface des polygones inscrits.

141. Les circonférences de deux cercles sont entr'elles comme leurs rayons, et leurs surfaces

comme les carrés de leurs rayons.

Car le rapport constant des termes correspondans des deux suites de contours de polygones inscrits est celui des rayons (126), ce rapport est donc celui de leurs limites ou des circonférences. De même le rapport constant des termes correspondans des deux suites de surfaces est celui des carrés des rayons, tel est donc aussi le rapport des limites de ces surfaces, ou des surfaces des cercles.

142. La surface d'un cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon.

Car 1.º la surface du cercle est la limite des

surfaces des polygones inscrits.

2.º Le produit de la circonférence par la moitié du rayon, est aussi la limite des mêmes surfaces, puisque ces surfaces sont égales au produit du contour des polygones (dont la limite est la circonférence), par la moitié de l'apothème (dont la limite est le rayon).

Or si deux quantités sont limites d'une même suite, elles sont égales (135), donc surface du

cercle = circonférence x 1/2 rayon.

143. Puisque les circonférences sont entr'elles comme les rayons, il s'ensuit, que si l'on connaît nne fois le rapport d'un rayon ou d'un diamètre à une circonférence, on pourra toujours trouver

une autre circonférence dont on aura le rayon, ou un autre rayon dont on aura la circonférence. Le rapport du rayon à la circonférence est incommensurable; on ne peut donc l'exprimer d'une manière exacte; mais on en approche autant qu'on le veut, et au-delà de ce qu'exigent les opérations les plus délicates.

144. Soit le rayon du cercle = 1. Le côté de l'hexagone sera aussi = 1. L'apothème =  $\sqrt{1-\frac{1}{4}}$  = 0,86602. La flèche = 1 — 0,86602 = 0,13398. Le carré de la flèche = 0,01795. Le carré du demi-côté de l'hexagone = 0,25. La somme de ces deux carrés=0,26795. La racine de cette somme=0,51764. C'est le côté du dodécagone.

Une opération semblable donnera Pour le côté du 24. gone . . . . 0,26105. du 48. gone . . . . 0,13081. du 96. gone . . . . 0,06544.

Arrêtons le calcul à ce terme, et cherchons le côté du 96.8000 circonscrit. Il faudra pour cela déterminer l'apothème = 0,99946, et diviser 0,06544 par 0,99946, ce qui donnera 0,06548.

Multipliant maintenant les côtés des deux polygones inscrit et circonscrit par 96, nous aurons, Contour du 96.80ne circonscrit. . . . 6,28512. Contour du 96.80ne inscrit. . . . . . 6,28224.

Contour du 96.80ne circonscrit. . . . . 3,14256. Contour du 96.80ne circonscrit. . . . . 3,14256.

Or la circonférence est plus petite que le premier, et plus grande que le second; on est donc assuré qu'en la supposant = 3,141, on la fera trop petite, et qu'en la supposant = 3,142, on la fera trop grande.

Soit le diamètre = 7. On trouvera la circonférence plus grande que 21,99, et plus petite que 22. Le rapport 7: 22. est celui dont on fait le plus fréquent usage. Ce rapport fut trouvé par ARCHIMEDE à qui l'on doit aussi le rapport beaucoup moins connu 11: 14, qui diffère trèspeu du vrai rapport de la surface du cercle à celle du carré de son diamètre.

146. Pour déterminer la circonférence d'une manière plus exacte que par le rapport d'ARCHI-MEDE, on se sert de celui de METIUS 113:355; et quand il ne suffit pas, on en emploie de plus composés. Le plus parfait de tous ceux que les hommes ont calculé, est celui dans lequel le diamètre étant exprimé par 1, la circonférence est exprimée par

3. 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647

09384 46095 50582 26136.

### Supplément au S. X.

147. Si du sommet d'un des angles d'un triangle quelconque, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé que nous appellerons la base, le carré d'un des côtés proprement dits, sera égal à la somme des carrés de la base et de l'autre côté, plus ou moias le double produit de la base par le segment compris entre la perpendiculaire et cet autre côté.

La perpendiculaire pouvant tomber en dedans

ou en dehors du triangle, ce théorème présente deux cas.

L' cas. Soit le triangle KAF, (fig. 3.) et soit abaissée AC perpendiculaire sur KF; il faut prouver que  $AK^2 = KF^2 + AF^2 - 2KF.CF$ . Or les triangles rectangles AKC, AFC, donnent  $AK^2 - CK^2 = AC^2 = AF^2 - CF^2$ . D'ailleurs CK = KF - CF d'où résulte  $CK^2 = KF^2 - 2KF.CF + CF^2$ . Substituant dans l'équation  $AK^2 - CK^2 = AF^2 - CF^2$ , on trouve  $AK^2 - KF^2 + 2KF.CF = AF^2$ , ou bien  $AK^2 = KF^2 + AF^2 - 2KF.CF$ . Ge qu'il fallait démontrer.

II.e cas. Soit le triangle KAE ( méme fig. ), on aura  $AK^2 - CK^2 = AC^2 = AE^2 - CE^2$ . Mais CK = KE + CE;  $CK^2 = KE^2 + CE^2 + 2KE \cdot CE$ . Substituant et transposant comme ci - dessus, on trouve  $AK^2 = KE^2 + AE^2 + 2KE \cdot CE$ . Ce qu'il fallait démontrer.

Remarquez que, pour le double produit de la base par le segment, le signe + sert dans le cas où la perpendiculaire tombe dehors, et le signe dans le cas où elle tombe dedans.

FIN.

### VOCABULAIRE ÉTYMOLOGIQUE

Des termes propres à la Géométrie plane.\*

ALTERNES - INTERNES; ALTERNES - EXTERNES.

Alterni interni; alterni externi. a. ivana f y avia. Eucl.

ANGLE. Angulus. varia. Quelques lexicographes dérivent angulus du grec avense.

ANTÉCÉDENT. Antecedens. Ce qui marche devant : grec

Apothême: απόθεμα. Quelques Géomètres écrivent apothême: cette accentuation paraît contraire à l'étymologie.

### \* ABRÉVIATIONS

Dont on a fait usage pour les Citations.

Arc. . . . . Archimède.

Arist. . . . . Aristote.

Dict. . . . Dictionnaires.

Dioph. . . . Diophante.

Eucl. . . . . Euclide.

Gem. . . . Geminus.

Nic. . . . . . Nicander apud Vietam.

Plat. . . . Platon.

Proc. . . . . Proclus.

Apothème formé d'and et de ribau, signifie éloignement, distance. L'apothème est la plus courte distance du centre au périmètre d'un polygone régulier. Ce mot ne se trouve ni dans le dictionnaire de l'Académie, ni dans les lexiques tant grecs que latins.

ARBÈLE. «pennos. Nic. Espace renfermé entre trois arcs de cercle. On trouve dans quelques ouvrages modernes la quadrature de certaines lunules; les anciens s'occupaient aussi de la quadrature des arbèles.

ARC. Arcus. Gébelin le dérive du primitif ar, élévation, et de c, courbure. Le mot grec est messere . Eucl. Gem.

Axiome. afía µa. Procl. Proposition qui, étant assez évidente par elle-même, n'a pas besoin d'être prouvée. Euclide appelle les axiomes, xorvai trocas, communes notions. Proclus range dans la classe des communes notions, les axiomes, les demandes et les hypothèses.

BASE. Basis. Eucl. Ce mot signifie proprement appui, soutien, plante du pié.

Bissection. Ce mot qui, si l'on fait attention à ses deux racines bis sectio, exprime l'action de couper deux fois, de quelque manière que ce soit, sert cependant à désigner l'action de couper une seule fois, en deux parties égales. Je n'ai trouvé bissectio dans aucun dictionnaire ni dans aucun auteur latin. Bissection est très-nouveau dans notre langue; j'en ai fait usage d'après Lacroix ét quelques autres modernes. On disait autre fois dichotomie.

CARRÉ. Quadratum. Quelques personnes écrivent quarré. Grec, τετραγωνον. Eucl. Carréen nombres, τετραγωνος. Dioph.

Carré, carrer, carreler, carreau, cadre, cadran, quadrature, quadrans, etc., ont tous la même racine que Gébelin prétend être le primitif cad.

CENTRE. xivepov. Eucl., Plat. Le mot xivepov signifie proprement un point. Il est dérivé de xeverir piquer. Centrum n'a passé dans la langue latine que du temps

de Cicéron, qui n'osant en faire usage comme d'un mot reçu, l'écrivait en caractères grecs. Tusc. I.

CERCLE. Ce mot vient directement du latin circulus; mais circulus est un diminutif de circus dérivé de «/p» « Quelques hellénistes ont écrit que «/p» « dérive lui-même de circus, et n'appartient qu'au grec moderne, dans le sens que nous lui donnons ici. C'est une erreur: le verbe « « p» « se signifiant tourner, environner, passer autour, se trouve même dans Eschyle (a). Il paraît que les anciens grecs n'avaient donné le nom de « (p» « au milan, qu'à cause de la manière dont il tourne autour de sa proie.

Flectitur in gyrum, nec longius audet abire, Spemque suam motis avidus circumvolat alis; Sic super actæas agilis Cyllenius arces Inclinat cursus et easdem circinat auras. Met. II.

Circonférence. Circumferentia. Traduction littérale du grec me propénse. Eucl.

CIRCONSCRIT. Circum scriptus pour circum descriptus, περιγραφόμενος. Eucl.

Compas. Ce mot est formé de cum et de passus. On a nommé ainsi cet instrument à cause des espèces de pas qu'on lui fait faire, lorsqu'on s'en sert pour mesurer les distances. Le mot latin est circinus. VIRGILE emploie de préférence radius.

Descripsit radio totum qui gentibus orbem.

Ecl. III. (b).

OVIDE définit très-bien le compas sans le nommer.

Primus et ex uno duo ferrea brachia nodo
Vinxit, ut æquali spatio distantibus illis,
Altera pars staret, pars altera duceret orbem.

Met. VIII.

<sup>(</sup>a) .... σκέλη δέ κίρκοσον βία. Æsch. Prom.

<sup>(</sup>b) LA RUE me paraît avoir fait un contre-sens manifeste, dans l'explication qu'il a donnée de ce vers.

Le mot grec correspondant à compas est \*\*ifina: on le trouve dans Eustache, accompagné d'une phrase qui en détermine le sens, d'une manière non équivoque. Les dictionnaires indiquent encore d'actions; mais le mathématicien Héron, seul auteur dans lequel j'aie eu occasion de rencontrer ce mot, ne l'emploie jamais que pour désigner la partie d'un syphon par où l'eau s'écoule.

COMPLEMENT. Complementum. παραπλήρωμα. Eucl.

Consequent. Consequens. & # 6 prover. Eucl.

Ce mot s'est chargé, en latin et en français, d'une préposition inutile.

CONTACT. Contactus. 49%. Arch.

CORDE. EUCLIDE, Théon et Géminus ne donnent à la corde d'autre nom que celui de droite dans le cercle, indica en xuxa.

Prolémée qui publia une table des cordes dont l'usage était à peu près le même que celui des tables de sinus, les désigna peut-être par un terme moins vague; mais il ne m'a pas été possible de me procurer le texte grec. Le mot qui me paraîtrait le plus conforme au génie de la langue, est è p l p a co p é v n. Du reste, on ne saurait douter que Corde ne vienne de x o p d'à, boyau, corde de violon, corde d'arc.

Courbe. Curva. харжихи урарри. Arch.

DÉCAGONE. Jenayarov. Euel. Figure qui a dix angles.

DEGRÉ. Gradus. poisa. Gem.

Le primitif cra formé par onomatopée a désigné dans l'origine une incision, une entaille. C'est avec des entailles que se pratiqua la première arithmétique, et que se pratique encore celle du peuple. Les boulangers, les bouchers se font des registres, également simples et commodes, avec un morceau de bois. Cra désigna donc le rang, le numéro, le grade. Cran conserve encore dans notre langue les deux significations de cra, la propre et la figurée. De cra prononcé gra, se forma dans la langue latine, une longue famille de mots à laquelle appartien-

neut gradus, gradior et degredior, dont le participe degressus est la racine immédiate du français degré.

DIAMÈTRE. Siaperpos. Eucl.

DIAGONALE. Mot grec chargé d'une terminaison latine.

διαγανιος γραμμή. Dict. Euclide emploie indifféremment le mot διαμιτρος pour désigner le diamètre d'un cercle, et la diagonale d'un polygone.

DIRECTRICE. Directrix. in Suyara. Dict.

Ennéagone. irreayaror. Figure qui a neuf angles.

EPTAGONE. VOY. HEPTAGONE.

EQUIANCIE. Æquiangulus. 1002 diviss. Eucl. On ne dit pas d'une figure qu'elle est équiangle, lorsque tous les angles en sont égaux; mais on dit de deux figures qu'elles sont équiangles, lorsque les angles de l'une sont égaux à ceux de l'autre, chacun à chacun.

ÉQUILATÉRAL, ÉQUILATÈRE. Equilaterus. 100 m x eu pliss.

Eucl. Selon l'Académie, équilatéral ne se dit que du triangle qui a les côtés égaux; mais équilatère se dit des figures qui ont leurs côtés égaux à ceux d'une autre. Les auteurs de l'Encyclopédie méthodique prétendent avec plus de raison que ces deux mots sont à peu près synonymes, en observant néanmoins qu'équilatère vieillit et ne s'emploie que dans quelques expressions particulières, comme lorsqu'on parle de l'hyperbole équilatère, c'est-à-dire, de l'hyperbole dont les deux axes sont égaux.

ÉQUIVALENT: Æquivalens, Æquipollens. iσέμοιρος.

Dict. iσέββοπος. Aich. Nous devons au grand Géomètre

Legendre l'usage d'appeler égales les figures qui peuvent
se recouvrir réciproquement, et équivalentes, celles qui
ne sont égales qu'en surface.

Flècue, de l'allemand flich. Ce mot n'a guère été employé, en Mathématiques, que par les Géomètres français. GÉOMÉTRIE. γιαμέτρια. Mot à mot, mesure de la terre. Les premiers Géomètres ne furent que des arpenteurs.

Platon dit dans le 7.<sup>mo</sup> livre de la République, que la Géométrie traite des figures tracées sur un plan. La théorie des corps, volumes, ou solides, était appelée stéreométrie.

GRADE. Gradus. Voy. DEGRÉ.

GÉNÉRATEUR, GÉNÉRATRICE. γεννητώς, γεννήτειρα. Plat..

HAUTEUR. Altitudo. v tos. Eucl. VAUGELAS a observé le premier, que lorsqu'un mot français dont la lettre initiale est une h dérive d'un mot latin qui commence par une voyelle, l'h du mot français est aspirée.

HENDECAGONE. ivdexayaver, figure qui a onze angles.

HEPTAGONE. ἐπθαγωνον. L'Académie écrit eptagone, quoiqu'elle écrive hebdomadaire, heptameron.

HOMOLOGUE. δμόλογος composé de δμὸς similis et de λίγος ratio.

Hypoténuse. υποτεινεσ». Eucl. Mot à mot, soustendante. L'Académie elle-même avait écrit hypothénuse, cette erreur grossière a été corrigée dans la dernière édition.

HYPOTHESE. υπόθεσες. Le mot latin suppositio est une traduction littérale du grec υπόθεσες.

ICOSIGONE. BINOGIAMON. Figure qui a vingt angles.

Icositetracone. incornactetracoros. Figure qui a vingt-quatre angles.

Incommensurable. Incommensurabilis. ασυμμετρος. Eucl.

INSCRIT. Inscriptus. ex spapé peros. Eucl.

Isoscèle. isoscends, formé de sous æqualis et de serves crus. Les auteurs latins disent quelquesois æquicrurus.

LEMME. ANMua. Eucl. Le mot grec désigne proprement

une chose prise ou reçue. Un lemme est une proposition qui n'appartient pas directement à la matière qu'on traite; mais qu'on prend et qu'on établit d'avance, pour en faire usage dans la démonstration des théorèmes qui doivent suivre.

LIGNE. Linea. γραμμά. Eucl.

LIMITE. Limes. # spas. Eucl.

Losange. On écrivait autrefois lausange. Ce mot est d'origine celtique: il signifiait un carreau, une dalle, un pavé. Le celtique pur s'est conservé dans le langue-docien Lausa, qui se dit de toute espèce de pierre plate. C'est avec ces sortes de pierres qu'on fait des piéges pour attraper les oiseaux: de la est venu le vieux mot lausanger, comme d'engin est venu engeigner. Voy. Rhombe.

Lunula. µnula. µnula. Nic. Espace renfermé entre deux arcs, et qui est ainsi appelé, parce qu'il a la forme d'un croissant.

MESURE. Mensura. pirpor. Eucl.

OBLIQUE. Obliquus. Ce mot est dérivé de xix, qu'on a omis dans la plupart des dictionnaires, mais qui se trouve dans Hesychus, et qui, en passant dans la langue latine, se chargea d'une préposition inutile. Oblique s'exprime ordinairement en grec par xoxio. Dict. ou par in xxxxxivi passes. Gem. (a).

Octogone. ex? wyww. Eucl. Figure qui 2 huit angles.

PARALLELES. παραλληλοι έυθείαι. Eucl.

PARALLELOGRAMME. παραλληλόγραμμον. Eucl.

Pentébécagone. πεντεδεκαγωνον. Dict. πεντεκαιδεκαγωνον. Eucl.

PERIMETRE. περίμετρος. Arch. J'ai préféré le mot contour comme moins scientifique.

<sup>(</sup>a) C'est un participe d'iquaive, d'où dérive évidemment incliner, qui signifie la même chose.

PERPENDICULAIRE. Perpendicularis. xaberoc. Eucl. On obtient une perpendiculaire au plan de l'horizon, au moyen d'un corps pesant suspendu à un fil; de là vient le mot latin per-pendiculum. Cathète a été d'usage dans la langue française; quelques opticiens disent encore cathète d'incidence.

PLAN. Planum. & Tinesor. Eucl.

POINT. Punctum. enpersy. Eucl.

POLYGONE. MONUZEVOV. Eucl. Figure qui a plusieurs angles.

PROBLÈME. TréCANHA. Arist. Dioph. Le mot grec signifie proprement une arme offensive ou défensive, une chose qu'on lance contre son adversaire. Fontenelle dit dans l'éloge de Jacques Bernoully, que ce fameux Géomètre, irrité des continuelles provocations de son frère, lança contre lui un problème. Cette plaisante métaphore venait originairement d'Athènes, et n'en fut pas moins goûtée à Paris.

Proposition. Propositio. πρότασις. Eucl. Arch. Une proposition de Géométrie traitée à la manière des anciens est composée de trois parties: La Proposition proprement dite qui est un théorème, un lemme, ou un problème, la construction, παρασκευν, et la démonstration, απόδειξιε.

PROPORTION. Proportio. avanopia. Eucl.

QUADRILATERE. Quadrilaterum. Terparasuper. Eucl. Voy. CARRÉ.

RAPPORT. Ce mot est formé de l'ancien adverbe re qui marque réciprocité, et du verbe portare. Il exprime exactement la même chose que re-latio. Quand il s'agit d'un rapport mathématique, on dit en latin ratio, en grec 26705 Eucl.

RAYON. Radius. iv 3: î a ix 72 ni 17ps. Eucl. Arch. Ce fut Viere qui mit à la mode le mot radius, dont les Géomètres n'osaient pas encore saire usage. Radius, dit-il, elegans est verbum quo dimidia dimetiens circuli significetur.

REGLE. Regula. Navar. Arch. Regula vient évidemment de regere, qui vient lui-même de rectus.

RHOMBE, joucos. Eucl., Arist.

Scalene. σκαληνός. Triangle scalène. τρίγωνον σκαληγόν.
Ce mot est dérivé de σκαζειν, boiter. Le triangle scalène paraît en quelque sorte boiteux, si on le compare au triangle isoscèle, dont les deux jambes (σκέλη) sont égales.

Scholie. L'Académie écrit scolie. «26200. Remarque particulière sur une proposition principale. Le mot scholie est masculin en mathématiques et féminin en philologie.

SÉCANTE. Secans. TIMINON. Eucl.

SECTEUR. Sector, Topies. Eucl.

SEGMENT. Segmentum. THRHA. Eucl.

Sécante, Secteur, Segment, Section, etc. viennent de secare, couper.

SUPPLÉMENT. Supplementum. παραπλάρωμα. Eucl.

SURFACE. Superficies. iniquena.

TANGENTE. Tangens. ἐφαπθομένη. Eucl. ἐπιψανομένη.
Arch. Lorsque les Géomètres grecs veulent parler de
deux lignes qui se rencontrent, de quelque manière que
ce soit, ils se servent du verbe απτομαι; mais quand ils
veulent parler des tangentes proprement dites, ils se
servent d'ἐφαπθομαι.

Théorème. Sedonna. Ce mot signifie proprement vue, spectacle, contemplation. Selon les philosophes grecs, un théorème est une vue de l'esprit, une vérité que l'esprit considère.

TRAPÈZE. τραπίζιον. Eucl. Mot dérivé de τραπίζα, primitivement τιτραπίζα, table à quatre piés. En français on donne le nom de trapèze à un quadrilatère dont

deux côtés sont parallèles; mais Eucline appelle indifféremment τραπέζιον tout quadrilatère quelconque.

NOLUME. Volumen. Il ne faut pas employer le mot latin volumen pour exprimer volume dans le sens qu'on lui donne en Géométrie. Le seul mot usité par les mathématiciens tant anciens que modernes, est solidum.

examples of as is a FIN. we suppose to the temperature (see as ) sharing one of such a sharing decreases

Constitute of the cooler section from the

Le lecteur est prié d'observer que l'Imprimeur n'a pu se procurer à temps les différentes lettres qui, dans les mots grecs, devraient être affectées d'un accent ou d'un esprit.

LABORETE LANGUE, LOUNDERLY BUCK TO LEVEL TO LEVE

es coit, its so ecount to varia services mile garant the vestion the vestion of the content of t

That was seen that Burt Mot derive do someth,

cate ou donne le nonção revoire à un madrilatore dens

BEGINE IL MENDENNE WERE TO BEET

## TABLE.

- S. I. Notions préliminaires. Objet de la Géométrie. Les corps, les limites, les surfaces, les lignes, les points. La ligne droite, la courbe, la surface plane, le plan. Ce que c'est que démontrer. Communes notions. Ce qu'on appelle hypothèse. Deux points déterminent la position d'une droite. Ce que c'est que la superposition. Ce que c'est que mesurer. Page 1.
- §. I I. Des Rapports. Propriétés des rapports et des proportions. Comment la théorie des rapports peut être appliquée à la Géométrie. Des incommensurables. Des raisons directes, inverses, composées, etc. pag 4.
- §. III. Du Cercle; des Angles, etc. Le secteur, l'arc, le cercle, la circonférence, le centre, le rayon, le diamètre, la corde, le segment. Les arcs égaux correspondent à des cordes égales. Définition de l'angle. Le rapport de deux angles est le même que celui des deux arcs correspondans, quel que soit ce rapport, commensurable ou incommensurable. Faire un angle égal à un angle donné. Faire une figure égale à une figure donnée. Division du cercle. Angle droit, obtus, aigu. Angles de suite, complément, supplément, angles opposés au sommet. Trouver sans autre instrument que le compas, le nombre de degrés, minutes, etc. d'un arc donné. Pag. 9.
- §. IV. Des Triangles. Triangle équilatéral, isoscèle, scalène. Lorsqu'un triangle est contenu dans un autre, le contour du contenu est moindre que celui du contenant. Deux circonférences ne peuvent se rencontrer qu'en deux points. De l'égalité des triangles. Pag. 15.
- S. V. Des Perpendiculaires, des Obliques et des Parallèles.

Par un point, on ne peut élever qu'une perpendiculaire sur une même droite. De toutes les lignes qu'on peut mener d'un point à une droite, la perpendiculaire est la plus courte. Si un point est à égale distance des extrémités d'une droite, il appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite. Problémes relatifs aux perpendiculaires. Génération et définition des parallèles. Cinq propriétés des parallèles coupées par une sécante ont une de ces cinq propriétés, elles sont parallèles. Angles parallèles.

S. VI. Droites considérées relativement au Cercle. Angles dont le sommet est sur la circonférence. Sommet des

angles d'un triangle.

Propriété de la tangente. Si deux cercles se touchent, le point de contact et les deux centres sont sur une même droite. La perpenduculaire au milieu d'une corde passe parle centre et par le milieu de l'arc. Faire passer une circonférence par trois points. Mesure de l'angle formé par une tangente et une corde. Mesure de l'angle inscrit. Somme des trois angles d'un triangle. Dans un triangle quelconque, le plus grand côté est opposé au plus grand angle. Pagc. 23.

5. VII. Des Polygones en général et en particulier des Parallélogrammes. La somme des angles d'un polygone vaut autant de fois deux angles droits, que le polygone a de côtés moins deux. Polygones réguliers. On peut toujours circonscrire une circonférence à un polygone régulier. Angles au centre, diagonales, flèches, apothèmes. Parallélogrammes, bases, hauteurs. Les côtés opposés des parallélogrammes sont égaux. Rhombes, rectangles, carrés. Une diagonale coupe un parallélogramme en deux triangles égaux.

Pag. 27.

S. VIII. De l'égalité des Surfaces, de leur comparaison, de leur mesure. Différence entre les figures égales et les figures équivalentes. Deux parallélogrammes de bases et de hauteurs égales sont équivalens. Deux rec-

langles de même base sont comme leurs hauteurs, et deux rectangles de même hauteur sont comme leurs bases. Deux rectangles sont comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. Mesure d'un rectangle, d'un triangle, d'une surface plane quelconque. Pag. 31.

- §. IX. Des Droites proportionnelles et des Triangles semblables. Si dans un triangle on mène une parallèle à la base, les deux autres côtés sont entr'eux comme les parties interceptées entre la parallèle et le sommet, ou comme les parties interceptées entre la parallèle et la base. Ce que sont que les triangles semblables. Cinq cas dans lesquels on sait que les triangles sont semblables. Rapports entre deux sécantes menées du même point, entre une sécante et une tangente, entre les parties de deux cordes qui se coupent. Problèmes relatifs aux droites proportionnelles. Des polygones semblables. Construire sur une droite donnée un polygone semblable à un autre.
- \$\,\ X\. Du Carr\(\epsilon\) de l'hypot\(\epsilon\) use est \(\epsilon\) gal \(\alpha\) la somme des carr\(\epsilon\) des deux autres c\(\epsilon\) test \(\epsilon\) La perpendiculaire abaiss\(\epsilon\) de l'angle droit sur l'hypot\(\epsilon\) use est moyenne proportionnelle entre les deux segmens. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites donn\(\epsilon\) donn\(\epsilon\) es surfaces des polygones semblables sont comme les carr\(\epsilon\) de leurs c\(\epsilon\) tiés homologues. Etant donn\(\epsilon\) seux polygones semblables, en construire un troisi\(\epsilon\) me qui leur soit semblable et qui soit \(\epsilon\) égal \(\epsilon\) leur diff\(\epsilon\) rence. Construire un polygone semblable \(\epsilon\) un autre et qui ait avec ce polygone un rapport\(\epsilon\) onn\(\epsilon\) quelconque.
- §. XI. Des Polygones inscrits et circonscrits. Inscrire un hexagone, un carré, un décagone, un pentédécagone. Etant donné un polygone inscrit, en circonscrire un semblable. La surface d'un polygone régulier est égale au produit de son contour par la moitié de son apothème. Deux polygones semblables, inscrits dans différens

cercles, ont leurs contours comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés des rayons. Étant donnés en nombres le côté d'un polygone régulier inscrit, et le rayon, trouver son apothème, sa flèche, le côté du polygone circonscrit semblable, et le côté du polygone inscrit, dont le nombre d'angles est double de celui du polygone donné. Pour si petite que soit une ligne, on peut trouver un côté de polygone inscrit, plus petit encore.

Pag. 43.

§. X II. Théorie des Limites. Application au Cercle. Définition des suites ou séries. Définition des limites. Si deux quantités sont limites d'une même série, ces deux quantités sont égales. La limite des rapports est égale au rapport des limites. Le contour de la figure enveloppante est toujours plus grand que celui de l'enveloppée, quand celle-ci n'a pas d'angle rentrant. La circonférence est la limite des périmètres des polygones inscrits, et le cercle est la limite de leurs surfaces. Les circonférences sont comme les rayons, et les cercles comme les carrés des rayons. La surface d'un cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon. Calcul du rapport du diamètre à la circonférence. Pag. 48.

Supplément au §. X.



