FERMAT

OPERA

MATHEMATICA

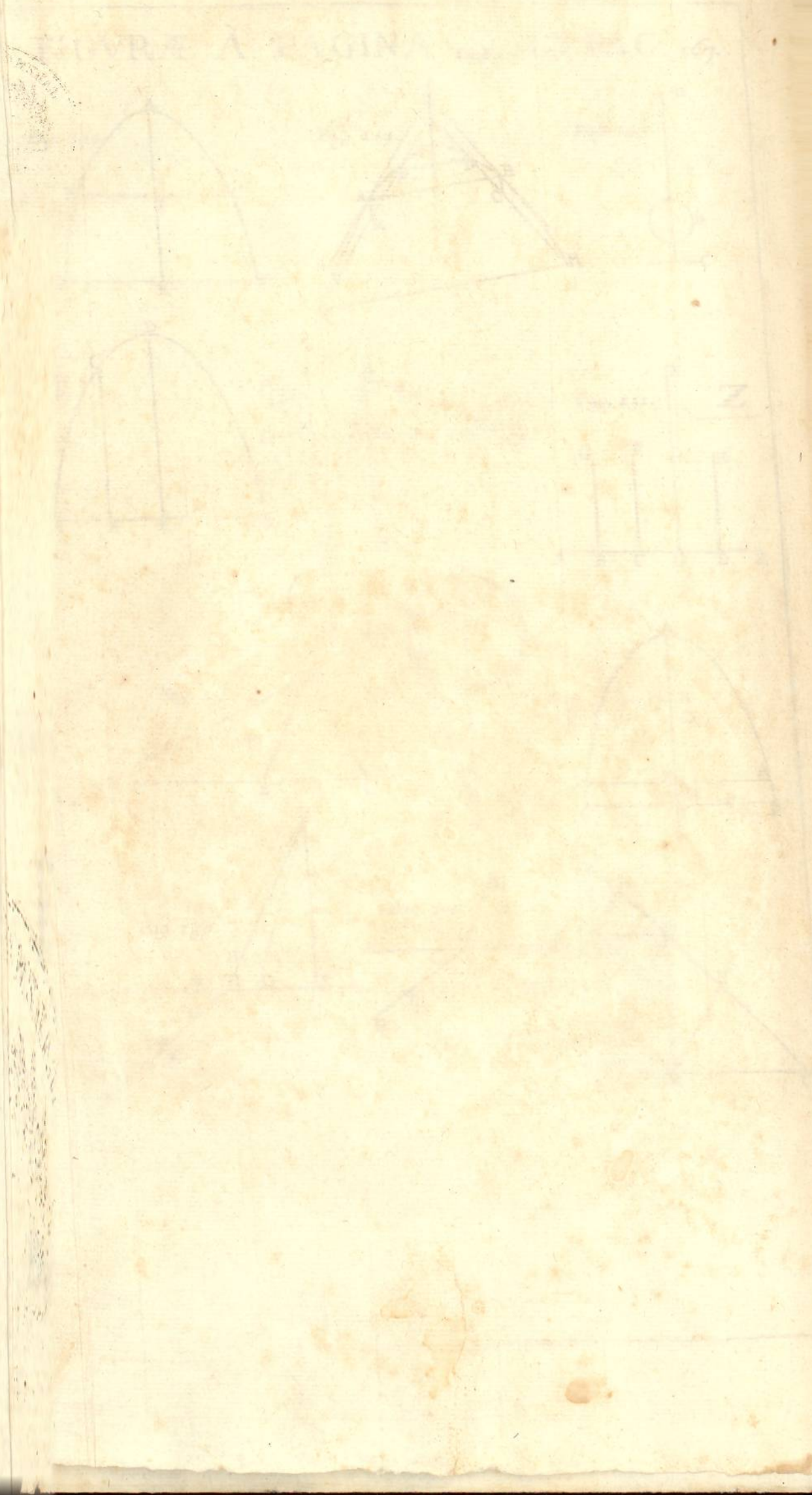
DIOPHANTI

MATHEMATICORUM

LIBRI SEX.

50049





DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

ACADEMIE DES SCIENCES INSCRIPT. ET BELLES-LETTRES TOULOUSE

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obſeruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Toloſani.*

Acceſſit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiuſdem D. de FERMAT Epiſtolis.



TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Ieſu.

M. DC. LXX.





ILLVSTRISSIMO VIRO D.

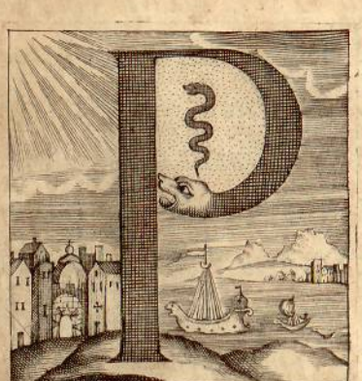
D. IOANNI BAPTISTÆ COLBERTO,

REGI AB INTIMIS CONSILIIS ET A SECRETIS,

Ærarij Censori generali,

SVMMO REGIORVM ÆDIFICIORVM, NAVIGATIONIS ET COMMERCII PRÆFECTO,

Regni Administro, &c.



PRODIT in lucem tuis auspicijs, Vir Illustrissime, Diophantus varijs auctus parentis mei obseruationibus; Illas mole quidem exiguas, sed pondere, ni fallor, maiores, quæ tua est summa humanitas, forsitan non aspernaberis, præsertim cum ad numeros pertineant qui radicis instar ac velut in centro Matheseos positi, diffunduntur in omnes illius circuli partes. Cur enim Geometria, & quidquid ei affine est, alium quam te

ambiat Patronum, qui terrarum orbem animo metiris, vt in extremis Regionibus in quibus olim emoriens natura defeciſſe videbatur, præclara Regis maximi facta celebrentur, & Barbarorum pectora liberalibus imbuta diſciplinis miteſcant. Cum vero illas ferè omnes aut earum ſemina Mathesis contineat, menti imperio natæ & membris famulitio aptis opitulatur, paciſque ac belli temporibus idonea, non tantum Regijs ædibus magnificè extruendis, ſed etiam vrbibus tutò propugnandis vtilem ſe præbet. Huius doctrinæ non immeritò captus illecebris Parens meus, quem adhuc lugeo, illam ſuccisiuis horis in medio forensium negotiorum ſtrepitu, abſque vllo tamen Iuriſprudentiæ, & Senatorij muneris diſpendio non infeliciter excoluit. An autem hæ, quas tibi, Vir Illuſtriſsime, offero lucubrationes, pondere, vt dixi, majores sint quam mole, si ſatis otij ſuppeteret, tu facillimè iudicares, qui Lynceâ ſagacitate in abdita quæque penetrans, veritatem ab errore non minus quam veram virtutem à fucatâ ſecernis, & eorum qui operam nauant ærario puras manus æquè dignoſcis, ac puritatem auri ſe probare poſſe Matheſeos quondam ille genius Archimedes celeberrimo circa coronam Hieronis experimento demonſtrauit. Sed te aliò vocant multa magnaque, in quibus ità verſaris, vt te pluribus parem, & adhuc majoribus dignum oſtendens, inuicti Principis famam, illiuſque ſubditorum leuamen, tibi laborum metam proponas. Id abunde teſtantur commercij reparatæ, & Piratarum repreſſæ vires qui Herculem Gallicum Herculeas columnas tranſeuntem & vtrumque mare committentem vident è latebris tanquam è Caci ſpelunca & pertimeſcunt; idem quoque teſtantur portus bellicis inſtructi nauibus quæ peregrinis non indigent armamentis, & hoſtibus terrorem incutiunt vt pateat qui mari potitur, eum rerum potiri; teſtantur denique hinc reſtauratæ tuis curis Artes, nobilique conſortio, vt egregiorum æmulatione opificum certatim augeri ac perfici poſſint, tuâ induſtriâ ſociatæ, illinc ſcientiarum arcana in tuis ipsis penatibus mirum in modum illuſtrata. Quæ ſatis fidem faciunt quantum tibi cordi ſit non ſolum vt Regni, ſed etiam vt Reipublicæ litterariæ fines

promoueantur & vt quidquid ex nouo illius orbe aduehitur, aſpirante tui fauoris aurâ obliuionis & inuidiæ ſcopulos vitare poßit; nunquam illos metuet hoc tui nominis præſidio munitum opus, ſi benignâ manu, vt enixè rogo, ſuſcipias iſtud æterni monumentum obſequij, quod tibi voveo.

Addictiſſimus S. FERMAT.

Lectori Beneuolo.

DIOPHANTVM hîc habes, & varias quibus auctus eſt obſeruationes, paucas illas quidem & breues, non tamen contemnendas; nec enim me latet hujuſmodi opera ponderari potius quam numerari à peritis æſtimatoribus, quibus vnica demonſtratio, imò interdum vnicum Problema magni voluminis inſtar eſt; in Mathematicis nimirum diſciplinis, noua Laconico licet more exhibita veritas pluris fieri ſolet, quam verboſa quorumdam tautologia; Doctis tantum quibus pauca ſufficiunt, harum obſeruationum auctor ſcribebat, vel potius ipſe ſibi ſcribens, his ſtudijs exerceri malebat quam gloriari; adeo autem ille ab omni oſtentatione alienus erat, vt nec lucubrationes ſuas typis mandari curauerit, & ſuorum quandoque reſponſorum autographa nullo ſeruato exemplari petentibus vltrò miſerit; norunt ſcilicet plerique celeberrimorum huius ſæculi Geometrarum, quam libenter ille & quantâ humanitate, ſua ijs inuenta patefecerit; Quamobrem ſuperſtites quoſdam Ipſius amicos, ſæpe hortatus ſum ſæpiuſque hortabor, vt ſi quos illius ingenij partus blandâ manu ſuſceperint, illos in muſæi vmbrâ diutius delitescere non patiantur; dum autem plura quæ breui, vt ſpero, prodibunt, colligo, tibi non iniucundam fore duxi, nouam horum Diophanti operum, iſtarumque ſimul obſeruationum editionem: Illas Parens meus quaſi aliud agens & ad altiora feſtinans margini variis in locis appoſuit, præſertim ad quatuor vltimos libros; cum enim ardua ſectaretur ille, faciliora & vulgo Logiſtarum nota quæ duobus primis libris continentur, aut vt ipſius Diophanti verbis vtar, τὰ ἐν ἀρχῇ στοιχειωδῶς ἔχοντα ferè omnino prætermiſit; Qualis autem Quantuſque in Arithmeticis fuerit Diophantus, ſat ſciunt qui primis, vt dicitur, labris puram Logiſticam guſtauerunt; tredecim ille ſcripſerat Arithmeticorum libros, quorum ſex tantum extant, vnuſque de numeris multangulis, reliqui vel temporis iniuriâ perierunt, aut alicubi forſan Theſauri inſtar ita ſeruantur, vt nullius videantur eſſe, dum publici juris fieri non poſſunt; meminit Diophanti Suidas in voce Hypathia & Lucillius libro ſecundo Anthologiæ capite vigeſimo ſecundo Diophanti Aſtrologi recordatur; an vero Suidas & Lucillius de hoc eodemque loquantur, nihil comperti habemus; eum multi circa Neronis tempora vixiſſe putant, nec deeſt qui Antonino pio imperante eum floruiſſe leuibus fretus coniecturis ſuſpicetur; illud audacter aſſerere licet, hoc Auctore nullum antiquiorem hactenus innotuiſſe, qui hanc inſtauraverit doctrinam, quam à Græcis acceptam Arabes cum ipſo Algebræ nomine ad

nos transmisisse existimantur ; eximia vero Problemata quæ hoc opus complectitur, adeo humanæ mentis captum videntur superare, vt ad eorum explanationem indefesso Xylandri labore & mirandâ Bacheti sagacitate opus fuerit ; duo illi fuere doctissimi horum librorum interpretes, nam vix eo nomine dignus est Græcus Scholiastes ; Bombellius verò in Algebra quam Italico sermone vulgauit, Diophanti quæstionibus suas permiscens, fidi interpretis partes non sustinuit ; neque eo functus est munere subtilissimus Vieta qui peragrans auia Logisticæ loca, nec alterius inhærens vestigiis, sua maluit in lucem proferre inuenta quam facem præferre Diophantæis ; quantum autem Analyticam vltra veteres terminos promouerit Parens meus, tuum erit, Erudite Lector, judicium ; vtinam ipsius cœptis non obstitissent angustiæ temporis, & plura parantem mors heu nimium immatura nobis illum non præripuisset ! plura procul dubio ex eodem fonte manassent, nec suis quædam istorum problematum demonstrationibus carerent ; quin vero ipse eas penes se, & in scrinio, vt ita loquar, pectoris habuerit, tum aliæ lucubrationes, tum illius animi candor & modestia dubitare non sinunt ; licet autem à tot tantisque viris laudatus Parens, à liberis absque inuidia laudari possit, nec illud ingenti luctui solatium, vel potius irritamentum denegari debeat, magis tamen libenter, ni fallor, illius encomium perleges quod in diario Doctorum elegantissimo, & in plerisque clarissimorum scriptorum libris occurrit ; horum nonnulli magnificè jamdudum mentionem fecere variorum ipsius operum, quæ licet inedita non tamen latuerunt, vt abundè testantur quædam excerpta quæ adjicere non piget, & doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs illius epistolis à R. P. Iacobo de Billy Societatis Iesu Sacerdote, cuius perspicacissimum ingenium & eruditio commendatione non egent, cum in ipsius operibus satis eluceant ; cæterum quidquid in hoc erratum fuerit, id Typographorum incuriæ tribuas, & æqui bonique consulas quæso. VALE.

ELOGE DE MONSIEVR DE FERMAT, Conſeiller au Parlement de Toloſe.

Du Iournal des Sçauans, du Lundy 9. Fevrier 1665.

ON à appris icy auec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conſeiller au Parlement de Toloſe. C'eſtoit vn des plus beaux eſprits de ce ſiecle, & vn genie ſi vniuerſel & d'vne eſtenduë ſi vaſte, que ſi tous les ſçauans n'auoient rendu témoignage de ſon merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choſes qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ſes loüanges.

Il auoit toûjours entretenu vne correſpondance tres particuliere auec Meſſieurs Descartes, Toricelli, Paſcal, Frenicle, Roberual, Hugens, &c. & auec la plus part des grands Geometres d'Angleterre & d'Italie. Mais il auoit lié vne amitié ſi étroite auec M. de Carcaui, pendant qu'ils eſtoient confreres dans le Parlement de Toloſe, que comme il a eſté le confident de ſes eſtudes, il eſt encore aujourd'huy le depoſitaire de tous ſes beaux eſcrits.

Mais parce que ce Iournal eſt principalement pour faire connoître par leurs ouurages les perſonnes qui ſe ſont renduës celebres dans la republique des lettres; on ſe contentera de donner icy le catalogue des eſcrits de ce grand homme; laiſſant aux autres le ſoin de luy faire vn éloge plus ample & plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la ſçience des nombres & dans la belle Geometrie. On a de luy vne methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Vne autre *de maximis & minimis*, qui ſert non ſeulement à la determination des problemes plans & ſolides; mais encore à l'inuention des touchantes & des lignes courbes, des centres de grauité des ſolides, & aux queſtions numeriques.

Vne introduction aux lieux, plans & ſolides; qui eſt vn traité analytique concernant la ſolution des problemes plans & ſolides; qui auoit eſté veu deuant que M. Descartes eut rien publié ſur ce ſujet.

Vn traité *de contactibus ſphæricis*, où il a demonſtré dans les ſolides ce que M. Viet Maiſtre des Requeſtes, n'auoit demonſtré que dans les plans.

Vn autre traité dans lequel il reſtablit & demonſtre les deux liures d'Apollonius Pergæus, des lieux plans.

Et vne methode generale pour la dimenſion des lignes courbes, &c.

De plus, comme il auoit vne connoiſſance tres-parfaite de l'antiquité, & qu'il eſtoit conſulté de toutes parts ſur les difficultez qui ſe preſentoient; il a éclaircy vne infinité de lieux obſcurs qui ſe rencontrent dans les anciens. On

a imprimé depuis-peu quelques-vnes de ſes obſeruations ſur Athenée; & celuy qui a traduit le Benedetto Caſtelli de la meſure des eaux courantes, en a inſeré dans ſon ouurage vne tres-belle ſur vne Epiſtre de Syneſius, qui eſtoit ſi difficile, que le pere Petau qui a commenté cét autheur, a aduoüé qu'il ne l'auoit pû entendre. Il a encore fait beaucoup d'obſeruations ſur le Theon de Smirne & ſur d'autres Autheurs anciens. Mais la pluſpart ne ſe trouueront qu'éparſes dans ſes Epîtres; parce qu'il n'eſcriuoit gueres ſur ces ſortes de ſujets, que pour ſatisfaire à la curioſité de ſes amis.

Tous ces ouurages de Mathematique, & toutes ces recherches curieuſes de l'antiquité, n'empeſchoient pas que M. de Fermat ne fit ſa charge auec beaucoup d'aſſiduité, & auec tant de ſuffiſance, qu'il a paſſé pour vn des plus grands Iuriſconſultes de ſon temps.

Mais ce qui eſt de plus ſurprenant, c'eſt qu'auec toute la force d'eſprit qui eſtoit neceſſaire pour ſoûtenir les rares qualitez dont nous venons de parler, il auoit encore vne ſi grande delicateſſe d'eſprit, qu'il faiſoit des vers Latins, François & Eſpagnols auec la meſme elegance, que s'il eût veſcu du temps d'Auguſte, & qu'il eût paſſé la plus grande partie de ſa vie à la Cour de France & à celle de Madrid.

On parlera plus particulierement des ouurages de ce grand homme, lors qu'on aura recouuert ce qui en a eſté publié, & qu'on aura obtenu de M. ſon fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore eſté.

OBSERVATION DE MONSIEVR DE FERMAT ſur Syneſius, rapportée à la fin de la traduction du liure de la meſure des eaux courantes, de Benedetto Caſtelli.

LES pages qui reſtent vuides dans ce cayer m'ont donné la penſée de les remplir de la belle obſeruation que j'ay appriſe ces iours paſſez, de l'incomparable Monſieur de Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, & de me ſouffrir ſouuent dans ſa conuerſation. C'eſt ſur la quinziéme Lettre de Syneſius Eueſque de Cyrene, qui traite d'vne matiere qui n'a eſté entenduë par aucun des interpretes, non pas meſmes par le ſçauant Pere Petau, ainſi qu'il l'aduoüe luy-meſme dans les Notes qu'il a faites ſur cét Autheur; Et ie donne dautant plus volontiers cette obſeruation, qu'elle a beaucoup de rapport auec les traitez qui ſont cy-deuant.

Cét Eueſque eſcrit à la ſçauante Hypatia, qui eſtoit la merueille de ſon ſiecle, & laquelle enſeignoit publiquement la Philoſophie, auec l'admiration de tous les ſçauans, dans la celebre Ville d'Alexandrie. I'ay traduit cette Lettre du Grec en cette maniere. Ie me trouue ſi mal, que i'ay beſoin d'vn hydroſcope. Ie vous prie d'en faire faire vn de cuiure, & de me l'acheter. C'eſt vn tuyau en forme de Cylindre, qui a la figure & la grandeur d'vne fleute; ſur ſa longueur il porte vne ligne droite, qui eſt coupée en trauers par de petites lignes, par leſquelles nous iugeons du poids des eaux. L'vn des bouts eſt couuert d'vn cone, qui eſt poſé également deſſus, en telle ſorte que le tuyau & le cone ont vne meſme baſe. L'on appelle cét inſtrument Baryllion. Si on le met dans l'eau par la pointe il y demeurera debout, & l'on peut aiſe-

ment compter les sections qui coupent la ligne droite, & par là l'on connoit le poids de l'eau.

» Comme nous auons perdu la figure & l'vsage de cét instrument, de mesme qu'vne infinité d'autres belles choses, que les Anciens auoient inuentées, & dont ils se seruoient, les sçauans de ce temps icy se sont donnez beaucoup de peine pour comprendre quel estoit cét instrument dont parle Synesius. Il y en a qui ont crû que c'estoit vne Clepsydre, mais le Pere Petau a rejetté auec raison cette opinion. Pour luy, il aduoüe, qu'il ne le comprend pas; il soupçonne pourtant que c'estoit vn instrument qui seruoit à niueler les eaux, & qui auoit du rapport auec celuy dont Vitruue fait mention au liure 8. ch. 6. de son Architecture, qu'il appelle Chorobates, mais il est aisé de juger par la lecture de Vitruue, & de Synesius; que ce sont deux instrumens fort differens, & en figure, & en vsage; & que si tous deux ont des sections, comme remarque le Pere Petau, celles du Chorobates sont perpendiculaires sur l'horizon, & celles de l'hydroscope luy sont paralleles. Ie passe sous silence plusieurs autres differences, que ie pourrois remarquer, pour rapporter le sentiment de Monsieur de Fermat, qui est sans doute le veritable sens de Synesius. Cét instrument seruoit pour examiner le poids des differentes eaux pour l'vsage des malades; car les Medecins sont d'accord que les plus legeres sont les meilleures; le terme ῥοπὴ, dont se sert Synesius le monstre clairement. Il ne signifie pas icy *libramentum* le niuelement, comme a crû le Pere Petau, mais en matiere de Machines, il signifie le poids, que les Latins appellent *momentum*, & de la le traitté des equiponderans d'Archimede a pour titre ἰσορροπικῶν. Mais dautant que la balance, ny aucun autre instrument artificiel, ne pouuoit pas donner exactement la difference du poids des eaux, à cause qu'elle est petite entre elles, les Mathematiciens inuenterent sur les principes du traité d'Archimede *de his quæ vehuntur in aqua*, celuy dont parle Synesius, qui monstre par la nature des eaux mesmes, la difference du poids qu'elles ont entre-elles, la figure en est telle; A F est vn Cylindre de cuiure A B est le bout d'en haut, qui est toûjours ouuert, E F est le bout d'embas, qui est couuert du cone E I F, qui a la mesme base que le bout d'embas; A E, B F, sont deux lignes droites coupées par diuerses petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact sera l'instrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, & qu'on l'ajuste en telle sorte qu'il se tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empeschera; mais il y enfoncera iusques à vne certaine mesure, qui sera marquée par les petites lignes; & il y enfoncera diuersement, suiuant que l'eau sera plus ou moins pesante; car plus l'eau sera legere, plus il y enfoncera: & moins, plus elle sera pesante, comme il nous seroit aisé de le demonstrer, s'il en estoit question icy. Voila la figure & l'vsage de cét instrument, & la raison de cét vsage. La lettre de Synesius s'y rapporte si exactement dans toutes ses circonstances, que feu Monsieur de Monchal, Archeuesque de Tolose, ayant enuoyé cette explication au Pere Petau, il aduoüa que Monsieur de Fermat estoit le seul qui auoit compris quel estoit l'instrument, & il auoit écrit que dans vne seconde impression il la mettroit dans ses notes. Mais parce que cela n'a pas esté fait, i'ay crû que le Lecteur sçauant & curieux ne sera pas marry que ie luy en aye fait part.



LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES
A MONSIEVR DE FERMAT,
pag. 347. tom. 3. des Lettres de Monſieur Deſcartes.

MONSIEVR,

Ie n'ay pas eu moins de joye de receuoir la Lettre par laquelle vous me faites la faueur de me promettre voſtre amitié, que ſi elle me venoit de la part d'vne Maiſtreſſe, dont j'aurois paſſionnement deſiré les bonnes graces. Et vos autres eſcrits qui ont precedé me font ſouuenir de la Bradamante de nos Poëtes, laquelle ne vouloit receuoir perſonne pour ſeruiteur, qui ne ſe fut auparauant éprouué contre elle au combat. Ce n'eſt pas toutesfois que ie pretende me comparer à ce Roger, qui eſtoit ſeul au monde capable de luy reſiſter; mais tel que ie ſuis, ie vous aſſeure que i'honnore extremement voſtre merite. Et voyant la derniere façon dont vous vſez pour trouuer les tangentes des lignes courbes, ie n'ay autre choſe à y répondre, ſinon qu'elle eſt tres bonne, & que ſi vous l'euſſiez expliqué au commancement en cette façon ie n'y euſſe point du tout contredit, & c.

AVTRE LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES
A MONSIEVR DE FERMAT,
pag. 348. tom. 3. des Lettres de Monſieur Deſcartes.

MONSIEVR,

Ie ſçay bien que mon approbation n'eſt point neceſſaire, pour vous faire connoiſtre quelle opinion vous deuez auoir de vous meſme, mais ſi elle y peut contribuer quelque choſe, ainſi que vous me faites l'honneur de m'eſcrire, ie penſe eſtre obligé de vous auoüer icy franchement, que ie n'ay jamais connu perſonne, qui m'ait fait paroiſtre qu'il ſçeut tant que vous en Geometrie. La tangente de la ligne courbe, que décrit le mouuement d'vne roulette, qui eſt la derniere choſe que le Reuerend Pere Merſenne a pris la peine de me communiquer de voſtre part, en eſt vne preuue tres aſſeurée; car dautant qu'elle ſemble dependre du rapport qui eſt entre vne ligne droite & vne circulaire, il n'eſt pas aiſé d'y appliquer les regles qui ſeruent aux autres; & Monſieur de Robernal qui l'auoit propoſée, qui eſt ſans doute auſſi l'vn des premiers Geometres de noſtre ſiecle, confeſſoit ne la ſçauoir pas, & meſme ne connoiſtre aucun moyen pour y paruenir. Il eſt vray que depuis il a dit auſſi qu'il l'auoit trouuée, mais ç'a eſté juſtement le lendemain apres auoir ſçeu que vous & moy luy enuoyions; & vne marque certaine qu'il ſe mécontoit, eſt, qu'il diſoit auoir trouué en meſme temps que voſtre conſtruction eſtoit fauſſe, lors que la baſe de la courbe eſtoit plus ou moins grande que la circonference du cercle; Ce qu'il eut peu dire tout de meſme de la mienne, ſinon qu'il ne l'auoit pas encore veüe; car elle s'accorde entierement auec la voſtre. Au reſte, Monſieur, ie vous prie de croire que ſi i'ay témoigné cy-deuant n'approuuer pas tout à fait certaines choſes particulieres qui venoient de vous, cela n'empeſche point que la declaration que ie viens de faire ne ſoit tres vraye. Mais comme on remarque plus ſoigneuſement les petites pailles des diamans, que les plus grandes tâches des pierres communes, ainſi i'ay crû deuoir regarder de plus prés à ce qui venoit de voſtre part, que s'il fut venu d'vne perſonne moins eſtimée. Et ie ne craindray pas de vous dire que cette meſme raiſon me conſole, lors que ie voy que de bons eſprits s'eſtudient à reprendre les choſes que i'ay écrites, en ſorte qu'au lieu de leur en ſçauoir mauuais gré, ie penſe eſtre obligé de les en remercier. Ce qui peut, ce me ſemble, ſeruir à vous aſſeurer que c'eſt veritablement, & ſans fiction, que ie ſuis, &c.

P. Herigone, tom. 6. Cursus Mathematici p. 68.

De Maximis & minimis.

NVnquam fallit hæc methodus, vt asserit eius inuentor, qui est doctissimus Fermat Consiliarius in Parlamento Tolosano excellens Geometra nec vlli secundus in arte Analytica: qui optimè etiam restituit omnia loca plana Apollonij Pergæi, quæ in hac vrbe vidimus manuscripta in manibus plurimorum, quibus subnexa est ab eodem auctore ad locos planos & solidos Isagoge.

D. ISMAEL BVLLIALDVS
Exercitatione de Porismatibus.

HAnc de porismatibus scriptiunculam data mihi occasione composui, cùm ante biennium vir illustrissimus ac amplissimus Dominus de Fermat in suprema Curia Tolosana Senator integerrimus & in judicijs exercendis peritissimus, rerum Mathematicarum doctissimus, propositiones quasdam subtilissimas & porismata quæ tam theorematicè quam problematicè proponi possunt, ad amicos suos huc misisset. Ex Pappi vnius monumentis & collectionibus Mathematicis porismatum naturam & vsum discere possumus, cùm ex Veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipsum nullus supersit. Illius tamen sententia legenti statim obuia non est; textúsque corruptione, & applicationis porismatum defectu obscurior proculdubio euadit. Interea dum tanto viro sua edere libuerit, nostra, qualiacumque tandem sint, publici iuris facere placuit; vt alios ad eorundem inuestigationem impelleremus; ipsumque Amplissimum Dominum de Fermat, ad sua edenda, vtinam & ad alia sublimis intellectus sui Ὑρήματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim est, quem omnes Europæ Mathematici suspiciunt; quem à subtilissimis ætatis nostræ Geometris Bonauentura Cauallerio Bononiæ, & Euangelista Torricello Florentiæ summis laudibus in cœlum ferri, eiusque inuenta mirabilia prædicari auribus meis audiui, quem etiam virum tam eximiis virtutibus clarum, multáque eruditione ornatum, ac in rebus Mathematicis oculatissimum toto pectore veneror ac colo.

R. P. MARINVS MERSENNVS ORDINIS MINIMORVM
Reflectionum Physicomathematicarum pag. 215.

CVm autem viuos potius quam mortuos quærerem, vnus abfuit Clarissimus Fermatius, Geometrarum Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctissimoque Senatore, Domino d'Espagnet, velut auulsum Bergeraco, triduò amplexus sum.

Doctrinæ

DOCTRINÆ ANALYTICÆ INVENTVM NOVVM.

Collectum à R. P. Iacobo de Billy S. I. Sacerdote ex varijs Epistolis quas ad eum diuersis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus.

Erudito Lectori.

SATIS est in limine huius operis fixisse nomen Fermatij, vt grande aliquid suspiceris, ille enim tantus vir fuit nihil vt fingere potuerit paruum, imò ne mediocre quidem, mens eius tot splendoribus illustris erat vt nihil obscurum pateretur, solem diceres qui tenebras statim excutiat & in ipsis etiam abyssis lucem immodicam radiorum suorum multitudine procreet: Diophantum hactenus mirati sunt vniuersi & merito quidem, verum ille quantus quantus sit, pigmæus est respectu nostri gigantis, qui longum totius orbis mathematici iter emensus, noua climata aliis inuisa peragrauit; Vietam prædicauere quotquot Algebricis operationibus nostro seculo vacauerunt, sufficitque ad famam alicui conciliandam, si dicamus illum in opere analyseos, mentem huius authoris assecutum, sed necdum ille pertigit ad eius scientiæ culmen, vt multis exemplis infra explicandis planum fiet; Claudium Gasparem Bachetum vt subtilissimum analystam & mihi alias intimum veneratus sum semper, atque istius in Diophantum elucubrationes præclare demonstrant quam perspicax fuerit in numeris, at visus illius hebetior est si cum oculis lyncei nostri omnia etiam abstrusissima penetrantis comparetur.

Verum ne hoc opusculum sola illius authoritate fulciatur, lubet hic paucis aperire quid recens repererit & quam late vagetur nouum ipsius inuentum; ac primo, hactenus Analystæ in quibusdam subtilioribus æquationibus duplicatis vnicam solutionem reperire potuerunt, asseritque ipse Bachetus ne duas quidem posse inueniri, Fermatius infinitas mox dabit, nec ipsum remorabuntur numeri ficti & nihilo minores qui sæpius occurrunt in eiusmodi operationibus, sed ipsos ventilabit ocyùs, & subtilissimo scrutinio ad veros tandem reducet: deinde nemo quod sciam triplicatas æquationes soluit hactenus nisi eas ex arte prius composuerit & aptarit tali ratione vt obuiæ statim sint solutiones ipsis etiam tyronibus, Fermatius singularem inuenit methodum qua solui possunt datæ vt libet si vnum excipias casum quem sumus infra explicaturi: tertio quis vnquam in numeris compositis ex quinque speciebus quotlibet solutiones exhibuit? Quis ex primitiuis radicibus elicuit deriuatiuas tum primi gradus, tum secundi, tum tertij, & sic deinceps in infinitum, nemo plane: vni Fermatio debetur hoc inuentum, vnus ille hæc omnia non ex alienis cumulauit operibus, quod *rhapsodi quidam* facere consueuerunt, sed proprio marte cudit & ex suis ipse fontibus hausit: hoc ille

cum mihi amiciſſimè communicaſſet per literas, iudicaui digniſſimum quod typis mandaretur & ne ab eius mente vllatenus recedam exſcribendum mihi videtur in primis compendium quoddam totius methodi cui nomen dedit appendicis ad diſſertationem Claudij Gaſparis Bacheti de duplicatis apud Diophantum æqualitatibus. En ipſiſſima illius verba.

Propoſuit feliciter ſatis pleroſque duplicatæ æqualitatis & modos & caſus ſubtilis ille & doctiſſimus analyſta Bachetus ad quæſtionem vigeſimam quartam libri ſexti Diophanti, ſed integram ſane non demeſſuit ſegetem, quas enim quæſtiones vnicâ tantum, aut ad ſummum duplici ſolutione circumſcribit, ad infinitas porrigere & promouere nihil vetat, imo procliui id exequi operatione eſt in promptu. Proponatur ſextus modus quem ipſe ſatis prolixe explicat pag. 439. & 440. caſus omnes ab ipſo enumerati ex noſtrâ quam mox exhibituri ſumus methodo infinitas admittunt ſolutiones, quæ à primâ per iteratas analyſes gradatim in infinitum deriuantur. Methodus hæc eſt: quæratur ſolutio quæſtionis propoſitæ ſecundum methodum vulgarem hoc eſt ſecundum methodum Bacheti aut Diophantæam, prodibit ſtatim valor numeri ſiuè radicis ignotæ, quo peracto iteretur analyſis & pro valore nouæ inueſtigandæ radicis, ponatur vna radix plus numero vnitatum prioris radicis, reducetur quæſtio ad nouam æqualitatem duplicatam, in qua vnitates vtrinque reperientur quadratæ propter priorem ſolutionem, ideoque differentia æquationum ex numeris tantum & quadratis, quæ ſunt proximæ inter ſe ſpecies, conſtabit, quare reſoluetur ex Diophanto & Bacheto noua hæc duplicata æqualitas ex quâ pari artificio tertia, & ex tertia quarta, & ſic in infinitum deducentur; quod non aduertiſſe aut Diophantum aut Bachetum imo & Vietam diſpendium huc vſque analyſeos maximum fuit, ſed præcipuum inuentionis noſtræ artificium in iis ſe prodit quæſtionibus, in quibus primigenia analyſis pro valore incognitæ radicis exhibet numerum notâ defectus inſignitum, qui ideo minor eſſe nihilo intelligitur; methodus autem noſtra in hoc caſu, non ſolum in problematis quæ per duplicatas æqualitates ſoluuntur locum habet, ſed generaliter in aliis quibuſcumque vt experienti notum fiet; ſic igitur procedit: quæratur quæſtio propoſita ſecundum methodum vulgarem, ſi non ſuccedat ſolutio poſt abſolutam operationem, quia nempe valor numeri habet notam defectus & ideo minor nihilo deprehenditur, non tamen deſpondendum animum confidenter pronuntiamus, quæ oſcitantia, vt verbis Vietæ vtar, fuit & ipſius & veterum analyſtarum, ſed iterum quæſtionem tentemus, & pro valore radicis ponamus 1 N. — numero quem ſub ſigno defectus æquari radici incognitæ in prima operatione inuenimus, prodibit noua haud dubie æquatio quæ per veros numeros ſolutionem quæſtionis repræſentabit. Hactenus Fermatius.

Ecce tibi epitomen huius opuſculi quod diuidemus in tres partes; prima ſpectabit ſolutiones infinitas æquationum duplicatarum, ſiue illæ occurrant per ſignum +, ſiue per ſignum —: ſecunda gradum faciet ad triplicatas æquationes, in quibus arcana quædam & huc vſque inaudita aperiemus: tertia conſcendet ad numeros ex quinque vel quatuor ſpeciebus compoſitos, qui quadrato æquati dabunt radices infinitas, ſi primitiuis adiungantur deriuatiuæ, exhibebitque artem iſtiusmodi radices eruendi.

PARS PRIMA.

De solutionibus infinitis duplicatarum æqualitatum.

DElibanda est hic breuiter methodus vulgaris duplicatæ æqualitatis quæ sic habet. Duorum terminorum quadrato æquandorum cape differentiam elige duos numeros hanc differentiam producentes, tum vel quadratum semissis summæ producentium æquetur maiori termino, vel quadratum semissis differentiæ producentium æquetur termino minori, sic enim habebitur valor radicis iuxta quem resoluti duo termini exhibebunt quadratos. Exempla dabimus hîc in tribus tantum casibus ex quibus reliquos casus assequi facile est. 1

Primus casus est dum solæ radices & vnitates æquantur quadrato, vt contingit in duobus terminis sequentibus 2 N + 12 & 2 N. + 5. horum differentia 7. producitur ab 1 & 7. illorum summa est 8. quadratus dimidiæ summæ est 16. qui æquatus 2 N + 12 dat 2. pro valore radicis in vtroque termino, vel eorumdem producentium differentia est 6. quadratus semissis illius 9. æquetur minori termino 2 N + 5. & habebitur idem valor 2. duoque termini dati erunt 16. & 9. 2

Secundus casus est dum quadrata, radices, & vnitates æquantur quadrato, & est numerus quadratorum quadratus, vt si æquentur quadrato 4 Q + 20 N + 8. & 4 Q + 4 N − 8. horum differentia est 16. N + 16. quam producunt 4. & 4 N + 4. summæ 4 N + 8 semissis quadratus est 4 Q. + 16 N + 16. qui æquatus priori termino ex supradictis dat 2. pro valore radicis. Hîc nota ex infinitis producentibus differentiam superiorem, tales eligi debere vt numerus habens adiunctum characterem radicis, duplus sit lateris quadrati qui idem est in vtroque termino, propterea eligimus 4 N. vt quadratus semissis illius æquetur quadratis 4 Q. igitur duo termini dati æquiualebunt 64. & 16. 3

Tertius casus quem adnotasse operæ pretium erit & qui nobis sæpissime futurus est vsui, est cum vnitatum numerus in vtroque termino quadratus est, siue sit idem, siue diuersus, vt si æquandi sint quadrato 1 Q + 16 − 8 N. & 3 Q + 64 + 48 N. diuide quadratum maiorem 64. per 16. & quotiens 4. multiplicet minorem terminum 1 Q. + 16. 8 N. ita enim productus 4 Q. + 64. − 32 N habebit easdem vnitates quadratas quas alius terminus 3 Q + 64. + 48. N. hi duo æquandi sunt quadrato. Horum differentiam 1 Q. + 16 N producunt 1 N. & 1 N. + 16. (nota iterum 16 esse duplum 8. lateris quadrati qui est communis vtrique termino) horum producentium summa est 2 N + 16. quadratus dimidiæ summæ 1 Q + 64 + 16. N. æquatur 4. Q + 64. − 32 N. & fit 16. pro valore, ergo duo termini iuxta hunc valorem resoluti sunt 144 & 1600. 4

Præceptum generale ad solutiones infinitas duplicatarum æqualitatum.

Cape valorem radicis per methodum vulgarem, hunc connecte 1 N. cum suo signo, siue sit illud plus, siue minus & fiet noua radix secundum quam resolui debent duo termini in datâ æquatione duplicatâ æquati quadrato & fient noui termini quadrato æquandi, in his inueniatur valor radicis per methodum vulgarem, & præcipuè per tertium casum quem postremo dedi, & quem adnotasse dixi operæ pretium fore, ita extabit nouus valor pro posterioribus terminis; hunc connecte primo va- 5

lori, prout indicat eius signum plus vel minus, & fiet nouus valor pro prioribus terminis qui dati sunt quadrato æquandi.

6 Sit in exemplum vterque terminus sequens æquandus quadrato 4 N. + 1 & 1 Q. − 2 N + 1. præter 2. qui est obuius valor, inuenietur etiam valor $\frac{2}{3}$ per methodum vulgarem. Lubet vti vtroque valore ad nouas solutiones, ac primo iuxta præceptum pro noua radice capio 1 N + 2. ergo 4 N. + 1 qui fuit primus terminus æquatus quadrato erit 4 N + 9. (nam si 1 N. dat 1 N + 2 habebis 4 N. dare 4 N + 8. cui adde vnitatem in eodem primo termino existentem fietque 4 N + 9 simili ratione sumendo rursus 1 N. + 2. pro 1 N. & iuxta illam resoluendo 1 Q − 2 N + 1 qui est secundus terminus datæ æqualitatis, fiet nouus terminus æquandus quadrato 1 Q + 2 N + 9. ab hoc tolle priorem 4 N. + 9. & absolue hanc duplicem æqualitatem modo communi fietque valor pro posterioribus terminis $\frac{27}{4}$ cui adde 2 (quia sumpta fuit noua radix 1 N + 2) & habebis valorem nouum radicis pro data æqualitate $\frac{35}{4}$.

7 Rursus placet per alium valorem $\frac{3}{4}$ inuenire nouum valorem: pono pro noua radice 1 N + $\frac{3}{4}$ iuxta quam resoluti dati termini 4 N + 1 & 1 Q − 2 N + 1 dant nouos terminos 4 N + 4. & 1 Q + $\frac{1}{16}$ $\frac{1N}{2}$, igitur quoniam vnitatum numerus vtrobique quadratus est, poterit hæc æqualitas duplicata resolui, soluatur vt dictum est num. 4. in tertio casu & inuenietur pro posterioribus terminis valor $\frac{72}{189}$. cui adde $\frac{3}{4}$ (quia sumpta est noua radix 1 N + $\frac{3}{4}$) extabitque valor alius pro data æqualitate $\frac{1155}{1156}$.

8 Habes ergo secundos valores deriuatiuos ex primis, atque ex tuis secundis potes tertios eruere eodem prorsus artificio, vt si libeat per radicem $\frac{35}{4}$ elicere tertiam, connectes illam cum 1 N. vt sit noua radix 1 N + $\frac{35}{4}$ iuxta quam resoluti dati termini 4 N + 1. & 1 Q. − 2 N + 1. eo modo quo resolui debere iam diximus, dabunt nouos terminos 4 N + 36 & 1 Q + $\frac{961}{16}$ + $\frac{31N}{2}$. in quibus vnitatum numerus est quadratus ergo valor radicis pro nouis illis terminis erit $\frac{3845097880 8}{4528002321}$. cui si addas $\frac{35}{4}$. juxta positionem præcedentem habebis pro valore in datis terminis + $\frac{3186240667}{2012445476}$. & iuxta illum resoluti dati termini exhibebunt quadratos.

9 Hinc vides posse inueniri valores infinitos: etenim ex primis orientur secundi & ex secundis tertij, & sic in infinitum, in exemplo dato iam habes quinque valores, ex postremis iterum possunt erui noui; ergo quælibet data æqualitas duplicata habet solutiones infinitas, quod erat demonstrandum.

Non despondendus animus si occurrant pro solutione numeri ficti & minores nihilo.

10 Vsuuenit interdum vt in problematum enodatione reperiantur numeri ficti, vnde fit vt inexperti statim cadant animis, vt pote qui in casum vt ipsi existimant impossibilem inciderint, verum audacter affirmamus cum nostro Fermatio etiam inde elici posse solutionem.

11 Sit verbi gratia æqualitas duplicata data 1 − 2 N & 1 − 4 N + 2 Q & inuentus sit per methodum vulgarem valor radicis − 4 iuxta quam resoluti duo termini dant veros quadratos 9 & 49 illa radix est numerus fictus, fateor, hæc tamen sic inseruiet ad veros numeros inueniendos; pone pro noua radice 1 N − 4 & juxta illam resolue duos terminos priores, fientque noui termini 9 − 2 N. & 2 Q − 20 N. + 49 (quia 2 N. æquiualebunt 2 N 8. quæ si subtrahas ab vnitate vt postulat signum defectus habebis 9 − 2 N. pro priori termino nouo non aliter 2 Q dabunt 2 Q + 32 − 16 N. & 4 N dabunt 4 N − 16 quos si tollas ab 2 Q + 32 − 16 N iunctis cum vnitate vt primitiuus numerus indicat fiet 2 Q − 20 N. 449.) quare cum in istis terminis vnitatum numerus sit quadratus, inuenietur valor per methodum Diophantæam, ex hoc valore inuento tolle 4 quia radix

est 1 N − 4 fietque valor pro æqualitate data $\frac{5333240}{39150049}$. igitur per numerum fictum inuentus est verus numerus qui satisfacit quæstioni vt ipse per examen probare poteris.

Rursus si detur ista duplicata æqualitas 8 Q. + 4 + 16 N & 2 Q + 4 + 4 N. facile 12
inuenientur radices − 2 & − $\frac{24}{7}$ sed quia numeri isti ficti sunt, cape pro noua radice 1 N − 2 iuxta quam resoluti duo priores termini dant nouos terminos quadrato æquandos 8 Q + 4 − 16. N & 2 Q + 4 − 4 N. igitur per methodum Bacheti pro istis nouis terminis inuenietur valor radicis + $\frac{24}{7}$. vnde si tollas 2. quia noua radix fuit 1 N − 2 extabit noua radix pro data æqualitate duplicata + $\frac{10}{7}$ ergo ex numero ficto inuentus est verus satisfaciens duplicatæ æqualitati. Idem fieri potest de alio numero ficto; imo & & ex illis inueniri possunt alij sine numero.

Tertium exemplum sit in istis terminis quadrato æquandis 1 + 2 N + 2 Q & 1 + 6 13
N + 2 Q. per methodum communem reperitur valor − 4 igitur redintegranda est operatio, & ponendum pro noua radice 1 N − 4 & secundum illam resoluendi priores termini, vt iam dictum est, fientque termini noui 2 Q + 25 − 14 N. & 2 Q + 9 − 10 N. ergo quoniam vnitatum numerus vtrobique quadratus est inuenietur ex methodo Diophantæâ valor radicis pro posterioribus terminis, hinc tolle 4. iuxta nouam radicem & relinquetur pro æqualitate datâ valor verus & realis $\frac{86421304}{98831999}$, non ergo cadendum animo si occurrant aliquando numeri ficti quia reduci possunt ad veros vt demonstratum est in exemplis prioribus.

In hoc genere soluẽdi duplicatas æqualitates, debet differentia terminorum æquandorum constare quadratis & radicibus solis.

Sæpius contingit in solutione æqualitatum, vt differentia terminorum constet ra- 14
dicibus solis, vt si oporteat æquare quadrato 1 Q. + 1 − 1 N & 1 Q + 1 − 3 N tollendo secundum à primo differentia est 2 N. aliquando etiam differentia terminorum constat radicibus & vnitatibus, vt si termini sequentes æquentur quadrato 9 Q + 15 − 21 N. & 9 Q + 24. − 48 N. supponendo enim primum maiorem vel minorem (quod plerumque liberum est) erit differentia 27 N − 9 vel 9 − 27 N. verum in Fermatianâ methodo hoc curandum vt differentia terminorum constet radicibus & quadratis alioquin vel in impossibile caderes, vel labor tuus nullam nouam produceret solutionem, vt autem differentia constet quadratis & radicibus, debent vnitates quadratæ diuersæ reduci ad eumdem quadratum vt supra docuimus num. 4.

Sit exempli gratiâ æqualitas duplicata sequens 1 Q + 1 N + 2 & 1 Q + 3 N + 3 15
valor radicis per methodum communem est 2, ergo iuxta methodum Fermatianam sumi debet pro noua radice 1 N − 2. & iuxta illam oportet resoluere priores terminos, fientque noui termini æquandi quadrato 1 Q − 3 N. + 4. & 1 Q − 1 N + 1 si horum caperes differentiam haberes 2 N − 3 vel 3 − 2 N. prout primus terminus supponeretur maior aut minor, cape quosuis numeros qui has differentias producant, nihil proficies, nec vnquam ad optatum peruenies finem, nisi reducas illos terminos ad eumdem quadratum quod fit diuidendo maiorem quadratum per minorem & per quotientem multiplicando terminum illum qui minorem quadratum continet, in eo igitur exemplo diuide 4. per 1. & quotiens 4. multiplicet terminum 1 Q − 1 N + 1. ita enim habebuntur duo termini noui ad nostram methodum apti 4 Q − 4 N + 4. & 1 Q − 3 N + 4.

Rursus sint duo termini æquandi quadrato 1 Q + 16 − 8 N. & 3 Q + 64 + 48 N. 16
per methodum vulgarem valor est 16. ergo pro nouâ radice sumi debet 1 N. + 16 iuxta quam si resoluantur priores termini fient termini noui quadrato æquandi 1 Q. + 24 N.

+ 256. & 3 Q. + 144 N + 1600. caue capias horum differentiam 2 Q + 120 N + 1344. impossibile enim foret hoc pacto ad solutionem peruenire, quid igitur facies? Illud quod hactenus factitatum est sæpius: diuides 1600. per 256 & per quotientem $\frac{25}{4}$ multiplicabis 1 Q + 24 N + 256 & productus inde natus $\frac{25}{4}$ + 150 N. + 1600 cum 3 Q + 144 N + 1600. repræsentabit duos terminos æquandos quadrato, eorumque terminorum differentia constabit quadratis & radicibus: ergo ad nouam solutionem peruenire fas erit.

Hoc genus operandi non tantum valet ad solutiones duplicatarum æqualitatum, sed etiam ad alias quascunque.

17 Ferax est admodum ager iste quem colere cœpimus, etenim methodus Fermatiana, non tantum valet ad soluendas æqualitates duplicatas in infinitum, sed etiam ad alias; sit verbi gratia inueniendus numerus cuius duodecuplum sublatum ab octuplo eius quadrato iuncto cum 8. faciat cubum. ponatur numerus ille 1 N. ergo 8 Q + 8 − 12 N. æquatur cubo, finge latus 2 − 1 N. cubus erit 8 − 12 N + 6 Q. − 1 C. æquandus 8 Q + 8 − 12 N. & fit pro valore radicis − 2 quæ radix licet ficta satisfacit propositæ quæstioni. Verum vt inde habeatur numerus verus, pone pro nouâ radice 1 N − 2 & iuxta eam resolue prædictum numerum 8 Q + 8 − 12 N. fietque nouus terminus 8 Q − 44 N + 64. æquandus cubo, finge latus huius cubi 4 $\frac{11\,N}{12}$ (4 est latus cubi 64. in nouo termino existentis, $\frac{11N}{12}$ vero est quotiens qui fit diuidendo 44 N. in nouo termino existentem per triplum quadratum lateris cubici 4. nempe 48) eius cubus 64 − 44 N. + $\frac{1219}{12}$ − $\frac{1331}{1728}$ æquatus nouo termino 8 Q − 44 N + 64 dat pro radice 2 $\frac{238}{1331}$ vnde si tollas 2. ob nouam radicem positam 1 N − 2 restabit valor pro priori positione $\frac{238}{1331}$ talis est numerus quæsitus, eius enim duodecuplum si tollas ab octuplo eius quadrato iuncto cum 8. dat $\frac{62295304}{177147641}$ cubum à latere $\frac{184}{121}$.

18 Rursus, si quæras triangulum rectangulum, cuius area iuncta hypotenusæ faciat quadratum, formabis illud ab 1 N + & 1 N. latera sunt 2 Q + 2 N. 1 + 2 N. 2 Q. + 2. N. junge aream 2 C + 3 Q + 1 N. hypotenusæ 2 Q + 1 + 2 N & fit 1 + 3 N + 5 Q. + 2 C æquandus quadrato; finge latus 1 + $\frac{3N}{2}$ & habebis $\frac{11}{8}$ pro valore, pone igitur nouam radicem in N. − $\frac{11}{8}$ & juxta illam resolue singulas particulas numeri superioris & summam inde ortam æqua quadrato fietque numerus $\frac{2672}{9248}$ pro valore radicis ad primas positiones.

19 Simili ratione si sit inueniendum triangulum rectangulum, cuius area juncta vni lateri circa rectum faciat quadratum, formabis illud vt mox dictum est in numero præcedenti & area 2 C + 3 Q + 1 N. jungetur lateri 1 + 2 N. & fiet valor − $\frac{3}{8}$ cape igitur pro noua radice 1 N. − $\frac{3}{8}$ & iuxta illam resolue singulas particulas numeri quadrato æquati & fiet noua summa 2 C + $\frac{39}{4}$ + $\frac{51N}{32}$ + $\frac{49}{256}$ æquanda quadrato: finge latus $\frac{7}{16}$ + $\frac{51N}{28}$ & fiet valor pro numeris primo positis $\frac{1425}{1568}$ ac proinde triangulum quæsitum erit $\frac{2988674}{24458624}$ $\frac{6927424}{24458624}$ $\frac{8520050}{24458624}$.

Noua methodus ad solutionem duplicatarum æqualitatum.

20 Sit data æqualitas duplicata 25 Q + 4 N − 6 & 9 Q + 20 N. − 6 seu oporteat

æquare quadrato vtrumque numerum propoſitum: methodus communis eſt reuocare numeros quadratorum diuerſos ad eundem vt dictum eſt num. 4. verum hoc non eſt neceſſe, ſed poteſt ſumi immediatè differentia numerorum quæ eſt 16 Q — 16 N. tum inueniendi ſunt tales producentes, vt ſumma radicum faciat 10. N (ſeu duplum radicis 254) tales ſunt 8 N. & 2 N — 2 horum enim producentium ſummæ ſemiſſis quadratum æquatum priori termino 25 Q + 4 N — 6. quem ſuppoſuimus maiorem dabit valorem $\frac{1}{5}$. 21

Rurſum ſi darentur duo ſequentes termini $\frac{1219}{9}$ + 121 — $\frac{1210N}{9}$ & 1 Q + 121 — 26 N. æquandi quadratis, cum numerus vnitatum vtrobique ſit idem quadratus ex methodo vulgari capienda eſſet differentia $\frac{11529}{9}$ — $\frac{976N}{9}$ tum ſumendi forent producentes $\frac{488N}{99}$ & $\frac{134N}{61}$ — 22 & inde inueniendus valor radicis. Fermatius ſumit producentes $\frac{8N}{3}$ & $\frac{14N}{3}$ — $\frac{12}{3}$ ergo ſumma producentium $\frac{22N}{3}$ — $\frac{132}{3}$ huius ſummæ ſemiſſis quadratus æquatus $\frac{121}{9}$ + 121 — $\frac{1210N}{9}$ dat valorem radicis $\frac{658}{33}$.

Iterum ſit ſoluenda æqualitas duplicata 169 9 + 5746 N. + 169. & 1 Q + 10 N. + 169. tripliciter iſta æqualitas ſolui poteſt: primo accipiendo differentiam terminorum illorum quæ eſt 168 Q + 5736 N & eligendo duos producentes in quorum vno ſit 26, duplum videlicet lateris quadrati 169. atque hæc eſt methodus communis: ſecundo ſolui poteſt reuocando diuerſos quadratorum numeros ad eundem, quod fieret ducendo ſingulas particulas numeri poſterioris in 169. vt explicatum eſt num. 4. tertio ſoluetur eadem æqualitas eligendo producentes 14 N & 12 N + $\frac{2868}{7}$ ita enim ſumma radicum erit 26 N. duplum lateris quadrati 1699. atque hæc eſt methodus Fermatiana quæ dat pro valore radicis $\frac{2048075}{205668}$. 22

Dicet aliquis iſtam methodum eſſe quidem ingenioſam, ſed inutilem, vt pote quæ prodeat tantum ex numeris arte conquiſitis, & tali ratione diſpoſitis vt & illi producant differentiam terminorum quadrato æquandorum, & in ſummâ reperiatur duplum lateris majoris quadrati. At quiſquis hoc opponit ignorat eâ ratione ſolui pulcherrimum & difficillimũ problema quod alias torſit omnes Algebriſtas, & quod inſolutum manſiſſet, ni Fermatius hac methodo fultus ſoluiſſet nodum Gordianum. Denique qui inutilitatem huius methodi accuſat videat ſolutionem multorum problematum infra num. 45. 47. 48. 50. Quomodo autem inueniantur iſti producentes facile eſt judicare nam ſumendum duplum lateris quadrati majoris & illud diuidendum in duas partes quæ producant differentiam quadratorum, vt in primo exemplo fumitur 10. diuidendus in duos qui faciant 16. & inuenientur producentes 8 & 2. ita de cæteris. 23

Poſt inuentos per analyſin primitiuos numeros iterata operatio exhibet ſolutionem.

Contingit non raro, vt in enodatione alicuius problematis incidatur in numeros fictos: iam ſupra oſtenſum eſt quomodo huic malo medeatur ars analytica Fermatij, ſed accipe inſuper radicem ſingularem ex qua fructus innumeri prodibunt: radix illa eſt iterata operatio, ſed ne incaſſum redintegres operationem analyſis exhibebit numeros primitiuos in ſecundâ operatione ponendos. 24

Quæratur verbi gratia triangulum rectangulum cuius tam hypotenuſa quam ſumma laterum circa rectum ſit numerus quadratus, formetur triangulum ab obuiis Numeris 1 N + 1 & 1 N. ergo tria latera erunt 2 Q + 1 + 2 N. 1 + 2 N. 2 N + 2 Q. igitur hypotenuſa 2 Q. + 1 + 2 N. & ſumma laterum circa rectum 2 Q. + 1 + 4 N. æquantur quadrato & fit per methodum cõmunem valor radicis $\frac{12}{7}$ vnde duo numeri à quibus formatum eſt triangulum erunt — $\frac{5}{7}$ & — $\frac{12}{7}$ ſeu in integris accipiendo ſolos numeratores — 5 — 12 triangulum autem inde formatum eſt 169. 119. 120. vnde infero ad ſolu- 25

tionem problematis inueniendum esse aliquod triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit quadratus & differentia laterum circa rectum sit quadratus atque hæc concluſio elicitur vi analyseos præcedentis, istud autem triangulum est 169. 119 120. quod formatur vel ab −5 & −12. vel a+5 & +12. quare itero operationem & formo triangulum quæsitum ab 1 N +5. & 12. & peruenio tandem ad æqualitatem duplicatam quæ non dabit amplius numeros fictos , sed veros beneficio trianguli illius primitiui vt distinctius videbitur infrà num. 45.

26 Rursus si proponatur quærendum triangulum rectangulum quo· productus sub hypotenusa in summam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus areâ, faciat quadratum formabitur triangulum ab obuiis Numeris 1 & 1 N + 1. ergo latera erunt 1 Q + 2 N + 2. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. duo itaque 1 Q + 2 N + 2 in 1 Q + 3 N 1 & productus 1 QQ + 5 C + 9 Q. + 8 N. + 2. multatus area 1 C. + 3 Q + 2 N dat residuum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 6 N + 2 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 2 N + 1. eius quadratum est 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 æquandum numero superiori & fit valor $\frac{1}{2}$ proindeque si hîc sisteremus secundum latus quod fuit 1 Q + 2 N foret minus nihilo & ad solutionem postulatam ineptum, quare iteranda est operatio & formandum triangulum ab 1 N + 1 & 2. ita enim latera erunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N − 3. 4 N + 4. productus ex hypotenusa in summam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius mulctatus areâ erit 1 QQ + 4 C + 6 Q + 20 N. + 1 æquandus quadrato, finge latus 1 + 10 N − 1 Q & fit pro valore verus numerus $\frac{23}{6}$ ergo iuxta positiones formandum erit triangulum a $\frac{29}{6}$ & 2 siue in integris accipiendo solos numeratores à 29 & 12 & fient latera quæsiti trianguli 985. 697. 696. Idem omnino contingeret si poneres pro noua radice 1 N. − $\frac{1}{2}$ & iuxta illam resolueres 1 QQ + 4 C + 6 N + 2 inde enim orietur nouus terminus æquandus quadrato 1 QQ + 2 C + $\frac{39}{2}$ + $\frac{5N}{2}$ + $\frac{1}{16}$ finge latus $\frac{1}{4}$ + 5 N. − 1 Q & fit valor $\frac{33}{12}$. hinc tolle $\frac{1}{2}$ ob nouam radicem & fit $\frac{17}{12}$ pro primis positionibus, quare juxta positiones formabitur triangulum in integris ab 29. & 12 vt supra.

27 Iterum quæratur triangulum rectangulum ita vt hypotenusa sit quadratus sicut & differentia laterum ponatur 1 N + 1 & 1 pro duobus numeris à quibus formetur triangulum, ergo latera erunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q. + 2 N. 2 N + 2. tolle postremum 2 N + 2. à medio 1 Q + 2 N. igitur differentia 1 Q − 2 & hypotenusa 1 Q + 2 + N. æquantur quadrato & fit per duplicatam æqualitatem $\frac{17}{12}$ pro valore radicis, ergo iuxta positiones numeri formantes triangulum erunt − $\frac{5}{12}$ & 1 seu in integris abiecto denominatore, − 5 & 12. posses iterare operationem , & inuenire triangulum quæsitum , sed aduerte vltro illud offerri ex formatione 5 & 12. fit enim triangulum rectangulum 169. 119. 120. vbi hypotenusa & differentia laterum est quadratus numerus.

Bachetus impossibilitatem agnoscit vbi Fermatius facilitatem inuenit.

28 Fatendum est ingenuè plurimas quæstiones per methodos ordinarias solui infinities vt cum vterque numerus quadrato æquandus constat radicibus diuersis & eodem quadrato, facilè enim est eo in casu reperire quotlibet solutiones, propterea Bachetus ad quæstion. 24 lib. 6. cum in secundo modo soluendi duplicatas æqualitates dixisset vnicam solutionem afferri, in quarto modo solutiones adhibet infinitas. Verum aliæ sunt æqualitates duplicatæ delicatiores in quibus per methodos communes vnica solutio , vel ad summum duplex inuenitur , vnde ille idem illustris Diophanti commentator loco citato ait vnicam solutionem afferri posse , dum numerorum ex tribus speciebus compositorum differentia constat vnicâ specie , vel enim in vno numerorum

quadrato

quadrato æquandorum ſunt tres ſpeeies ex vna parte & duæ tantum ex alia, eſtque vnicus vtrinque quadratus, vel dum ſunt tantum duæ ſpecies in terminis æquandis, & vnus conſtat quadratis & vnitatibus, alter autem vnitatibus & radicibus, addit autem contingere duas ſolutiones cum tam quadratorum quam vnitatum numerus eſt quadratus; ego vero, pace tanti viri dixerim, aio ex methodo Fermatianâ etiam in his omnibus caſibus contingere ſolutiones infinitas vt exemplis ſequentibus planum erit.

Primum exemplum ſit in duplicatâ æqualitate $1\,Q+3\,N+7$. & $1\,Q-5\,N+7$. 92
differentia eorum terminorum conſtat vnicâ ſpecie eſtque $8\,N$. & ſit valor 3. fruſtra Bachetus per ſuam methodum alium quæreret, ſed ponatur pro nouâ radice $1\,N+3$. ergo noui termini erunt $1\,Q+25+9\,N$. & $1\,Q+1+1\,N$. igitur quoniam numerus vnitatum quadratus eſt vtrobique poterit ſolui iſta æquatio nec te terreant numeri ficti qui occurrent iam enim ſupra dedimus modum ex illis eliciendi veros.

Secundum erit in $4\,Q-1\,N-4$ & $4\,Q+15\,N$. vbi ſunt tantum duæ ſpecies ex vna
parte, & quam Bachetus ſoluit inueniendo vnicum valorem $\frac{5}{4}$. pone pro nouâ radice 30
$1\,N+\frac{5}{4}$. ergo iuxta illam reſoluti priores termini dabunt nouos æquandos quadrato $4\,Q+1+9\,N$. & $4\,Q+25\,N$. ac proinde cum habeatur numerus vnitatum quadratus inueniri poteſt valor radicis eritque $\frac{2705}{1344}$.

Tertium exemplum ſit in duobus terminis $1\,Q+9$ & $9+24\,N$ æquandus quadra- 31
to, duos inuenies valores ad ſolutionem iſtius æqualitatis, nempe 3 & $\frac{816}{225}$ inde inuenies infinitos, ponendo pro noua radice $1\,N+3$ vel $1\,N+\frac{816}{225}$ verum hoc indicaſſe ſatis eſto.

Deinde Bachetus ait reperiri duas ſolutiones in iis duplicatis æqualitatibus 32
quarum termini habent tam numerum quadratum quam vnitatum quadratum vt ſi dentur æquandi quadrato $1\,Q+12\,N+1$ & $1\,Q+1$ nam per methodos vulgares reperientur valores $\frac{4}{3}$ vel $\frac{3}{4}$ at ſi quis petat alios, hæret Bachetus, noſter tamen Fermatius inde ſe alacriter expedit & ſubminiſtat infinitos. Adde quod ne in hoc quidem caſu ſemper dabit duos valores Bachetus vt ſi dentur duo termini æquandi quadrato $1\,Q+3\,N+1$ & $1\,Q-1\,N+1$ vnicum enim eius methodus valorem exhibet, imo continget ſæpè vt ne vnum quidem ſit exhibiturus vt ſi dentur æquandi quadrato $1\,Q-6\,N+\frac{1}{4}$ & $1\,Q-2\,N+\frac{1}{4}$ hoc autem continget quia valor exhibetur cum defectu; jam autem ſupra diximus per methodum Fermatianam innumeros valores exhiberi etiam dum numeri ficti occurrunt.

Præterea cum Diophantus l. 4. q. 29. eo deueniſſet vt $9\,QQ-4\,C+69-12\,N$. 33
$+1$ æquandus foret quadrato, Bachetus ait quatuor tantum modis id fieri poſſe, ſublatis enim quadrato quadratis & vnitatibus vel tollet radices, vt maneat æquatio inter cubos & quadratos; vel tollit cubos vt maneat æquatio inter radices & quadrata, vnde inuenit tantum duos valores $\frac{8}{9}$ & $\frac{15}{13}$. Fermatius vero reperit infinitos, primo enim expungit etiam quadrata, vt remaneat æqualitas inter cubos & quadratoquadrata vel inter radices & vnitates. Secundo aſſerit Bachetus ſi fingatur latus iſtius quadrati $3\,Q+6\,N-1$. fore vt incidatur in incommodum $\&24\,Q+40\,C$ æquentur nihilo, Verum hoc incommodum non pertimeſcit Fermatius. Tertio ex quolibet valore inuento, alios reperit in infinitum vt iam explicatum eſt.

Deinde Bachetus lib. 4. q. 28. ait eſſe impoſſibile æquari cubo $8\,C+8\,N-1\,Q$
-1 & affert rationem quia non poteſt fingi cubus iſte niſi à latere $2\,N-1$ vel tollantur 34
cubi & vnitates: verum, pace tanti viri dixerim, falſum hoc eſt, primo enim poteſt fingi latus iſtius cubi $\frac{8N}{3}-1$ ex fit valor $\frac{512}{729}$ deinde fingendo latus $2\,N-1$ fiet radix $-\frac{3}{11}$ & reſoluendo numerum ſuperiorem iuxta hanc nouam radicem. Hæc fuſius explicabuntur infrà in tertiâ parte.

Vietam Fermatius antecellit.

35 Non ſatis caute negauit Vieta numerum compoſitum ex duobus cubis poſſe diuidi in alios duos cubos: Fermatius enim docet id poſſe fieri ex iis quæ habet Bachetus ad l. 4. Q. 2. Diophanti (quod tamen ipſe Bachetus non aduertit) ſit igitur 9. compoſitus ex cuobus cubis 1 & 8 diuidendus in alios duos cubos, quærantur primum duo cubi quorum differentia ſit 9. beneficio huius canonis: vtrumque datorum cuborum 1 & 8 ducito ter in latus alterius, productos diuide per interuallum cuborum & minori quotienti adde maius latus, à maiore autem quotiente aufer minus latus, ſumma & reſiduum exhibebunt quæſitorum latera cuborum: proinde latera illa ſunt $\frac{20}{7}$ $\frac{17}{7}$ cubi vero $\frac{4913}{343}$ $\frac{8000}{343}$. Secundo datis duobus cubis inueniuntur alij duo quorum differentia æquet differentiam datorum; hoc autem commode fiet per canonem ſequentem, productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per ſummam cuborum, à majore quotiente aufer minus latus à minore quotiente aufer minus latus, relinquentur latera quæſitorum cuborum. At duorum cuborum mox inuentorum differentia eſt 9. ergo latera nouorum cuborum quorum differentia eſt 9. erunt 188479 & 36520 (ſuppoſito vtrique denominatore cõmuni 90391) cubi autem erunt 6695590842626239 & 48707103808000 (modo tamen vtrique ſupponatur communis denominator 738542637646471) horum igitur cuborum differentia eſt 9 ſicut & priorum. Tertio extat alius canon quo inueniuntur duo cubi quorum ſumma æqualis eſt differentiæ duorum cuborum datorum, & eſt eiuſmodi: vtrumque datorum cuborum duc ter in latus alterius, productos diuide per ſummam datorum cuborum, à maiore quotiente aufer minus latus, & minorem quotientem aufer à majore latere, relinquentur cuborum quæſitorum latera. Ergo cum duorum cuborum poſteriorum differentia ſit 9. ſi per hunc canonem inueniantur duo cubi quorum ſumma ſit æqualis illi differentiæ habebuntur latera quæſitorum cuborum $\frac{1243617773399009783648 1}{6096238356613729744 9}$ $\frac{4872671717143523365 60}{6096238356761372974 49}$.

36 Vieta ſoluit acutiſſime problema Adriani Romani quod fuerat propoſitum omnibus totius orbis mathematicis in vno caſu, dum videlicet numerus cum quo debet fieri æquatio minor eſt binario, idque per ſectiones angulares, vbi ingenij ſui vim mirificè oſtendit & maximam inde exiſtimationem vbique terrarum ſibi comparauit. Verum Fermatius noſter, etiam dum numerus binario maior eſt, quo in caſu nullum eſt ab ſectionibus angularibus præſidium, ſoluit quæſtionem; ſit enim 45.(1) − 3795(3) + 95634 (5) &c. nihil omnino immutando in terminis Adriani numerus æqualis cuiuis numero dato (eo enim recidit problema Adriani vt Vieta ipſe vel agnouit vel emendauit) ſit autem datus numerus ℞ 8 + 6, qui eſt binario maior, aſſerit Fermatius valorem radicis primigeniæ facillime deſignari per radices vniuerſales eritque in eo caſu ℞ poteſtatis 45 (3 + ℞ 2 + ℞ bin. 10. + ℞ 72) + ℞ poteſtatis 45 (3 + ℞ 2 − ℞ bin. 10 + ℞ 72) Rurſus ſi detur numerus 4 aſſerit Fermatius valorem radicis fore ℞ poteſtatis 45 bin. 2 + ℞ 3 + ℞ poteſtatis 45. reſidui 2 − ℞ 3. & ſic infinitum valores nouos dabit etiam ſupra binarium, cum Vieta ne vnum quidem etiam ſectionum angularium ope ſuffultus exhibere poſſit.

37 Vieta l. 5. zetet. 9. infeliciter ſoluit quæſtionem tertiam libri ſexti Diophanti; cum enim iſte proponat inuenire triangulum rectangulum cuius area aſſumens datum numerum faciat quadratum, coarctauit Vieta quæſtionem ad datum numerum ex duobus quadratis compoſitum, at Fermatius innumeris modis ſoluit problema de dato quocumque numero ſi enim dentur 3 numeri ſequentes exhibet triangulum quæſitum $\frac{1441889}{41616}$ $\frac{1397825}{41616}$ $\frac{34}{40}$.

Diophantum in plurimis Fermatius ſuperat.

Diophantus l. 5. q. 8. tradit artem inueniendi tria triangula rectangula quæ ſint 38
æqualia quoad aream; qui vero plura ab ipſo expetet numquam obtinebit, præterea numquam tradidit Diophantus methodum inueniendi triangulum dato triangulo æquale quoad aream. Fermatius vtrumque mox atque eadem operatione præſtabit, ſit verbi gratiâ inueniendum triangulum rectangulum cuius area ſit 6. qualis eſt area trianguli rectanguli 3. 4. 5. eſto vnum latus cuiuſpiam trianguli rectanguli 3 & aliud latus ſit 1 N + 4 horum quadrata ſimul ſumpta exhibent 25 + 1 Q. + 8 N. pro quadrato hypotenuſæ: quare iſte numerus æquatur quadrato, deinde area iſtius trianguli $\frac{3}{2}$ N + 6. debet eſſe ſextupla alicuius quadrati (quia poſtulatur aream eſſe 6, ergo eius areæ ſextans quadratus eſt ac proinde ille ductus in 36. efficiet quadratum, efficit autem 9 N + 36. igitur hic numerus æquandus eſt quadrato. En igitur duos terminos duplicatæ æqualitatis 9 N + 36. & 25 + 1 Q + 8 N. in his autem vnitatum numerus quadratus eſt, ergo valor radicis facile reperietur er tque $-\frac{60530460}{21650409}$ ac proinde 1 N + 4 erit $\frac{2896804}{2405601}$. aliud autem latus circa rectum eſt 3 igitur horum quadrata ſimul ſumpta faciunt quadratum cuius latus $\frac{7776485}{2405601}$ erit hypotenuſa ergo habes triangulum rectangulum $\frac{7776485}{2405601}$ $\frac{2896804}{2405601}$. 3. cuius area eſt ſextupla cuiuſpiam quadrati nempe $\frac{724281}{2485600}$. huius vero quadrati latus eſt $\frac{851}{1551}$. per quod ſi diuidas ſingula latera trianguli mox reperti, habebis triangulum quæſitum $\frac{12061328235}{2047166451}$. $\frac{4492943004}{2047166451}$. $\frac{4653}{852}$. cuius area eſt 9. aduerte nos inueniſſe hoc triangulũ per illud quod datum fuit 3. 4. 5. ac per inuentum inueniri poſſe tertium, per tertium, inuenietur quartum & ſic in infinitum. Ecce tibi quatuor triangula rectangula quorum area eſt 840 primum 58. 40. 42. ſecundum 74. 24. 70. tertium 113. 15. 112. quartum $\frac{22606096}{19024}$ $\frac{26896}{19024}$ $\frac{22606080}{19024}$.

Diophantus l. 6. q. 6. incidit in illam duplicatam æqualitatem 1 + 1 Q & 1 + 14 39
N. poteſt illa reſolui duobus modis, ſupponendo primum ex illis maiorem vel minorem altero, prout libuerit: & ſunt duæ radices $\frac{23}{7}$ & $\frac{178}{288}$. ſciſcitare ab illo tertiam, non dabit. Fermatius poteſt dare infinitas, pro exemplo ſumatur noua radix 1 N + $\frac{24}{7}$ & juxta illum reſoluantur 1 + 1 Q & 1 + 14 N. fientque noui termini 1 Q + $\frac{625}{49}$ $\frac{48N}{7}$ & 49 + 14 N. ergo cum vnitatum numeri ſint quadrati in vtroque termino, reſolui poteſt per methodum, eritque radix pro duobus terminis poſterioribus $\frac{12252580112150}{358216614144}$ cui necte $\frac{24}{7}$ & fiet valor radicis pro datâ æqualitate + $\frac{20392660706}{250751629008}$.

Diophantus l. 6. poſt quæſt. 15. & 17. omiſit tertium caſum quo quæri poteſt trian- 40
gulum rectangulum vt tam hypotenuſa quam alterum laterum circa rectum, detractâ areâ faciat quadratum: omiſit inquam illud problema raræ ſubtilitatis non alia de cauſa niſi quia incidit in numeros fictos quorum enodationem ignorauit. Fermatius illud acutiſſime ſoluit; primo enim per analyſin deprehendit inueniendum eſſe triangulum rectangulum in quo productus ſub hypotenuſa in ſummam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus area, ſit quadratus, deinde triangulum iſtiuſmodi inuenit eiuſque ratiocinium & praxim dedimus ſupra num. 26. vbi diximus triangulum 985. 697. 696. ſatisfacere huic lemmati. Tertio latera huius trianguli nectit characteri radicum vt ſit triangulum quæſitum 985 N. 697 N. 696 N. cuius area 2425564. tollatur ab hypotenuſa 985 N & 697 N. ita duo reſidua 985 N − 2425569 & 697 N & 2925564 erunt æquanda quadrato, æquetur illud poſtremum quadrato ab 697 N. orto ſitque 485809 æquale 697 N − 2425569. & fiet valor radicis $\frac{1}{1045}$ ideoque triangulum ab initio quæſitum erit $\frac{985}{1045}$ $\frac{697}{1045}$ $\frac{697}{1045}$. En quo Diophantus nuſquam attingere potuit, multa alia dabimus eiuſmodi in ſequentibus quæ Diophantus omiſit, vt pote ſibi ignota.

Quæstiones duodecim circa hactenus dicta.

41 Quot exempla dedimus tot sunt problemata difficillima, quibus enodandis impares erunt algebristæ vulgares. Primum enim exemplum in quo proposita est duplicata æqualitas $4N + 1$ & $1Q - 2N + 1$ ita enunciari potest. Inuenire numerum octonario majorem cuius quadruplum additum vnitati faciat quadratum & cuius duplum subtractum ab eius quadrato cum vnitate iuncto faciat rursus quadratum, numerus quæsitus est $\frac{15}{4}$. Secundum exemplum sic proponetur. Inuenire numerum cuius duplum detractum vnitati quadratum exhibet & cuius quadruplum subtractum ab vnitate iunctâ cum duplo eius quadrato faciat quadratum. Hinc existit duplicata æqualitas inter $1 - 2N$ & $1 - 4N + 2Q$ vbi valor radicis est $\frac{5333244}{3915004}$. Tertium exemplum in quo $89 + 4 + 16N$ & $2Q + 4 + 4N$ æquantur quadrato, sic proponi potest in problema. Inuenire numerum cuius sedecuplum cum octuplo quadrato additum 4. facit quadratum & cuius quadruplum cum quaternario & duplo ipsius quadrato, facit quadratum, hic valor est $\frac{15}{7}$. Omitto reliqua exempla vt proponam illustriores quasdam quæstiones.

Inuenire infinities duos numeros quorum productus sublatus ab alterutro eorum, aut ab illorũ summâ aut à differentiâ relinquat quadratum.

42 Sint duo illi $1N$. & $1 - 1N$ sic enim satisfiet duobus postulatis prioribus, restat ergo vt duobus posterioribus satisfiat, suppono $1N$ esse minorem, ergo productus $1N - 1Q$. subtractus à differentia $1 - 2N$ dat pro residuo $1Q + 1 - 3N$. subtractus autem à summa 1. relinquit $1Q + 1 - 1N$. illa ergo duo residua æquantur quadratis & fit per methodum vulgarem $\frac{3}{8}$ pro valore radicis ac proinde duo numeri quæsiti sunt $\frac{3}{8}$. $\frac{5}{8}$. Supponatur nunc pro nouâ radice $1N. + \frac{3}{4}$ & iuxta illam resoluantur duo residua supradicta, fientque de nouo, duo termini $1Q + 4\frac{19}{64} \frac{1N}{4}$ & $1Q + \frac{1}{64} - \frac{9N}{4}$ æquandi quadratis, igitur quoniam in vtroque termino vnitatum numerus est quadratus, inuenietur valor pro his terminis $\frac{12459200640}{2197980153600}$ huic adde $\frac{3}{8}$ & fiet valor pro prioribus terminis, igitur duo numeri quæsiti erunt $\frac{2498751197}{7849929120}$ & $\frac{5451177715}{7849929120}$.

Potes ex isto posteriori valore elicere alium tertium, & ex tertio quartum, & sic in infinitum. En tibi alios duos numeros satisfacientes quæstioni 10416 & 41449 modò supposueris denominatorem 51865.

Inuenire infinities tres numeros quorum solidum subtractum à singulis, & à qualibet illorum differentia & à producto medij in extremos, & à quadrato medij, relinquat quadratum.

43 Ponantur tres quæsiti $1N. 1. 1. - 1N$ horum solidum $1N - Q.$ detractum primo & tertio, itemque differentiæ primi & secundi, ac differentiæ secundi & tertij relinquit quadratum, superest ergo vt satisfiat reliquis postulatis seu vt $1Q + 1 - 1N$ & 1

Q + 1 − 3 N. æquentur quadratis, sunt autem iidem plane numeri cum iisdem signis quæ in priori quæstione igitur valor est $\frac{1}{3}$ & fient tres quæsiti 3. 8. 5. modo illis supponatur denominator communis 8. Item tres sequentes 10416. 51865. 41449 (modo supponatur illis denominator 51865) satisfaciunt quæstioni simili ratione tres subsequentes 249875197. 784992912. 535117715. suppositio denominatore communi 784992912. soluunt quæstionem.

Potest idem problema aliter proponi hoc modo. Diuidere infinities binarium in tres partes, ita vt solidum sub illis detractum singulis, & cuilibet eorum differentiæ & cuilibet producto medij in extremos, & quadrato medij, semper relinquat quadratum, nam quilibet ternarius ex supradictis æquatur binario. Aduerte dumtaxat me per medium non intelligere minorem majore & majorem minore, sed habere tantum rationem situs, in eo ordine quem supra vides.

Inuenire infinities duos numeros tales, vt differentia quadratorũ ab illis ortorum detracta maiori vel minori, vel summæ vel differentiæ eorum, relinquat quadratum.

Ponatur summa numerorum 1 − 2 N. & differentia 2 N. ergo ipsi numeri erunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ − 2 N. proindeque differentia quadratorum ab illis est 2 N − 4 Q quæ detracta summæ vel differentiæ relinquit quadratum. Restat ergo vt detracta alterutri numerorum, quadratũ relinquat, relinquit autem $\frac{1}{4}$ + 4 Q. − 2 N. & $\frac{1}{2}$ + 4 Q − 4 N. igitur hæc æquanda quadratis, & fit 1 N æqualis $\frac{3}{16}$ & duo quæsiti numeri sunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{16}$ vt vero inuenias alios, pone pro nouâ radice 1 N + $\frac{3}{16}$ & iuxta hãc resolue terminos quadrato æquatos, & perge in operatione secundum præcepta superius tradita, neque despondeas animum si occurrant numeri ficti, iam diximus quomodo reduci debeant ad veros. 44

Inuenire duos numeros quorum summa faciat quadratum, & quorum quadrata simul iuncta faciant quadrato-quadratum.

Istud problema idem plane est cum superiori quo quærebatur triangulum rectangulum cuius hypotenusa & summa laterum sit quadratus aliasque fuit propositum plerisque doctissimis Mathematicis à Fermatio nostro sine solutione. Vtere igitur triangulo primitiuo supra inuento (num. 25) 169. 119. 120. quod formatur ab 5 & 12 & forma triangulum ab 1 N + 5 & 12. latera erunt 1 Q + 169 + 10 N. 1 Q. − 119 + 10 N. 24 N + 120. igitur hypotenusa 1 Q + 169 + 10 N. & summa laterum circa rectum 1 + 1 Q + 34 N. æquantur quadrato, duc summam istam laterum in 169. ergo productus 169 Q + 5746 N. + 169. cum hypotenusa 1 Q + 169 + 10 N æquantur quadratis. Ergo (per ea quæ dicta sunt num. 22) valor radicis est $\frac{2048075}{205366}$ & iuxta positiones duo numeri à quibus nascetur triangulum quæsitum 468729861028 9. 4565486027761. 1061652293520. nam & hypotenusa & quadratus & summa laterum & quadrata laterum æquantur quadrato hypotenusæ. Proindeque duo latera circa rectum sunt duo numeri quæsiti tum quia illorum summa quadratus est, tum quia horum quadrata simul iuncta faciunt quadratoquadratum. 45

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui additus dato multiplici alterius circa rectum faciat quadratum.

46 Detur triplus pro multiplici & formetur triangulum rectangulum ab 1 N + 1 & 1. latera erunt 2 + 1 Q. + 2 N. 1 Q. + 2 N. 2 + 2 N. triplum poſtremi iſtius lateris eſt 6 N + 6 cui ſi addas medium latus, fiet ſumma 1 Q + 8 N + 6 æquanda quadrato. Inſuper ipſum medium latus nempe 1 Q + 2 N. quadrato æquandum eſt. Hæc duplicata æqualitas modo communi reſoluta dat $\frac{1}{12}$ pro valore radicis & iuxta poſitiones fiet triangulum quæſitum in integris 313. 25. 312.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui multatus dato multiplici alterius lateris circa rectum faciat quadratum.

47 Detur triplus pro multiplici & capiatur triangulum inuentum in præcedente 313. 25. 312. pro primitiuo, & quia iſtud triangulum formatur ab 13 & 12 forma triangulum quæſitum ab 1 N − 13 & 12. latera erunt 1 Q − 26 N + 313. 1 Q − 26 N + 25. 24 N − 312. huius poſtremi triplum ſubtractum à medio, relinquit 19 + 961 − 98 N. quod eſt æquandum quadrato, at medium latus æquari etiam debet quadrato nempe 1 Q − 26 N + 25. En tibi æqualitatem duplicatam, ducto igitur horum poſtremo in $\frac{961}{25}$ iuxta ea quæ dicta ſunt in numero 4. fient duo termini noui æquandi quadrato $\frac{9619}{25}$ + 961 − $\frac{24986N}{25}$ & 1 Q + 961 − 98 N. horum differentia eſt $\frac{2369}{25}$ − $\frac{22536N}{25}$ eligantur duo hanc differentiam producentes $\frac{26N}{5}$ & $\frac{36N}{5}$ − $\frac{11268N}{130}$ & fiant reliqua pro ſolito, inuenieturque valor radicis $\frac{2768173I}{318370}$ ergo 1 N. − 13. & 12. in integris abiecto denominatore erunt 23542921 & 3820440 ex quibus formatur triangulum quæſitum 5688648710058 41. 539673367418641. 1798886342104 80. dabimus infra ſolutionem eiuſdem problematis per aliam methodum in 3. p. n. 36.

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenuſa ſit numerus quadratus, & in quo datus multiplex vnius lateris circa rectum detractus alteri, faciat quadratum.

48 Pone 1 N + 1 & 1 pro numeris formantibus triangulum, latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ergo ſi duplum iſtius poſterioris 4 N + 4 tollas ab 1 Q + 2

N. relinquetur 1 Q − 2 N − 4 æquandus quadrato, ſed & hypotenuſa 2 + 1 Q + 2 N. æquanda eſt quadrato. En tibi duplicatam æqualitatem vbi valor radicis eſt $\frac{17}{12}$ igitur 1 N + 1 & 1 in integris relicto de nominatore erunt − 5 & 12. vnde formatur triangulum 169. 119 − 120, redintegra ergo operationem & pone pro numeris formantibus triangulum 1 N − 5 & 12 latera trianguli erunt 1 Q + 169 − 10 N. 1 Q − 10. N − 119. 24 N − 120. ac proinde ſi duplum poſtremi lateris detrahatur medio, reſiduum 1 Q + 121 − 58 N ſicut & hypotenuſa 1 Q + 169 − 10 N. æquabuntur quadratis, ducatur ergo reſiduum 1 Q + 121 − 58 N in quadratum $\frac{169}{121}$ & fient duo termini æquandi quadrato reducti ad eundem quadratum $\frac{1699}{121}$ + 169 − $\frac{9802N}{121}$ & 1 Q + 169 − 10 N. differentia illorum eſt $\frac{489}{121}$ $\frac{8592N}{121}$ quam producunt $\frac{2N}{11}$ & $\frac{2N}{11}$ − $\frac{4296}{11}$ horum producentium ſummæ ſemiſſis quadratus æquetur maiori duorum ſuperiorum terminorum & fiet valor radicis $\frac{4593455}{46046}$ & juxta poſitiones triangulum quæſitum erit 19343046113329. 18732418687921. 4821817400400. & ſatisfacit quæſtioni.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa rectum ſit quadratus, & alterius lateris circa rectum ſit quadratus & alterius lateris circa rectum datus multiplex hypotenuſæ additus faciat quadratum.

Detur multiplex duplus & formetur triangulum ab 1 N + 1 & 1 latera ſunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ponatur medium latus 1 Q. + 2 N. eſſe quadratum, poſtremi autem lateris duplum 4 N + 4 additum hypotenuſæ facit 1 Q + 6 N. + 6 ergo duo ſequentes termini 1 Q + 6 N + 6 & 1 Q + 2 æquantur quadratis, & fit valor $\frac{1}{4}$ ac proinde 1 N + 1 & 1 in integris erunt 5 & 4 vnde formatur triangulum quæſitum 41. 9. 40. hinc ſolues ſequens problema. Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit quadratus numerus, alterius autem lateris ſimplum & duplum additum hypotenuſæ faciat quadratum, triangulum eſt idem quod ſupra 41. 9. 40. ſi peteres iſtius lateris additi ſimplum & quindecuplum triangulum foret 30. 16. 34. formatum à 5 & 3. 49

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit quadratus, alterius autem lateris datus multiplex detractus hypotenuſæ faciat quadratum.

Detur multiplex duplus; & aſſumatur pro triangulo primitiuo illud quod inuentum eſt in quæſtione præcedenti 41. 9. 40. quodque formatur ab 5. & 4. inde ob analyſin præcedentem formabitur triangulum quæſitum ab 1 N − 5 & 4. latera erunt 1 Q + 41 − 10 N. 1 Q + 9 − 10 N. 8 N − 40 ſit medium latus 1 Q + 9 − 10 N. æquandum quadrato deinde duplum poſtremi lateris 8 N − 40. detrahatur hypotenuſæ & remanet 1 Q + 121 − 26 N æquandus quadrato, ecce ergo duplicatam æqualitatem 50

inter 1 Q + 121 − 26 N & 1 Q + 9 − 10 N quæ multipliciter videtur posse solui, sed vix occurret ratio commoda ad solutionem nisi recurras ad nouam methodum explicatam num. 20. & sequentibus, reuocentur ergo illi duo termini ad eandem vnitatem quadratum ducendo posteriorem in $\frac{121}{9}$ ita fient rursus duo termini $\frac{1219}{9} + 121 - \frac{1219N}{9}$ & 1 Q + 121 − 26 æquandi, quadrato, horum terminorum differentia est $\frac{1124}{9} - \frac{976N}{9}$ hanc producunt $\frac{8N}{3}$ & $\frac{14N}{3} - \frac{122}{3}$ horum summæ semissis quadratus æquatus priori termino dat valorem $\frac{658}{33}$ vnde si tollas 5. restabit $\frac{493}{33}$ ergo numeri à quibus formabitur triangulum quæsitum sunt 493 & 132. & ipsum triangulum quæsitum est 260473. 225625. 130152.

Hinc solues sequens problema : Inuenire triangulum rectangulum in quo vnum latus circa rectum sit numerus quadratus & alterius lateris simplum & duplum detractum sigillatim hypotenusæ relinquat quadratum, iidem enim numeri supra dati soluunt quæstionem neque dicas hanc conditionem mox additam esse inutilem cum omni triangulo rectangulo conueniat; nam & si conueniat omni triangulo, multiplicibus tamen non conuenit vt patet in sequente 624. 576. 240 nam vnum eius latus est numerus quadratus & duplum alterius lateris detractum hypotenusæ facit quadratum, nec tamen simplum illius additum hypotenusæ quadratum facit.

Inuenire triangulum rectangulum cuius area sublata ex quadrato summæ laterum circa rectum relinquat quadratum.

51 Ponantur duo latera circa rectum 1 N & 1. ergo illorum quadrata 1 Q + 1 facient quadratum hypotenusæ, area autem trianguli erit $\frac{1N}{2}$ quæ sublata de quadrato summæ laterum circa rectum relinquit 1 Q + 1 + $\frac{3N}{2}$ æquandum quadrato in hac duplicata æqualitate fit valor − $\frac{55}{48}$ pono ergo nouam radicem 1 N − $\frac{55}{48}$ & iuxta eam resoluo omnes particulas eorum terminorum qui mox æquati sunt quadratis fiuntque noui termini quadrato æquandi 1 Q − $\frac{19N}{24}$ + $\frac{1369}{2304}$ & 1 Q − $\frac{55N}{24}$ + $\frac{5329}{2304}$, duc primum terminum in $\frac{5329}{1369}$ sic enim reuocabuntur duo termini prædicti ad eundem vnitatum quadratum eruntque $\frac{53299}{1369}$ − $\frac{101251N}{37856}$ + $\frac{5329}{2304}$ & 1 Q − $\frac{55N}{24}$ + $\frac{5329}{2304}$ æquandi quadrato differentia illorum est $\frac{39609}{1369}$ $\frac{2163N}{2378}$ quam producunt $\frac{36N}{37}$ & $\frac{110N}{37}$ − $\frac{2163}{2664}$ & fit valor $\frac{7622505}{5250744}$ hinc tolle $\frac{55}{48}$ ob nouam radicem & extabit valor pro primis positionibus $\frac{39655}{129648}$ igitur duo latera circa rectum quæ posita sunt 1 N & 1 erunt in integris 39655. 129648. & hypotenusa 135577. En triangulum quæsitum.

Inuenire triangulum rectangulum cuius tam vnum latus circa rectum quam summa laterum circa rectum sit quadratus, & in quo dupla area detracta alterutri laterum circa rectum faciat quadratum.

52 Ponantur latera 1 N & 1 − 1 N. duplum areæ est 1 N − 1 Q. quod detractum alterutri laterum facit quadratum : 1 Q & 1 + 1 Q − 2 N. præterea summa laterum est quadratum

tum, nempe vnitas, reſtat ergo vt ſecundum latus 1 — 1 N. & inſuper ſumma quadratorum a lateribus 1 + 2 Q — 2 N. faciant quadratum & fit $\frac{40}{49}$ pro valore radicis igitur triangulum quæſitum eſt $\frac{40}{49}\ \frac{9}{49}\ \frac{41}{49}$.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit cubus, à quo detractâ areâ relinquatur quadratus.

Ponantur latera circa rectum 1 N & 1, ſic enim vnum latus cubus erit: ex eo cubo 53
tolle aream $\frac{1N}{2}$. reſiduum $1 - \frac{1N}{2}$ æquandum eſt quadrato, ſed & 1 Q + 1 quadrato æquari debet, in iſta duplicata æqualitate valor radicis eſt $-\frac{272}{225}$ pono igitur nouam radicem 1 N $\frac{272}{225}$ & iuxta illam reſoluo ſingulas particulas terminorum quadratis æquatorum fiuntque noui termini quadrato æquandi $\frac{361}{225} - \frac{1N}{2}$ & 1 Q + $\frac{124609}{56625} - \frac{544N}{225}$ vbi vnitatum numeri ſunt quadrati qui ad eundem quadratum vnitatum reducti faciunt 1 Q + $\frac{124609}{50685}\ \frac{544N}{225}$ & $\frac{124609}{50625} - \frac{124609}{162450}$ quadrato æquandos, horum differentia eſt 1 Q — $\frac{268159N}{162450}$ quam producunt 1 N & 1 N — $\frac{268159}{162450}$ ergo valor eſt $\frac{18791746254}{8097092820}$ vnde ſi tollas $\frac{272}{225}$ ob nouam radicem relinquetur valor pro primis poſitionibus $\frac{900326071}{8097092820}$ & fit triangulum quæſitum $\frac{321037412881}{3097092820}$. I. $\frac{900326071}{8097092820}$.



PARS SECVNDA.

De Triplicatâ æqualitate, & eius solutionibus infinitis.

1 VVlgare est duos terminos quibusdam conditionibus affectos æquari posse quadratis: sed hactenus inauditum fuit hoc ipsum perfici de terminis tribus; asserit tamen intrepidè Fermatius non tantum hoc non esse impossibile, verum etiam facilè posse fieri, traditque regulas certas quibus id præstetur, modo adsit vnum quadratum ex parte singulorum terminorum: hoc autem facit dupliciter, primo respectu radicum & vnitatum, secundo respectu quadratorum & radicum.

Præceptum generale ad soluendas triplicatas æqualitates.

2 Si fuerint tres termini æquandi quadrato, & sit in illis idem quadratus, cape certum quemdam numerum quadratorum & radicum, pro vnâ radice, hunc multiplica per numerum radicum in vno ex terminis datis existentem ita vt productus numero vnitatum iunctus, efficiat quadratum: & juxta illam nouam radicem resolue duos alios terminos, iisque resolutis adhibe duplicatam æqualitatem vulgarem: ita efficies valorem pro tribus posterioribus terminis, hunc valorem resolue per illum certum numerum quadratorum & radicum quem accepisti, & fiet valor quem quæris pro tribus terminis prioribus qui dati sunt.

3 Exemplum esto in tribus terminis sequentibus 1 + 1 N. 1 + 2 N. & 1 + 5 N. æquandis quadrato, cape pro vna radice 1 Q + 2 N. hoc enim ductum in 1 numerum radicum facit 1 Q + 2 N & hic productus junctus vnitati facit quadratum 1 + 1 Q + 2 N. à latere 1 + 1 N tum juxta eandem radicem nouam resolue duos alios terminos 1 + 2 N & 1 + 5 N. & habebis duos terminos nouos 1 + 2 Q + 4 N & 1 + 5 Q + 10 N. æquandos quadrato, id facies, per methodum vulgarem capiendo istorum terminorum differentiam 6 N + 3 Q. quam producunt 3 N & 2 + 1 N. horum producentium summæ semissis quadratus 1 + 4 Q + 4 N. æquatus maiori termino 1 + 5 Q + 10 N. dat pro valore — 6 (hic numerus fictus æquabit quadratis tres posteriores terminos) hunc resolue per 1 Q + 2 N. quibus vsus es pro noua radice, hoc est cape quadratum — 6. nempe 26. quem connecte cum duplo — 6. nempe 12. ita enim fiet + 24. pro valore radicis in tribus prioribus terminis qui dati sunt eruntque tres illi termini quadrati 25. 49. 121. si accipias 24. pro 1 N.

4 Rursus data triplicata æqualitate 4 + 2 N. 4 + 3 N. 4 + 6 N. cape $\frac{1Q}{2}$ + 2 N. pro noua radice, vt eo cossico ducto in 2 fiat 1 Q + 4 N. qui iunctus 4 facit quadratum 4 + 1 Q + 4 N. operare vt supra, & fiet ualor pro triplicata æqualitate data $\frac{1120}{529}$.

5 Simili prorsus ratione datis tribus terminis 9 + 1 N. 9 + 3 N. 9 + 5 N. æquandis quadrato, oportebit vti resolutione, capiendo 1 Q + 18 N. pro 1 N. & fient noui tres termini, quorum primus erit quadratus indefinite, ac proinde per duplicatam æqualitatem vulgarem, inuenies valorem radicis $\frac{1WZ}{121}$.

Si numeri vnitatum sunt quadrati diuersi, haud difficilius soluetur triplicata æqualitas.

Vt si dentur tres termini 1 + 1 N. 4 + 3 N. 9 + 2 N æquandi quadratis reuocandi 6
erunt quadrati ad eundem, & perficietur operatio, vt dictum est; facile autem reuocabuntur ad eundem quadratum si tres illi multiplicentut inter se, sic ergo stabit triplicata æqualitas præcedens 36 + 36 N. 36 + 27 N. 36 + 8 N. quia enim 1 ducta est in 36. oportebit ducere in 36. numerum radicum qui illi iungitur & quia quadratus sequens 4 ducitur in 9 vt fiat 36. oportebit etiam numerum radicum 3. qui illi nectitur ducere in 4. vt fiat 36. necesse erit numerum radicum 2 illi annexum ducere in 4. vt fiant 8 N. at in istis posterioribus terminis valor est $\frac{269280}{744769}$ ergo & in prioribus, ille idem valor soluit quæstionem.

Hæc eadem praxis extenditur ad numeros diminutos.

Exempli causa si dentur tres termini 1 + 1 N. 1 − 2 N. 1 + 5 N. capiendo pro vna 7
radice 1 Q. + 2 N. reuocabuntur ad istos tres 1 + 1 Q + 2 N. 1 − 2Q − 4 N. 1 + 5 Q + 10 N. & quoniam illorum trium primus est quadratus indefinite; erunt duo reliqui æquandi quadrato & fiet valor radicis $\frac{48}{121}$ pro posterioribus terminis, ac pro prioribus $\frac{48}{121}$.

Dantur infinitæ solutiones in triplicatis æqualitatibus.

Rem totam exemplo illustrabimus, quia enim supra dixi − 6 esse valorem 1 + 2 Q 8
+ 4 N. & 1 + 5 Q + 10 N. assumo 1 N − 6 pro noua radice, iuxta quam resoluo duos terminos superiores & fiunt noui termini 5 Q + 121 − 50 N & $\frac{2424}{49}$ + 121 − $\frac{2420N}{9}$ æquandi quadrato per methodum vulgarem, & fit pro valore radicis quidam numerus, vnde si tollas 6. (ob nouam radicem 1 N − 6) restabit valor $\frac{11504385816}{14716382219}$ & quia tres termini primitus dati erant 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 5 N. & sumpta erat noua radix 1 Q + 2 N. duplum valoris mox inuenti iunctum eius quadrato, exhibebit pro triplicata æqualitate valorem $\frac{47095677072957839764}{216571905815699303961}$ modo supponas denominatorem, & satisfacit plane, nam iste numerus additus vnitati facit quadratum, cuius latus est 26220768035. suppositio denominatore 14716382219. duplum eiusdem numeri additum cum vnitate facit quadratum à latere 34036531067. supponendo eundem denominatorem; quintuplum autem illius numeri junctum vnitati, quadratum est à latere 50708537341. suppositio eodem denominatore.

Cum maior numerus radicum æquatur duobus alijs radicum numeris, impossibilis est solutio triplicatæ æqualitatis per hanc methodum.

Sint, verbi gratia, termini tres 1 + 2 N. 1 + 3 N. 1 + 5 N. æquandi quadratis; 9
& capiatur pro vna radice 2 Q + 2 N. vt primus terminus per eam resolutus exhibeat

quadratum 1 + 4 Q + 4 N. duo autem alij termini resoluti exhibebunt 1 + 6 Q + 6 N 1 Q + 10 N. igitur si hæc duplicata æqualitas soluatur per methodum communem prodibit valor pro posterioribus terminis — 1 qui resolutus iuxta nouam radicem 29 + 2 N dat, 0, seu negationem numeri pro numero positiuo.

10 Idem dic de quacumque aliâ duplicatâ æqualitate istiusmodi, vbi aduerte dixisse me solutionem in eo casu impossibilem esse per hanc methodum, nam dari possunt plurimæ æqualitates triplicatæ huius generis quæ in se non sunt impossibiles: vt patet in sequente 1 + 5 N. 1 + 16 N. 1 + 21 N. vbi valor radicis est 3 iuxta quem resoluti termini dant tres quadratos 16. 49. 64.

11 Hic etiam aduertendum est cum nostro Fermatio triplicatam æqualitatem 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 3 N. esse impossibilem duobus modis, & essentialiter & methodicè: essentialiter quidem quia demonstratur non posse dari quatuor quadratos in continua proportione arithmetica quod tamen inde sequeretur, proponendo vnitatem: est quoque solutio hîc impossibilis methodicè, quia licet in se foret possibilis, non posset solui per methodum allatam eo quod numerus major radicum æquatur duobus aliis radicum numeris.

12 Hæc tamen cautio intelligenda est dum numerus quadratus vnitatum est vnus & idem quadratus, quia si essent diuersi quadrati pro numero vnitatum, posset numerus maior radicum æquari duobus alijs vt patet in tribus terminis sequentibus 1 + 1 N. 9 + 2 N. 4 + 3 N. vbi radicis valor reperitur per nostram methodum $\frac{269280}{744769}$.

Triplicata æqualitas potest solui etiam si constet solis quadratis & radicibus, modo numerus quadratorum sit quadratus.

13 Sint exempli causa tres 1 Q + 1 N. 1 Q + 2 N. 1 Q + 5 N. æquandi quadrato, reduci potest illa æqualitas ad præcedentem constantem vnitatibus & radicibus 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 5 N. in qua ex præcedentibus valor est 24. per hunc valorem diuide vnitatem & fiet valor quæsitus $\frac{1}{24}$. Ratio huius rei est quia si illic loco 1 N. capias $\frac{1}{1N}$ primus terminus qui fiet 1 Q + 1 N. erit $\frac{1}{1Q} + \frac{1}{1N}$ & secundus $\frac{1}{1Q} + \frac{2}{1N}$ tertius autem $\frac{1}{1Q} + \frac{5}{1N}$ hi tres æquari debent quadratis; duc illos in 1 Q & fient 1 + 1 N. 1 + 2 N & 1 + 5 N. æquales quadratis, etenim quadrati ducti in quadratum faciunt quadratos. Igitur reducta est triplicata æqualitas constans quadratis & radicibus, ad triplicatam æqualitatem constantem radicibus & vnitatibus debetque vnitas diuidi per valorem numeri quia $\frac{1}{1N}$ sumpta est pro 1 N.

14 Sic data triplicata æqualitas 4 Q + 2 N. 4 Q + 6 N. 4 Q + 9 N. conuertetur in istam 4 + 2 N. 4 + 6 N. 4 + 9 N. & quia in posteriori valor est $\frac{2080}{2209}$ per hunc diuidendo vnitatem, erit in priori valor $\frac{2209}{2080}$ similiter data triplicata æqualitas 1 Q + 2 N. 4 Q + 3 N. 16 Q + 6 N. conuertetur in istam 1 + 2 N. 4 + 3 N. 16 + 6 N. in qua valor est $\frac{110656}{529}$ ergo si per hunc diuidas vnitatem fiet $\frac{529}{110656}$ pro valore prioris, denique si detur 1 Q + 1 N. 4 Q + 3 N. 9 Q + 2 N. conuertes illam in + 1 N. 4 + 3 N. 9 Q + 2 N. vbi valor est $\frac{269280}{744769}$ igitur per hunc diuidendo vnitatem fiet $\frac{744769}{269280}$ pro data æqualitate triplicatâ.

15 Aduerte compendiosè admodum procedi posse dum non datur idem, sed alius numerus quadratorum quam vnitas, si intactis radicibus, reducatur quadratum ad vnitatem & postea valor inuentus diuidatur per quadratum datum: ut si detur 9 Q. + 9 N. 9 Q + 24 N. 9 Q + 72 N. intactis radicibus pro 9 Q substitue 1 Q vt vides 1 Q + 9 N. 1 Q + 24 N. 1 Q + 72 N. vbi valor est 3. quo diuiso per quadratum 9 fit

pro valore prioris æqualitatis, si eundem valorem 3. diuidas per 16 fiet valor $\frac{3}{16}$ pro triplicata æqualitate sequēte 16 Q + 9 N. 16 Q + 24 N. 16 Q + 82 N. & sic de aliis omnibus.

Per triplicatam æqualitatem soluuntur quadruplicatæ, quintuplicatæ & millecuplicatæ æqualitates.

Detur verbi gratia æqualitas quadruplicata sequens 64 + 20 N. 16 + 12 N. 4 + 8 N. 1 + 2 N. reductis quadratis ad eundem quadratum vt dictum est, fit noua æqualitas 64 + 20 N. 64 + 48 N. 64 + 128 N. pro 1 N cape $-\frac{19}{2}$ + 1 N. vt iuxta illam resoluti duo numeri æquales faciant quadratum & fiet tandem per methodum supra traditam, (præter 4 qui est obuius valor) 8320. qui soluet æqualitatem datam. 16

Non aliter disponi potest quintuplicata æqualitas constans diuersis quadratis & radicibus, ita tamen, vt reducti quadrati ad eundem, faciant tres numeros æquales & reliquos duos inæquales vti videre est in sequente 1 + 2 N. 4 + 8 N 16 + 32 N. 64. + 20 N. 256 + 36 N. vbi valor est 4. & $\frac{10177024}{1018081}$ hoc eodem modo disponetur centuplicata æqualitas, & ita in infinitum. 17

Ex prædictis soluere infinities & quidem facile, quæ Diophantus & Bachetus per intricatissimas methodos soluunt.

Dentur æquandi quadrato 16 + 1 N & 16 + 2 N. pro 1 N. cape 1 Q + 8 N. vt hoc modo primus numerus fiat quadratus indefinitè 16 + 1 Q + 8 N à latere 4 + 1 N. ergo alter numerus erit 16 + 2 Q + 16 N. æquandus quadrato (fingi autem potest latus infinities) finge 4 − 2 N. & fiet valor 16. cuius quadratum cum octuplo 16 (ob 1 Q + 8 N.) pro noua radice dat valorem quæsitum 384. 18

Dentur iterum 16 − 1 N & 16 − 5 N. æquandi quadrato, cape pro noua radice 8 N − 1 Q. & iuxta illam termini resoluti sic stabunt 16 + 1 Q − 8 N. & 16 + 5 Q − 40 N. quorum prior est quadratus, igitur solus posterior æquandus quadrato, finge latus 4 − 7 N. & fit valor $\frac{4}{11}$ ergo eius octuplum multatum quadrato ipsius, (ob nouam radicem 8 N − 1 Q dat valorem quæsitum $\frac{336}{121}$. 19

Rursus, datis pro tertio casu æquandis quadrato 16 + 1 N. & 16 − 1 N. cape pro noua radice 1 Q + 8 N. vt primus terminus sit 16 + 1 Q + 8 N. quadratus igitur secundus terminus erit 16 − 1 Q − 8 N. æquandus quadrato, finge latus 4 − 2 N & fit valor $\frac{8}{5}$ cuius octuplum cum ipsius quadrato (ob nouam radicem 1 Q + 8 N.) dat valorem quæsitum $\frac{384}{25}$. 20

Quæstiones duodecim circa hactenus dicta in secunda parte.

Quot exempla dedimus, tot problemata præparauimus. Vnicum ex multis proferam, quod est eiusmodi. Inuenire alium numerum quam 24. cuius simplum duplum, & quintuplum additum vnitati, faciat tres quadratos, solutionem huius quæstionis habes supra sub titulo solutionum infinitarum, estque numerus quæsitus fractio cuius 21

numerator 4709567707295783972 64. & denominator 21657190561569936396 1. imò si vis quæstionem in integris proponi, sic stabit: Inuenire alium quadratum integrum quam vnitatem cui additum simplum, duplum & quintuplum cuiuspiam numeri integri faciat quadratos, sed propter hoc, subnecto alia.

Inuenire tres cubos quorum summa juncta tribus numeris eandem cum cubis proportionem habentibus faciat quadratos.

22 Cape tres priores cubos 1. 8. 27. quorum summa 36. addatur sigillatim cubis prædictis charactere radicum affectis, eruntque 36 + 1 N. 36 + 8 N & 36 + 27 N. æquandi quadrato, eligatur pro vna radice 1 Q + 12 N. vt prior numerus iuxta eam resolutus, sit quadratus à latere 6 + 1 N. absolutâ operatione inuenietur valor radicis $\frac{220320}{53329}$.

Inuenire alium numerum quam quaternarium cujus duplum, octuplum, duotrigecuplum, vigecuplum, & trigesecuplum additum quinque quadratis continuè proportionalibus, faciat quadratos.

23 Eligantur quadrati sequentes, & deuentum sit ad æqualitatem quintuplicatam quæ sic stat: 1 + 2 N. 4 + 8 N. 16 + 32 N. 64 + 20 N. 256 + 36 N. reducta illa ad eundem quadratum, erit æqualitas quæ sequitur: 256 + 512 N. 256 + 512 N. 256 + 512 N. 256 + 80 N. 256 + 36 N. vbi proinde est ac si daretur triplicata æqualitas, & fit per methodum superiorem, 1 N. æqualis $\frac{10177024}{1018081}$ quæ soluet quintuplicatam æqualitatem primo inuentam.

Inuenire tres numeros quadratos quorum summa iuncta sigillatim tribus illorum lateribus faciat quadratos.

24 Eligantur tres quadrati, quorum summa sit quadratus, & tales, vt maius latus ipsorum superet reliqua duo latera: istiusmodi sunt 4. 36. 81. hi enim simul additi faciunt 121. quare tres quæsiti numeri sint 4 Q. 36 Q. 81 Q. quorum summa addita sigillatim ipsorum lateribus facit 121 Q + 2 N. 121 Q + 6 N. 121 Q + 9 N. æquandos quadratis, & fit valor radicis $\frac{2209}{62920}$ iuxta quem resoluti numeri superiores exhibent quadratos & satisfaciunt quæstioni.

Inuenire tres quadratos diuersos, quorum singulis si addantur tres numeri harmonice proportionales, fiant quadrati.

Hoc curandum, vt maximus trium harmonice proportionalium superet duos reliquos, quare tres termini $1 + 2$ N. $4 + 3$ N. & $16 + 6$ N. æquantur quadrato, reductis illis per methodum superiorem erunt $16 + 32$ N. $16 + 12$ N. $16 + 6$ N. æquandi quadrato, cape pro vna radice $\frac{1Q}{6} + \frac{4N}{3}$ & absolue operationem vt supra diximus & fiet valor pro priori æqualitate triplicata $\frac{2005004}{4761}$. 25

Inuenire tres numeros vt interuallum duorum maiorum ad interuallum duorum minorum datam habeat rationẽ, sed & bini sumpti quadratum constituant. Detur ratio tripla.

Hæc est quæstio quadragesima quinta libri quarti Diophanti quâ nulla est prolixior, & intricatior apud hunc authorem; cape aliquem quadratum pro summa medij & minoris, puta 4. sitque medius $2 + 1$ N & minor $2 - 1$ N. horum differentia est 2 N. cuius triplum 6 N (quia datur ratio tripla) addatur medio & fiet major $2 + 7$ N. quare supereſt vt summa maioris & medij $4 + 8$ N. & summa maioris & minoris $4 + 6$ N. æquetur quadrato pro vna radice, cape $\frac{1Q}{6} + \frac{2N}{3}$ vt hæc ducta in 6 (numerum radicum in posteriori termino efficiat $1Q + 4$N. qui cum 4 facit quadratum, à latere $2 + 1$ N. hæc eadem radix noua ducta in 8. (numerum radicum in priori termino) facit productum qui additus 4. dat summam $4 + \frac{4Q}{3} + \frac{16N}{3}$ æquandam quadrato: huius quadrati potest fingi latus infinitis modis. Finge à latere $2 + \frac{1N}{4}$ & fit valor qui resolutus per nouam radicem vt diximus dat valorem quæsitum $\frac{156}{121}$ & tres quæsiti numeri erunt $\frac{2362}{121}$ $\frac{492}{121}$ $\frac{82}{121}$. 26

Inuenire duos numeros quorum summa aucta vel multata differentia eorum aut differentia quadratorum ab illis, faciat quadratum.

Sint duo illi numeri $\frac{1}{2} + 1$ N & $\frac{1}{2} - 1$. sic enim differentia numerorum, & differentia quadratorum erit 2 N. igitur supereſt vt summa numerorum aucta & multata 2 N. æquetur quadrato, eritque sequens duplicata æqualitas $1 + 2$ N & $1 - 2$N. cape $\frac{1Q}{2} + 1$ N pro noua radice vt hac ducta in 2. & producto addito vnitati, fiat quadratus $1 + 1Q + 2$ N. pro priore termino, igitur secundus terminus erit $1 - 1Q - 2$ N. æquandus quadrato, finge latus $1 - 3$ N. & fiet valor primus $\frac{2}{5}$ pro posterioribus terminis, hic additus dimidio sui quadrati (ob nouam radicem sumptam $\frac{1Q}{2} + 1$ N.) dabit $\frac{12}{25}$ valorem quæsitum, ergo iuxta positiones duo numeri quæsiti erunt $\frac{42}{25}$ & $\frac{1}{10}$. 27

Inuenire quatuor numeros, quorum tria sint quadrata, atque insuper productus duorum quorumcumque auctus vnitate faciat quadratum.

28 Inueniendi primum ex Diophanto l. 5. Q. 27. tres quadrati quorum quilibet adscita vnitate faciat quadratum: tales sint $\frac{9}{16}$ $\frac{25}{4}$ $\frac{126}{81}$, ponatur quartus quæsitus 1 N. retentis illis tribus pro primo, secundo & tertio; certum est productum primi in secundum & secundi in tertium, & tertij in primum, fore quadratum, restat ergo, vt productus quarti in illos tres adscita vnitate faciat quadratum igitur $\frac{9N}{81} + 1$ & $\frac{25N}{4} + 1$ & $\frac{256N}{81} + 1$ æquantur quadratis, ponatur iuxta præceptum $\frac{169}{9} + \frac{32N}{9}$ pro valore 1 N. vt numerus radicum qui est in primo termino istum multiplicans faciat 1 Q + 2 N. qui cum vnitate constituat quadratum, à latere 1 + 1 N tum reliqui numeri radicum, qui sunt in duobus aliis terminis ducantur in eundem, & producti nectantur cum vnitate, fientque $1 + \frac{400Q}{36} + \frac{800N}{36}$ & $1 + \frac{40969}{729} + \frac{8192N}{729}$ æquandi quadrato, ergo cum numeri vnitatum (imò & quadratorum sint quadrati) potest solui duplicata illa æqualitas per methodum vulgarem, & inuenietur valor radicis pro quarto numero quæsito.

Inuenire triangulum rectangulum tale vt productus ex hypotenusa in summam laterum circa rectũ sit quadratus, atque insuper quadratum hypotenusæ iunctum alterutri ex duobus lateribus circa rectum & duplo hypotenusæ, faciat quadratum.

29 Cape triangulum rectangulum in quo tam hypotenusa quam summa laterum circa rectum sit quadratus: (vt dictum est in prima parte n. 45.) & necte singulis lateribus characterem radicum, sic enim peruenies ad æquationem, & reperies quod quæritur. Enimuero productus ex hypotenusa in summam laterum quadratus erit quare si quadratum hypotenusæ nectas cum alterutro latere circa rectum, & cum duplo hypotenusæ fiet triplicata æqualitas, quæ soluetur per ea quæ dicta sunt num. 13.

Inuenire triangulum rectangulum tale vt quadratus perimetri iunctus cuilibet lateri circa rectum, & dato multiplici hypotenusæ faciat quadratum.

30 Esto datus multiplex hypotenusæ, duplus: & ponatur triangulum quæsitum 3 N. 4 N. 5 N. ergo 144 Q + 3 N. 144 Q + 4 N. & 144 Q + 10 N. æquantur quadrato. Hic valor radicis per ea quæ dicta sunt supra num. 13. est $\frac{1521}{342144}$ igitur triangulum rectangulum quæsitum erit $\frac{4563}{342144}$. $\frac{6084}{342144}$. $\frac{7605}{342144}$.

Inuenire

Inuenire triangulum rectangulum tale vt productus ex hypotenusa in differentiam laterum circa rectum sit quadratus, & quadratus perimetri iuncti alterutri laterum circa rectum, vel dato multiplici hypotenusæ faciat quadratum. Esto datus multiplex duplus.

Cape pro triangulo primitiuo 119. 120. 169. in quo hypotenusa & differentia laterum circa rectum est quadratus: hos numeros necte characteri radicum, & fiet summa 408. N. ergo eius quadratus iunctus cuilibet lateri circa rectum & duplo hypotenusæ dat tres numeros 166464 Q. + 119 N. 166464 Q + 120 N. 166464 Q + 338 N. æquandos quadrato, reliqua sunt facilia ex num. 13. 31

Inuenire triangulum cuius vnum latus circa rectum si ducatur in differentiam eiusdem lateris & areæ faciat quadratum & quadratus perimetri junctus alterutri circa rectum & dato multiplici hypotenusæ faciat quadratum.

Capiatur ex prima parte num. 53. triangulum rectangulum in quo vnum latus circa rectum est vnitas, & differentia illius vnitatis & area sit quadratus, tum perimetri capiatur quadratus & nectatur singulis lateribus circa rectum affectis charactere radicum & cuilibet multiplici hypotenusæ, efficieturque problema propositum ex dictis num. 13. 32

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum si ducatur in summam laterum efficiatur quadratus & quadratus perimetri iunctus cuilibet lateri ex tribus faciat quadratum.

Capiatur aliquod triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum & summa laterum sit quadratus numerus, tale est 40. 9. 41. tum singula latera affecta charactere radicum nectantur quadrato perimetri & tres numeri 8100 Q + 40 N. 8100 Q. + 9 N. 8100 Q + 41 N. æquentur quadratis, eritque absolutum problema, neque dicas id repugnare iis quæ dicta sunt num. 9. & sequentibus vbi asseruimus quæstiones esse impossibiles per artem Fermatianam dum maior numerus radicum æqualis est duobus alijs radicum numeris, vnde fortasse videbitur alicui multo magis repugnare dum numerus maior superatur à duobus alijs simul sumptis: illud enim in quocumque casu inæqualitatis non est impossibile, vt laborioso analystæ planum fiet. 33

PARS TERTIA.

Complectens artem eliciendi radices infinitas ex numeris plures ſpecies habentibus, quam tres.

1 AGam hic potiſſimum de numeris continentibus quinque ſpecies quæ vocantur quadrato-quadrata, cubi, quadrata, radices, & vnitates & occaſione illorum, dicam quoque de quatuor ſpeciebus, ſiue habeant vbique ſigna poſitiua, ſiue etiam habeant intermixta negatiua: finis autem huius tractationis eſt æquare eiuſmodi numeros vel quadratis vel cubis, idque infinities: illud vero in vniuerſum dici poteſt eſſe neceſſarium, vt ſaltem vel quadratoquadratorum, vel vnitatum numerus ſit quadratus pro radice quadratâ, ſicut etiam neceſſe eſt vt cuborum vel vnitatum numerus ſit cubus, pro radice cubicâ.

Quadrato æquare numerum compoſitum ex quinque ſpeciebus in quo ſolus quadratoquadratorum numerus eſt quadratus.

2 Curandum in primis vt tam in numero æquando quam in æquante ſit idem numerus quadratoquadratorum, cuborum, & quadratorum: quod vt fiat, capietur primo latus quadratum numeri quadrato-quadratorum, vt ſit vna particula lateris quæſiti: deinde per illius duplum diuidetur numerus cuborum qui eſt in numero æquando, & quoties affectus charactere radicum, *erit ſecunda particula lateris quæſiti: tertio capta* differentia quadrati quod naſcitur ex iſtâ ſecundâ particulâ, & quadratorum in numero æquando exiſtentium, diuidetur per idem duplum lateris ſupradicti, vt habeatur tertia particula ex vnitatibus conſtans. Huius lateris quadratum in numero dato æquatum dabit radicem quæſitam: Vt ſi detur numerus 1 QQ + 4 C + 6 Q + 2 N + 7 æquandus quadrato, capies 1 Q + 2 N + 1 (ſic enim obſeruantur omnia præcepta mox tradita) & huius lateris quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 æquatum numero dato exhibebit 3 pro valore radicis, juxta quam reſolutus numerus datus efficiet quadratum 256.

Quadrato æquare numerum quinque ſpeciebus conſtantem, in quo ſolus vnitatum numerus eſt quadratus.

3 Aduerte hic contra fieri ac in præcedente, nam id curandum præcipuè, vt æquales ſint inter ſe vtrinque vnitates, radices & quadrati, quare capies latus quadratum

numeri vnitatum, pro prima particula lateris, & per eius duplum diuides numerum radicum quotiensque erit secunda particula lateris; tum differentia quadratorum numeri æquandi, & eorum qui nascuntur ex radice mox inuenta, diuidatur per idem duplum latus, vt fiat numerus quadratorum in æquante ponendus, sic conficietur latus quadrati, quod si æquetur numero dato, exhibebit valorem radicis. Vt si detur numerus 10 QQ + 4 C + 19 Q + 6 N + 9 æquandus quadrato finges latus 3 + 1 N + 3 Q (sic enim omnia præcepta mox tradita obseruantur) & eius quadratum 9 + 6 N. + 19 Q + 6 C + 10 QQ æquabis numero dato fietque valor 2. iuxta quem resolutus ille numerus exhibebit 289.

Multipliciter æquare quadrato numerum ex quinque speciebus compositum in quo tam quadratoquadrata quam vnitates habent numerum quadratum.

Primo fingi potest latus tale vt vtrinque in numeris æquandis reperiantur vnitates radices & quadrato-quadrata æqualia: vt si detur æquandus quadrato 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N. + 1. finge latus 1 + 10 N + 1 Q huius quadratum est 1 + 20 N + 102 Q + 20 C + 1 QQ ergo cum tres species se elidant restabit æquatio inter − 924 & 16 C. diuides − 92 per 16. & fiet pro valore radicis $\frac{23}{4}$ iuxta quem resolutus datus numerus dabit quadratum $\frac{140625}{256}$ 4

Secundo fingi potest latus tale, vt reperiantur vtrinque æquales vnitates radices & quadrati: vt si detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges latus 1 + 10 N − 45 Q. cuius quadratum æquatum numero dato relinquet cubos & quadrato-quadratos, ergo cum sint species collaterales & proximæ fiet valor radicis $\frac{113}{253}$ iuxta quem datus numerus quadratus erit à latere $\frac{2247706}{64009}$. 5

Tertio fingi potest latus tale, vt quadrato-quadrati, cubi, & vnitates, æquales vtrinque reperiantur: Vt si detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1. æquandus quadrato, finges latus 1 Q + 2 N + 1. & eius quadratum relinquet quadrata & radices ad æquationem, fietque − 4. pro valore radicis iuxta quem resolutus qui datus est numerus exhibebit quadratum 81. 6

Quarto fingi potest latus tale, vt quadratoquadrati, cubi & quadrati vtrinque sint æquales: vt si detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges latus 1 Q + 2 N + 3. & ex punctis æqualibus restabunt radices & vnitates inter se æquandæ, & fiet tandem post diuisionem 1. primo valore radicis resolutusque iuxta eum numerus datus exhibebit quadratum 36. 7

Quinto fingi potest aliud latus ab eo quod supra fictum est ita vt vnitates radices & quadrato-quadrati vtrinque reperiantur æquales: Vt si detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges 1 + 10 N − 1 Q & fiet valor radicis $\frac{11}{3}$ iuxta quem datus numerus erit quadratus à latere $\frac{218}{9}$. 8

Sexto fingi potest latus aliud ab eo quod supra fictum est ita vt quadrato-quadrati, cubi, & vnitates sint æquales: vt dato eodem numero 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 finges 1 Q + 2 N − 1 & continget valor radicis − 3 iuxta quem resolutus superior numerus exhibebit quadratum 40. 9

Omitto reliqua latera quæ fingi possunt, vt 1 Q − 3 & 1 − 2 N 1 Q & 1 − 10 N − 1 Q & 45 Q − 10 N − 1 & − 1 − 2 N − 1 Q. quia licet dent aliquos valores, illi tamen non differunt ab iis, quos exhibuimus. 10

Quid sint radices deriuatiuæ & quomodo eruantur.

11 Duplex est genus radicum: aliæ enim sunt primitiuæ aliæ vero deriuatiuæ: primitiuæ sunt illæ quæ immediatè eruuntur ex numero dato, vt sunt illæ quas mox elicuimus: deriuatiuæ autem sunt illæ quæ ex primitiuis oriuntur: & quidem si ex primitiuis immediatè oriuntur, sunt deriuatiuæ primi gradus: si eliciũtur ex deriuatiuis primi gradus, erunt deriuatiuæ secundi gradus: si eliciuntur ex deriuatiuis secundi gradus, dicentur deriuatiuæ tertij gradus, & sic in infinitum. Aduerte autem ex radicibus fictis posse elici veras, & ex veris fictas, vti ex sequentibus manifestum erit.

Eruere radices deriuatiuas primi gradus ex quacumque primitiua.

12 Iunge 1 N. radici primitiuæ cum suo signo, siue habeat plus, siue habeat minus, illud conflatum sumatur pro radice noua & iuxta illam resoluantur singulæ particulæ componentes numerum datum: omnium illorum summa æquetur quadrato fingendo illius latus, vt dictum est valorque repertus nectatur radici primitiuæ, ita extabit radix quæsita, vt si eruenda sit radix deriuatiua primi gradus ex numero supradicto 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1. cape − 3 vnam ex primitiuis radicibus, & necte cum 1 N. vt fiat 1 N − 3. tum iuxta 1 N − 3 resolues 1 QQ & 4 C. & 10 Q. & 20 N. quibus nectes numerum vnitatum vt hic vides.

1 QQ	+ 1 QQ − 12 C + 54 Q − 108 N + 81
4 C	+ 4 C − 36 Q + 108 N − 108
10 Q	+ 10 Q − 60 N + 90
20 N	20 N − 60
1	+ 1
summa	+ 1 QQ − 8 C + 28 Q − 40 N + 4

13 Hæc summa æquari debet quadrato: finge latus 1 Q − 4 N − 2 & fiet pro valore radicis in ista summa $\frac{7}{2}$ & quia posita est noua radix 1 N. − 3 ex $\frac{7}{2}$ tolles 3. restabitque $\frac{1}{2}$ pro valore radicis in numero dato, quare iuxta istam resolutus numerus datus erit $\frac{225}{16}$ quadratus à latere $\frac{15}{4}$.

14 Eandem summam quadrato æquabis fingendo latus 1 Q − 10 N + 2. eius enim quadratum æquatum prædictæ summæ, dabit $\frac{19}{3}$ pro valore radicis in summa, vnde si tollas 3. restabit $\frac{10}{3}$ pro valore radicis in numero dato, ergo numerus datus erit $\frac{36481}{681}$ quadratus à latere $\frac{191}{9}$.

15 Rursus finge latus 2 − 10 N − 1 Q & fiet valor pro summa $-\frac{17}{7}$ & tollendo 3 extabit valor radicis pro numero dato $-\frac{38}{7}$ igitur iuxta hunc valorem resolutus numerus datus exhibebit $\frac{998001}{2401}$. quadratus à latere $\frac{999}{49}$.

16 Quarto finge latus 2 − 10 N − 18 Q & fiet valor $\frac{368}{323}$ pro summa, vnde si tollas 3. fit valor pro numero dato $\frac{1337}{323}$.

Posset etiam fingi latus 1 Q + 2 − 4 N vel 4 N − 2 − 1 Q. sed vtrinque ex illa æquatione proueniret 3 pro summa prædicta & pro numero dato proueniret 0, quod est friuolum, & ad institutum nostrum inutile.

Dixi præterea vnam ex radicibus primitiuis esse − 4. ex hac sic erues deriuatiuas re- 17
solues primo numerum datum 1 QQ + 4 C + 109 + 20 N + 1 iuxta nouam radicem 1 N − 4. vt factum est primitus in resolutione eiusdem numeri iuxta radicem 1 N − 3 & fiet summa 1 QQ − 12 C + 58 Q − 124 N + 81 æquanda quadrato finge latus 1 Q + 9 − 6 N & fiet valor pro numero dato $\frac{9}{1}$. Finge aliud latus 1 Q + 9 − $\frac{62N}{9}$ & fiet valor $\frac{7}{36}$. Finge tertium latus 9 − $\frac{62N}{9}$ + $\frac{4279}{729}$ & fiet valor $\frac{1158704}{436639}$. iterum finge latus 9 − $\frac{62N}{9}$ − 1 Q & fiet valor − $\frac{255}{261}$ potuit rursus fingi latus 1 Q + 9 − 6 N. vel 6 N − 9 − 1 Q. sed inde fieret valor pro summa facta 4. & pro numero dato, 0. quod est inutile ad rem nostram.

Dictum est insuper vnam ex radicibus primitiuis numeri dati esse − $\frac{23}{4}$ igitur noua ra- 18
dix erit 1 N − $\frac{23}{4}$ iuxta quam resolutus numerus datus, vt fecimus supra dabit summam 1 QQ − 19 C + $\frac{11150}{8}$ $\frac{7339N}{16}$ + $\frac{140625}{256}$. æquandam quadrato. Finge latus 1 Q − $\frac{365}{16}$ − $\frac{19N}{2}$ & fiet valor $\frac{15}{3}$. ex alio latere 1 Q + $\frac{375}{16}$ $\frac{19N}{2}$ prodibit valor $\frac{7}{16}$ ex ficto latere 1 Q + $\frac{7339N}{750}$ − $\frac{375}{16}$. prodit valor $\frac{144233}{42375}$. Iterum prodibit alius valor ex ficto latere $\frac{375}{16}$ − $\frac{7339N}{750}$ + $\frac{4007500134}{52734375}$.

Atque hoc quidem de radicibus primitiuis quæ habent signum minus; eodem au- 19
tem modo agendum de iis quæ habent signum plus; vt quia diximus 1 esse vnam radicem primitiuam, fingenda erit noua radix 1 N + 1. & iuxta illam resoluendus numerus datus, habebiturque summa æquanda quadrato 1 QQ + 8 C + 28 Q + 56 N. + 36. finge latus 1 Q + 6 + $\frac{14N}{3}$. & prodibit valor − $\frac{10}{3}$. finge aliud latus 1 Q − 6 − $\frac{14N}{3}$. & fiet valor − $\frac{2}{29}$. tertio si fingas latus 6 + $\frac{14N}{3}$ + $\frac{140}{27}$ extabit valor $\frac{1771}{533}$.

Rursus vna ex primitiuis radicibus est $\frac{11}{3}$. igitur si capias pro noua radice 1 N + $\frac{11}{3}$. & 20
iuxta eam resoluas numerum datum vt dictum est n. 12. fiet summa 1 QQ + $\frac{560}{3}$ + $\frac{1210Q}{9}$ + $\frac{12200N}{27}$ + $\frac{475249}{81}$ æquanda quadrato. Finge latus 1 Q + $\frac{218}{9}$ + $\frac{28N}{3}$ & fiet valor $\frac{10}{3}$ finge aliud latus $\frac{218}{9}$ − $\frac{28N}{3}$ − 1 QQ & fiet valor $\frac{23}{4}$ finge aliud latus 1 Q + $\frac{28N}{3}$ + $\frac{218}{9}$ & fiet valor 1. finge aliud latus $\frac{218}{9}$ + $\frac{3050N}{327}$ − 1 Q. & fit valor $\frac{120978}{1108553}$.

Pari modo ex vltima radice primitiua habente signum plus, fiet noua radix 1 N + 21
$\frac{113}{233}$. secundum quam resolutæ particulæ numeri dati exhibebunt summam æquandam quadrato, & fingendo diuersa latera vt hactenus factum est habebuntur noui valores.

Eruere radices deriuatiuas secundi gradus & tertij & quarti, & sic in infinitum.

Sicut ex radicibus primitiuis elicuimus deriuatiuas primi gradus ita ex deriuatiuis 22
primi gradus elici possunt deriuatiuæ secundi, vt quia vna ex deriuatiuis primi gradus est $\frac{1}{2}$. capienda erit noua radix 1 N + $\frac{1}{2}$ & iuxta eam resoluendus numerus datus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 summa ex hac resolutione nata 1 QQ + 6 C + $\frac{354}{2}$ + $\frac{67N}{2}$ + $\frac{225}{16}$ æquanda est quadrato, finge latus 1 Q + 3 N + $\frac{15}{4}$ eritque radix deriuatiua secundi gradus quia nascitur ex radice deriuatiua primi gradus.

Non aliter ex ista poteris eruere aliam ponendo pro noua radice 1 N − $\frac{21}{2}$ siquidem 23
iuxta eam resolutæ singulæ particulæ numeri dati faciunt 1 QQ − 38 C + $\frac{10919}{2}$ − $\frac{699SN}{2}$ + $\frac{134680}{16}$ hæc summa æquanda erit quadrato. Finge latus 1 Q − 19 N − $\frac{367}{4}$ & fiet valor pro summa $\frac{873}{46}$ vnde si tollas $\frac{21}{2}$. relinquetur valor pro numero dato $\frac{195}{23}$ estque radix deriuatiua tertij gradus quia prodit ex radice deriuatiua gradus secundi. Ita poteris elicere radicem deriuatiuam gradus quarti, quinti, sexti, & sic in infinitum.

Quadrato æquare numerum compositum ex quatuor speciebus, dum numerus vnitatum vel quadrato-quadratorum, quadratus est.

24 Sint 20 C + 5 Q + 40 N. + 16 æquandi quadrato. Finge latus 4 + 5 N. & numerus radicum & vnitatum idem fiat ex vtraque parte, & fiet 1 pro valore radicis: hoc posito inuenies radicem deriuatiuam, ponendo vt supra, pro noua radice 1 N + 1 & iuxta illam resoluendo numerum primarium 20 C + 40 N + 16. vt sæpius factum est, summa enim ex hac resolutione nata 20 C + 65 Q + 110. N + 81 æquari debet quadrato, fingendo latus 9 + $\frac{45N}{9}$ & fiet valor pro summa — $\frac{112}{81}$. & pro numero primario — $\frac{31}{81}$. tertio ex hac deriuatiua primi gradus perges ad deriuatiuam secundi gradus fingendo pro noua radice 1 N. — $\frac{31}{81}$. & juxta illam resoluendo singulas particulas numeri primarij, ita enim fiet noua summa æquanda quadrato, & finges latus quadrati $\frac{401}{729}$ — $\frac{147495N}{3609}$ & proueniet radix deriuatiua secundi gradus + $\frac{17730125266}{211903072}$.

25 Esto jam numerus quadrato-quadratorum quadratus, & sic æquandum quadrato 1 QQ + 4 C — 3 Q + 2 N. finge latus 1 Q + 2 N. vt duo majores characteres elidantur & fiant 7 Q. æquales 2 N. ita fiet valor $\frac{2}{7}$ (propter vnitatem quæ est altera radix eiusdem numeri) ergo potest poni noua radix 1 N + $\frac{2}{7}$ vel 1 N + 1 pro radicibus deriuatiuis.

25 Tertio licet omittatur aliqua species intermedia, potest numerus compositus ex quatuor speciebus quadrato æquari: ita æquabis 16 + 24 N + 16 C + 5 QQ fingendo latus 4 + 3 Q. & fiet valor 4. Vnde pro deriuatiua poterit poni 1 N + 4 simili ratione si detur 1 QQ + 600. + 800 N + 50000. finges latus quadrati 1 Q + 300 extabitque valor 5. & poni poterit pro radice deriuatiua 1 N + 5.

Potest æquari cubo numerus compositus ex quatuor speciebus modo numerus vnitatum vel cuborum sit cubus.

26 Enimuero si vnitatum numerus cubus est sumpto eius latere cubico pro numero absoluto radicis fictæ, diuides radices quæ sunt in termino æquando per triplum quadratum prædicti lateris cubici & ita componetur radix ficta ex latere & quotiente prædicto cum signis debitis: vt si detur æquandus quadrato 2 C. + 1 Q + 3 N + 1. finges pro latere 1 + 1 N (est enim 1 latus cubicum vnitatis, 1 N. autem est quotiens natus ex diuisione 3 N. per 3. triplum quadratum vnitatis) ergo cubus illius 1 C + 3 Q + 3 N + 1 æquatus numero dato, exhibet 2 pro valore radicis vnde per radicem deriuatiuam poteris assumere 1 N. + 2. pro noua radice.

27 Quod si numerus cuborum est sumpto eius latere diuides numerum quadratorum per triplum quadratum illius lateris & fiet altera pars eligenda: vt si detur æquandus cubo 8 C + 24 Q + 2 N + 48. finges latus 2 N + 2 (est enim 2 N latus cubicum 8 C. 2 vero est quotiens ortus ex diuisione 24 per 12 triplum quadratum numeri 2.) eius cubus 8 C + 24 Q + 24 N. + 8. æquatus dato numero exhibet $\frac{20}{11}$ pro valore radicis, vnde facile est colligere radices deriuatiuas.

Si vterque numerus tam vnitatum quam cuborum cubus est, potest triplici modo æquari cubo numerus datus.

Detur enim verbi gratia 1 C + 2 Q + 4 N. 1 æquandus cubo & capiatur 1 N + 1 pro 29
latere; hoc est latus cubicum vtriusque cubi; ergo eius cubus 1 C + 3 Q + 3 N + 1 æquatur numero dato, & fit 1 pro valore, rursus potest sumi pro latere 1 N + $\frac{1}{3}$ vt elidantur duæ species maiores restentque tantum minores inter se æquandæ, & sic habebitur valor $-\frac{19}{72}$. denique sumi potest 1 + $\frac{4N}{3}$. vt restet tantum æqualitas facienda inter maiores species atque ita extabit valor $-\frac{20}{37}$ ex his porro tribus radicibus primitiuis eliciantur deriuatiuæ, vt sæpius factitatum est.

Cautio circa prædicta.

Aliquando contingit vt numerus compositus ex quatuor speciebus, quarum vna est 30
cubus, vel duæ sunt cubi, non possit cubo æquari, cum post reductionem relinquuntur tres species æquandæ inter se vel dum restat vnica species æquanda nihilo: vt si detur 1 + 3 N + 3 Q + 4 C non potest in eo casu aliter procedi quam si fingatur latus 1 + 1 N. at in isto casu relinquuntur 3 C æquales nihilo: igitur tunc non potest numerus datus æquari cubo. Item si detur 1 + 2 Q + 3 N + 1 C. inueniri tantum potest vna radix immediatè & primitus, ponendo pro latere ficto 1 N + $\frac{1}{3}$ nam si poneretur 1 N. + 1 restaret 1 Q æquale nihilo. Propter aliquam ex his rationibus non possunt æquari cubo numeri sequentes 1 − 3 Q − 3 N − 1 C 1 − 3 Q + 3 N + 1 C. vnica enim species restaret nihilo æqualis.

Quæstiones duodecim circa ea quæ dicta sunt in hac tertia parte.

Quæ hactenus dicta sunt, vberem præbent materiam ex qua tanquam ex auri fodina 31
eruere possis Thesaurum infinitum problematum: vt si quis postulet numerum, cuius vigecuplum additum decem ipsius quadratis & quatuor ipsius cubis, & vni ipsius quadrato-quadrato atque insuper vnitati faciat quadratum, velit autem numerum postulatum majorem esse octonario & denario minorem, oportebit necessario elicere primum radicem primitiuam − 3. & ex illa deriuatiuam primi gradus + $\frac{1}{4}$ inde deriuatiuam secundi gradus $-\frac{21}{72}$. atque ex hac deriuatiuam tertij gradus $\frac{195}{73}$ quæ satisfacit omnibus postulatis in problemate, vt iam supra est ostensum num. 23. sed lubet alias quæstiones soluere.

Inuenire in numeris rationalibus integris triangulum rectangulum, cuius hypotenusa & summa laterum circa rectum sit numerus quadratus.

Iam solutum est illud problema im prima parte num. 45. per duplicatas æqualitates, 32

sed quia solui potest per numerum ex quinque speciebus compositum lubet etiam illud aggredi. Formo triangulum ex 1 N + 5 & 12. per ea quæ dicta sunt loco citato: igitur latera sunt 1 Q + 10 N + 169. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120, hypotenusa ergo 1 Q + 10 N. + 169. & summa laterum 1 Q + 34 N + 169 æquantur quadrato, finge latus 13 + $\frac{2878N}{13}$ − 1 Q & fiet valor $\frac{2048675}{20566}$. & iuxta positiones trianguli quæsiti latera 1061652293520. 456548602776 1. 468729861028 9. eadem cum superioribus.

Inuenire triangulum rectangulum ita vt summa hypotenusæ & alterius lateris circa rectum relinquens aream faciat datum numerum.

33 Esto datus 4 ac primum inueniatur triangulum rectangulum ita vt quadratus semissis summæ ex hypotenusa & vno latere relinquens quadruplum areæ faciat quadratum. Formetur triangulum istud rectangulum ab 1 N + 1 & 1 N. ergo latera erunt 2 Q + 1 + 2 N. 1 + 2 N. 2 Q + 2 N. summa hypotenusæ & lateris sequentis est 2 Q + 2 + 4 N. huius semissis 1 Q + 1 + 2 N. cuius quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1. relinquens quadruplam aream 8 C + 12 Q + 4 N. facit 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 1 − 2 N & fit quadratus 1 QQ − 4 C + 6 Q − 4 N + 1 qui æquatus 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 dat valorem $\frac{1}{3}$. ergo iuxta positiones, numeri duo à quibus formabitur triangulum, erunt $\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{3}$ & sumendo solos numeratores 4 & 1. inde formabis triangulum 17. 15. 8. his necte characterem radicum vt fiant latera trianguli quæsiti 17 N. 15 N. 8 N. ergo 32 N − 60 Q æquatur 4 & fiet 1 N $\frac{15}{32}$. & trianguli quæsiti latera tria $\frac{17}{3}$ $\frac{15}{3}$ $\frac{8}{3}$ & satisfaciunt quæstioni. Hanc quæstionem omisit Diophantus post 10 & 11. libri 6.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit numerus quadratus qui iunctus dato multiplici alterius lateris circa rectum facit quadratum.

34 Iubeatur numerum quadratum triplo alterius lateris iunctum facere quadratum & formetur triangulum ab 1 + 1 N & 1 latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 + 2 N. triplum postremi istius lateris est 6 + 6 N. cui si addas medium latus fiet summa 1 Q + 8 N + 6. æquanda quadrato, sicut etiam medium latus quadrato æquandum est, duc summam illam 1 Q + 8 N. + 6 in medium latus 1 Q + 2 N & fiet productus 1 QQ + 10 C + 22 Q + 12 N. æquandus quadrato, finge latus 1 Q + 5 N − $\frac{3}{2}$ ergo eius quadratum 1 QQ + 10 C + 22 Q − 15 N + $\frac{9}{4}$ illi æquatum dabit $\frac{1}{22}$ pro valore radicis, & iuxta positiones fiet triangulum quæsitum in integris 313. 25. 312. potuit inueniri solutio per duplam æqualitatem inter 1 Q + 8 N + 6 & 1 Q + 2 N.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum ſit numerus quadratus qui multatus dato multiplici alterius circa rectum relinquat quadratum.

Iam dedimus ſolutionem iſtius problematis 1 p. n. 47. ſed per aliam methodum. Ergo jubeatur numerum quadratum multatum triplo alterius relinquere quadratum & capiatur pro triangulo primitiuo, illud quod mox inuentum eſt in quæſtione præcedenti nempe 313. 25. 312. quod formatur ab 13. & 12. formeturque triangulum quæſitum ab 1 N − 13 & 12 erunt latera 1 Q − 26 N + 313. 1 Q − 26 N + 25. 24 N − 312. ergo huius poſtremi triplum ſubtractum ex medio relinquit 1 Q + 961 − 98 N æquandum quadrato, ſed medium latus 1 Q − 26 N. + 25 eſt æquandum quadrato. Igitur horum duorum productus 1 QQ − 124 C + 3534 Q − 27436 N + 24025. æquandus erit quadrato, finge latus 1 Q − $\frac{13718N}{155}$ + 155 huius quadratum priori numero eſt æquandum & fit valor $\frac{27681731}{318370}$ ergo 1 N 13 & 12 relicto denominatore erunt 23542921 & 3820440 ex his formatum triangulum erit illud quod poſtulatur 568864871005841. 539673367418641. 179888634210480. & ſatisfacit quæſtioni. 35

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenuſa ſit numerus quadratus & datus multiplex vnius lateris circa rectum detractus alteri lateri faciat etiam quadratum. Multiplex ſit duplus.

Pone 1 + 1 N & 1 pro numeris vnde formatur triangulum: Ita enim latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 + 2 N. ergo 1 Q 2 + 2 N. erit quadratum & reſiduum dupli lateris poſtremi ex medio ſubtracti nempe 1 Q − 4 − 2 N. erit iterum quadratum & fit ex iſta duplicatâ æqualitate valor − $\frac{17}{12}$ ergo 1 N + & 1 erunt − $\frac{5}{12}$ $\frac{12}{12}$ & acceptis numeratoribus ſolis habebis − 5 & 12. vnde formatur triangulum primitiuum 169 119. 120. quare iteranda erit operatio & ponendi numeri ex quibus formatur triangulum 1 N − 5 & 12. ergo latera erunt 1 Q + 169 − 10 N. 1 Q − 10 N − 119. 24 N − 120 ac proinde ſi duplum poſtremi lateris 48 N − 240 tollatur à medio, erit reſiduum 1 Q + 121 − 58 N æquandum quadrato, ſicut & hypotenuſa 1 Q + 169 − 10 N. horum duorum productus 1 QQ − 68 C + 870 Q − 11012 N + 20449 eſt æquandus quadrato, finge latus 143 − $\frac{5506N}{143}$ + 1 Q & fit valor $\frac{4593455}{46046}$. Verum lubet etiam alia via rem aggredi, reducantur illi duo termini ad eundem vnitatum quadratum & fient $\frac{169Q}{121}$ + 169 − $\frac{9802N}{121}$ & 1 Q + 16 Q − 10 æquandi quadratis. Differentia illorum eſt $\frac{489}{121}$ − $\frac{8592N}{121}$. duo producentes eligantur $\frac{2N}{11}$ & $\frac{24N}{11}$ − $\frac{4296}{11}$ (per ea quæ dicta ſunt in primâ parte num. 21. & ſequentibus) & fiet valor $\frac{4593455}{46046}$. & iuxta poſitiones, triangulum quæſitum erit in integris 19343046113329. 18732418687921. 4821817400400. 36

Inuenire duos numeros quorum ſumma ducta in ſummam quadratorum ab ipſis ortorum, faciat cubum.

37 Sint duo numeri quæſiti 1 N & 2 − 1 N. ergo ſumma 2 ducta in ſummam quadratorum 2 Q + 4 − 4 N facit 4 Q + 8 − N. æquandum cubo. Finge latus cubi 2 − $\frac{2N}{3}$ eius cubus æquatus 4 Q + 8 − 8 N dabit − $\frac{N}{2}$. quare pono rurſus pro nouâ radice 1 N − $\frac{1}{2}$ iuxta quam reſoluo ſingulas particulas numeri ſuperioris 4 Q + 8 − 8 N & fit nouus terminus 4 Q + 125 − 44 N æquandus cubo. Finge latus cubi 5 − $\frac{44N}{75}$. ergo eius cubus 125 − 44 N + $\frac{58089}{1125}$ − $\frac{851840}{421875}$. æquandus eſt 4 Q + 125 − 44 N. & valor extat $\frac{490500}{85184}$ vnde ſi tollas $\frac{1}{2}$ ob nouam radicem 1 N − $\frac{1}{2}$ habebis valorem pro primis poſitionibus $\frac{26793}{11296}$ hunc tolle à 2 iuxta poſitiones & fiet ſecundus numerus quæſitus $\frac{15799}{11296}$. Aduerte primo ſolos numeratores ſoluere quæſtionem nempe 26793. & 15799. Aduerte ſecundo hinc ſolui problema ſequens. Diuidere numerum 2. in duos taliter vt ſumma quadratorum duplicata ſit cubus. Aduerte tertio indidem ſolui aliam quæſtionem, nempe inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum per quemcumque numerum multiplicata fiat cubus, vt ſi cuperes ſummam quadratorum quintuplicatam facere cubum poneres 1 N. & 5 − 1 N & procederes vt ſupra: Aduerte denique hinc ſolui pulcherrimum problema nempe. Inuenire duos numeros quorum differentiæ ſit æqualis differentia quadratoquadratorum: nam ſi capias duos numeros ſupra inuentos 26793 & 15799. & iis ſupponas pro denominatore communi, latus cubi facti ex ſumma eorum in ſummam quadratorum quod quidem latus eſt 34540 fient duo numeri quæſiti, $\frac{26793}{34540}$ $\frac{15799}{34540}$.

Inuenire duo triangula rectangula quæ habeant eandem differentiam minorum laterum & talia vt in vno eorum maius latus circa rectum æquetur hypotenuſæ alterius.

38 Formetur primum triangulum ab 1 N & 1 latera ſunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. ergo ſecundi trianguli maius latus circa rectum erit 1 Q + 1 inde ſi tollas differentiam duorum minorum laterum primi, quæ eſt 1 Q − 1 − 2 N. fiet minus latus circa rectum ſecundi 2 N + 2, reſtat igitur vt duo quadrata quæ naſcuntur ab 1 Q + 1 & 2 N + 2 ſimul iuncta faciant quadratum. Horum ergo ſumma 1 QQ + 6 Q + 8 N + 5. æquanda eſt quadrato. Finge latus 1 Q + 3. igitur quadratum illius lateris 1 QQ + 6 Q + 6 æquatur 1 QQ + 6 Q + 8 N + 5 & fit 1 N. æqualis $\frac{1}{2}$ & iuxta poſitiones numeri à quibus formatur triangulum, in integris, abjecto videlicet denominatore, ſunt 1 & 2. at primus numerus minor eſt ſecundo. Proinde in formatione trianguli occurrerent numeri ficti, quod eſt abſurdum, quare vt huic incommodo remedium adferamus redintegranda eſt operatio & formandum triangulum ab 1 N + 1 & 2, igitur latera erunt 1 Q + 5 + 2 N. 1 Q + 2 N − 3. 4 N + 4. pro primo triangulo: & pro ſecundo latere minore erunt 1 Q + 2 N + 5 & 4 N + 12. horum duorum quadrata ſimul juncta faciunt ſummam 1 QQ + 4 C + 30 Q + 116 N + 169. æquandam quadrato, huius quadrati latus fingi poteſt multipliciter, finge illud 10 + $\frac{58N}{13}$ − 1 Q eius quadratum priori ſummæ æquatum dat pro valore radicis − $\frac{1525}{456}$ ergo numeri à quibus formatum eſt triangulum, juxta poſitiones, in integris abjecto denominatore erunt − 979 &

1092. vtere iis numeris per inde ac si nullus esset fictus & forma triangulum ab 1092 & 979, fientque duo triangula quæsita 2150905. 2138136. 234023. & 2165017. 2150905. 246792. & satisfaciunt quæstioni.

Inuenire duo triangula rectangula in quorum vtroque summa laterum circa rectum sit æqualis & talia vt hypotenusa vnius sit æqualis maiori lateri circa rectum alterius.

Formetur primum triangulum ab 1 N + 1 & 1 latera erunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ergo hypotenusa 1 Q + 2 + 2 N. erit maius latus secundi trianguli quo sublato ex summa laterum circa rectum primi restabit 2 N pro altero latere circa rectum secundi. Igitur horum duorum laterum quadrata simul sumpta 1 QQ + 4 C + 12 + 8 N + 4 æquantur quadrato. Finge latus 14 + 2 N + 4 & eius quadratum 1 QQ + 4 C + 12 Q + 16 N + 16 æquetur priori fietque valor radicis $-\frac{3}{2}$. & cape ergo pro noua radice 1 N $-\frac{3}{2}$ & iuxta illam resolue singulas particulas numeri prædicti 1 QQ + 4 C + 12 Q + 8 N + 4. fietque nouus terminus 1 QQ − 2 C + $\frac{15Q}{2} - \frac{29N}{2} + \frac{169}{16}$ æquandus quadrato, finge latus $\frac{13}{4} - \frac{29N}{13} + 1$ Q & fiet valor $\frac{11}{13}$ pro isto nouo termino, vnde si tollas $\frac{3}{2}$ fiet valor pro primis positionibus $\frac{3}{16}$ igitur 1 N + 1 & 1 in integris, abjecto denominatore erunt 29 & 26. à quibus formabis triangulum primum quæsitum 1517. 165. 1508. & inde nascetur secundum 1525. 1517. 156. Aliter ex $-\frac{3}{4}$ supra inuentis potuit inueniri solutio applicando illam radicem 1 N + 1 & 1. ita enim in integris fient 1 & 2 quare ponendi sunt numeri formantes triangulum 1 N − 1 & 2 & redintegranda operatio, ita enim latera primi trianguli erunt 1 Q + 5 − 2 N. 1 Q − 3 − 2 N. 4 N − 4. & latera circa rectum secundi 1 Q + 5 − 2 N & 4 N. − 12. horum quadrata simul addita 1 QQ − 4 C + 30 Q 116 N + 169 æquantur quadrato, finge latus 13 $-\frac{58N}{13}$ + 1 Q & fiet valor $\frac{41}{13}$. ergo 1 N − 1 & 2 in integris erunt 29 & 26 vt supra, vnde formabuntur eadem triangula. 39

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit numerus quadratus & datus multiplex vnius lateris circa rectum additus alteri lateri faciat quadratum.

Detur multiplex duplus & formetur triangulum quæsitum ab 1 N & 1 latera sunt 1 Q + 1. 1 Q − 12 N. duplum posterioris lateris 4 N addatur priori lateri circa rectum & & fiet 1 Q − 1 + 4 N æquandus quadrato sicut & hypotenusa 1 Q + 1 horum differentia est 2 − 4 N & fit valor radicis $\frac{1}{12}$ debet autem 1 N esse maior vnitate; ergo iteranda est operatio & formandum triangulum ab 1 N + 5 & 12. latera sunt 1 Q + 169 + 10 N. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120. duplum istius postremi lateris 48 N + 240 additum medio facit 1 Q + 121 + 58 N. æquandum quadrato & est etiam hypotenusa 1 Q + 16 Q + 10 N. æquanda quadrato horum duorum productus 1 QQ + 68 C + 870 Q + 1102 N + 20449 æquandus quadrato. Finge latus 143 + $\frac{5506N}{143} - \frac{62627039}{2924207}$ & fit valor radicis $\frac{199173002964296}{1067046228736}$ ergo numeri formantes triangulũ in integris erunt 2145082341079296 & 3680455474832O. vnde triangulum ipsum non latebit. 40

Inuenire quadrato-quadratum cuius triplum additum alteri quadrato-quadrato quam vnitati, faciat quadratum.

41 Iubetur addi alteri quadrato-quadrato quam vnitati quia alioqui res esset perfacilis, nam triplum vnitatis additum vnitati facit 4. Item triplum quadratoquadratum 16 additum vnitati facit 49. pone ergo latus quadrato-quadrati quæsiti 1 N − 1 cuius quadrato-quadratum 1 QQ − 4 C + 6 Q − 4 N + 1. triplicatum & additum 1 QQ facit 4 QQ − 12 C + 18 Q − 12 N + 3 æquandum quadrato, finge latus quadrati 2 Q − 3 N + $\frac{5}{4}$. & fiet valor $\frac{11}{8}$. ergo iuxta positiones latus quadratoquadrati erit in integris 3 cuius quadrato-quadratum 81 triplicatum & additum quadrato-quadrato numeratoris 11. nempe 14641 facit 14884. quadratum à latere 122. similiter capiendo duplum 3. nempe 6. eius quadrato quadratum triplicatum additum quadrato-quadrato 22 (hoc est dupli 11) facit 238144 quadratum à latere 488 rursus capiendo triplum 3 nempe 9 eius quadrato-quadratum triplicatum & additum quadrato-quadrato 33 (hoc est tripli 11) facit 1205604 quadratum à latere 1098. & sic in infinitum.

Inuenire triangulum rectangulum in quo quadratum hypotenusæ additum dato multiplici areæ faciat quadratum.

42 Detur duplum areæ & formetur triangulum ab 1 N & 1 latera sunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. quadratum hypotenusæ est 1 QQ + 2 Q + 1 cui additum duplum areæ 2 C − 2 N. facit 1 QQ + 2 C + 2 Q − 2 N + 1 æquandum quadrato finge latus 1 Q + 1 + $\frac{1}{4}$ & fiet $\frac{1}{4}$ pro valore radicis at $\frac{1}{4}$ non est maior 1 ergo non potest inde formari triangulum quin habeantur numeri ficti, quare iteranda est operatio & ponendo pro noua radice 1 N + $\frac{1}{4}$ iuxta quam si resoluantur singulæ particulæ numeri mox quadrato æquati fiet nouus terminus 1 QQ + 3 C + $\frac{31Q}{1}$ $\frac{9N}{16}$ + $\frac{169}{256}$ quadrato æquandus finge latus $\frac{13}{16}$ − $\frac{2N}{26}$ + $\frac{5077Q}{2197}$ & fiet valor radicis $\frac{205512544}{209491120}$ huic adde $\frac{1}{4}$ ob nouam radicem, & fiet valor pro primis positionibus $\frac{6437453}{5237280}$ quare duo numeri à quibus formabitur rectangulum triangulum erunt in integris 6437453 & 5237280. in vnico casu problema est impossibile.

Inuenire triangulum rectangulum in quo area detracta ex quadrato vnius lateris circa rectum faciat quadratum.

43 Formetur illud triangulum ab 1 N − 1 & 4. latera sunt 1 Q + 17 − 2 N. 1 Q − 15 − 2 N. 8 N − 8. eius area 4 C − 12 Q − 52 N + 60 sublata ex quadrato secundi lateris, quod est 1 QQ − 4 C − 26 Q + 60 N + 225. relinquit 1 QQ − 8 C − 14 Q + 112 N + 165 æquandū quadrato, finge latus 1 Q − 4 N − 15. & fit valor radicis − $\frac{15}{2}$ quare pono nouam radicem 1 N − $\frac{15}{2}$. & iuxta illam resoluo singulas particulas termini quadrato æquati, fitque nouus terminus æquandus quadrato 1 QQ − 38 C + $\frac{10079}{2}$ − 54 $\frac{31N}{2}$ + $\frac{81225}{16}$. Finge latus 1 Q − 19 N − $\frac{285}{4}$ & fit valor $\frac{5423}{285}$ vnde si tollas $\frac{15}{2}$ ob nouam radicem, & ex residuo vnitatem, ob positionem restabunt duo numeri formantes triangulum in integris 6001 & 2280. igitur triangulum quæsitum est 41210401. 30813601. 27364560.

CLAVDII

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI,

IN DIOPHANTVM PORISMATVM,

LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

compositi maioris inæqualium ad compositum minoris eorundem

SI duobus æqualibus numeris inæquales duo adiiciantur, erit ~~compositorum~~ maioris ad minorem minor ratio quàm adiectorum.

Sint æquales numeri A B. C D. quibus addantur inæquales B E maior, & D F minor. Dico minorem esse rationem A E ad C F quàm B E ad D F. Quoniam enim A B & C D sunt æquales [a] minor erit ratio ipsius A B ad maiorem B E, quàm ipsius C D ad minorem D F. igitur & componendo [b], minor est ratio A E ad B E quàm C F ad D F. Quare & vicissim [c] minor est ratio A F ad C F quàm B F ad D F. Quod demonstrandum erat.

A.....B...E
C.....D..F

[a] octaua, quinti.
[b] vigesima octaua, quinti.
[c] vigesima septima, quinti.

PROPOSITIO II.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales, planus sub extremis æquatur plano sub duobus quibuslibet ab extremis æqualiter distantibus, atque etiam quadrato medij, si multitudo numerorum fuerit impar.

A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64.

Sint quotlibet numeri A B C D E F continuè proportionales & numero pari, dico primo planum sub A F. æqualem esse tum plano sub B E, tum plano sub C D. Quia enim est A ad B vt E ad F ex hypothesi [a] fiet idem numerus ex primo A in quartum F qui fit ex secundo B in tertium E. Similiter quia est B ad C vt D ad E [b] fiet idem numerus ex primo B in quartum E qui fit ex secundo C in tertium D seu idem qui fit ex A in F. Igitur plani sub A F sub B E sub C D sunt æquales. Quod erat propositum.

[a] decima nona, 7.
[b] decima nona, 7.

Deinde considerentur tantum numeri A B C D E multitudine impari. Dico planum sub A E æquari tum plano sub B D. tum quadrato ipsius C. Nam vt prius quia est A ad B vt D ad E. [c] planus sub A E æquatur plano sub B D. sed quia est vt B ad C. ita C ad D [d] planus sub B D. æquatur quadrato ipsius C. Igitur planus sub A E planus sub B D. & quadratus ipsius C æquales sunt inter se. Quod demonstrandum erat.

[c] decima nona, 7.
[d] vigesima, 7.

PROPOSITIO III.

Si tres, pluresve numeri inter se multiplicentur, idem semper procreabitur numerus, quomodocunque & quouis ordine seruato fiat multiplicatio.

Quod ostendit Euclides de duobus numeris inter se multiplicatis decimasexta 7. id in vniuersum de tribus pluribusve hîc ostendetur. Tres autem, pluresve numeri inter se multiplicari dicuntur, cùm vnus ex illis ducitur in alium, tum productus in alium, & rursus productus in alium, & ita deinceps, donec omnes multiplicati sint.

A 2. B 3. C 4.
D 6. H 8. F 12.
E 24. K 24. G 24.

Sint ergo tres numeri A B C. ductoque A in B fiat D. quo ducto in C fiat E. Rursus ordine mutato, ducatur B in C & fiat F, quo ducto in A fiat G. Denique mutato rursus ordine ducatur A in C & fiat H, quo ducto in B. fiat K. (tot enim modis ordo variari potest.) Dico tria producta E K G inter se esse æqualia. Quia enim B ductus in vtrosque A C. producit ipsos D F [a] erit A ad C vt D ad F. [b] Igitur productus ex A in F nempe G. æquatur producto ex C in D nempe ipsi E. Similiter quia idem C ductus in vtrumque A & B producit ipsos H F. erit A ad B vt H ad F. Igitur qui fit ex A in F nempe

[a] decima septima 7.
[b] decima nona, 7.

G. æquatur ei qui fit ex B in H nempe ipſi K. Quamobrem conſtat tres E K G. æquales eſſe inter ſe. Quod erat propoſitum.

E 24. F 60.
A 2. B 3. C 4. D 5.
G 12.
K 120. H 120.

Deinde ſint quatuor numeri A B C D. & tribus A B C inter ſe ductis fiat E quo ducto in reliquum D fiat K. Tum mutato ordine, & tribus B C D inter ſe ductis fiat F. quo ducto in reliquum A fiat H. Dico ipſos K & H æquales eſſe inter ſe, & ſemper eundem produci numerum quomodocumque aliter ordine mutato iidem A B C D inter ſe multiplicentur. Quia enim ſumendo ternos A B C. tum ternos B C D. duo B C vtrique ſumptioni communes ſunt, productus ex B in C eſto G. patet ergo ex demonſtratis in tribus numeris ex G in A produci E, & ex G in D, produci F. Quare [a] vt E ad F ſic eſt A ad D. [b] Igitur qui fit ex E in D, nempe H, æquatur ei qui fit ex F in A nempe ipſi K. ſimiliter quomodocumque ſumantur tres ex iiſdem quatuor numeris, duo ex illis reperientur in qualibet alia trium ſumptione. Quare licebit eodem argumento propoſitum concludere.

[a] *decima ſeptima 7.*
[b] *decima nona, 7.*

Eodem modo ſi ſint quinque numeri, ſumendo quaternos & quaternos, productumque ex mutua quatuor numerorum multiplicatione, ducendo in reliquum, reperientur tres iidem numeri in duabus quibuslibet ſumptionibus, vnde ſumendo productum ex trium communium mutuo ductu, licebit ſimili prorſus argumento propoſitum concludere. Et ſic in ſex numeris per ea quæ in quinque demonſtrata ſunt probabitur intentum, & in ſeptem per ea quæ in ſex erunt oſtenſa. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO IV.

Si fuerint quatuor numeri in proportionalitate arithmetica, erit ſumma extremorum, ſummæ mediorum æqualis. Et ſi ſumma extremorum ſit æqualis ſummæ mediorum, erunt in proportionalitate arithmetica ipſi quatuor numeri.

Arithmetica proportionalitas dicitur cùm primi & ſecundi idem eſt interuallum, quod tertij & quarti, ita tamen vt primus ſecundo, & tertius quarto comparati, ſinguli ſingulis vel æquales ſint, vel maiores; vel minores, non perturbato ordine.

A.....B
C.....
D.....G
H.....

Sint ergo arithmeticè proportionales A B ad C ſicut D G ad H. dico extremorum A B & H ſummam æquari ſummæ mediorum C & D G. etenim vel A B æqualis eſt ipſi C. vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis ergo vt ſeruetur arithmetica medietas, erit & D G. æqualis, ipſi H. Quamobrem ſi æqualibus A B & C addantur æquales H & D G. erunt duo A B & H ſimul æquales duobus C & D G ſimul. Quod eſt propoſitum.

A.....E..B
C.....
D.....F..G
H.....

Deinde excedat A B numerum C numero E B ita vt A E & C ſint æquales, igitur & D G excedit H numero F G. æquali ipſi E B. per definitionem, & erit D F ipſi H æqualis. Itaque ſi æqualibus A E & C addantur æquales H & D F fient A E & H ſimul æquales H & D F fient A E & H ſimul æquales ipſis C & D F ſimul, igitur ſi his ſummis æqualibus addantur rurſus æquales E B & F G. Erunt A B & H ſimul æquales ipſis C & D G ſimul. Quod demonſtrandum erat.

Denique concipiatur H primus. D G ſecundus. C tertius. A B quartus, ita vt H ſit minor quàm D G numero F G. & C ſit minor quàm A B numero E B, ſintque differentiæ F G. E B æquales; dico rurſus extremorum H & A B ſummam æquari ſummæ mediorum D G & C. Nam conſideratis iiſdem numeris ordine inuerſo concludetur per proximè demonſtrata ſummam duorum A B & H. æquari ſummæ duorum C & D G. Quod eſt propoſitum.

Iam è conuerſo ſit ſumma extremorum A B & H æqualis ſummæ mediorum C & D G. Dico ipſos quatuor numeros eſſe in arithmetica medietate. Nam vel A B æqualis eſt ipſi C vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis. Quia igitur A B & H ſimul æquantur ipſis C & D G ſimul, ſi vtrimque auferantur æquales A B. & C. remanebunt D G. & H æquales. Quare ſicut ipſorum A B & C nullum eſt interuallum, ſic & ipſorum D G. & H. Vnde conſtat propoſitum.

Deinde excedat A B ipſum C numero E B ita vt A E & C ſint æquales. Igitur ab æqualibus ſummis duorum A B & H ſimul, & duorum C & D G ſimul, auferendo æquales numeros A E & C. remanent E B & H ſimul, æquales ipſi D G. Quare ſi abſcindatur ex D G. numerus D F æqualis H, erit reliquus F G. æqualis E B. Cùm itaque A B. excedat C. eodem numero quo D G excedit H. erunt arihtmeticè proportionales ipſi quatuor numeri. Quod demonſtrandum erat.

Denique concipiatur H primus D G. ſecundus. C tertius. A B quartus. Ita vt H ſit minor quàm D G numero F G. & reliquus D F ſit æqualis ipſi H. Quia ergo ab æqualibus ſummis duorum H & A B. & duorum D G, & C. auferendo æquales H & D F remanent F G & C ſimul æquales ipſi A B, ſi ab A B abſcindatur A E æqualis ipſi C relinquetur E B æqualis ipſi F G. Quare cum H deficiat à

DG. eodem numero quo C deficit ab AB. sunt arithmeticè proportionales H ad DG. sicut C ad AB. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc apparet si quatuor numeri fuerint in hac proportionalitate, & conuertendo fore eos in eadem proportionalitate.

Nam si primus excedat secundum, eodem interuallo quo tertius excedit quartum, & conuertendo, quartus deficiet à tertio, eodem numero quo secundus deficit à primo. Rursus si primus deficiat à secundo, eodem numero quo tertius à quarto, & conuertendo quartus excedet tertium, eodem interuallo quo secundus primum.

PROPOSITIO V.

Si tres numeri arithmeticè proportionales fuerint, summa extremorum æqualis est duplo medij. Et si summa extremorum sit æqualis duplo medii, ipsi tres numeri arithmeticè proportionales erunt.

A 9. B 6. C 3. D 6.

Sint, tres numeri A B C in arithmetica proportionalitate, vt A ad B ita B ad C. Dico extremorum A C summam æquari duplo medij B. Etenim sumpto D æquali ipsi B. erit ex hypothesi in arithmetica proportionalitate vt A ad B ita D ad C. (quia D idem est atque B) Igitur per primam partem præced. erit extremorum A C summa æqualis summæ mediorum B D, seu duplo ipsius B. Quod erat primò propositum.

Sit deinde summa ipsorum A C æqualis duplo ipsius B. Dico esse in arithmetica proportionalitate vt A & B ita B ad C. Nam rursus sumpto D æquali B erit ex hypothesi, summa duorum A C summæ duorum B D æqualis. Quare per secundam partem præcedentis erit in arithmetica medietate A ad B vt D ad C. hoc est A ad B vt B ad C. Quod erat secundò demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Si sint quotlibet numeri in arithmetica medietate continui, summa extremorum æqualis est summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, atque etiam duplo medij, si multitudo numerorum fuerit impar.

A 3. B 5. C 7. D 9. E 11. F 13.

Sint quotlibet numeri A B C D E F in arithmetica medietate continui, dico summam extremorum A F æqualem esse summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, hoc est summæ duorum B E, & summæ duorum C D. Nam ob continuitatem arithmeticæ proportionalitatis, est A ad B sicut E ad F. Igitur[a] extremorum A F summa, summæ mediorum B E æqualis est. Similiter quia est in arithmetica medietate B ad C, vt D ad E.[b] erit summa extremorum B E æqualis summæ mediorum C D. Quare cùm eadem summa duorum B E sit iam ostensa æqualis summæ duorum A F. erit vtique summa duorum A F æqualis tam summæ duorum B E. quàm summæ duorum C D & sic de aliis si plures essent numeri propositi.

[a] *quartæ huius.*

[b] *quartæ huius.*

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. F 12. G 14.

Quod si numeri A B C D E F G sint multitudine impari, ostendemus vt prius summam extremorum A G æqualem esse summæ duorum C E. Quia vero ex hypothesi est C ad D vt D ad E. in medietate arithmetica,[c] summa duorum C E æqualis est duplo medij D. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

[c] *quintæ huius.*

PROPOSITIO VII.

Si fuerint quatuor numeri arithmeticè proportionales, & permutando, arithmeticè proportionales erunt.

A 12. B 9. C 4. D 1.

Sit in medietate arithmetica primus A ad secundum B. sicut tertius C ad quartum D. Dico & permutando esse in eadem medietate A ad C vt B ad D. Quia enim est in hac medietate A ad B vt C ad D. erit summa extremorum A D æqualis summæ mediorum C B per primam partem quartæ huius. Igitur per secundam partem eiusdem erit in eadem medietate primus A ad C secundum, sicut tertius B ad D quartum. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VIII.

Omnis numerus pariter par, dimidium par habet. Et si quis numerus dimidium par habet, is est pariter par.

A 24.
B 12.

Eſto A numerus pariter par, cuius dimidium B. Dico B eſſe parem. Si enim B eſſet impar, [a] ipſe A eſſet pariter impar tantum, contra hypotheſim. Non eſt ergo B impar, ſed par. Quod eſt propoſitum.

[a] *trigeſimatertia, 9.*

Deinde ſit B par, dico A eſſe pariter parem, & patet ex definitione. Etenim A producitur ex binario numero pari, in parem B. Quamobrem ex omni parte patet intentum.

COROLLARIVM.

Binarius metitur omnem numerum parem, per ipſius dimidium.

PROPOSITIO IX.

Omnis numerus pariter impar tantum, dimidium impar habet.

A 10.
B 5.

Hæc conuertit trigeſimam tertiam, 9. Euclidis. Eſto A numerus pariter impar tantum, cuius dimidium B. Dico B eſſe imparem. Nam ſi B eſſet par, [a] ipſe A eſſet pariter par. Atqui A ſupponitur pariter impar tantum. Igitur B non eſt par ſed impar. Quod demonſtrandum erat.

[a] *octaua, huius.*

PROPOSITIO X.

Omnem numerum pariter parem quaternarius metitur. Et omnem numerum quem quaternarius metitur, is pariter par eſt.

A.....C.....B
G 4. D 2.

Eſto AB numerus pariter par cuius dimidium ſit CB numerus par per octauam huius. Et ſit G. quaternarius. Dico primo G metiri ipſum AB. Nam ſumpto D binario, erit D ad G ſicut ſicut CB ad AB. & permutando erit D ad CB, ſicut G ad AB. ſed [a] D binarius metitur numerum parem CB. Igitur & G metitur ipſum AB. Quod demonſtrandum erat.

[a] *coroll. octauæ. huius.*

Deinde quaternarius G metiatur numerum AB. Dico AB eſſe pariter parem. Nam primo parem eſſe conſtat, [b] quia eum metitur G numerus par. Itaque ipſius AB dimidium eſto CB. Tunc vt prius ſumpto binario D. oſtendemus eſſe D ad CB ſicut G ad AB. Sed G metitur AB ex hypoteſi. [c] Igitur & D metitur CB. Quamobrem AB habens dimidium par, eſt pariter par. Quod ſecundo erat oſtendendum.

[b] *vigeſima prima, 9.*
[c] *octaua, huius.*

PROPOSITIO XI.

Omnis numerus excedens binario aliquem pariter parem, eſt pariter impar tantum.

A..C.....B

Sit numerus AB excedens pariter parem CB. binario AC. Dico AB eſſe pariter imparem tantum. Nam primò eſſe parem conſtat, [a] quia componitur ex duobus paribus AC. CB. Deinde eſſe pariter imparem ſic probatur. Nam ſi ponatur pariter par, [b] metietur eum quaternarius. Sed & idem quaternarius metitur pariter parem CB. Ergo quaternarius metiens totum AB. & ablatum CB, metietur & reliquum binarium AC, maior minorem. Quod eſt impoſſibile. Quamobrem AB non eſt pariter par. Eſt igitur pariter impar tantum. Quod demonſtrandum fuit.

[a] *vigeſima prima, 9.*
[b] *octaua, huius.*

PROPOSITIO XII.

Omnis numerus pariter impar tantum, excedet aliquem pariter parem binario.

A..G.....C.D.....B

Eſto AB pariter impar tantum, dico eum excedere binario aliquem pariter parem. Quia enim AB eſt par, ſecetur bifariam in AC. CB. [a] eruntque AC CB impares. Quare ſi ab ipſo CB auferatur vnitas CD, reliquus DB erit par. Sit illius duplus GB. [b] Igitur GB erit pariter par. Quum itaque vt totus AB ad totum CB, ſic ſit ablatus GB ad ablatum DB. (nam vtrobique eſt proportio dupla) erit & reliquus AG ad reliquum CD in eadem proportione dupla. Quare cùm CD ſit vnitas, erit AG binarius. Atque ideo cùm GB ſit oſtenſus pariter par, numerus AB ſuperat pariter parem GB binario AG. Quod demonſtrandum erat.

[a] *nona, huius.*
[b] *octaua, huius.*

PROPOSITIO XIII.

Si numerus pariter par, numero pariter impari tantum addatur, erit compoſitus pariter impar tantum.

A....C.....B

Numerus pariter par AC. addatur pariter impari tantum CB. Dico compoſitum ex his AB eſſe pariter imparem tantum. Nam ſi AB ponatur pariter par, [a] metietur eum quaternarius. Sed idem quaternarius metitur pariter parem AC. Igitur metiens totum AB, & ablatum AC, metietur & reliquum CB. quamobrem CB erit pariter par contrà hypotheſim.

[a] *octaua huius.*
[b] *octaua, huius.*

Nam positus est pariter impar tantum. Igitur A B non potest esse pariter par. Vnde relinquetur esse pariter imparem tantum. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XIV.

Si numerus pariter par per aliquem numerum multiplicetur, productus erit pariter par.

A 8. B 3. C 24. Sit numerus pariter par A quo ducto in quemlibet numerum B fiat C. Dico C esse pariter parem. Quia enim A est pariter par, [a] metitur eum quaternarius. Quare cùm A metiatur C. metietur & quaternarius, eundem C. [b] Igitur C est pariter par. Quod demonstrandum erat.

[a] octaua, huius.
[b] octaua, huius.

PROPOSITIO XV.

Si numerus pariter impar tantum, per numerum imparem multiplicetur, productus erit pariter impar tantum.

A 6. B 5. D 3. E 15. C 30. Sit A numerus pariter impar tantum, quo ducto in B. imparem numerum, producatur C. Dico C esse pariter imparem tantum. Sumatur enim D dimidium ipsius A, quo ducto in B fiat E. Euidens est, quia B ductus in vtrumque D A producit E C [a] esse E ad C sicut D ad A. Quamobrem E est dimidium ipsius C. [b] Atqui D est impar, cùm sit semissis ipsius A numeri pariter imparis tantum & B etiam impar est ex hypothesi. [c] Igitur E productus ex duorum imparium mutuo ductu, & ipse impar est. [d] Quare C habens dimidium impar E, est pariter impar tantum. Quod erat demonstrandum.

[a] decima septima 7.
[b] nona, huius.
[c] vigesima nona, 9.
[d] trigesima tertia, 9.

PROPOSITIO XVI.

Si pariter pares quotcumque componantur, totus pariter par erit.

A 8. B 12. C 16. D 36. Sint pariter pares quotcunque A B C. quorum summa D. dico D esse pariter parem. Quia enim A B C. sunt pariter pares, [a] singulos illorum quaternarius metitur. Igitur & compositum ex ipsis D, idem quaternarius metietur. [b] Quamobrem erit D pariter par. Quod demonstrandum erat.

[a] octaua huius.
[b] octaua, huius.

PROPOSITIO XVII.

Si quotlibet numeri pariter impares tantum componantur, sit autem par illorum multitudo, totus erit pariter par. Si vero sit impar illorum multitudo, totus erit pariter impar tantum.

A 6. E 4. B 10. F 8. C 14. G 12. D 18. H 16. K 48. Sint quotcunque pariter impares tantum A B C D. & sit primum par eorum multitudo, & compositus ex ipsis K. dico K esse pariter parem. sumantur enim E F G H singuli binario minores singulis A B C D. [a] Eruntque ipsi E F G H pariter pares. Numerus autem K æquabitur composito ex ipsis E F G H & totidem binariis. At [b] compositus ex ipsis E F G H est pariter par. Necnon & totidem binarij faciunt pariter parem [c] cùm compositus ex illis habeat dimidium par, scilicet numerum multitudinis ipsorum E F G H. [d] Igitur K compositus ex duobus pariter paribus, est pariter par. Quod demonstrandum fuit.

[a] duodecima huius.
[b] decima sexta huius.
[c] octaua, huius.

A 6. E 4. B 10. F 8. C 14. G 12. D 30. Sint vero A B C pariter impares tantum, multitudine impari, quorum summa D. dico D esse pariter imparem tantum. Nam sumptis vt prius E F G binario minoribus quàm ipsi A B C. erit D æqualis composito ex ipsis E F G & totidem binariis. [e] Quia uero singuli E F G sunt pariter pares, erit [f] & compositus ex ipsis pariter par. Summa vero totidem binariorum est pariter impar tantum, [g] quia dimidium impar habet, numerum multitudinis ipsorum E F G. Igitur [h] numerus D compositus ex duobus quorum alter est pariter par, alter pariter impar tantum, est & ipse pariter impar tantum. Quod demonstrandum erat.

[d] decima sexta, huius.
[e] duodecima, huius.
[f] decima sexta, huius.
[g] trigesima tertia, 9.
[h] decima tertia, huius.

PROPOSITIO XVIII.

Si cuiuis quadrato addatur duplum lateris illius, & præterea vnitas, fit quadratus à latere vnitate maiore.

A 16. B.... C. D G 25. Sit quadratus A cuius latus B C cui addita vnitate C D fiat B D & ipsius B D quadratus esto G. dico si addatur ad A duplum sui lateris B C & præterea vnitas, fieri quadratum G. etenim [a] quadratus G. æqualis est quadratis ipsorum B C. C D. & producto bis ex B C in C D. Atqui quadratus ipsius B C est A, & quadratus C D

[a] quarta, 2.

eſt ipſa vnitas: Productus autem ex vnitate C D in B C bis, eſt duplum ipſius B C. Patet ergo quadratum G æquari quadrato A & vnitati, & duplo ipſius B C. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Eadem prorſus ratione ſi cuilibet quadrato addatur quadruplum ſui lateris & præterea 4. oſtendetur fieri quadratum lateris binario maioris. Et ſi quadrato addatur ſextuplum ſui lateris, & præterea 9. fiet quadratus lateris ternario maioris, & ſic in infinitum multiplicando latus per omnes numeros pares ordinatè diſpoſitos, & aſſumendo quadratos illis collaterales ſeu quadratos ſemiſſum eorundem numerorum parium. Nec ad hoc demonſtrandum requiritur aliud quàm quarta, 2.

PROPOSITIO XIX.

Si à quolibet quadrato auferatur numerus vnitate minor duplo lateris illius, relinquetur quadratus à latere vnitate minore.

A 25. B 5. C 10. D 9. E 4. F 8.

Sit A quadratus, cuius latus B cuius duplum C, vnde ablata vnitate relinquatur D & ſit E vnitate minor ipſo B. Dico ſi D auferatur à quadrato A, relinqui quadratum ipſius E. ſumpto enim F duplo ipſius E, cùm B E differant vnitate, patet eorum dupla C F differre binario. Quare idem fiet numerus ſiue auferatur vnitas ex C. ſiue addatur vnitas ad F, nempe idem D. Atqui ſi ad quadratum ipſius E addatur duplum eiuſdem E vnitate auctum nempe D.[a] fiet quadratus ipſius B nempe A. Igitur ſi ex A detrahatur D. reſiduum erit quadratus ipſius E. Quod demonſtrandum erat.

a *decima octaua, huius.*

PROPOSITIO XX.

Omnis numerus quadratus aut impar eſt, aut pariter par.

A 25. A 16. B 5. B 4.

Sit numerus quadratus A, cuius latus B. dico A vel imparem eſſe, vel pariter parem. Etenim vel B impar eſt, vel par. Sit primum impar. Quia ergo ex impare B in imparem B. fit A.[a] erit A impar.

a *vigeſima nona, 9.*

Deinde ſit B par. Quia igitur ex pari B in parem B fit A, erit A pariter par ex definitione. Quamobrem A vel impar eſt, vel pariter par. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

G. I. Nullus numerus pariter impar tantum, eſt quadratus.

Patet, cùm numerus pariter impar tantum, nec impar ſit, nec pariter par.

PROPOSITIO XXI.

Quilibet quadratus impar, excedit numerum pariter parem vnitate.

A 25. C 24. B 5. D 4.

Sit A quadratus impar, cuius latus B. & ab ipſo A detracta vnitate ſuperſit C. dico C eſſe pariter parem, Sumatur D numerus vnitate minor ipſo B. Quia ergo B eſt impar [a] (nam ſi B eſſet par, ex ductu illius in ſeipſum fieret A par contrà hypotheſim) erit D par.[b] Atqui duplum ipſius D vnà cum quadrato eiuſdem D, æquatur numero C. Quadratus autem numeri paris D,[c] eſt pariter par. Duplum quoque numeri paris D eſt pariter par (cùm fiat ex binario pari numero, in D parem:) igitur & C compoſitus ex duobus pariter paribus,[d] eſt pariter par. Quod demonſtrandum erat.

a *Schol. vigeſima octaua, 9.*
b *decima octaua, huius.*
c *vigeſima, huius.*
d *decima ſexta, huius.*

PROPOSITIO XXII.

Duorum quorumlibet quadratorum interuallum, aut impar eſt, aut pariter par.

A 25. B 9. C 16. D . . . E . . F

Sint duo quadrati A maior & B minor, quorum interuallum C. Dico C eſſe pariter parem, vel imparem. Sumatur ipſius A latus D F, & latus ipſius B ſit D E, ita vt E F ſit differentia dictorum laterum. Itaque E F vel par eſt, vel impar. Sit primum par. Cùm igitur interuallum quo quadratus A ſuperat quadratum B [a] æquetur quadrato ipſius E F & producto ex D E in E F bis, erit C æqualis quadrato ipſius E F & producto ex D E in E F bis,[b] At quadratus paris numeri E F eſt pariter par. Necnon & duplum producti ex D E in E F eſt pariter par,[c] cùm dimidium eius, nempe productus ex D E in E F parem, ſit par.[d] Igitur C compoſitus ex duobus pariter paribus, eſt pariter par. Quod erat propoſitum.

a *quarta, 2.*
b *vigeſima, huius.*
c *octaua, huius.*
d *decima ſexta, huius.*

A 25. B 4. C 21. D..E...F

Deinde sit E F impar. Tunc quia quod fit bis ex D E in E F est numerus par (habet enim dimidium quod fit semel ex DE in E F.) si ei adiiciatur quadratus imparis E F, [a] qui impar est, [b] erit C. compositus ex pari & impari, impar. Quamobrem ex omni parte patet propositum.

[a] *vigesima, huius.* [b] *Schol. vigesima tertia, 9.*

COROLLARIVM.

Numerus pariter impar tantum, non potest esse interuallum duorum quadratorum.

Intellige vnitate indiuisibili manente, aliter enim quilibet numerus statui potest interuallum duorum quadratorum, vt ostendit Diophantus lib. 2. sed & vigesima propositio, & hæ etiam intelligendæ sunt de numeris integris, nam fracti numeri nec pares sunt nec impares.

PROPOSITIO XXIII.

Si duorum inæqualium numerorum summæ addatur & adimatur eorundem interuallum, aggregatum quidem, maioris numeri, residuum vero, minoris duplum est.

E...A....B....C...D

Sint inæquales numeri A B minor & B D maior & à maiori abscindatur B C minori A B æqualis ita vt reliquus C D sit interuallum ipsorum. Dico primo, si toti A D addatur E A æqualis interuallo C D aggregatum E D esse duplum maioris numeri B D. etenim cùm æqualibus A B. B C. addantur æquales E A. C D erunt toti E B. B D æquales, atque ideo totus E D ipsius B D duplus erit. Quod erat propositum.

Dico secundo, si à toto A D auferatur interuallum C D, residuum A C minoris A B duplum esse, & patet cùm B C ipsi A B sit æqualis. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

COROLLARIVM.

Si semissi summæ duorum numerorum addatur & adimatur semissis interualli eorundem aggregatum quidem maiori numero, residuum vero minori æquale est.

PROPOSITIO XXIV.

Si quotlibet numeri continuè proportionales, in totidem alios continuè proportionales ducantur, primus in primum, secundus in secundum, tertius in tertium & ita deinceps, & producti continuè proportionales erunt.

P 16. Q 324. R 5184. | A 2. B 4. C 8. D 16. E 27. F 18. G 12. H 8. K 54. L 72. M 96. N 128.

Sint quotlibet numeri continuè proportionales A B C D & totidem alij E F G H ductisque A in E. B in F. C in G. D in H. fiant K L M N. Dico & ipsos K L M N esse continuè proportionales. Etenim ex A in C & ex E in G fiant P Q [a] quadrati ipsorum B F sumaturque etiam R productus ex K in M. Itaque quoniam ex A in E & ex C in G fiunt K M & ex K in M fit R. patet R produci ex mutua multiplicatione quatuor numerorum A C E G. [b] Quamobrem idem R producetur quomodocunque iidem quatuor numeri inter se ducantur, nimirum si A ducatur in C. & E in G. & producti P Q inter se ducantur. Igitur ex P in Q fiet R. At productus ex mutuo ductu quadratorum P Q [c] æquatur quadrato plani sub lateribus B F & ex B in F fit L ex hypothesi. Ergo R est quadratus ipsius L, [d] ac proinde tres K L M sunt continuè proportionales. Eadem ratione ostendemus tres L M N esse continuè proportionales. Quamobrem patet & omnes K L M N esse continuè proportionales. Quod erat demonstrandum.

[a] *vigesima, 7.* [b] *tertia, huius.* [c] *vndecima, 8.* [d] *vigesima, 7.*

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI IN DIOPHANTVM PORISMATVM.

Liber Secundus.

PROPOSITIO I.

SI numerus secetur in quotlibet partes. Quadratus totius æquatur quadratis partium, & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis.

A....D...C.....B

Numerus AB sectus sit primum in tres partes AD. DC. CB. Dico quadratum totius AB æquari quadratis partium AD. DC. CB. & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, nimirum productis bis ex AD in CB ex DC in CB & ex AD in DC. Etenim concipiendo numerum diuisum in duas partes AC. CB. [a] erit quadratus totius AB æqualis quadratis partium AC. CB. & producto bis ex AC in CB. [b] Sed productus bis ex AC in CB æquatur productis bis ex singulis AD. DC in CB. Quadratus autem ex AC. [c] æquatur quadratis partium AD. DC. & producto bis ex AD in DC. Igitur constat quadratum totius AB æquari quadratis ipsorum AD. DC. CB & numeris qui fiunt bis ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quod est propositum.

a *quarta* 2.
b *prima*, 2.
c *quarta*, 2.

A..E...D....C.....B

Deinde secetur AB in quatuor partes AE. ED. DC. CB. Dico nihilominus sequi propositum. Nam si totus AB concipiatur diuisus in duas partes AC. CB. [a] erit quadratus totius æqualis quadratis partium AC. CB & producto ex AC in CB bis. At productus ex AC in CB bis, [b] æquatur productis bis ex singulis AE. ED. DC. in CB. Et quadratus ex AC. æquatur per iam demonstrata quadratis singulorum AE. ED. DC. & productis ex quolibet illorum in quemlibet ex aliis. Igitur quadratus totius AB æquatur quadratis singulorum AE. ED. DB. CB. & productis bis ex quolibet in quemlibet ex alijs. Quod demonstrandum erat. Similiter si numerus secetur in quinque partes, idem ostendetur assumendo quod demonstratum de sectione in quatuor partes, & sic in infinitum. Igitur ex omni parte constat propositum.

a *quarta*, 2.
b *prima* 2, 2.

PROPOSITIO II.

Datis duobus numeris inæqualibus, productus ex mutua eorum multiplicatione vna cum quadrato semissis interualli ipsorum, æquatur quadrato semissis summæ eorundem.

Hæc propositio eadem est cum quinta, 2. Euclidis mutatis tantum verbis. Etenim sint numeri inæquales AB maior & BC minor, & totius AC semissis esto AE vel EC, & in semissi AE sumatur FE æqualis ipsi EB. Tunc ab æqualibus AE. EC. auferendo æquales FE. EB. erunt reliqui AF. BC æquales. Quamobrem FB est interuallum inæqualium numerorum AB. BC. & EB est semissis eiusdem interualli. Itaque per quintam, 2. constat quadratum ipsius EC semissis summæ æquari producto ex AB in BC. & quadrato EB semissis interualli. Quod demonstrandum erat.

A... F..E..B...C

PROPOSITIO III.

Duorum inæqualium quadratorum interuallum, æquale est numero qui fit ex summa laterum in interuallum eorundem.

Hæc etiam non differt à sexta, 2. etenim sint inæquales numeri AC minor, & CD maior abscindatur ex CD numerus CB æqualis ipsi AC. erit ergo BD interuallum duorum AC. CD. Dico itaque quadratum ex CD superare quadratum ex AC. numero qui fit ex AD summa laterum, in BD interuallum eorundem. Cùm enim AB sectus sit bifariam in C. & ei adiectus sit BD, erit per sextam, 2. quadratus ex CD æqualis producto ex AD in BD & quadrato ex AC. Quare quadratus ex CD superat quadratum ex AC producto ex AD in BD. Quod demonstrandum fuit.

A... C... B..... D

PROPOSITIO IV.

Duorum quadratorum summa, æquatur duplo plani sub lateribus, vnà cum quadrato interualli eorundem.

Hæc

Hæc quoque aliis verbis idem pronunciat, quod septima 2. Etenim sint inæquales numeri AC maior & CB minor, & abscindatur DC æqualis ipsi CB. ita vt AD sit interuallum ipsorum AC. CB. Dico summam quadratorum ab ipsis AC. CB. æquari duplo plani sub AC. CB. vnà cum quadrato ipsius AD. Quia enim numerus AC sectus est vtcumque in D, per septimã 2. quadratus ex AC cum quadrato ex DC. idest summa quadratorum ab ipsis AC. CB. æquatur duplo plani sub AC. DC. seu sub AC. CB. vnà cum quadrato ipsius AD. Quod demonstrandum erat.

A..D....C....B

PROPOSITIO V.

Quadratus summæ duorum numerorum, æqualis est quadruplo plani sub ipsis numeris contenti, vnà cum quadrato interualli eorundem.

Hæc rursus eadem est cum octaua 2. sint enim inæquales numeri AB maior, & BD minor, & abscindatur CB æqualis ipsi BD, ita vt AC sit interuallum ipsorum AB. BD. Dico quadratum totius AD æquari quadruplo plani sub AB. BD. vnà cum quadrato interualli AC. Cùm enim numerus AB sectus sit vtcumque in C. per octauam 2. quadratus compositi ex AB. CB. nimirum totius AD, æquatur quadruplo plani sub AB. CB. seu sub AB. BD, cum quadrato ipsius AC. Quod demonstrandum proponebatur.

A.....C..B..D

PROPOSITIO VI.

Duorum inæqualium quadratorum summa, dupla est quadrati semissis summæ laterum, & quadrati semissis interualli eorundem.

Hæc non differt à nona 2. sint enim inæquales numeri AD. DB, & totius AB. semissis esto AC. vel CB ergo per ostensa secunda huius CD erit semissis interualli ipsorum AD. DB. Itaque dico summam quadratorum ab ipsis AD DB. duplam esse quadratorum ab ipsis CB. CD. Quod ipsum enunciat nona 2. Quamobrem constat propositum.

A.....C..D...B

PROPOSITIO VII.

Quadratus summæ duorum numerorum, & quadratus interualli eorum simul, dupli sunt quadratorum ab ipsis numeris.

Hæc quoque coïncidit cum decima 2. sint enim inæquales numeri AC. minor, & CD maior & à maiori abscindatur CB minori AC æqualis, ita vt BD sit interuallum ipsorum AC. CD. Dico Quadratum totius AD cum quadrato interualli BD esse duplum quadratorum ab ipsis AC. CD. Cùm enim AB sectus sit bifariam in C. & adiectus sit ei BD. per decimam 2. Quadrati ipsorum AD. BD simul dupli sunt quadratorum ab ipsis AC. CD. Quod erat ostendendum.

A.....C.....B..D

COROLLARIVM.

Cuiuslibet numeri ex duobus quadratis compositi tam dimidium quam duplum componitur & ipsum ex duobus quadratis.

SCHOLIVM.

Colligitur manifestò hoc corollarium ex his duabus postremis propositionibus, & verum est in omni numero siue pari, siue impari, siue integro, siue fracto, cùm hæ duæ demonstrationes omnibus numeris conueniant, vt apparet, vnde constat lapsum esse Cardanum cap. 42. suæ Arithmeticæ regula 120. vbi hanc proprietatem numeris fractis conuenire negat. Notandus etiam error Nicolai Tartaleæ lib. 6. secunda partis quæst. 48. vbi ait si numerus ex duobus quadratis compositus sit duplus alterius ex duobus item quadratis compositi, semper euenire vt minus latus subduplorum sit interuallum inter maius latus eorundem & minus duplorum, vt quia quadrati 64. & 4. simul sunt dupli quadratorum 25. & 9. accidit 3. latus ipsius 9. esse differentiam laterum 5. & 2. Etenim cùm vterque numerus ex duobus quadratis compositus, infinitis modis componatur ex duobus quadratis, vt ostendit Diophantus quæst. decima lib. 2. sanè vterque infinitis modis diuidi poterit in duos quadratos in quibus non eueniet quod semper euenire asserit Tartalea, quod vnico exemplo probare sufficiet. Quadrati 121. & 9 simul dupli sunt quadratorum 64. & 1. cùm illorum summa sit 130. horum 65. Attamen cùm latera illorum sint 11. & 3. horum 8. & 1. manifestum est, minus horum nempe 1. non esse interuallum ipsorum 8. & 3. Rursus 130. componitur ex duobus quadratis 81. & 49. At 65. componitur è duobus 49 & 16. & illorum latera sunt 9. & 7. istorum 7. & 4. vbi tamen 4. non est interuallum ipsorum 7. & 7. Verum quidem est si aliter comparentur hi quadrati, euenire quod ait Tartalea nimirum si quadrati 121. & 9. comparentur ipsis 49. & 16. vel si quadrati 81. & 49. comparentur ipsis 64. & 1. Hoc igitur distinguere debuit Tartalea; sed doctrinam de numeris è duobus quadratis compositis perfectè non calluit.

Hinc etiam colligere licet. Nullum numerum pariter parem tantum componi posse ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Nam si hoc ponatur, facilè concludetur ex quibusdam propositionibus lib. 1. porism. & ex sexta huius, illius quoque dimidium componi è duobus quadratis integris & inæqualibus. Quia igitur numeri pariter paris tantum, continuè dimidium sumi potest, & dimidium dimidij donec ad binarium & ad vnitatem deueniatur per trigesimam quartam 9. Euclidis, patet sequi & ipsum binarium & ipsam vnitatem componi quoque ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Quod est impossibile.

PROPOSITIO VIII.

Differentia medij proportionalis à quolibet quadratorum inter quos medius eſt, æquatur productis ex interuallo laterum in quodlibet latus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 28. C 49.

Sint quadrati A C. quorum latera D F, quorum interuallum E & medius proportionalis inter ipſos A C. eſto B. Dico differentiam qua B ſuperat A æquari producto ex E in D. & differentiam qua C ſuperat B æquari producto ex E in F.

[a] Etenim patet ipſum B fieri ducto D in F. Quia ergo F æquatur ipſis D E ſimul, [b] fiet idem B ducto D in ſingulos D E. Atqui ex D. in D fit quadratus A. Igitur ſi à productis ex D in D & in E hoc eſt à numero B auferatur productus ex D in D, nempe quadratus A, reſtabit productus ex D in E pro differentia inter ipſos A B. Similiter quia ex F in F fit C. & F æquatur ambobus D E, fiet idem C ex F in ſingulos D E. At ex F in D fit B vt dictum eſt. Igitur ſi à quadrato C. auferatur B. reſtat productus ex F in E pro differentia inter B C. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

[a] *vndecima, 8.*
[b] *prima, 2.*

PROPOSITIO IX.

Si à duobus quadratis, & à medio eorum proportionali auferatur ſigillatim quilibet datus numerus, & tria reſidua per differentiam laterum ſigillatim diuidantur, medius quotientum ſuperat minimum latere minoris quadrati, & ſuperatur à maximo latere maioris quadrati, & ſumma maximi & minimi ſuperat duplum medij, eorundem laterum interuallo.

D 4 E 3. F 7.
A 16 C 28. B 49.
G 10.
H 6. K 18. L 39.
M 2. N 6. P 13.

Sint A B duo quadrati, quorum latera D F. quorum interuallum E. & medius proportionalis ſit C. & ab ipſis A. C. B. auferendo ſigillatim datum quemuis numerum G. ſuperſint H. K. L. quibus diuiſis ſigillatim per E, fiant quotientes M. N. P. Dico primo N. ſuperare ipſum M. numero D, & eundem N. ſuperari ab ipſo P. numero F. Etenim cùm à ſingulis A C B. ablatus ſit idem G. patet reſiduorum H K L eadem eſſe interualla quæ ipſorum A C B. Atqui C ſuperat A. producto ex D in E. & B ſuperat C producto ex E in F. Igitur & interuallum duorum H K. eſt productus ex D in E, & interuallum duorum K. L eſt productus ex E in F. Quoniam verò diuiſis H K L. per E, prodeunt M N P. conſtat duorum M N interuallum fieri, diuiſo per E interuallo ipſorum H K. ſeu producto ex D in E. ſimiliter duorum N P. interuallum fiet, diuiſo per E interuallo ipſorum K. L. ſeu producto ex E in F. Atqui diuidendo per E productos ex E in D, & ex E in F, fiunt quotientes ipſi D F. Igitur duorum M N interuallum eſt D. & duorum N P interuallum eſt F. Quod erat propoſitum.

[c] *octaua, huius.*

Deinde, dico ſummam ipſorum M P. ſuperare duplum ipſius N numero E. Nam per oſtenſa P. æquatur ipſis N F. Igitur ſumma ipſorum M P. æquatur tribus numeris M N F. At F æquatur vtrique D E. Igitur ſumma amborum M. P. æquatur quatuor numeris D E M N. Verùm per oſtenſa ambo D M æquantur ipſi N. Igitur ambo M P. æquantur duplo ipſius N, & numero E. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO X.

Si duobus quadratis & medio eorum proportionali addatur ſigillatim idem numerus, & tres ſummæ per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, idem quod prius quotientibus accidet.

D 4. E 3. F 7.
A 16. C 28. B 49.
G 2.

H 18. K 30. L 51.
M 6. N 10. P 17.

Sint iidem qui ſuprà D E F. A C B. & ipſis A C B addatur ſigillatim numerus G, vnde fiant H. K. L. quibus diuiſis ſigillatim per E, fiant quotientes M N P. Dico primo N ſuperare ipſum M numero D, & eundem N ſuperari ab ipſo P. numero F. Etenim cùm ſingulis A C B additus ſit idem G. patet ſummarum H M L eadem eſſe interualla, quæ ipſorum A C B. Atqui C ſuperat A & aſſumantur reliqua omnia verba præcedentis demonſtrationis, & nulla quidem mutata litera propoſitum concludetur.

PROPOSITIO XI.

Si à duobus quadratis auferatur idem numerus ſigillatim, & reſidua per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu, adſcito numero qui à quadratis detractus eſt, quadratus euadit.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 10.
M 2. N 6. P 13.

Sint quadrati A B. quorum latera D F. & horum interuallum E & ab ipsis A B auferendo G. sigillatim superfint duo numeri, quibus diuisis sigillatim per E. fiant quotientes M P. Dico ex mutuo ductu ipsorum M P. fieri numerum qui adscito G. quadratus euadit. Sumatur N quotiens qui fit si medius proportionalis inter A B detracto G, diuidatur per E. [a] Quare N æquabitur vtrique D M. & P vtrique N F. Igitur qui fiet ex N in D. [b] æquabitur iis qui fient ex D in D & ex D in M, hoc est quadrato A & numero qui fit ex D in M. Sed quadratus A æquatur producto ex M in E adsciscenti G ex constructione. Igitur qui fit ex N in D æquatur productis ex M. in D & in E addito G. & [c] quia producti ex M in ipsos D E æquantur producto ex M in F compositum ex ipsis, patet productum ex N in D æquari producto ex M in F adsciscenti G. Rursus, quia productus ex M in P æquatur productis ex M. in N. & in F, ex quibus P ostensus est componi, addendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P addito G. æqualis productis ex M in N & in F addito G. Quare loco producti ex M in F adscito G. sumendo eum qui ostensus est æqualis, productum scilicet ex N in D. erit productus ex M in P adscito G. æqualis productis ex N in D & in M. Quare cùm D & M simul ostensi sint æquales ipsis N. [d] & ideo producti ex N in D & in M æquentur quadrato ipsius N, erit vtique productus ex M. in P adscito G. æqualis quadrato ipsius N. Quod erat demonstrandum.

[a] *nona, huius.*
[b] *prima, 2.*
[c] *prima, 2.*
[d] *secunda, 2.*

PROPOSITIO XII.

Si duobus quadratis idem numerus sigillatim addatur, & summæ per interuallum laterum sigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu multatus numero qui quadratis additus est, euadit quadratus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 2.
M 6. N 10. P 17.

Sint quadrati A B quorum latera D F, & horum interuallum E. & numerus G addatur sigillatim ipsis A B. & summæ sigillatim diuidantur per E & fiant quotientes M P. Dico productum ex M in P. detracto numero G euadere quadratum. Sumatur enim N qui fit si medius proportionalis inter A & B adscito G diuidatur per E. Igitur [e] ambo D M æquantur ipsi N. & ambo N F æquantur ipsi P. [f] Quare qui fit ex N in D. æquatur productis ex D in D (seu quadrato A) & ex D in M. At quadratus A per constructionem est æqualis producto ex E in M. detracto G. Igitur productus ex N in D æquatur productis ex M in D & in E detracto G. Quia vero D E componunt F. [g] producti ex M in D & in E æquantur producto ex M in F. Quare productus ex N in D. æquatur producto ex M in F detracto G. Rursus quia productus ex M. in P æquatur productis ex M in N & in F ex quibus P componitur, detrahendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P detracto G. æqualis productis ex M in N & in F detracto G. Quare loco producti ex M in F detracto G, sumendo illi æqualem (vt ostensum est) productum ex N in D, erit productus ex M in P detracto G, æqualis productis ex N in D & in M. Quia vero D M æquantur ipsi N (vt ostensum est) [h] producti ex N in D & in M æquantur quadrato ipsius N. Igitur productus ex M in P. detracto G. æquatur quadrato ipsius N. Quod demonstrandum erat.

[e] *decima huius.*
[f] *prima, 2.*
[g] *prima, 2.*
[h] *secunda, 2.*

PROPOSITIO XIII.

Si à duobus quadratis auferatur datus aliquis numerus sigillatim, & residua diuidantur sigillatim per interuallum laterum, duo quotientes, vna cum duplo summæ ipsorum multato supradicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet si inuicem ducantur, & producto addatur datus numerus, fit quadratus.

C 4 D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 6. G 10.
K 2. L 13. M 27.
N 36. P 64. Q 361.

Sint quadrati A B. quorum latera C E & horum interuallum D. & sit datus numerus G. quo detracto sigillatim ex ipsis A B, & diuidendo residua per D fiant quotientes K L, & horum summæ duplum multatum ipso D sit M. Dico tres K L M. præstare quod proponitur. Etenim à medio proportionali cadente inter A & B detrahendo G, & residuum per D diuidendo, fiat quotiens H. Et primò ducto K in L & producto addendo G. fiat N. Dico N esse quadratum. Etenim N est quadratus ipsius H [i] vt suprà demonstratum est. Secundò ducto K in M & producto addendo G. fiat P. dico P esse quadratum. [k] Quia enim summa duorum K L æquatur duplo ipsius H, & numero D. duplum ipsorum K L. æquabitur quadruplo H & duplo D. Quare auferendo D vtrimque, duplum ipsorum K L detracto D. nempe numerus M æquatur quadruplo H, & ipsi D semel sumpto. Vnde qui fit ex K in M æquatur producto ex K in H quater & in D semel. Igitur addito vtrimque numero G. productus ex K in M addito G, (nempe P.) æquatur productis ex K in H quater, & in D semel adscito G. At numerus qui fit ex K in D adscito G æquatur ipsi A per constructionem. Igitur P æquatur ipsi A & producto quater ex K in H. Quamobrem [l] cùm A sit

[i] *vndecima, huius.*
[k] *nona, huius.*
[l] *nona, huius.*

quinta, huius. quadratus interualli duorum K H. patet numerum qui fit quater ex K in H. adſcito A [a] eſſe quadratum ſummæ duorum K H. Igitur P eſt talis quadratus.

Denique ducto L in M & producto addendo G, ſi fiat Q. ſimili prorſus argumento oſtendemus Q eſſe quadratum ſummæ duorum H L. Igitur ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO XIV.

Si duobus quadratis addatur ſigillatim quilibet datus numerus, & ſummæ ſigillatim diuidantur per interuallum laterum, duo quotientes, vna cùm duplo ſummæ illorum multato dicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet ſi inuicem ducantur, & à producto detrahatur datus numerus, fit quadratus.

C 4. D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 10. G 2.
K 6. L 17. M 43.
N 100. P 256. Q 729.

Sint quadrati A B. quorum latera C E, & horum interuallum D. & ipſis A B addendo ſigillatim G, fiant numeri qui diuiſi ſigillatim per D, dent quotientes K L. quorum duplum multatum numero D. ſit M. Dico tres K L M. efficere quod proponitur.

Nam primo ducto K in L. & à producto auferendo G ſuperſit N. & ſumatur H quotiens qui fit ſi medius proportionalis cadens inter A & B auctus numero G diuidatur per D. [b] Conſtat igitur N. eſſe quadratum ipſius H.

b duodecima, huius.

Secundo ducto K in M & à producto detrahendo G ſuperſit P. [c] Quoniam ergo K L ſimul æquantur duplo ipſius H & numero D. patet duplum ipſorum K L detracto G. nempe numerum M. æquari quadruplo ipſius H, & numero D. Quare qui fit ex K in M. æquatur ei qui fit ex K in H quater, & in D ſemel. Ergo detracto vtrimque G. numerus qui fit ex K in M detracto G nimirum P. æquatur eis qui fiunt ex K in H quater, & in D ſemel detracto G. At numerus qui fit ex K in D detracto G æquatur ipſi A per conſtructionem. Igitur P. æquatur ipſi A & producto ex K in H quater. Quoniam igitur A [d] eſt quadratus interualli ipſorum K H. numerus qui fit ex K in H quater adſcito A, [e] eſt quadratus ſummæ duorum K H. Igitur P. eſt talis quadratus.

c decima huius.

d decima huius.

e quinta, huius.

Denique ducto L in M & à producto detrahendo G ſuperſit Q. ſimili prorſus argumento probabitur Q eſſe quadratum ſummæ amborum H L. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XV.

Differentia quælibet duorum quadratorum à medio eorum proportionali, eſt media proportionalis inter eundem quadratum, & quadratum interualli laterum.

H 3 K 2. L 5.
M 4.
G 6. D 10.
A 9. B 15. C 25.

Sint quadrati A C. & medius eorum proportionalis B. ſintque H L. quadratorum latera, quorum interuallum K. cuius quadratus M. Et differentiæ ipſius B à quadratis A C. ſint G D. Dico G eſſe medium proportionalem inter A & M. Itemque D inter C & M. Etenim differentia G [f] fit ex K in H. Quamobrem G [g] eſt medius proportionalis inter quadratos ipſorum H K. nempe inter A & M. Similiter differentia D. fit ex K in L. Igitur D eſt medius proportionalis inter quadratos ipſorum K L. nempe inter M & C. Quamobrem conſtat propoſitum.

f octaua, huius.

g vndecima, 8.

PROPOSITIO XVI.

Datis duobus quadratis ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habentur tres numeri, quorum bini quem producunt mutuo ductu, is ſi adſumat productum ex quadrato interualli laterum, ſiue in amborum ſummam, ſiue in reliquum, quadratum facit.

Sint dati quadrati A B. & ſit E quadratus interualli laterum ſumaturque C duplus ſummæ ipſorum A B E. Dico tres A B C. præſtare quod proponitur.

D 15. E 4. F 8.
A 9. B 25. C 76.

H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304.	Z 1936.	

h vndecima, 8.

i vigeſima, 7.

k quarta, huius.

l quarta, 2.

Primò, enim ducatur A in B & fiat H. ducaturque E in ſummam ipſorum A B & fiat K, ſitque L ſumma ipſorum H K. Dico L eſſe quadratum. Sumatur D medius proportionalis inter ipſos A B. [h] qui vtique fit ex mutua laterum multiplicatione. [i] Igitur H qui fit ex A in B eſt quadratus ipſius D. [k] Sed & ſumma quadratorum A B. æquatur duplo ipſius D & ipſi E. Igitur productus ex E in ſummam ipſorum A B. puta K. æquatur duplo producti ex D in E. & quadrato ipſius E. Quare addito H quadrato ipſius D, ſumma L æquabitur quadratis ipſorum D E. & duplo producti ex D in E. [l] Ergo L quadratus eſt cuius latus eſt ſumma ipſorum D E.

Quod erat propoſitum.

Secundò, ducatur E in reliquum C vnde fiat M. & amborum H M summa esto N. Dico N. esse quadratum. Sumatur F duplum ipsius E. Quia ergo C æquatur duplo ipsorum A B E. erit productus ex E in C. puta M. æqualis duplo producti ex F in A B. & duplo quadrati ipsius E. Et quia A B simul, vt ostensum est, æquantur ipsi D bis, & E semel productus ex E in A B. bis, æquatur producto ex E in D quater, & duplo quadrati ipsius E. Quare totus productus ex E in C. puta M æquatur producto ex E in D quater, & quadruplo quadrati ipsius E seu quod idem est duplo producti ex D in F. & quadrato ipsius F. Quare addito H quadrato ipsius D. fiet N æqualis quadratis ipsorum D F & duplo producti ex D in F.[a] Ac proinde N est quadratus latus habens summam ipsorum D F. Quod erat intentum. [a] *quarta, 2.*

Tertiò, ducatur A in C. & fiat G. ducaturque E in summam ipsorum A C. & fiat P. sitque amborum G P. summa Q. Dico Q esse quadratum. Quia enim C æquatur duplo ipsorum A B E. erit productus ex A in C puta G. æqualis duplo quadrati ipsius A. duplo producti ex A in B seu duplo quadrati ipsius D, & duplo producti ex A in E. At duplum quadratorum ab ipsis A D[b] æquatur quadrato summæ ipsorum A D, & quadrato interualli ipsorum. Quia vero interuallum hoc[c] est medium proportionale inter A & E,[d] quadratus illius æquatur producto ex A in E. Igitur G. æquatur quadrato summæ ipsorum A D, & triplo producti ex A in E. Rursus productus ex E in A C puta P. ostendetur æqualis triplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B, & duplo quadrati ipsius E. Quare Q compositus ex ipsis G P. æquatur quadrato summæ amborum A D. sextuplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B. & duplo quadrati ipsius E. & loco eius qui fit bis ex E in A B. sumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipsius E vt ostensum est in secunda parte, erit Q æqualis quadrato summæ ipsorum A D. quadruplo producti ex E in A D, & quadruplo quadrati ipsius E. & loco quadrupli ex E in A D sumendo duplum ex F in A D, & loco quadrupli quadrati ipsius E sumendo quadratum ipsius F. fit Q æqualis quadrato summæ A D, & quadrato F. & duplo producti ex F in A D.[e] Quare Q est quadratus summæ ipsorum A D F. Quod erat propositum. [b] *septima, huius.* [c] *decima quinta, huius.* [d] *vigesima, 7.* [e] *quarta, 2.*

Quartò, ducatur E in B. & fiat R. quo addito ad G. fiat S. Dico S. esse quadratum. Quia enim vt ostensum est, G continet quadratum summæ ipsorum A D, & triplum producti ex A in E. huic addendo R productum ex E in B. fiet S. continens quadratum summæ ipsorum A D. triplum producti ex E in A. & productum ex E in B. Quare loco producti ex E in A B. sumendo duplum producti ex E in D cum quadrato ipsius E. patet S æquari quadrato summæ amborum A D, & quadrato ipsius E, & duplo producti ex E in A D. A C[f] proinde S. quadratus est summæ ipsorum A D E. Quod erat intentum. [f] *quarta, 2.*

Quintò, ducatur B in C & fiat T ducaturque E in summam ipsorum B C & fiat V. & summa ipsorum T V esto X. Dico X esse quadratum. Quia enim C. æquatur duplo ipsorum A B E erit productus ex B. in C. puta T. æqualis duplo quadrati ipsius B. duplo producti ex B in A, & ex B in E. Et loco producti bis ex B in A. sumendo illi æqualem duplum quadrati ipsius D. Tum pro duplo quadratorum ab ipsis B D.[g] sumendo quadratum summæ amborum B D cum quadrato interualli eorundem, & pro hoc quadrato interualli ipsorum B D,[h] sumendo productum ex B in E, fiet totus T æqualis quadrato summæ amborum B D, & triplo producti ex B in E. Rursus autem productus ex E in B C puta V, æqualis est triplo producti ex E in B duplo producti ex E in A, & duplo quadrati ipsius E. Quare X compositus ex vtroque T V æquatur quadrato summæ amborum B D, sextuplo producti ex E in B. duplo producti ex E in A & duplo quadrati ipsius E. Itaque loco eius qui fit bis ex E in A B sumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipsius E, erit X æqualis quadrato summæ ipsorum B D quadruplo producti ex E in B D. & quadruplo quadrati ipsius E. Quare rursus loco quadrupli ex E in B D, sumendo duplum ex F in B D, & loco quadrupli quadrati ipsius E, sumendo quadratum ipsius F. fiet X æqualis quadrato summæ ipsorum B D, & quadrato ipsius F, & duplo producti ex F in B D.[i] Proinde X quadratus est summæ ipsorum B D F. Quod erat propositum. [g] *septima, huius.* [h] *decima quinta, huius.* [i] *quarta 2.*

D 15.	E 4.	E 8.
A 9.	B 25.	C 76.

H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304.	Z 2936.	

Denique ducatur E in A & fiat Y. quo addito ad T fiat Z. Dico Z esse quadratum. Quia enim, vt ostensum est, T continet quadratum summæ ipsorum B D & triplum producti ex B in E. huic addendo Y productum ex E in A fiet Z. continens quadratum summæ ipsorum B D, triplum producti ex E in B, & productum ex E in A. Quare loco producti ex E, in A B sumendo duplum producti ex E in D vnà cum quadrato ipsius E, patet Z æquari quadrato summæ amborum B D. & quadrato ipsius E. & duplo producti ex E in B D. A C[k] proinde Z quadratus est, cuius latus componitur ex summa ipsorum B D E. Quamobrem ex omni parte constat propositum. [k] *quarta, 2.*

PROPOSITIO XVII.

Datis duobus quadratis, ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habebuntur tres numeri, quibus ſi addatur ſigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producunt mutuo ductu, detracto eo qui fit ex quadrato interualli laterum, ſiue in ſummam amborum, ſiue in reliquum remanet quadratus.

Sint duo quadrati A B. & quadratus interualli laterum E. & duplum ipſorum A B E. eſto C. addaturque ſingulis A B C. duplum ipſius E puta F. Dico tres A F. B F. C F. præſtare quod dictum eſt.

D 15. E 4.
A 9. B 25. C 76.
F 8. F 8. F 8.

G 561.	G 561.	N 1428.	N 1428.
H 336.	L 200.	P 404.	R 132.
K 225.	M 361.	Q 1024.	S 1296.
	T 2772.	T 2772.	
	V 468.	Y 68.	
	Z 2304.	Z 2704.	

Primo enim ducatur A F in B F & fiat G. Ductoque E in reliquum C F. fiat H, quo detracto ex G, maneat K, Dico K eſſe quadratum. [a] Quia enim ducere A F in B F idem eſt, atque ducere A in B & F in F & vtrumque A B in F. patet G continere productum ex A in B. & productum ex F in A B, (ſeu ex E bis in A B.) & quadratum ipſius F, ſeu quadratum ipſius E quater. Rurſus, quia C continet duplum ipſorum A B E. productus ex E in C F, puta H. continet productum ex E in A B bis, & ex E in ſeipſum quater. Quare detracto H ex G. reliquus K æquatur producto ex A in B, [b] ſeu quadrato medij proportionalis D. Quod erat propoſitum.

[a] *prima, 2.*

[b] *vigeſima, 7.*

Secundo, ducatur E in ſummam ipſorum A F. B F, & fiat L. quo detracto rurſus ex G. ſuperſit M. Dico M eſſe quadratum. Nam vt oſtenſum eſt, G continet productum ex A in B, & productum ex E bis in A B. & quadruplum quadrati ipſius E. At productus ex E in A. F. B F, puta L. continet productum ex E in A B. & ex E in ſui quadruplum, ſeu quadruplum quadrati ipſius E. Igitur detrahendo L ex G reliquus M manet æqualis producto ex A in B. & producto ex E in A B. Quamobrem M. quadratus eſt per primam partem præcedentis, cuius latus eſt ſumma amborum D E. Quod erat propoſitum.

Tertiò, ducatur A F in C F. & fiat N. tum ducatur E in ſummam ipſorum A F C F & fiat P, quo detracto ex N. ſuperſit Q. Dico Q. eſſe quadratum. Quia enim ducere A F in C F idem eſt atque ducere A in C. & F in F. ac demum F in ipſos A C. patet N. continere productum ex A in C. & productum ex F in F ſeu ex E in ſeipſum quater, & productum ex F in A C. ſeu ex E bis in A C. Rurſus productus ex E in A F. C F puta P. continet productum ex E in A C. ſemel, & ex E in ſeipſum quater. Quare detracto P ex N. reliquus Q manet æqualis producto ex A in C & producto ex E in ipſos A C. Quare Q. quadratus eſt per tertiam partem præcedentis cuius latus componitur ex ipſis D A F. Quod erat intentum.

Quartò, Ducatur E in reliquum B F & fiat R quo detracto ex eodem N. maneat S. Dico S. quadratum eſſe. Quia enim ducto E in A F. C F fit P. & ducto eodem E in B F fit R. patet P ſuperare R. producto qui fit ex E in interuallum quo A F. C F ſuperant B F. Atqui loco ipſius C. ſumendo duplum ipſorum A B E. Interuallum quo A F. C F ſuperant B F reperitur continere A ter. F bis. B ſemel. Igitur P ſuperat R producto ex E in A ter, in F bis, in B ſemel. Porrò quia P Q ſimul conficiunt eundem N. quem & R S. ſimul conficiunt, [c] ſunt in arithmetica medietate P ad R. vt S. ad Q. Igitur S. ſuperat Q producto ex E in A ter, in F bis, in B ſemel. Et loco producti ex E in A B ſemel, [d] ſumendo productum ex E in D bis, & in ſeipſum ſemel, fiet interuallum quo S ſuperat Q æquale producto ex E bis in ipſos D A F. & quadrato ipſius E. Quare cùm Q oſtenſus ſit quadratus, cuius latus componitur ex ipſis D A F. & quadrato Q addendo quadratum ipſius E & duplum producti ex ipſo E in latus ipſius Q. fiat S. [e] Vtique S. quadratus eſt latus habens compoſitum ex ipſis D A F E ſeu ex D A & triplo ipſius E. Quod erat propoſitum.

[c] *quarta, 1. poriſm.*

[d] *quarta, huius,*

[e] *quarta, 2.*

Quintò, Ducatur B F in C F. & fiat T. tum ducatur E in ſummam ipſorum B F. C F. & fiat V. quo detracto ex T ſuperſit X. Dico X eſſe quadratum. Quia enim T producitur ex B F. in C F. patet T continere productum ex B in C, & productum ex F in F, ſeu ex E in F bis, & productum ex F in B C, ſeu ex E bis in B C. At productus ex E in B F. C F. ſeu V. continet productum ex E in B C. ſemel, & ex E in F bis. Igitur detracto V. ex T. reliquus X. continet productum ex B in C. & productum ex E in B C. Quare X quadratus eſt per quintam partem præcedentis, cuius latus componitur ex ipſis B D F. Quod erat propoſitum.

Denique ducatur E in reliquum A F & fiat Y. quo detracto ab eodem T. ſuperſit Z. Dico & ipſum Z quadratum eſſe. Quia enim ex E in B F. C F fit V. & ex eodem E in A F fit Y, patet V ſuperare

Y producto qui fit ex E in interuallum quo B F. C F superant A F. Sed eodem quo suprà, ductu vtentes inueniemus hoc interuallum continere ipsum B ter. F bis. A semel. Quare V. superat Y. producto ex E in B ter, in F. bis, in A semel. Et loco producti ex E in A B semel, sumendo illi æqualem productum [a] ex E in D bis, & in seipsum semel fiet interuallum quo V superat Y æquale producto ex E in ipsos D B F bis, & quadrato ipsius E. Quoniam vero V X. simul, æquantur ipsis Y Z simul, [b] sunt in æquali differentia V Y. & Z X. Ergo interuallum quo Z. superat X. æquatur duplo producti ex E in ipsos D B F. & quadrato ipsius E. Quamobrem cùm X ostensus sit quadratus, cuius latus componitur ex ipsis B D F. patet ad ipsum X. addendo quadratum ipsius E. & duplum producti ex ipso E in latus ipsius X, [c] compositum Z esse quadratum cuius latus constat ex ipsis D B F E seu ex D B & triplo ipsius E. Quare ex omni parte constat propositum.

a *quarta, huius.*
b *quarta, 1. porism.*
c *quarta, 2.*

PROPOSITIO XVIII.

Si planus sub duobus numeris contentus, ducatur in compositum ex ipsis, idem fiet numerus, atque si quadratus primi ducatur in secundum & quadratus secundi ducatur in primum.

D 12. E 18.
A 2. B 3.
C 6.

Sint duo numeri A B. & planus sub ipsis contentus C. quo ducto sigillatim in ipsos A. B. fiant D E. patet ergo [d] summam ipsorum D E. æqualem esse producto ex C in compositum ex ipsis A B. Hanc igitur summam dico æqualem esse productis ex quadrato ipsius A in B, & ex quadrato ipsius B in A. Nam sumptis tribus numeris A. B & A rursus, [e] idem gignetur numerus quomodocunque & quouis ordine inter se ducantur. Quare ducto A in A & producto, nempe quadrato ipsius A ducto in B. fiet idem D, qui fit ducto A in B & producto C in A. Eodem argumento probabitur numerum E fieri ducto quadrato ipsius B in A. Quamobrem constat propositum.

d *prima, 2.*
e *tertia, 1. porism.*

PROPOSITIO XIX.

Si numerus secetur in duas partes, cubus totius æqualis est cubis partium, & numero qui fit ter ex toto numero in planum sub partibus comprehensum.

A...C..B
D.....G....K.....M

Sit numerus A B sectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis partium A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum sub ipsis A C. C B comprehensum. Sumatur D M quadratus ipsius A B. [f] qui cùm sit æqualis quadratis ipsorum A C. C B & plano bis sub ipsis comprehenso, esto D G quadratus ipsius A C. & G K quadratus ipsius C B. & K M planus bis sub A C. C B contentus. Itaque patet ex definitione cubi ex toto A B in totum D M produci cubum ipsius A B. [g] Ergo idem cubus producetur ductis singulis partibus ipsius A B in singulas ipsius D M. Ducto autem A C in suum quadratum D G. fit cubus ipsius A C. & ducto C B in suum quadratum G K. fit cubus ipsius C B. Ergo iam habemus cubos partium. Restat vt ducamus A C in G K, & C B in D G, tum vtrumque A C. C B in K M. [h] Atqui ducere ipsos A C. C B in K M. idem est atque ducere totum A B in K M. Quare cùm K M. sit planus bis sub partibus A C. C B contentus, patet ducere A C. C B in K M. idem esse atque ducere totum A B in planum bis sub partibus comprehensum. Rursus autem ducere A C in G K, & C B in D G, [i] idem est atque ducere totum A B in planum sub partibus comprehensum. Quamobrem harum omnium multiplicationum producta simul, (seu cubus totius A B) æquantur cubis ipsorum A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum sub ipsis A C. C B. comprehensum. Quod erat ostendendum.

f *quarta, 2.*
g *schol. primæ, 2.*
h *prima, 2.*
i *decima octaua, huius.*

PROPOSITIO XX.

Si numerus secetur in duas partes, cubus totius æqualis est cubis partium, & numeris qui fiunt ex qualibet parte in quadratum alterius ter.

A...C..B

Sit numerus A B sectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis ipsorum A C. C B, & numeris qui fiunt ter ex quadrato ipsius A C in C B, & ex quadrato ipsius C B in A C. Etenim [k] cubus totius A B æquatur cubis ipsorum A C. C B, & numero qui fit ter ex A B in planum sub A C. C B. Sed numerus qui fit ex A B in planum sub A C. C B. [l] æquatur productis ex qualibet parte in quadratum alterius. Quare numerus qui fit ter ex A B in planum sub partibus, æquatur eis qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Igitur cubus totius A B æquatur cubis partium & numeris qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Quod demonstrandum erat.

k *decima nona, huius.*
l *decima octaua, huius.*

PROPOSITIO XXI.

Duorum cuborum interuallum, æquatur cubo interualli laterum, & numero qui fit ter ex eodem interuallo laterum in planum ſub lateribus comprehenſum.

A..:.D..B....C
E 216. F 64.

Sint inæquales numeri AB. BC. quorum interuallum DB, ita vt AD. BC. ſint æquales. Et cubus ipſius AB eſto E, cubus autem ipſius BC ſit F. Dico interuallum ipſorum EF. æquari cubo ipſius DB. & numero qui fit ter ex DB in planum ſub AB. BC. Etenim[a] cubus totius AB, nimirum E æquatur cubis partium AD DB & numero qui fit ter ex AB in planum ſub AD. DB. quare cùm AD ſit æqualis BC. & ideo cubus ipſius AD ſit F. patet E æquari ipſi F & cubo ipſius DB & numero qui fit ter ex AB in planum ſub AD. DB. Sumptis autem tribus numeris AB. AD. DB. [b] idem producetur numerus quouis ordine ij inter ſe ducantur. Quare idem numerus qui fit ex AB in planum ſub AD. DB. fiet etiam ex DB in planum ſub AB. AD. ſeu ſub AB. BC. Quamobrem cubus E æquatur cubo F, cubo ipſius D B, & numero qui fit ter ex DB in planum ſub AB. BC. Itaque à cubo E auferendo cubum F, remanet interuallum cuborum æquale cubo interualli laterum DB, & numero qui fit ter ex eodem DB in planum ſub lateribus AB. BC comprehenſum. Quod demonſtrandum erat.

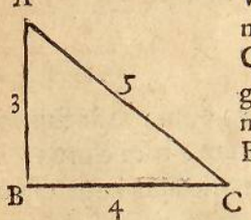
a *decima nona, huius.*

b *tertia, I. Poriſm.*

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI
IN DIOPHANTVM PORISMATVM
Liber Tertius.

DEFINITIO I.

TRiangulum rectangulum in numeris constitui dicitur, cùm tres exhibentur numeri, ita vt maioris quadratus, quadratis reliquorum simul sumptis æqualis sit.



Vt tres numeri 3. 4. 5. dicuntur constituere triangulum rectangulum quia maioris 5. quadratus 25. æqualis est quadratis 9. & 16. reliquorum 3. & 4. Cuius rei ratio pendet à quadragesima septima, 1. Euclidis. Nam verbi gratia, si sit triangulum rectangulum A B C. cuius angulus rectus B. demonstrauit Euclides quadratum lateris A C. æquari quadratis ipsorum A B. B C.

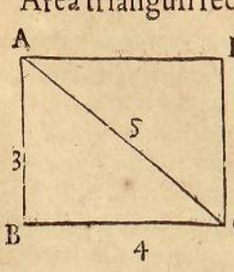
DEFINITIO II.

Maius latus trianguli rectanguli, dicitur hypotenusa. Reliqua duo, latera circa rectum, & horum alterum, basis: alterum vocatur Cathetus seu perpendiculum.

Sic in superiore diagrammate A C vocatur hypotenusa seu subtendens, quia subtendit angulum rectum. Reliqua vero latera A B. B C dicuntur latera circà rectum, quia rectum angulum comprehendunt. Et horum alterum, puta B C dicitur basis, alterum A B dicitur perpendiculum, si triangulum concipiatur inniti lateri B C. vel è conuerso B C dicetur perpendiculum, & A B basis, si triangulum ipsi A B niti concipiatur.

DEFINITIO III.

Area trianguli rectanguli est semissis plani contenti sub lateribus circa rectum.



Sic positis lateribus circa rectum A B. B C. 3. & 4. cùm planum sub ipsis sit 12. erit area trianguli rectanguli A B C. numerus 6. Et ratio est euidens. Nam si perficiatur parallelogrammum rectangulum A B C D. patet eius aream fieri ducto latere A B in B C. Quamobrem cùm triangulum A D C. triangulo A B C sit æquale, manifestum est ipsum A B C. esse dimidium totius parallelogrammi, atque adeo eius aream esse dimidium producti ex A B in B C.

DEFINITIO IV.

Similia triangula rectangula dicuntur, quæ latera habent proportionalia.

Cùm scilicet est hypotenusa vnius ad hypotenusam alterius, sicut basis ad basim, & perpendiculum ad perpendiculum, qualia sunt triangula 3. 4. 5. & 12. 16. 20.

DEFINITIO V.

A duobus planis similibus formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex eorum summa, & eorundē interuallo, & duplo medij proportionalis, constant latera trianguli.

Sic à planis similibus 3. & 12. dicetur formari triangulum. 15. 9. 12. quia 15. est summa planorum similium, 9. interuallum eorundem, 12. duplum medij proportionalis.

DEFINITIO VI.

A duobus quibuſcunque numeris formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex aggregato & ex interuallo quadratorum ab ipſis, & ex duplo plani ſub ipſis numeris contenti, conſtant latera trianguli.

Sic à duobus numeris 2. & 3. formari dicitur triangulum 13. 5. 12. Quia 13. eſt aggregatum quadratorum ab ipſis 2. & 3. & 5. eſt eorundem quadratorum interuallum, & 12. eſt duplum plani ſub 2. & 3. contenti. Hos autem duos modos formandi triangulum rectangulum legitimos eſſe demonſtrabimus hoc libro, propoſitione tertia & quinta.

OBSERVATIO D. P. F.

A Tribus numeris in proportione Arithmeticâ poſſumus formare triangulum, ſi ſecundum hanc definitionem ſextam formemus illud à medio & differentiâ. Nam ſolidum ſub tribus ductum in differentiam faciet aream dicti trianguli, atque ideo ſi differentia ſit vnitas, ſolidum ſub tribus erit area trianguli.

DEFINITIO VII.

A duobus datis triangulis rectangulis, tertium efformari dicitur, cùm productus ex hypotenuſa 1′. in hypotenuſam 2′. fit hypotenuſa 3′. At aggregatum productorum ex baſi 1′. in baſim 2′. & ex perpendiculo 1′. in perpendiculum 2′. fit alterum latus circa rectum 3′. Denique productorum ex baſi 1′. in perpendiculum 2′. & ex baſi 2′. in perpendiculum 1′. minus de maiori ſubtrahendo, fit alterum latus 3′.

Sic datis duobus triangulis 5. 4. 3. & 13. 12. 5. fiet tertij hypotenuſa productum ex 5. & 13. nempe 65. alterum latus circa rectum erit aggregatum numerorum 48. & 15. qui fiunt ex baſi in baſim & ex perpendiculo in perpendiculum. Tertium vero latus erit quod relinquitur auferendo productum ex 4. in 5. nempe 20. à producto ex 3. in 12. nempe à 36. Erunt igitur latera omnia tertij trianguli. 65. 63. 16. Hic modus etiam demonſtrabitur infrà, propoſitione decima.

PROPOSITIO I.

Si latera trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicentur aut diuidantur, fit aliud triangulum rectangulum ſimile priori.

Hanc & ſequentem propoſitionem omnibus triangulis ſimilibus in vniuerſum applicatam demonſtrauit Euclides libro ſexto ſed ex propriis numerorum principiis eruto demonſtrationis medio, libet hîc vtramque triangulis rectangulis ſingulariter applicare. Sint trianguli rectanguli latera circa rectum A B, & hypotenuſa G. & horum quadrati D E F [a] ita vt F ſit æqualis ambobus D E. ductoque eodem numero G in ipſos A B C. fiant H. K. L. quorum quadrati M. N P. Dico H K L conſtituere triangulum rectangulum ſimile priori, nimirum quadratum P. ambobus M N. eſſe æqualem, & latera H K L. eſſe proportionalia lateribus A B C. & quidem hoc vltimum patet [b] cùm fiant H K L. ex eodem G in ipſos A B C. Primum autem probatur. [c] Quia enim rationes ipſorum D E F ad ipſos M N P ſunt duplicatæ rationum ipſorum A B C ad ipſos H K L, cùm vt oſtenſum eſt, ſit A ad H, vt B ad K & vt C ad L, erit etiam D ad M vt E ad N. & vt F ad P. & permutando erit D ad F vt M ad P. & E ad F vt N ad P. Cùm ergo ſit D primus ad F ſecundum, ſicut M tertius ad P. quartum, & rurſus ſit E quintus ad F ſecundum, ſicut N ſextus ad P quartum; [d] Erunt & D E ſimul, primus ſcilicet & quintus ad F ſecundum, ſicut M N ſimul, nimirum tertius & ſextus ſimul ad P quartum. Sed D E ſimul æquantur ipſi F ex hypotheſi. Ergo & M N ſimul æquantur ipſi P. [e] Quare H K L conſtituunt triangulum rectangulum ſimile priori. Quod demonſtrandum erat. Eadem porro diuiſionis ratio eſt quæ multiplicationis vt manifeſtum eſt. Igitur conſtat propoſitum.

[a] *definitio prima.* A 3. B 4. C 5. D 9. E 16. F 25. G 2. H 6. K 8. L 10. M 36. N 64. P 100.

[b] *decima ſeptima* 7. [c] *vndecima*, 8.

[d] *vigeſima quarta*, 5. [e] *definitio prima.*

PROPOSITIO II.

Areæ ſimilium triangulorum rectangulorum ſunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Sint latera triangulorum rectangulorum ſimilium. A B C. D E F. & ſint A & D hypotenuſæ B C.

K 48. G 24.
A 10. B 8. C 6.
D 5. E 4. F 3.
L 12. H 6.

EF latera circa rectum, ductoque B in C fiat K. cuius semissis numerus G. [a] area scilicet trianguli A B C. similiter ducto E in F fiat L, cuius semissis H. area trianguli D E F. Cùm ergo similia sint triangula, [b] erit A ad D vt B ad E & vt C ad F. Dico itaque esse aream G ad aream H in duplicata ratione lateris B ad latus E, vel lateris C ad latus F. Cùm enim plani K L habeant latera proportionalia, [c] erunt plani similes, & erit K ad L in duplicata ratione lateris B ad latus E vel C ad F. Sed quia G est dimidium ipsius K, & H est dimidium ipsius L, est G ad H vt K ad L. Igitur & G ad H est in duplicata ratione laterum B C. ad latera E F. Quod demonstrandum erat.

a *defin. 3.*
b *defin. 4.*
c *decima octaua, 8.*

SCHOLIVM.

Quia igitur sumpto denominatore rationis cuiuslibet, eius quadratus est denominator rationis duplicatæ illius, sequitur sumpto denominatore rationis laterum, eius quadratum esse denominatorem rationis arearum, vt in proposito paradigmate, quia rationis inter latera denominator est 2. rationis inter areas denominator est 4. quadratus ipsius 2. & sic de alijs.

PROPOSITIO III. *Problema 1.*

A duobus similibus planis numeris, triangulum rectangulum efformare.

A 3. B 6. C 12.
D 9. E 12. F 15.

Sint duo plani similes A C à quibus oporteat formare triangulum rectangulum. [d] Sumatur B medius proportionalis ipsorum A C. Et sit amborum A C. summa F, interuallum D & duplum ipsius B esto E. Patet tres D E F efformatos esse ab ipsis A B C vt traditum est definitione quinta. Dico itaque tres D E F constituere triangulum rectangulum. Quia enim F est summa amborum A C [e] erit quadratus ipsius F æqualis quadruplo plani sub A & C. & quadrato interualli ipsorum A C, qui est quadratus ipsius D, [f] At quadruplum plani sub A & C. æquatur quadruplo quadrati ipsius B. cùm A B C ponantur proportionales, [g] & quadruplum quadrati ex B, est quadratus dupli ipsius B, nimirum ipsius E. Igitur quadratus ipsius F est æqualis quadratis ipsorum D E. [h] atque adeo D E F constituunt triangulum rectangulum. Quod erat propositum.

d *decima octaua, 8.*
e *quinta 2. porism.*
f *vigesima, 7.*
g *Schol. quartæ, 2.*
h *defin. 2.*

COROLLARIVM.

Summa duorum planorum similium constituit hypotenusam trianguli rectanguli.

Hinc patet quemlibet numerum statui posse hypotenusam trianguli rectanguli, cùm quilibet numerus diuidi possit in duos datam rationem seruantes, atque adeo infinitis modis componi possit ex duobus planis similibus, vnde & erui potest canon ad diuidendum quemlibet quadratum in duos quadratos infinitis modis, vt docebimus ad octauam 2. Diophanti.

PROPOSITIO IV.

Cuiuslibet trianguli rectanguli hypotenusa componitur ex duobus planis similibus.

D 100. E 64. F 36.
A 10. B 8. C 6.
G..... H.. K.. L..... M

Sit hypotenusa trianguli rectanguli A & latera circa rectum B C. & ipsorum A B C quadrati D E F. ita vt D ipsis E F sit æqualis. Dico A componi ex duobus planis similibus. Vel enim A est par, vel impar. Sit primum par. Ergo & D par est, [i] & pariter par. Igitur non erit ipsorum E F alter par, alter impar, alioquin [k] compositus ex ipsis D esset impar, contra id quod ostensum est. Non erit etiam vterque ipsorum E F impar, [l] nam sic vterque ipsorum excederet pariter parem vnitate, atque adeo compositus ex ipsis D. excederet pariter parem binario, [m] & esset pariter impar tantum, at ostensus est pariter par. Reliquitur ergo vtrumque E F esse parem. Quare & vterque B C. par est. Itaque sumatur ipsi A æqualis G L atque adeo par, & addatur ei L M æqualis alteri laterum circa rectum puta C erit igitur & L M par. [n] Quare totus G M par etiam erit. Secetur ergo bifariam in K & ipsi K L sumatur æqualis H K. ita vt reliquus G H. reliquo L M seu C. sit æqualis, Cùm ergo G L componatur ex duobus G K. K L. [o] erit quadratus totius G L, seu D. æqualis quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato interualli G H qui est F. At idem D. est æqualis quadratis E F ex hypothesi, ergo quadrati E F æquantur quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato F. Quare ablato vtrimque F. remanet E æqualis quadruplo plani sub G K. K L. Quamobrem planus sub G K K L æquatur quadranti ipsius E, seu quadrato semissis ipsius B [p] & ipse semissis ipsius B est medius proportionalis inter G K. & K L. vnde sequitur ipsos [q] G K. K L. esse planos similes. Quamobrem A æqualis G L. componitur ex duobus planis similibus. Quod erat propositum.

i *vigesima 1. porism.*
k *Schol. vigesimæ tertiæ, 9.*
l *vigesima prima 1. porism.*
m *vndecima, 1. porism.*
n *vigesima prima, 9.*
o *quinta, 2. porism.*
p *vigesima 7.*
q *vigesima 8.*

D 169. E 144. F 25.
A 13. B 12. C 5.
G.....H....K....L.....M

Iam vero ſit A impar, atque ideo & D impar. Igitur ex ipſis EF alterum parem, alterum imparem eſſe neceſſe eſt. Nam ſiue vterque ponatur par, ſiue vterque impar, [a] erit compoſitus ex ipſis D par, contra hypotheſim. Sit ergo E par. F impar. Igitur & B par erit, & C impar. Itaque ſumpto G L æquali ipſi A, & ideo impare, addatur ei L M impari C. æqualis. [b] erit ergo totus G M par. Quare ſecetur bifariam in K & ipſi K L. ſumatur æqualis H K, ita vt G H remaneat æqualis ipſi L M. Tunc, vt prius oſtendemus, quadratum ex G L. ſeu D æquari quadruplo plani ſub G K. K L. & quadrato interualli G H qui eſt F. & tandem quadratum E æquari quadruplo plani ſub G K. K L. atque ideo planum ipſum ſub G K. K L æquari quadrato ſemiſſis ipſius B. Vnde ſequitur ipſos G K. K L eſſe planos ſimiles. Quamobrem A componitur ex duobus planis ſimilibus. Quod erat oſtendendum.

a vigeſima prima & vigeſima ſecũda 9.

b ſchol. vigeſimæ tertiæ 9.

SCHOLIVM.

Hinc patet qui ſint illi plani ſimiles ex quibus componitur hypotenuſa trianguli. Nam ſi hypotenuſæ addatur & adimatur vtrumlibet laterum circa rectum, ſemiſſes ſummæ, & interualli exhibebunt planos illos ſimiles.

Vnde rurſus collige ſi hypotenuſa ſit numerus par, eam ſemper bis componi ex duobus planis ſimilibus integris. Nam tunc vt oſtenſum eſt, vtrumque latus circa rectum eſt par, quare vtrumlibet addatur & adimatur hypotenuſæ, erunt ſummæ & interualla numeri pares, & eorum ſemiſſes in integris habebuntur. Sic poſita hypotenuſa 10. ſi ei addas & adimas 6. fiet ſumma & interuallum 16. & 4. quorum ſemiſſes 8. & 2. ſunt plani ſimiles ex quibus 10. conſtat. Rurſus ſi eidem 10. addas & adimas alterum latus 8. fit ſumma & interuallum 18. & 2. quorum ſemiſſes 9. & 1. ſunt alij duo plani ſimiles ex quibus 10. componitur.

Si vero hypotenuſa ſit impar, cùm vt oſtenſum eſt, alterum laterum circa rectum ſit par, alterum impar. Componetur hypotenuſa ſemel tantum ex integris duobus planis ſimilibus, qui habentur ſi ei addatur & adimatur latus illud quod eſt impar, & ſummæ & interualli ſemiſſes ſumantur; ſed ſi hypotenuſæ addatur & adimatur latus par, tam ſumma quàm interuallum impar erit, atque adeo ſemiſſes eorum non habebuntur in integris.

PROPOSITIO V. *Probl. 2.*

A duobus quibuſcumque inæqualibus numeris triangulum rectangulum formare.

A 2. B 5.
C 4. D 10. E 25.
F 29. G 21. H 20.

Sint duo numeri inæquales A B à quibus oportet formare triangulum rectangulum. Sint ipſorum A B quadrati C E. & productus ex A in B. eſto D. Tunc duorum C E ſumma eſto F, & eorundem interuallum G. & ſit H duplum ipſius D. Dico F. G. H eſſe triangulum rectangulum quæſitum. Nam ipſos F G H formari ab ipſis A B vt traditum eſt definitione ſexta manifeſtum eſt. Reſtat probandum eoſdem F G H conſtituere triangulum. Quoniam ergo C E ſunt plani ſimiles, & D medius eorum proportionalis, patet ab ipſis C E formatos eſſe F G H, atque adeo F G H conſtituere triangulum rectangulum per tertiam huius. Quare conſtat propoſitum

SCHOLIVM.

Inæquales numeros eſſe oportet. Alioquin ſi æquales eſſent, quadrati quoque eorum eſſent æquales, & haberi non poſſet latus circa rectum quod eſt interuallum quadratorum. Cæterum patet modum hunc formandi triangulum à duobus quibuſcumque numeris non differre ab eo qui traditus eſt propoſitione tertia, ſi loco laterum ſumantur ipſa quadrata & ab ipſis concipiatur formari triangulum.

PROPOSITIO VI.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, aggregatum quadratorum à ſingulis, æquatur quadratis ſummæ extremorum, & interualli mediorum. Itemque quadratis ſummæ mediorum, & interualli extremorum.

H 8. K 1.
A 2. B 4. C 3. D 6.
G 7. L 4.

Sint A B C D quatuor numeri proportionales, ſit videlicet A ad B vt C ad D. & ſit extremorum ſumma H, mediorum interuallum K. Rurſus ſit mediorum ſumma G. interuallum extremorum L. Dico quadratorum à ſingulis A B C D aggregatum æquari tum quadratis ipſorum H. K. tum quadratis G L. Quia enim [c] quadratus H æqualis eſt quadratis partium A & D & duplo plani ſub A & D ſeu plani ſub B & C. duplum autem plani ſub B & C cum quadrato inter-

c quarta 2.

ualli eorum K [a] æquatur quadratis ipsorum B C. Manifestum est quadratos singulorum A B C D æquari quadratis ipsorum H K. Eadem prorsus ratione, quia quadratus abs G. æquatur quadratis partium B. C. & plano bis sub B & C. seu sub A & D. & planus bis sub A & D vnà cum quadrato interualli eorum L. æquatur quadratis ipsorum A D, sequitur quadratos abs G & L æquari rursus quadratis à singulis A B C D. Quamobrem constat propositum.

a *decima nona, 7.*
b *quarta,*
2. *porism.*

PROPOSITIO VII.

Si numerus ex duobus inæqualibus quadratis compositus; ducatur in alium compositum quoque ex duobus inæqualibus quadratis, qui non sint proportionales iis ex quibus prior componitur, producetur numerus qui componetur bis ex duobus quadratis.

C 65.
A 5. B 13.
D 1. E 4. F 4. G 9.
H 1. K 2. L 2. M 3.
N 2. P 4. Q 3. R 6.

Sit A compositus ex duobus quadratis inæqualibus D E. itemque B compositus ex alijs quadratis inæqualibus F G. qui non sint proportionales ipsis D E. ductoque A in B. fiat C. Dico C componi bis ex duobus quadratis. Etenim quadratorum D. E. F. G latera sunto H K L M. ductoque L. in ipsos H K fiant N P. & ducto M in eosdem H K fiant Q R. [c] Erit igitur tam N ad P quàm Q ad R sicut H ad K. Quare ipsi N. P. Q. R. sunt proportionales. Quia verò ducere A in B [d] idem est ac ducere singulos D E in singulos F G. At ex singulis quadratis D E in singulos quadratos F G. fiunt quadrati quatuor quorum latera sunt ipsi N. P, Q. R. qui fiunt ex singulis lateribus H K in singula latera L M. patet C æqualem esse quadratis ipsorum N. P. Q. R. [e] sed quadrati ipsorum N. P. Q. R. æquantur tum quadrato summæ extremorum N R. & quadrato interualli mediorum P Q. tum quadrato summæ mediorum P Q. & quadrato interualli extremorum N R. Igitur & C æquatur tum quadrato summæ extremorum, & quadrato interualli mediorum; tum quadrato summæ mediorum, & quadrato interualli extremorum, ac proinde componitur bis ex duobus quadratis. Quod erat demonstrandum.

c *decima septima 7.*
d *Schol. primæ, 2.*
e *sexta, huius.*

SCHOLIVM.

Hìc duæ veluti conditiones apponuntur. Prima vt vterque A B componatur ex quadratis inæqualibus. Secunda vt quadrati componentes A non sint proportionales componentibus B. Quarum conditionum vt necessitas appareat, ponatur alter ipsorum puta B componi ex quadratis æqualibus F G. Igitur & latera L. M. erunt æqualia. Quare ipsi N & Q. qui fiunt ex eodem H in L & in M. æquales erunt, similiter æquales erunt ipsi P R cùm fiant ex eodem K in æquales numeros L. M. Patet igitur extremorum N R summam æquari summæ mediorum P Q. & vtrorumque étiam idem esse interuallum. Quare C. non exinde componetur bis ex duobus quadratis, sed tantum semel, nimirum ex quadrato summæ extremorum, vel mediorum, & ex quadrato interualli eorundem.

C 136.
A 17. B 8.
D 16. E 1. F 4. G 4.
H 4. K 1. L 2. M 2.
N 8. P 2. Q 8. R 2.

C 100.
A 5 B 20.
D 1. E 4. F 4. G 16.
H 1. K 2. L 2. M 4.
N 2. P 4. Q 4. R 8.

Iam verò quadrati D E sint proportionales quadratis F G. Ergo & latera erunt proportionalia, eritque H ad K. sicut L ad M. [f] Quare planus sub extremis H M, puta Q. æqualis erit plano sub mediis nempe ipsi P. Quamobrem cùm mediorum P. Q. nullum sit interuallum, non poterit concludi numerum C. componi ex duobus quadratis, eò quod æqualis sit quadrato summæ extremorum N R, & quadrato interualli mediorum P Q. Sed tantum ostendi poterit C componi semel ex duobus quadratis, quia æquatur quadrato summæ mediorum P Q & quadrato interualli extremorum N. R. Sed & hinc constat ipsum C esse quadratum, æqualem scilicet quadrato summæ extremorum N R. Quod & ipsum aliunde arguitur. Quia enim est D ad F vt E ad G, [g] erit & vterque D E simul seu A ad vtrumque F G simul seu ad B. sicut D ad F. Quare cùm D F sint quadrati, est A ad B in ratione quadrati ad quadratum [h] ac proinde A B sunt plani similes, [i] & ex eorum mutuo ductu productus C est quadratus.

f *decima nona, 7.*
g *duodecima, 7.*
h *vigesima sexta, 8.*
i *prima, 9*

Attamen in propositionis conditione dixi potius quadratos ex quibus A componitur non debere esse proportionales quadratis componentibus B. quàm A B non debere esse planos similes. Quia plani similes non omnino excludendi erant, sed tantum quatenus ex quadratis proportionalibus componuntur; nam si dentur plani similes qui componantur ex quadratis minime proportionalibus, ij optimè satisfacient proposito quales sunt 5. & 125. quorum ille componitur ex quadratis 1. & 4. iste vero ex quadratis 4. & 121. qui non sunt illis proportionales. Vnde nihil obstat quo minus per hanc propositionem concludamus productum ex 5. in 125. componi bis ex duobus quadratis, nimirum ex 225. & 400. Itemque ex 576. & 49.

PROPOSITIO VIII.

Si duorum triangulorum rectangulorum latera circa rectum proportionalia fuerint, ſimilia erunt triangula. Sed & ſi fuerit hypotenuſa primi ad alterum latus eiuſdem, ſicut hypotenuſa 2. ad alterum illius latus, ſimilia erunt ipſa triangula.

Demonſtratur hoc ab Euclide in omnibus triangulis lib. 6. prop. ſexta & ſeptima. Sit triangulum rectangulum ABC. cuius hypotenuſa A. Itemque triangulum rectangulum DEF cuius hypotenuſa D. & primo ſit B ad E ſicut C ad F. Dico triangula eſſe ſimilia. Sumantur GHK quadrati ipſorum ABC. Itemque LMN. quadrati ipſorum DEF. Cùm ergo ſit B ad E vt C ad F, erit & H ad M vt K ad N [a] cùm vtraque ratio ſit eiuſdem rationis duplicata. [b] Igitur & antecedentes ſimul HK ſeu G. ad conſequentes ſimul MN. ſeu ad L. erunt vt H ad M vel K ad N. Quare cùm ſit G ad L vt H ad M vel vt K ad N. [c] erit & A ad D vt B ad E & vt C ad F. Atque ideo tota triangula ſimilia erunt ex definitione. Quod erat propoſitum.

G 25. H 16. K 9.
A 5. B 4. C 3.
D 10. E 8. F 6.
L 100. M 64. N 36.

[a] *vndecima, 8.*
[b] *duodecima, 7.*
[c] *vndecima, 8.*

Deinde ſit A ad D vt B ad E. Dico rurſus ſimilia eſſe triangula. Etenim quia eſt A ad D vt B ad E, erit & G ad L vt H ad M. Quare permutando erit G ad H vt L ad M. & diuidendo erit K ad H vt N ad M. & rurſus permutando erit K ad N vt H ad M. Igitur eſt & C ad F vt B ad E vel vt A ad D. Ac proinde ſimilia ſunt triangula. Quod erat demonſtrandum

PROPOSITIO IX.

A proportionalibus numeris formata triangula, ſimilia ſunt.

Sint proportionales numeri AB. CD. quorum quadrati EF, GH [d] à quibus formentur triangula rectangula, ſit videlicet K. ſumma ipſorum EF, at L eorundem interuallum, M duplum medij proportionalis. Similiter ſit N. ſumma ipſorum GH. At P eorundem interuallum. Q duplum medij proportionalis. Dico triangula KCM. NPQ. eſſe ſimilia. Quia enim eſt A ad B vt C ad D. erit & E ad F vt G ad H & componendo erit vterque EF ſimul, nempe K ad F. ſicut ambo GH, nempe N. ad H. Rurſus quia eſt E ad F vt G ad H, diuidendo & conuertendo, erit F ad L, ſicut H ad P. Cùm ergo ſit K ad F vt N ad H, & rurſus F ad L, vt H ad P. erit ex æquo K ad L. vt N ad P. [e] Quamobrem ſimilia erunt triangula KLM. NPQ. Quod erat propoſitum. Eademque erit demonſtratio ſi formentur triangula à planis ſimilibus proportionalibus vt traditum eſt prop. tertia. Nam ſi ponantur huiuſmodi plani EF. GH. ab eis formata erunt triangula KLM. NPQ. quæ oſtendentur ſimilia vt prius.

E 4. F 1. G 36. H 9.
A 2. B 1. C 6. D 3.
K 5. L 3. M 4. N 45. P 27. Q 36.

[d] *quinta, huius.*
[e] *octaua, huius.*

PROPOSITIO X. *Problema 3.*

A datis duobus triangulis non ſimilibus, efformare alia duo.

Sit triangulum rectangulum ABC. & aliud non ſimile DEF, à quibus oporteat efformare alia duo; ducatur baſis A in baſim D, & perpendiculum B in perpendiculum E & fiant H G. Tum ducatur baſis D in perpendiculum B & baſis A in perpendiculum E & fiant K L. Deinde additis K & L ſimul fiat M. & ex duobus H G minor de maiore auferatur & ſuperſit N. Similiter addantur HG. & fiat Q & ex ipſis KL minor de maiore detrahatur, & ſuperſit P. Denique ducatur hypotenuſa C. in hypotenuſam F & fiat R. Dico MNR. & PQR eſſe quæſita triangula. Primum enim ea formata eſſe conſtat à datis triangulis, vt traditum eſt definitione ſeptima, ſi videlicet latera AD. vel BE nunc vt baſes nunc vt perpendicula conſiderentur. Igitur reſtat ſolum probandum MNR conſtituere triangulum rectangulum, itemque PQR. Ducatur C in ipſos DE & fiant TV. Cùm ergo idem C ductus in ſingulos DEF fecerit ipſos TVR [f] patet TVR conſtituere triangulum rectangulum, & quadratum ab R æquari quadratis abs T, & V. Similiter quia idem D ductus in ſingulos BAC, producit ipſos KHT, conſtituunt & hi triang. rect. & quadratus abs T æquatur quadratis abs K & H. Rurſus quia idem E ductus in ſingulos ABC, producit ipſos LGV, conſtituunt & hi triang. rect. & quadratus ab V æquatur quadratis abs L. & G. Quare cùm quadratus ab R ſit oſtenſus æqualis quadratis abs T & V, erit quadratus ab R æqualis quadratis à ſingulis KHLG [g] Quoniam verò ex eodem D in ipſos BA producuntur KH. erit K ad H vt B ad A. Similiter quia ex E in eoſdem BA fiunt GL. erit G ad L vt B ad A, ac proinde erit K ad H vt G ad L. Quamobrem [h] aggregatum quadratorum à ſingulis KHLG. ſeu quadratus ad R. æquatur quadrato ſummæ extremorum ſeu quadrato ab M. & quadrato interualli mediorum ſeu quadrato ab N. Quare MNR conſtituunt triang. rectang. Rurſus idem aggregatum

K 36 H 15.	T 39.
L 20, G 48.	V 52.
M 56. N 33.	R 65.
P 16. Q 63.	

[f] *prima, huius.*
[g] *decima ſeptima 7.*
[h] *ſexta, huius.*

quadratorum à singulis K H. L G. seu quadratus ab R æquatur quadrato summæ mediorum seu quadrato abs Q & quadrato interualli extremorum seu quadrato abs P. Quamobrem & ipsi P Q R. constituunt triang. rectang. Itaque ex omni parte constat propositum.

SCHOLIVM.

A 6. B 8. C 10.
D 3. E 4. F 5.

K 24. H 18.
L 24. G 32.

M 48. N 14. R 50.
P — Q 50.

Data duo triangula non debent esse similia, alioquin ab illis vnicum tantum efformabitur triangulum. Nam si sit A ad B vt D ad E, a *erit planus sub extremis L. æqualis plano sub medijs K. Quamobrem ipsorum K L. interuallum P. nullum erit, nec formari poterit triangulum P. Q. R. Sed tantum ex summa ipsorum K L fiet latus M. & ex interuallo ipsorum H G. fiet latus N. vnde constituetur vnicum triangulum M N R. Caterum Q. æqualis erit ipsi R.*

a *decima nona, 7.*

PROPOSITIO XI. *Probl.* 4.

Inuenire tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus sit in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum.

H 100.
R 10. V 12. T 48.

A 5. B 4. C 3.
D 41. E 40. F 9.
G 34. K 30. L 16.

P 1200. M 48.
Q 4800. N 432.

Exponatur triang. rect. A B C. cuius hypotenusa A perpendiculum B. basis C. Deinde ab ipsis A & B formetur aliud triang. rect. ita vt hypotenusa D sit summa quadratorum, perpendiculum E sit duplum producti multiplicationis & basis F sit interuallum quadratorum, nimirum quadratus ipsius C. Denique ab ipsis A C. formetur etiam tertium triangulum, cuius hypotenusa G. sit summa quadratorum, perpendiculum K duplum producti, & basis L differentia quadratorum, nempe quadratus ipsius B. Dico tria hæc triangula præstare quod requiritur. Ducto enim E in K fiat P. quo ducto in B fiat Q. similiter ducto C in L fiat M, quo ducto in F fiat N. Dico Q solidum sub perpendiculis, ad N solidum sub basibus habere rationem quadrati ad quadratum. Sumatur R duplum ipsius A. & ex B in C fiat V. quo ducto rursus in B fiat T. Quia ergo sumptis tribus numeris B C. & B rursus, c idem fit numerus quouis ordine inter se ducãtur, ducto autem B in C & producto V in B fit T. At ducto B in B & producto L in C. fit M. sunt vtique T & M æquales. Quia vero ex B in A bis, seu ex B in R fit E, & ex C in R fit K. consideratis quatuor numeris B. R. C. R. idem fiet numerus quouis ordine inter se ducantur. Sed ducto B in R. vnde fit E, & ducto C in R vnde fit K, & demum ducto E in K producitur P. Igitur si ducatur R in R vnde fit H, & B in C. vnde fit V. ac demum V ducatur in H. fiet idem P. Cùm igitur idem V ductus in H & in B producat ipsos P T seu P M. d erit H ad B sicut P ad M. e Quare qui fit ex mutuo ductu mediorum B P. nempe solidus Q. fit etiam ex ductu extremorum H M. Cùm igitur ex eodem M in ipsos H & F fiant solidi Q N. erit Q ad N. sicut H ad F. Quare cùm H & F sint quadrati, erit Q ad N in ratione quadrati ad quadratum. Quod demonstrandum erat.

b *quinta, huius.*

c *tertia, 1. Porism.*

d *decima septima, 7.*

e *decima nona, 7.*

SCHOLIVM.

Notatu dignissimum est iisdem prorsus manentibus triangulis, solidos Q N quadrupliciter variari posse prout latera circa rectum nunc fient bases, nunc perpendicula, & omnibus tamen modis ratio solidi ad solidum erit qua quadrati ad quadratum, quod miraculo simile videtur.

H 100.
A 5. B 4. C 3.
D 41. E 40. F 9.
G 34. K 30. L 16.

Q 4800. N 432.

H 100.
A 5. C 3. B 4.
D 41. E 40. F 9.
G 34. K 30. L 16.

Q 3600. N 576.

Primus casus est, qui in demonstratione exhibetur, quo probatum est esse Q ad N. sicut H ad F.

Secundus est cùm reliquis omnibus inuariatis manentibus B fit basis, & C perpendiculum. Et tunc solidus sub ipsis C E K nempe Q. ad solidum sub B F L. seu ad N est in ratione quadrati H ad quadratum L. quod iisdem prorsus argumentis probatur. Itaque in his duobus casibus solidus ad solidum est vt quadratus H ad quadratum F, vel ad quadratum L, prout solidus N. fit à producto ex quadratis F L in latus ipsius F vel in latus ipsius L.

A 5. B 4. C 3.
D 41. F 9. E 40.
G 34. K 30. L 16.

Q 1080. N 1920.

Tertius casus est cùm primi & tertij trianguli lateribus in eadem dispositione manentibus, secundi latera transponuntur, & fit E basis F perpendiculum. Et tunc solidus Q ad solidum N. se habet vt quadratus F ad quadratum L. Quod ita probatur. Quia E K producuntur ex eodem duplo ipsius A in ipsos B C. patet esse B ad C vt E ad K. Igitur ex B in K idem fit numerus qui fit ex C in E. Quare cùm producto ex B in K ducto in F fiat Q. Et producto ex C in E

f *decima nona, 9.*

ducto in L. fiat N. patet eodem numero ducto in ipſos F & L. fieri ipſos Q. & N. [a] *Quare eſt Q ad N vt F ad L. Quod erat propoſitum.*

a decima ſeptima 7.

R 10.
A 5. B 4. C 3.
D 41. E 40. F 9.
G 34. L 16. K 30.

Q 2560. N 810.

Quartus denique caſus eſt cùm lateribus 1. & 2. trianguli eodem loco manentibus, mutantur latera tertij, & ſit L perpendiculum K baſis. Tuncque ſolidus Q ad ſolidum N. ſe habet vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F. Quod ſic probatur. Quia ex B in R fit E. ſi conſiderentur quatuor numeri B. R. B. L. idem fiet numerus quouis ordine inter ſe ducantur. Igitur cùm ducto B in R, & producto E in B, & producto rurſus in L. fiat Q ſolidus, idem ſolidus fiet ducto B in B. & producto, quadrato ſcilicet ipſius B ducto in L ſibi æqualem, & rurſus producto, quadrato ſcilicet ipſius L ducto in R. Quare Q fit ex R in quadratum ipſius L. Eodem prorſus argumento probatur ſolidum N. fieri ex R in quadratum ipſius F. Proinde patet eſſe Q ad N. vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F.

b tertia, 11. poriſm.

Vnde colligas in hoc caſu Q ad N eſſe non ſolum in ratione quadrati ad quadratum, ſed & in ratione quadratoquadrati ad quadratoquadratum, cùm L. F ſint quadrati ac per conſequens quadrati eorum ſint quadratoquadrati quorum latera ipſi B. C.

Supereſt vt moneam licere loco cuiuſlibet ſic inuentorum triangulorum; aliud ſimile ponere, & eadem manebit ſemper quæ prius, ratio ſolidi ad ſolidum, quod vnica demonſtratione omnibus caſibus conueniente demonſtrari poteſt, hac arte. Loco trianguli G L K ſumatur triangulum illi ſimile T. V. X. & latera homologa intelligantur eadem ratione diſpoſita, & ſolidus ſub ipſis B E V eſto Y. ſolidus ſub ipſis C F X eſto Z. Dico eſſe Y ad Z ſicut Q ad N. Quia enim idem productum ex B in E ductum tum in L tum in V. producit ſolidos Q Y. erit Q ad Y ſicut L ad V. Similiter quia idem productum ex C in F ductum in ipſos K X producit N. & Z. erit N ad Z ſicut K ad X. ſed eſt L ad V vt K ad X ex hypotheſi ob ſimilitudinem triangulorum. Igitur eſt etiam Q ad Y vt N ad Z. & permutando eſt Q ad N. vt Y ad Z. Quod demonſtrandum erat.

A 5. B 4. C 3.
D 41. E 40. F 9.
G 34. L 16. K 30.
T 17. V 8. X 15.

Q 2560. N 810.
Y 1280. Z 405.

PROPOSITIO XII. *Probl.* 5.

Inuenire duo triangula rectangula, vt planus ſub perpendiculis, ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato, vel cubo, vel quadratoquadrato, vel quadratocubo, vel cubocubo.

D 6.
A 5. B 4. C 3.
E 13. F 5. G 12.
H 52. K 20. L 48.
M 108. N 80. F 192.

Q 36. K 20. R 16.
S 144. N 80. T 64.
V 576. X 320. Y 256.

Exponatur quodlibet triang. rect. A B C. ita vt D duplum perpendiculi C ſit maius baſi B. & ab ipſis [c] formetur triangulum H K L. ita vt H ſit aggregatum quadratorum, baſis K ſit interuallum eorundem & perpendiculum L. ſit duplum producti ex B in D. Deinde ſingula latera H K L. diuidantur per baſim B & [d] fiat aliud triangulum ſimile E F G.

c quinta, huius.

d prima, huius.

Dico primo haberi duo triangula A B C. E F G. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus quadrato numero. Etenim ducto C in G fiat Q. & quia ducto B in F fit K ex conſtructione, auferatur K ex Q. & ſuperſit R. Dico R eſſe quadratum. Quia enim D eſt duplus ad C. productus bis ex B in D nempe L æquatur quadruplo producti ex B in C. Quare diuiſo L per B quotiens G eſt quadruplus ad C. Cùm ergo ex C in G fiat Q. erit Q. quadruplus quadrati ipſius C. ſeu æqualis quadrato ipſius D. Proinde cùm K ſit interuallum quo quadratus ex D. nempe Q ſuperat quadratum ex B patet auferendo K ex Q reſiduum R eſſe quadratum ipſius B. Quod erat propoſitum.

Dico ſecundo haberi duo triangula A B C, H K L, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero cubo. Etenim ducto C in L fiat S. & ducto B in K fiat N. quo detracto ex S. ſuperſit T. Dico T eſſe cubum. Quia enim ex eodem C in ipſos G L fiunt Q S. erit Q ad S vt G ad L. Rurſus, quia ex eodem B in ipſos F K, fiunt K N. erit K ad N vt F ad K. Quare cùm obſimilitudinem triangulorum ſit F ad K vt G ad L. erit & Q ad S. vt K ad N. Ideo cùm ſit vt totus Q ad totum S. ſic ablatus K ad ablatum N. erit & reliquus R ad reliquum T. in eadem ratione. Sed rationis F ad K ſeu G ad L denominator eſt B ex conſtructione. Igitur & rationis R ad T idem B denominator erit, ac proinde ex B in R fiet T. Igitur cùm ex B in ſuum quadratum R. fiat T. erit T cubus ipſius B. Quod erat propoſitum.

Rurſus ſi B ducatur in triangulum H K L, & fiat aliud ſimile M N P. Dico haberi duo triangula A B C. M N P. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadratoquadrato. Etenim ſi C ducatur in P vnde fiat V. & B ducatur in N vnde fiat X quo detracto ex V relinquatur Y. Dico Y eſſe quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento oſtendemus eſſe

T ad

T ad Y sicut K ad N vel L ad P. Quare cùm rationis K ad N vel L ad P denominator sit B ex constructione; erit idem B denominator rationis T ad Y ac proinde ex B in suum cubum T fiet Y. Quare Y erit quadratoquadratus ipsius B. similiter, si B ducatur rursus in triangulum M N P. fiet aliud simile quod cum triangulo A B C exhibebit duo triangula ita vt planus sub perpendiculis superet planum sub basibus numero quadratocubo. nimirum quadratocubo ipsius B. Et si rursus B ducatur in vltimum triangulum, fiet aliud quod cum ipso A B C duo exhibebit triangula, ita vt planus sub perpendiculis superet planum sub basibus cubocubo ipsius B. Igitur ex omni parte constat propositum.

PROPOSITIO XIII. *Probl. 6.*

Inuenire duo triangula rectangula vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus, faciat quadratum, uel cubum, vel quadratoquadratum, vel quadratocubum, vel cubocubum.

D 10.		
A 13. B 12. C 5.		
E 20 $\frac{1}{3}$. F 3 $\frac{2}{3}$. G 20.		
H 244. K 44. L 240.	Q 100. K 44. R 144.	
M 2928. N 528. P 2880.	S 1200. N 528. T 1728.	
	V 14400. X 6336. Y 20736.	

Exponatur triang. rect. A B C. ita vt D duplum basis C. sit minus perpendiculo B. [a] Et ab ipsis B D formetur aliud triangulum H K L vt supra, cuius omnia latera diuidantur per B & [b] fiat triangulum simile E F G. Dico primo duo triangula A B C. E F G huiusmodi esse vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratum. Etenim ducto C in G fiat Q. cui addatur K productus ex B in F ex constructione & fiat R. dico R esse quadratum. Quia enim D est duplus ad C. & ex B in D bis fit L, idem L fiet ex B in quadruplum ipsius C. Quare cùm diuidendo L per B fiat G. erit G quadruplus ipsius C. proinde Q productus ex C in G æquabitur quadruplo quadrati ipsius C, seu quadrato ipsius D. cùm ergo K sit interuallum quo quadratus B superat quadratum ex D nempe ipsum Q. addendo Q. & K summa R. erit quadratus ipsius B. Quod erat propositum.

[a] *quinta huius.*
[b] *prima, huius.*

Dico secundo duo triangula A B C. H K L. talia esse vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat cubum. Nam ducto C in L fiat S. ductoque B in K fiat N quo addito ad S. fiat T. Dico T esse cubum. Etenim quia ex eodem C in G & in L. fiunt Q S. & ex eodem B. in ipsos F K fiunt K N. erit Q ad S. vt G ad L. & erit K ad N. vt F ad K. sed est F ad K. vt G ad L. ob similitudinem triangulorum, ergo est & Q ad S vt K ad N. Quare & erunt antecedentes simul nempe R ad consequentes simul nempe ad T vt N. sed B est denominator rationis K ad N ex constructione, ergo & rationis R ad T. Quamobrem ex B in R fiet T. vnde cùm R sit quadratus ipsius B vt ostensum est, erit T cubus eiusdem B. Quod erat propositum.

Rursus si B ducatur in triangulum H K L. & fiat aliud simile M N P. Dico tertio duo triangula A B C. M N P. huiusmodi esse vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratoquadratum. Etenim si C. ducatur in P & fiat V, & B ducatur in N. & fiat X. quo addito ad V fiat Y. Dico Y esse quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento ostendemus esse T ad Y, sicut N ad X. Quare cum ex B in N fiat X, necesse est etiam ex B in T fieri Y. ac proinde cùm T ostensus sit cubus ipsius B, erit N quadratoquadratus eiusdem B. Similiter si B ducatur rursus in triangulum M N P. fiet aliud simile quod cum triangulo A B C. ostendetur esse hujusmodi vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratocubum ipsius B. Ac demum si B ducatur rursus in vltimum triangulum, fiet aliud, quod cum ipso A B C, ostendemus esse huiusmodi, vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat cubocubum ipsius B. Igitur ex omni parte constat propositum.

SCHOLIVM.

In hoc & in præcedenti problemate accidit vt inuenta duo triangula si per eundem numerum vtraque multiplicentur aut diuidantur, producant alia duo idem præstantia, quod vnico exemplo sufficiet probare. Multiplica per 3. *triangula* 13. 12. 5. *&* 20 $\frac{1}{3}$. 3 $\frac{2}{3}$. 20. *fient alia duo,* 39. 36. 15. *&* 61. 11. 60. *vbi vides planum sub basibus* 900. *cum plano sub perpendiculis* 396. *efficere quadratum* 1296. *à latere* 36. *perpendiculo scilicet primi trianguli. Demonstratio facilis est, & ideo eam tibi relinquo indagandam.*

PROPOSITIO XIV. *Probl. 7.*

Inuenire tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis, ad solidum sub perpendiculis se habeat vt quadratus ad quadratum.

D 6.
A 5. B 4. C 3.
E 13. F 5. G 12.
H 65. K 63. L 16.

M 4225. N 576.

Exponatur triang. rectang. quodcumque A. B. C. ita vt D duplum perpendiculi C. ſit maius baſi B.[a] & ab eo formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato. Tum à duobus hiſce triangulis[b] formetur tertium H K L. ita vt H ſit productus ex A in E At K baſis fiat addito producto ex G in B. ad productum ex F in C. Denique perpendiculum L fiat auferendo productum ex F in B. à producto ex G in C. Dico tria hæc triangula ſatisfacere propoſito, nimirum M ſolidum ſub hypotenuſis ad N ſolidum ſub perpendiculis eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Quia enim ex A, in E fit H ex conſtruct. patet ſolidum M factum ex H in H eſſe quadratum ipſius H. Quia vero vt probatum eſt 12. huius ex C in G fit quadratus ipſius D. At L. eſt quadratus ipſius B. ex conſtruct. & per 12. huius. Patet ſolidum N. qui fit ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum cuius latus ſcilicet eſt productus ex B in D. Quare cum vterque M & N. ſit quadratus, patet propoſitum.

a *duodecima, huius.*
b *decima huius.*

Aliter expoſito triangulo A B C. ita vt D duplum perpendiculi ſit minus baſi B[c] formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratum. Et ab ipſis duobus[d] efformetur tertium H K L. ita vt hypotenuſa H fiat ex A in E. baſis K ſit, quod reſtat à producto ex B in G detrahendo productum ex C in F. Denique perpendiculum L. ſit ſumma productorum ex B in F & ex C in G.[e] Erit igitur L quadratus ipſius B. Quare cum conſtet etiam per decimam tertiam ex C in G produci quadratum ipſius D. patet ſolidum ſub ipſis C G L. productum ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum, cuius ſcilicet latus eſt productus ex B in D. At ſolidus ſub hypotenuſis, vt prius oſtendetur æqualis quadrato ipſius H. Igitur cùm vterque ſolidus ſit quadratus, conſtat abundè propoſitum.

c *decima tertia, huius.*
d *decima huius.*
e *decima tertia, huius.*

D 10.
A 13. B 12. C 5.
E 20 $\frac{1}{3}$. F 3 $\frac{2}{3}$. G 20.
H 264 $\frac{1}{3}$. K 221 $\frac{2}{3}$. L 144.

SCHOLIVM.

Quæ hactenus tradita ſunt, ſatis ſuperque ſufficiunt ad abſolutam Diophantæorum problematum enodationem. Cæterum placuit his ſubnectere ſequentia Theoremata non inutilia de triangulis rectangulis, quæ protulit primus Franciſcus Vieta in libris ζητητικῶν, quamuis ea ſynthetice minimè demonſtrarit.

PROPOSITIO XV.

In triangulo rectangulo, quotlibet laterum circa rectum, eſt medium proportionale inter aggregatum & interuallum alterius lateris & hypotenuſæ. Et è conuerſo, ſi fuerint tres inæquales numeri, quorum vnus ſit medius proportionalis inter ſummam & interuallum aliorum, conſtituent triangulum rectangulum ipſi tres numeri.

A 3. B 4. C 5.
D 2. G 16. E 8.

Sit triangulum rectangulum A B C. & alterius lateris A & Hypotenuſæ C interuallum ſit D. aggregatum E. Dico reliquum latus B eſſe medium proportionale inter ipſos D E. ſumpto enim G. quadrato ipſius B, patet ex hypotheſi quadratum ex A cum quadrato G æquari quadrato ipſius C. Quare G eſt interuallum quo quadratus ex C. ſuperat quadratum ex A.[f] Quamobrem G fiet ex D in E, ex interuallo ſcilicet in ſummam.[g] Igitur B eſt medius proportionalis inter D & E. Quod demonſtrandum erat.

f *tertia, 2.*
g *vigeſima, 7.*

E conuerſo ponatur B medius proportionalis inter D E interuallum & ſummam ipſorum A C. Dico tres A B C conſtituere triang. rect. Quia enim ſunt proportionales D B E,[h] ex D in E fiet G quadratus ipſius B.[i] Atqui ex interuallo D in ſummam E fit interuallum quadratorum ex A & C. Conſtat ergo G eſſe interuallum quo quadratus ex C ſuperat quadratum ex A. Ac ideo G ſeu quadratus ex B cum quadrato ex A æquatur quadrato ex C. Quamobrem A B C conſtituunt triangulum rectangulum. Quod demonſtrandum erat.

h *vigeſima, 7.*
i *tertia, 2. poriſm.*

PROPOSITIO XVI.

In triangulo rectangulo quadratus vnius laterum circa rectum, æquatur quadrato interualli inter alterum latus & hypotenuſam, vnà cum duplo producti ex eodem interuallo in idem latus, & è conuerſo.

A 4. B 3. C 5.
G 4. D 2.

Sit triang. rect. A B C. & ſit D interuallum inter hypotenuſam C. & latus B, & ipſius D duplus eſto G. Dico quadratum alterius lateris A æquari quadrato ipſius D, & producto ex G in B. Quia enim B D ſimul æquantur ipſi C.[k] erit quadratus ex C. æqualis quadratis ipſorum B D, & duplo producti ex B in D. hoc eſt quadratis ex B & D, & producto ex G in B. At rurſus ex hypotheſi quadratus ex C æquatur quadratis ipſorum A B. Igitur quadrati ex A & B. æquantur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Quare ablato

k *quarta, 2.*

vtrimque communi quadrato ex B. remanet quadratus ex A æqualis quadrato ex D, & producto ex G in B. Quod demonstrandum erat.

Conuersum eadem facilitate ostendetur. Sit enim quadratus ex A. æqualis quadrato ex D interualli ipsorum B C. & producto ex G in B. Dico A B C constituere triang. rect. Nam vt priùs quadratus ex C æquatur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Ergo loco quadrati ex D & producti ex G in B. sumendo quadratum ex A illis æqualem, erit quadratus ex C æqualis quadratis ex A & B. Ac proinde A B C constituent triang. rect. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVII.

In triangulo rectangulo, si duplum interualli lateris vnius & hypotenusæ ducatur in hypotenusam, fit numerus æqualis quadrato reliqui lateris, vna cum quadrato eiusdem interualli; & è conuerso.

A 4. B 3. C 5. G 4. D 2.

Sit eadem figura quæ prius, dico productum ex G in C æquari quadratis ipsorum A D. [a] Quia enim quadratus ex A æquatur producto ex G in B & quadrato ex D, si addatur vtrimque quadratus ex D, erunt quadrati ex A & D simul æquales producto ex G in B & duplo quadrati ex D. sed quia G est duplus ad D, productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D. ergo quadrati ex A & D æquantur productis ex G in B & in D, [b] seu producto ex G in C qui componitur ex ipsis B D. Quod erat propositum.

[a] *decima sexta, huius.*

[b] *prima, 2.*

E conuerso ponantur quadrati ex A & D æquales producto ex G in C. dico ipsos A B C constituere triang. rect. [c] Quia enim productus ex G in C. æquatur productis ex G in B & in D. & productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D, constat quadratos ex A & D æquari producto ex G in B & duplo quadrati ex D. Quare auferendo vtrimque communem quadratum ex D, remanet quadratus ex A æqualis producto ex G in B & quadrato ex D. [d] Quamobrem A B C constituunt triang. rect. Quod demonstrandum erat.

[c] *prima, 2*

[d] *decima sexta, huius.*

PROPOSITIO XVIII.

Si duplum compositi ex vno latere & hypotenusa ducatur in hypotenusam, productus æquatur quadrato eiusdem compositi, & reliqui lateris quadrato. Et è conuerso.

Sit triang. rect. A B C. & sit H summa lateris B & hypotenusæ C. & sit K duplum ipsius H. dico

A 4. B 3. C 5. K 16. H 8.

productum ex K in C. æquari quadratis ipsorum A H. [e] Nam quadratus ex H æquatur quadratis partium B. C. & producto bis ex B in C. Quare addendo vtrimque quadratum ex A. Quadrati ex A & H æquantur quadratis singulorum A B C & producto bis ex B in C. Quia vero K continet bis vtrumque B C. ducere C in K idem est ac ducere C in seipsum, & in B bis. Ergo productus ex K in C. æquatur duplo quadrati ex C, & producti ex B in C. Proinde loco vnius quadrati ex C. sumendo quadratos illi æquales ex A & B. fiet productus ex K in C. æqualis quadratis singulorum A B C. & producto bis ex B in C. hoc est quadratis ipsorum A. H. Quod erat ostendendum.

[e] *quarta, 2.*

E conuerso si ponantur quadrati ex A & H. æquales producto ex K in C. Dico A B C constituere triang. rect. Nam vt prius ostendemus quadratos ex A & H. æquari quadratis singulorum A B C & duplo producti ex B in C. vnde sequitur ex hypothesi productum ex K in C. æquari quadratis singulorum A B C. & producto bis ex B in C. At vt prius productus ex K in C ostendetur æqualis duplo quadrati ex C & producti ex B in C. Igitur & quadrati singulorum A B C, cum duplo producti ex B in C. æquabuntur duplo producti ex B in C & duplo quadrati ex C. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex B in C. & quadratum ex C semel, remanent quadrati ex A & B æquales quadrato ex C. Ac proinde A B C constituunt triangulum rectangulum. Quod demonstrandum fuit.

SCHOLIVM.

His subiicere libet aliud non iniucundum, neque inutile theorema, quod ipsi commenti sumus.

PROPOSITIO XIX.

In triangulo rectangulo quadratus summæ laterum æqualis est numero qui fit bis ex aggregato hypotenusæ & baseos, in aggregatum hypotenusæ & perpendiculi; & è conuerso.

D 12.
A 3. B 5. C 4.
E 8. F 9.

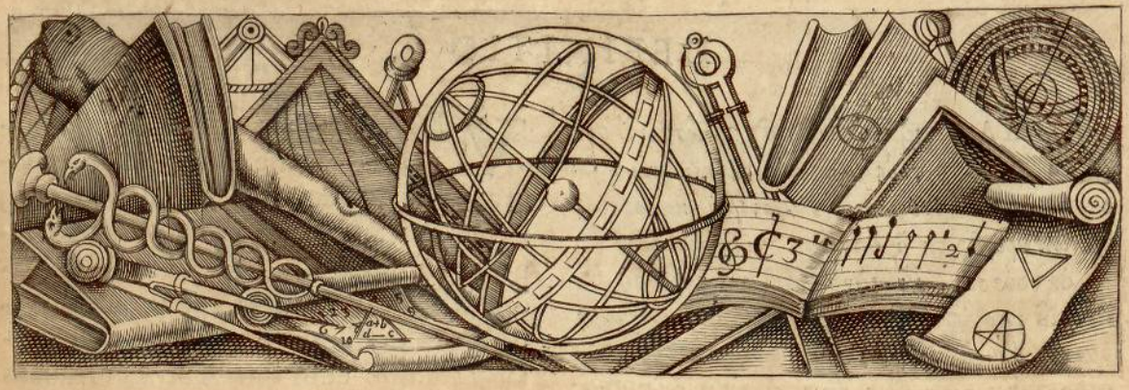
Eſto triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenuſa B. ſumma laterum D. aggregatum ipſorum A B ſit E, & F aggregatum ipſorum B C. Dico quadratum ipſius D. æquari duplo producti ex E in F. [a] Etenim quadratus ex D. æquatur quadratis ſingulorum A B C & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At ex hypotheſi quadratus ipſius B æquatur quadratis ipſorum A C. Quare loco quadratorum ex A & C. ſumendo quadratum ex B. erit quadratus ex D æqualis duplo quadrati ex B, & duplo producti ex A in C. & ex B in ipſos A C. Rurſus autem quia E continet ipſos A B. & F continet ipſos B C. duplum producti ex E in F continet bis quadratum ipſius B, & duplum productorum ex A in C. & ex B in ipſos A C. Igitur duplum producti ex E in F æquatur quadrato ex D. Quod erat demonſtrandum.

[a] *prima, 2 poriſm.*

Deinde ſint tres numeri A B C. quorum ſumma D. & aggregatum ipſorum A B ſit E, & aggregatum ipſorum B C. ſit F. & duplum producti ex E in F æquetur quadrato ex D. Dico ipſos A B C, conſtituere triangulum rectangulum. Nam vt prius [a] quadratus ex D. æquatur quadratis ipſorum A B C. & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At duplum producti ex E in F æquatur duplo quadrati ex B & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex quolibet in quemlibet ex alijs, manet duplum quadrati ex B æquale quadratis ſingulorum A B C. & rurſus auferendo vtrimque quadratum ex B, remanet adhuc quadratus ex B, æqualis quadratis ipſorum A C. Ac proinde A B C. conſtituunt triangulum rectangulum. Quod erat oſtendendum.

[b] *prima, 2. poriſm.*

FINIS.



DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM.

LIBER PRIMVS.

CVM animaduerterem te (obseruandissime mihi Dionysi) studio discendi explicationem quæstionum earum quæ in numeris proponuntur teneri; aggressus sum eius rei viam rationemque fabricari, ex ipsisque fundamentis, quibus tota res nititur, initio petito, naturam ac vim numerorum constituere. Quod negotium vt videatur fortasse difficilius (quippe ignotum adhuc) cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficienda spem concipiendam nequaquam sint procliues: tamen cùm tua alacritas, tum mea demonstratio efficiet, vt facilè id comprehendas. Celeriter enim addiscunt, quorum ad discendi cupiditatem doctrina accedit.

ΤΗΝ ἕυρεσιν τῆς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, πιωώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ προβλήματα στοιχείων, ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν ἓν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, δυσέλπιστοι μὲν εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῆς ἀρχομένων ψυχαὶ, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται διὰ τὴν σὴν προθυμίαν, καὶ τὴν ἐμὴν ἀπόδειξιν. ταχεῖα γὰρ εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν.

In primum Librum Diophanti Commentarij.

QVÆCVNQVE ante primam quæstionem præmisit Diophantus, ea definitionum & principiorum locum obtinent. Sed velut ad altiora festinans, hæc mira breuitate perstrinxit, vt non tam ea explicare voluisse videatur, quàm indicare, tyronésque admonere, vt nonnisi horum cognitione iam probè instructi ad hosce libros euoluendos accedant. Quod sanè non obscuris verbis professus est, definitione decima vndecimáque, cùm ait eum qui hoc negotij suscipit in additione, subductione, & multiplicatione specierum iam exercitatum esse debere, necnon in æquationibus ritè præparandis apprimè versatum. Sed & Xilander hîc mutus est, & istarum definitionum obscuritatem minimè dissimulans, vt laborem eas explicandi declinet, lectorem ad suam Algebram amandat. Scholiastes autem Græcus, more suo, multa, sed ea plerunque futilia, vel à scopo Diophanti prorsus aliena nobis obtrudit. Ego media incedens via, quæ obscuriora videntur breuiter enodanda suscepi, nec tamen inutilia, vel trita & passim obuia persequi statui, præsertim cùm omnia quæ his definitionibus continentur, in omnibus quotquot à quocunque authore extant de logistica, libris, reperiantur. Cæterum est quod moneam in Græco sine vlla distinctionè hasce definitiones haberi, quas ego distinguendas numeris putaui, vt sic facilius explicari, citarique commodius possint.

DEFINITIO I.

ΑΛΛΑ καὶ πρὸς τοῖς δὲ γινώσκοντί σοι πάντας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινός, φανερὸν καθέστηκεν εἰς ἄπειρον ἔχειν τὴν ὕπαρξιν. τυγχανόντων δὴ ἓν ἐν τούτοις, ὧν μὲν τετραγώνων οἱ εἰσιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος, ὅυτος δὲ ὁ ἀριθμὸς καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὧν δὲ κύβων οἱ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ὅτι τὰς αὐτῶν πλευρὰς πολλαπλασιαθέντων, ὧν δὲ δυναμοδυνάμεων οἱ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιαθέντων, ὧν δὲ δυναμοκύβων οἱ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ὅτι τὰς ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς κύβους πολλαπλασιαθέντων, ὧν δὲ κυβοκύβων οἱ εἰσιν ἐκ κύβων ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιαθέντων, ἔκ τε τῆς τούτων ἤτοι συνθέσεως, ἢ ὑπεροχῆς, ἢ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ λόγου τοῦ πρὸς ἀλλήλους, ἢ καθ' ἕκαστον, ἢ καθ' ἑκάστων πρὸς τὰς ἰδίας πλευρὰς συμβαίνει πλέκεσθαι πλεῖστα προβλήματα ἀριθμητικὰ, λύεται δὲ βαδίζοντός σου τὴν ὑποδειχθησομένην ὁδόν.

VERVM etiam præter hæc intelligenti tibi omnes numeros compositos esse è quadam multitudine vnitatum, liquet eos augmentum in infinitum capere. Cùm ergo in his quidam sint quadrati, qui fiunt numero aliquo in se multiplicato, qui numerus latus quadrati dicitur; aliqui cubi qui existunt quadratis in sua multiplicatis latera; alij rursus quadratoquadrati, qui gignuntur quadratis in seipsos ductis; nonnulli quadratocubi, quos quadrati in cubos ab eodem profectos latere ducti procreant; quidam denique cubocubi qui cubis in seipsos ductis nascuntur: vsuuenit, vt ex horum vel compositione, vel quo præstant alij alijs, vel multiplicatione, vel ratione inter se, aut cuiuslibet, quorumlibetve ad sua latera, plurimæ nectantur arithmeticæ quæstiones, quæ soluantur tamen, si ea quam commonstrabimus via incedas.

IN DEFINITIONEM I.

QVAMVIS species, vel (vt alij vocant) potestates, quibus velut elementis vtitur logistica in infinitam multitudinem excrescant, nec earum certus sit & determinatus numerus, tamen Diophantus de quinque prioribus tantùm tractationem instituit, quæ sunt Quadratus, cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus & cubocubus, ratus scilicet has sufficere ad implicatissimas quasque quæ hactenus excogitatæ sunt, quæstiones dissoluendas. Harum igitur hîc affert definitiones. Et Quadratum quidem cubúmque definit vt Euclides. Reliquas verò tres, per ipsam nominum impositionem. Nam quadratoquadratum vocat, numerum qui fit ex quadrato in quadratum, idest in seipsum. Quadratocubum verò, qui fit ex quadrato in cubum ab eodem profectum latere. Denique cubocubum qui fit ex cubo in cubum, hoc est in seipsum. Vbi aduertendum à recentioribus omnibus quotque ante Diophantum editum logistices rudimenta tradidere, Quadratocubum vocari nunc supersolidum, nunc surde solidum, nunc etiam Primum Relatum. Cubocubum verò, ab iisdem dici Quadratocubum, quia videlicet est quadrati cubus, vel cubi quadratus, quod adnotasse operæ pretium duxi, nequem in authoribus legendis nominum ambiguitas remoretur.

DEFINITIO II.

ΚΑΛΕΙΤΑΙ ἓν ὁ μὲν τετράγωνος, δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῇ σημεῖον τὸ Δ^Υ ἐπίσημον ἔχον Υ, Δ^Υ. ὁ δὲ (ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν πολλαπλασιαθέντος) κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον Κ^Υ ἐπίσημον ἔχον Υ, Κ^Υ. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος, δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δέλτα δύο, ἐπίσημον Υ, ΔΔ^Υ, δυναμοδύναμις. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτῷ πλευρᾶς κύβον πολλαπλασια-

APPELLATVR igitur Quadratus, Dynamis, & est illius nota Δ^Υ superscriptum habens Υ sic Δ^Υ. Qui autem fit ex quadrato in suum latus cubus est, cuius nota est Κ^Υ, superscriptum habens Υ hoc pacto Κ^Υ. Qui autem fit ex quadrato in seipsum multiplicato, quadratoquadratus est, cuius nota est geminum Δ habens superscriptum Υ, hac ratione ΔΔ^Υ. Qui fit quadrato in cubum qui ab

eodem latere profectus est, ducto, quadratocubus nominatur, nota eius δ̄κ̄ superscriptum habens ῡ sic δκ^υ. Qui ex cubo in se ducto nascitur, cubocubus vocatur, & est eius nota geminum κ̄ superscriptum habens ῡ, hoc pacto κκ^υ. Cui vero nulla harum proprietatum obtigit, sed constat multitudine vnitatum rationis experte, numerus vocatur, nota eius ς̀. Est & aliud signum immutabile definitorum, vnitas, cuius nota μ̄ superscriptum habens ο̄ sic μ^ο.

δέντος, δυναμόκυβος, ἢ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ δκ̄. ἐπίσημον ἔχον τὸ υ, δκ^υ. ὁ δὲ ἐκ κύβε ἑαυτὸ πολλαπλασιάσαντος, κυβόκυβος, ἢ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο κκ̄, ἐπίσημον ἔχον τὸ υ, κκ^υ. ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, ἢ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ς̀. ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τῶν ὡρισμένων ἡ μονάς, καὶ ἔστιν αὐτῆ σημεῖον το μ̄, ἐπίσημον ἔχον τὸ ο μ^ο.

IN DEFINITIONEM II.

HÆc ad verbum exprimenda esse arbitratus sum potiùs quàm cum Xilandro nescio quid aliud comminisci. Quamuis enim in reliqua versione nostra notis ab eodem Xilandro excogitatis libenter vsus sim, quas tradam infrà. Hîc tamen ab ipso Diophanto longiùs recedere nolui, quòd hac definitione notas explicet quibus passim libris istis vtitur ad species omnes compendio designandas, & qui has ignoret ne quidem Græca Diophanti legere possit. Porrò quadratum Dynamin vocat, quæ vox potestatem sonat, quia videlicet quadratus est veluti potestas cuiuslibet lineæ, & passim ab Euclide, per id quod potest linea, quadratus illius designatur. Itali, Hispaníque eadem ferè de causa Censum vocant, quasi dicas redditum, prouentúmque, quòd à latere seu radice, tanquam à feraci solo quadratus oriatur. Inde factum vt Gallorum nonnulli & Germanorum corrupto vocabulo zenzum appellarint. Numerum autem indeterminatum & ignotum, qui & aliarum omnium potestatum latus esse intelligitur, Numerum simpliciter Diophantus appellat. Alij passim Radicem, vel latus, vel rem dixerunt, Itali patrio vocabulo Cosam. Cæterùm nos in versione nostra his notis N. Q. C. QQ. QC. CC. designabimus Numerum, Quadratum, Cubum, Quadratoquadratum, Quadratocubum, Cubocubum. Nam quod ad vnitates certas & determinatas spectat, eis notam aliquam adscribere superuacaneum duxi, quòd hæ seipsis absque vlla ambiguitate sese satis indicent. Ecquis enim cùm audit numerum 6. non statim cogitat sex vnitates? Quid ergo necesse est sex vnitates dicere, cùm sufficiat dicere, sex? Demum legendum in Græco censeo, πλῆθος μονάδων ἄλογον, flagitante sententia, potius quàm ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, vt habetur in codice manu exarato, & per multitudinem vnitatum rationis expertem, intelligo numerum indefinitum & indeterminatum, seu potius ignotum, quémque statim opponit ὡρισμένῳ seu vnitatibus certis & determinatis.

DEFINITIO III.

ENimvero sicut partes numeris cognomines, similem ipsis numeris denominationem sortiuntur (etenim à ternario triens, à quaternario quadrans dicitur) ita nunc quoque denominatis numeris partes cognomines, ipsis numeris similem habent denominationem, nam à numero pars numerica dicitur; à quadrato, quadratica; à cubo cubica: à quadratoquadrato, quadratoquadratica; à quadratocubo, quadratocubica; à cubocubo, cubocubica. Habebit autem quælibet pars à sibi cognomine numero notam, & literam superscriptam quæ speciem à specie distinguat.

ΩΣΠΕΡ δὲ τῶν ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια παρονύμως καλεῖται τοῖς ἀριθμοῖς, τὸ μὲν γ̄ τὸ τρίζον, τὸ δὲ δ̄ τὸ τέταρζον. οὕτως καὶ τῶν νῦν ἐπονομαζόντων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται παρωνύμως τοῖς ἀριθμοῖς. τὸ μὲν ἀριθμῶ τὸ ἀριθμοστὸν, τὸ δὲ δυνάμεως τὸ δυναμοστὸν, τοῦ δὲ κύβε τὸ κυβοστὸν, τὸ δυναμοδυνάμεως τὸ δυναμοδυναμοστὸν, τοῦ δὲ δυναμοκύβε τὸ δκ^υ. τοῦ δὲ κυβοκύβε τὸ κυβοκυβοστόν. ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ὅτι τῶ ὁμωνύμου ἀριθμῶ σημεῖον γράμμην ἔχον διαζέλλουσαν τὸ εἶδος.

IN DEFINITIONEM III.

QVAM malè acceperint hanc definitionem Græcus Scholiastes, & Xilander, si vacat, videre poteris. Manifestum tamen est nil aliud velle Diophantum, quàm vt fractionibus Algebricis notæ specierum à quibus sumunt denominationem, adscribantur, docens ipsas fractiones non minus à qualibet specie denominari, quàm numerum quemlibet vnitatum integrum. Hoc autem huiusmodi similitudine explicat. Quemadmodum, inquit, fractio quælibet absoluta ab aliquo numero sumit denominationem, velut triens à ternario, à quaternario quadrans, & sic de alijs; ita & quælibet fractio Algebrica à specie cuius nota ei affixa est, denominationem mutuatur, verbi gratia $\frac{1}{2}$ N. dicetur semissis vnius Numeri, $\frac{1}{3}$ Q. dicetur triens vnius Quadrati, $\frac{3}{4}$ C. dicetur dodrans vnius Cubi, & sic de alijs, vt superuacaneum sit in re manifesta diutius immorari. Porrò Xilandri coniecturam secutus, duobus in locis loco παρομοίως, reposui παρονύμως.

DEFINITIO IV.

ΕΚΘΕΜΕΝΟΣ οὖν σοι τὴν ἑκάστου τῶ ἀριθμῷ ἐπωνυμίαν, ἐπὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς αὐτῶν μεταβλήσομαι. ἔσονται δέ σοι καταφανεῖς διὰ τὸ προδεδηλῶσθαι χρεὼν ἀπὸ τῆς ὀνομασίας.

Ἀριθμὸς μὲν οὖν ἐπὶ ς πολλαπλασιασθεὶς, ποιεῖ δύναμιν. ἀπὸ δὲ δύναμιν, κύβον. ἀπὸ δὲ κύβον, δυναμοδύναμιν. ἀπὸ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμόκυβον. ἀπὸ δὲ δυναμόκυβον, κυβόκυβον. δύναμις δὲ ἀπὸ μὲν δύναμιν [ποιεῖ δυναμοδύναμιν.] ἀπὸ δὲ κύβον, δυναμόκυβον. ἀπὸ δὲ δυναμοδύναμιν, κυβόκυβον. κύβος δὲ ἀπὸ κύβον, κυβόκυβον.

PROINDE cùm tibi singulas numerorum denominationes exposuerim, ad eorum multiplicationes me confero, quæ tibi facilè patebunt, cùm per ipsam nominum impositionem, ferè sint iam ante declaratæ.

Ergo numerus in numerum multiplicatus, quadratum producit; in quadratum, cubum, in cubum, quadratoquadratum; in quadratoquadratum, quadratocubum; in quadratocubum, cubocubum. Quadratus verò in quadratum, gignit quadratoquadratum; in cubum, quadratocubum; in quadratoquadratum, cubocubum. Cubus autem in cubum ductus, cubocubum producit.

IN DEFINITIONEM IV.

HIC specierum multiplicationes explicat, quarum aliquæ quidem ex definitione prima, & ipsa nominum impositione manifestæ sunt, reliquas verò demonstrare facile est, tali expedito theoremate.

Quadratus, Cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus, & Cubocubus vnà cum communi eorum latere sunt ab vnitate continuè proportionales.

Sit vnitas A, quodlibet latus B. cuius quadratus C. cubus D. quadratoquadratus E. quadratocubus F. & cubocubus G. Dico A B C D E F G, esse continuè proportionales. Quia enim [1] ex B in B, fit C. erit ex definitione multiplicationis A ad B, vt B ad C. similiter quia [2] ex B. in C, fit D. erit eadem de causa A ad B, vt C ad D. Quare ipsi A B C D. sunt continuè proportionales. Rursus [3] quia ex C in seipsum fit E, erit ex definitione multiplicationis A ad C, sicut C ad E. Quare cùm inter A & C. cadat vnus medius proportionalis B, [4] cadit etiam vnus in eadem ratione inter C & E, sed in ratione A ad B, vel B ad C, ostensus est C ad D. Igitur D est ille medius, ac proinde est C ad D, vt D ad E. Rursus [5] quia ex C. in D producitur F, erit A ad C, vt D ad F. Quare rursus cùm inter A C cadat medius proportionalis B, [6] cadit & vnus medius in eadem ratione inter D & F. Vnde cùm in illa ratione ostensus sit esse D ad E, erit E ille medius, & idcirco erit D ad E, vt E ad F. Denique [7] quia ex D in seipsum fit G, erit A ad D, vt D ad G. vnde sicut inter A & D cadunt duo medij proportionales B C, [8] sic & inter D G cadent duo in eadem ratione. Sed in eadem ratione ostensi sunt esse D ad E, & E ad F. Igitur E F sunt illi medij, ac proinde est E ad F, vt F ad G. & omnes A B C D E F G. sunt continuè proportionales. Quod demonstrandum erat. Hinc porro specierum multiplicatio demonstratur. Primo enim ex Numero B in seipsum fieri quadratum C, itémque ex Numero B in quadratum C. fieri cubum D, patet ex definitione prima. Secundò ex Numero B. in cubum D, fieri quadratoqua-

Definit. 1. A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

Definit. 1.

Definit. 1.

8. *octaui.*

Definit. 1.

8. *octaui.*

Definit. 1.

8. *octaui.*

A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

dratum E probatur. Quia enim per præcedens theorema ipſi A B C D E ſunt continuè proportionales, erit A ad B, vt D ad E. Quare qui ſub extremis A E continetur, æquatur ei qui ſub mediis B D. ſed ex vnitate A in E fit ipſemet E. ergo idem E fiet ex B in D. quod erat propoſitum. Tertio dico ex Numero B in ſuum quadratoquadratum E fieri quadratocubum F, quia enim eſt A ad B vt E ad F, numerus qui fit ex A in F, nempe ipſe F æquatur ei qui fit ex B in E. Quòd erat propoſitum. Quartò dico ex Numero B in ſuum quadratocubum F, fieri cubocubum G. Nam vt prius cùm ſit A ad B. vt F ad G. fiet idem G ex A in G, vel ex B in F. Quod erat intentum. Quintò ex quadrato C in ſeipſum, fieri quadratoquadratum E, patet ex definitione prima, ſicut & ex eodem quadrato C in cubum D fieri quadratocubum E. Sextò ex quadrato C in quadratoquadratum E fieri cubocubum G ſic probatur. Quia ob continuam proportionalitatem, vt A ad C, ſic eſt E ad G, idem G fiet ex A in G, vel ex C in E. Quod erat propoſitum. Denique ex cubo D in ſeipſum, fieri cubocubum G. patet ex definitione prima. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum. *19. ſeptimi.*

DEFINITIO V.

OMNIS numerus in partem ſibi cognominem multiplicatus, vnitatem producit.

Πᾶς ἀριθμὸς ὅτι τὸ ὁμώνυμον αὐτῷ μόριον πολλαπλασιασθεὶς, μονάδα ποιεῖ.

IN DEFINITIONEM V.

HIC præclarè nugatur Scholiaſtes, cùm putat in hac definitione loqui Diophantum de fractionibus abſolutis, & nulla ſpeciei alicuius nota affectis, quaſi docere velit ex $\frac{1}{3}$ in 3. vel ex $\frac{1}{4}$ in 4. fieri vnitatem, quod quid ad logiſticam conferat, non video, ſed ſanè vulgò Arithmeticorum notum eſt, atque ipſis lippis & tonſoribus, vt geometrica demonſtratione, opus non fuerit ad id confirmandum. Cæterùm non id voluit Diophantus, ſed potius fractiones Algebricas illas, in quibus vnitates per aliquam ſpeciem diuiſæ intelliguntur, ductas in ſpeciem à qua denominantur, producere vnitates abſolutas, vt ſi $\frac{1}{2N}$ ducatur in 4. N. fient 2. vnitates abſolutæ, & ſi $\frac{2}{3Q}$ ducantur in 6. Q. fient 4. vnitates abſolutæ, & ſi $\frac{2}{5C}$ ducantur in 10. C. fient 2. vnitates. Et hanc eſſe Diophanti mentem ex definitione octaua manifeſtè colligitur. Cùm enim ibi multiplicationes huiuſmodi fractionum tradat, non docet quid producatur ſi fractio ducatur in ſpeciem à qua denominatur, quia ſcilicet id iſta definitione iam comprehenderat.

DEFINITIO VI.

ENIMVERÒ cùm vnitas immutabilis ſit, ſempérque maneat ſpecies quælibet in eam multiplicata, eandem generat ſpeciem.

Τῆς οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης, καὶ ἑσώσης ἀεὶ τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσαι.

IN DEFINITIONEM VI.

NON melius accepit hanc definitionem Scholiaſtes, quàm præcedentem & ſequentes duas, quod ſemel atque iterum monuiſſe ſufficiat. Exiſtimauit enim in iſtis quatuor definitionibus Diophantum loqui de numeris & fractionibus abſolutis, quod à ſcopo illius prorſus alienum eſt. Hîc itaque docet Diophantus, vnitates ductas in ſpeciem quamlibet, ipſammet ſpeciem producere, vt ſi 2. ducantur in 3. N. fient 6. N. Et ſi 4. ducantur in 5. Q. fient 20. Q. & ſic de aliis. Cauſam autem aſſignare videtur, quòd vnitates abſolutæ, vnitatis ipſius naturam ſapiant. Quemadmodum ergo vnitas in quemlibet numerum ducta, producit ipſum eundem numerum, ſic & vnitates in quamlibet ſpeciem multiplicatæ, eandem ſpeciem gignunt.

DEFINITIO VII.

AT partes denominatæ ſi inter ſe multiplicentur, partes producunt ipſis numeris cognomines. Verbi gratia pars numerica in partem numericam ducta, quadraticam gignit; in quadraticam,

Τὰ δὲ ὁμώνυμα μόρια ἐφ' ἑαυτὰ πολλαπλασιαζόμενα, ποιήσει ὁμώνυμα μόρια τοῖς ἀριθμοῖς. οἷον τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ὅτι τὸ ἀριθμοστὸν, δυναμοστὸν ποιεῖ. ὅτι δὲ δυναμοστὸν, κυβοστόν. ὅτι δὲ κυβοστὸν, δυναμοδυναμοστόν.

ὅπι δὲ δυναμοδυναμοστὸν, δυναμοκυβοστόν. ὅπι ὃ δυναμοκυβοστὸν, κυβοκυβοστὸν, καὶ τοῦτο ὁμωνύμως συμβλήσεται. δυναμοστὸν δὲ ὅπι μὸν ἀριθμοστὸν, κ^ν ποιεῖ. ὅπι δὲ δυναμοστὸν, δδ^ς. ὅπι δὲ κυβοστὸν, δκ^ς. ὅπι δὲ δδ^ς, κκ^ς. τὸ ὃ κυβοστὸν, ὅπι μὸν ἀριθμοστὸν, ποιεῖ δδ^ς. ὅπι ὃ δ^ς, δκ^ς· ὅπι ὃ κ^ς, κκ^ς. τὸ δὲ δυναμοδυναμοστὸν, ἐπὶ μὸν ἀριθμοστὸν, δκ^ς ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, κκ^ς. τὸ δὲ δυναμοκυβοστὸν, ἐπὶ ἀριθμοστὸν, κυβοκυβοστόν.

cubicam; in cubicam, quadratoquadraticam; in hanc, quadratocubicam; in hanc cubocubicam; idque communicata denominatione continget. Pars verò quadratica, in partem numericam, partem cubicam facit; in quadraticam, quadratoquadraticam; in cubicam, quadratocubicam; in quadratoquadraticam, cubocubicam. Pars autem cubica in numericam, partem facit, quadratoquadraticam; in quadraticam, quadratocubicam; in cubicam, cubocubicam. Sed pars quadratoquadratica in numericam, partem facit quadratocubicam; & in quadraticam, cubocubicam. Denique pars quadratocubica in numericam, partem gignit cubocubicam.

IN DEFINITIONEM VII.

HÆc definitio à quarta pendet. Quemadmodum enim ibi numerorum integrorum à speciebus denominatorum multiplicationes docuit, ita & hîc fractionum ab iisdem speciebus denominatarum multiplicationes tradit, quarum eadem est prorsus ratio. Nam sicut verbi gratia 2. N. in 3. N. faciunt 6. Q. ita $\frac{1}{2}$ N. in $\frac{1}{3}$ N. facit $\frac{1}{6}$ Q. & sicut 3. N. in 4. Q. faciunt 12. C. sic $\frac{2}{3}$ N. in $\frac{3}{5}$ Q. faciunt $\frac{4}{15}$ C. & sic de aliis. Itaque quæ demonstrata sunt ad definitionem quartam, hîc etiam locum habent.

DEFINITIO VIII.

ΠΑΛΙΝ δὲ τὸ μὸν ἀριθμοστὸν ἐπὶ μὸν δύναμιν, ἀριθμὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ κύβον, δύναμιν, ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κύβον. ἐπὶ δυναμόκυβον, δυναμοδύναμιν; ἐπὶ κυβόκυβον, δυναμόκυβον. δυναμοστὸν ὃ ἐπὶ μὸν ἀριθμὸν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν δύναμιν, ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κύβον. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δυναμοδύναμιν. κυβοστὸν δὲ ἐπὶ μὸν ἀριθμὸν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, δύναμιν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, κύβον. δυναμοδυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὸν ς^ν, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοστὸν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, ἀριθμόν. τὸ δὲ κυβοκυβοστὸν ἐπὶ μὸν ἀριθμόν, δυναμοκυβοστόν. ὅπι δὲ δύναμιν, δυναμοδυναμοστόν. ὅπι δὲ κύβον, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμοστόν.

RVRSVS fractio numerica in quadratum ducta, numerum gignit; in cubum, quadratum; in quadratoquadratum, cubum; in quadratocubum, quadratoquadratum; in cubocubum, quadratocubum. Fractio verò quadratica in numerum ducta, Fractionem numericam producit; in cubum, numerum; in quadratoquadratum, quadratum; in quadratocubum, cubum; in cubocubum, quadratoquadratum. Fractio cubica ducta in numerum, fractionem quadraticam gignit; in quadratum, fractionem numericam; in quadratoquadratum, numerum; in quadratocubum, quadratum; in cubocubum, cubum. Fractio quadratoquadratica in numerum ducta, producit fractionem cubicam; in quadratum, fractionem quadraticam; in cubum, fractionem numericam; in quadratocubum, numerum; in cubocubum, quadratum. Fractio quadratocubica in numerum ducta, fractionem facit quadratoquadraticam; in quadratum, fractionem cubicam; in cubum, fractionem quadraticam; in quadratoquadratum, fractionem numericam; in cubocubum, numerum. Fractio cubocubica in numerum ducta, fractionem gignit

quadratocubicam; in quadratum, fractionem quadratoquadraticam; in cubum, fractionem cubicam; in quadratoquadratum, fractionem quadraticam; in quadratocubum, fractionem numericam.

IN DEFINITIONEM VIII.

TANGIT hîc aliud genus fractionum, quæ fiunt cùm numerus à specie inferiori denominatus diuisus intelligitur, per numerum ab altiori specie denominatum, vt si vnitates per Numeros diuidantur, fit fractio Numerica, qualis est $\frac{2}{3}$N. Et si vnitates per quadratos diuidantur, fit fractio quadratica, vt $\frac{3}{4}$Q, & sic de aliis. Differunt ergo re fractiones istæ ab iis de quibus actum est superiore definitione, quamuis vtrasque iisdem nominibus appellet Diophantus. Nam in illis speciei denominatio afficit Numeratorem, in istis denominatorem, verbi gratia si dicas $\frac{1}{3}$ N. intelligis 2. N. diuidi per 3. At si dicas $\frac{2}{3}$N intelligis 2. diuidi per 3. N. vtramque tamen fractionem Diophantus ἀριθμοστὸν vocat, similiter $\frac{1}{4}$ Q. & $\frac{3}{4}$Q vocat δυναμοστὸν communi nomine, & sic de aliis. Ratio verò multiplicandi fractiones istas, tota pendet à ratione diuidendi species inter se. Porrò diuisio multiplicationi contraria est, quamobrem, vt monet Diophantus definitione decima, cognitis specierum multiplicationibus, cognoscuntur & diuisiones: sicut enim verbi gratia Numerus in Numerum ductus producit Quadratum, ita si Quadratus per Numerum diuidatur, orietur Numerus; & sicut ex Quadrato in Cubum fit Quadratocubus, ita si Quadratocubus per Cubum diuidatur, orietur Quadratus, & rursus si Quadratocubus per quadratum diuidatur, orietur Cubus, & sic de alijs. Hinc patet si fractio numerica $\frac{2}{3}$N ducatur in 2. Q. fieri numerum, nam fit seruata vtraque denominatione $\frac{12}{3}$N quia verò diuidendo Quadratum per numerum, oritur numerus, hoc idem est atque $\frac{4}{3}$ N. Simili argumento rationem reddes omnium quæ hac definitione complectitur Diophantus.

DEFINITIO IX.

MINVS per minus multiplicatum, producit plus. At minus per plus multiplicatum, producit minus. Et defectus nota est litera ψ decurtata, & deorsum vergens, sic ϒ.

ΛΕΙΨΙΣ ὅτι λεῖψιν πολλαπλασιαθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. λεῖψις δὲ ὅτι ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον ψ ἔλλιπὲς κάτω νεῦον ϒ.

IN DEFINITIONEM IX.

ΥΠΑΡΞΙΝ & λεῖψιν, abundantiam & defectum vertere poteramus. Placuit tamen à recentioribus omnibus vsitatis vocabulis dicere Plus & Minus. Et Diophantus quidem vt significet Plus nulla vtitur nota, sed conjunctione tantùm copulatiua. Nos verò in versione nostra, eos qui ante nos Latinè scripserunt, imitati; Plus hoc signo denotabimus +. Minus verò isto−. Ceterùm si cui mirum videatur quod Minus per Minus multiplicatum, efficiat, Plus, & huius rei demonstrationem requirat, legat Petrum Nonium parte 2. suæ Algebræ, cap. 4.

DEFINITIO X.

DECLARATIS ergo multiplicationibus, manifestæ sunt etiam partitiones propositarum specierum. Æquum itaque est eum qui hoc negotij susscipit, in additione, subductione, & multiplicatione quæ speciebus accidunt, exercitatum esse, nimirum qua ratione species quæ adsunt, quæque desunt non eiusdem multitudinis, alijs adiicias speciebus quæ vel adsunt, vel itidem adsunt atque desunt. Et quomodo à speciebus quæ adsunt, & aliis quæ desunt, auferas alias quæ vel adsint, vel itidem adsint atque desint.

ΚΑΙ τὰ πολλαπλασιασμῶν ὁι σαφηνισθέντων, φανεροί εἰσιν ὁι μερισμοὶ τῆς προκειμένων εἰδῶν. καλῶς ἔνεχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας, συνθέσῃ, & ἀφαιρέσῃ, καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γενομένοις. καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα, καὶ λείποντα μὴ ὁμοπληθῆ προθήσεις ἑτέροις εἴδεσιν ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ μὴ ὁμοίως ὑπάρχουσι μὴ λείπουσι. & πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν, & ἑτέρων λειπόντων ἀφαιρήσεις ἕτερα ἤτοι ὑπάρχοντα, ἢ & ὁμοίως ὑπάρχοντα μὴ λείποντα.

IN DEFINITIONEM X.

ADDITIONEM, ſubductionem, multiplicationem, & diuiſionem ſpecierum, cùm diuerſimodè per Plus & Minus copulantur, non perſequitur Diophantus, ſed ſupponit in his jam exercitatum eum qui libros iſtos aggrediatur. Nec ego in re facili diutius immorabor, vide, ſi libet, authores omnes qui logiſticam ſcriptis mandarunt, vt Nicolaum Tartaleam, Petrum Nonium, Chriſtophorum Clauium, aliósque paſſim.

DEFINITIO XI.

ΜΕΤΑ δὲ ταῦτα ἐαν ἀπὸ προβλήματός τινος ζήτηται ὕπαρξις εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς μὴ ὁμοπληθῆ δὲ ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν, δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον ληφθῇ. ἐαν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ὑπάρχῃ, ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐλλείψῃ τινὰ εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη ὑπάρχοντα γένηται. καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ. περιλοτεχνήσω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποτάσεσι τῶν προτάσεων, ἐαν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ. ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται. νῦν δὲ ὅπως τὰς προτάσεις χωρήσωμεν ὁδὸν πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς εἴδεσι συνηθροισμένην ὕλην. πλείστων δ' ὄντων τῶν ἀριθμῶν, καὶ μεγίστων τῷ ὄγκῳ, διὰ τοῦτο βραδέως βεβαιουμένων ὑπὸ τῶν παραλαμβανόντων αὐτά, καὶ ὄντων ἐν αὐτοῖς δυσμνημονεύτων, ἐδοκίμασα τὰ ἐν αὐτοῖς ἁπλούστερα διαιρέσεις, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἔχοντα στοιχειωδῶς, ἀπὸ ἁπλουστέρων ἐπισκολιώτερα διελεῖν, ὡς προσῆκεν. οὕτω γὰρ εὐόδευτα γενήσεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῆς πραγματείας αὐτῆς ἐν τεισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης.

DEINDE ſi in aliqua quæſtione tractanda eædem ſpecies adſint ex vtraque parte non æquali multitudine, auferenda ſunt ſimilia à ſimilibus, donec vna ſpecies vni ſpeciei æqualis remaneat. Quod ſi in vtraque parte, vel in altervtra deſint quædam ſpecies, quædam adſint, quæ deſunt vtrinque addenda ſunt, dum ſpecies eædem vtrinque inueniantur; rurſumque vtrimque auferenda ſimilia à ſimilibus, tantiſper dum ab vtraque parte vna ſpecies relinquatur. Atque hoc accuratè in ipſis quæſtionum poſitionibus, quoad detur, conabere efficere, vſque dum vna ſpecies vni ſpeciei æqualis deprehendatur. Poſterius autem tibi commonſtrabimus quomodo quæſtio explicetur, etiam cùm duæ ſpecies vni æquales relinquuntur. Nunc verò ad ipſas quæſtiones accedemus, cùm nobis via abundè pateat, ob materiam ab ipſis ſpeciebus collectam. Cùm autem plurimi ſint numeri, & mole ingentes, atque ideo tardè comprehendantur ab iis qui huic ſtudio incumbunt, nec valent memoria; ſtatui quæ ex iis ita decerpi poſſunt, ita vt maximè in tractationis principio elementorum partes ſuſtineant, primo loco proponere, & à ſimplicioribus ad perplexiora progredi. Sic enim incipientibus ea fient penetratu faciliora, & in memoria eorum hærebit deductio, pertractatione eorum libris tredecim incluſa.

IN DEFINITIONEM XI.

ÆQUATIO, eſt vnicum medium quo vtitur Logiſtica ad quæuis ſoluenda problemata, tali artificio ignotam quantitatem, notæ alicui comparando, vt tandem inter eas æqualitatem deprehendat, & ſic in agnitionem ignotæ perueniat. Vt autem docet hîc Diophantus, non quælibet æquatio ſtatim apta eſt ſoluendæ propoſitæ quæſtioni, ſed magna interdum indiget præparatione quò fiat ſimpliciſſima, ita vt ſi fieri poteſt vna tantum ſpecies vni ſpeciei, vel duæ, vni æquales reperiantur. Totum verò negotium præparationis æquationum in eo conſiſtit, vt defectus communiter addantur, & ſimilia à ſimilibus auferantur, & ſi vtraque æquationis pars altioris gradus ſpecies

ſpecies contineat, fiat hypobibaſmus, ſeu deſcenſus quidam, vel depreſſio characterum, vt vocat Xilander, omnia diuidendo per infimæ ſpeciei denominationem. Quæ omnia vt vnico exemplo confirmem, ſint 2. C. + 3. N. æquales 9. N. — 4. Q. Quia ergo deficiunt ex altera parte 4. Q. addantur vtrimque 4 Q. fient 2 C. + 3. N. + 4 Q. æquales 9. N. quia verò ſimiles ſpecies, nempe Numeri vtrimque reperiuntur, auferantur vtrimque 3. N. remanent igitur 2. C. + 4. Q. æquales 6. N. Denique quia ſpecies altioris gradus ex vtraque parte reperiuntur, quæ omnes depreſſionem pati poſſunt, diuidatur vtraque pars per infimam ſpeciem quæ hîc eſt 1. N. Fient ergo 2. Q. + 4. N. æquales 6. vnitatibus. Et tunc demum æquatio cenſebitur ritè præparata. Præterea Paraboliſmum addit Franciſcus Vieta in libello aureo cui titulus. Iſagoge in artem Analyticen, cuius præſertim vſus eſt in æquationibus compoſitis, qualis eſt illa quam exhibuimus, quique fit diuidendo ſingulas æquationis partes per vnitates altioris ſpeciei, vt in dato exemplo diuidendo eas per numerum Quadratorum, qui eſt 2. fiunt 1 Q. + 2 N. æquales 3. ſed hac methodo non vtitur Diophantus, qui æquationes compoſitas reſoluit abſque huiuſmodi reductione numeri altioris ſpeciei ad vnitatem, vt ſuo loco docebimus. Porrò hæc omnia tribus tantum nituntur principijs, nimirum.

Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent ſunt æqualia.

Si æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.

Si æqualia per eundem numerum diuidantur, fiunt æquales quotientes.

Hæc breuiter cum Diophanto attigiſſe ſufficiat, qui plura deſiderat, legat Vietam libro citato, vbi breuiter, ſed accurratè more ſuo iſta perſequitur.

Cæterùm æquatione ritè præparata, quomodo ea reſoluenda ſit, vt ignota quantitas innoteſcat, non tradit Diophantus, & cùm hîc polliceatur ſe daturum regulas quomodo explicetur quæſtio, cùm duæ ſpecies, vni æquales reperiuntur, in libris eius qui extant huiuſmodi regulæ non continentur, ita vt videatur regulas omnes Algebræ quas vocat, ſuppoſuiſſe, vt pote notas (nam iis paſſim vtitur in his libris) vel alio opere edito qui ad nos minimè peruenit, eas tradidiſſe. Equidem regulis ſimplicibus tantum (cùm ſcilicet vna ſpecies vni ſpeciei æquatur) in tribus prioribus libris vtitur: in ſequentibus verò ad compoſitas etiam nonnunquam deuoluitur. Simplices vnica regula comprehenduntur quæ talis eſt.

Facto hypobibaſmo ſi opus ſit, ita vt vnitates alicui ſpeciei æquales remaneant, diuidantur vnitates per numerum à ſpecie denominatum, orietur valor illius ſpeciei.

Vt ſi 3. N. æquentur 12. vbi nullo eſt opus hypobibaſmo, diuide 12. per 3. fit 4. valor vnius numeri. At ſi 2. æquentur 10. N. Facto hypobibaſmo 2. N. æquantur 10. vnde facta diuiſione, prodit 5. valor vnius numeri. Quod ſi 2. C. æquentur 18. N. facto hypobibaſmo, 2. Q æquantur 18. vnde diuidendo 18. per 2. fit 9. valor vnius quadrati, & extracta radice fit 3. valor Numeri. Et ſic de aliis. Huius regulæ fundamentum totum eſt Regula aurea proportionum, ſeu trium, in qua tertius terminus eſt vnitas, vnde ſola diuiſione opus eſt. Nam verbi gratia in vltimo exemplo, dico per regulam trium, ſi 2. Q. æquantur 18. cui numero æquatur 1. Q? vnde patet diuiſo 18. per 2. quotientem 9. eſſe valorem Quadrati. De compoſitis regulis agemus ad propoſitionem 33. libri huius, vbi earum fundamentum tangit Diophantus. Nam piget diutius immorari in re facili, & vulgo etiam Logiſtarum notiſſima.

QVÆSTIO I.

PROPOSITVM numerum in duos numeros partiri, quorum datum ſit interuallum. Eſto datus numerus 100. interuallum verò 40. oportet inuenire numeros. Statuatur minor 1. N. Maior ergo erit 1. N. & 40. vnitates. Igitur vterque ſimul erit 2. N. + 40. Dabantur autem eſſe 100. Proinde vnitates 100. æquales ſunt 2. N. + 40. Aufero ſimilia à ſimilibus, nimirum aufero 40. vnitates, & à 100. & à 2. N. + 40. relinquuntur 2. N. æquales vnitatibus 60. Ergo alter numerorum eſt 30. Ad poſitiones. Erit minor quidem vnitatum 30. maior verò vnitatum 70. & demonſtratio eſt manifeſta.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἔστω γὰρ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες τεσσαράκοντα, δεήσει εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἑνὸς, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμὸς ἑνὸς μονάδων μ̄ συναμφότεροι ἄρα γίνονται ἀριθμοὶ δύο, μονάδες μ̄. δέδονται δὲ μονάδες ρ̄. μονάδες ἄρα ρ̄. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶ μονάσι μ̄, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ρ̄ μονάδας μ̄, καὶ ἀπὸ τοῦ δύο ἀριθμοῦ καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̄. λοιποὶ ἄρα ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσιν ξ̄. ἑκάτερος ἄρα γίνεται ἀριθμὸς μονάδων λ̄. ἐπὶ τὰς ὑποκειμένας. ἔστω ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων τριάκοντα. ὁ δὲ μείζων μονάδων ο̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est, & nihil continet quod lectorem morari debeat. Verba autem illa ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, quæ longa periphrasi vertit Xilander, & aliquando etiam perperam, vt suo loco monebimus, ego passim interpretatus sum, Ad Positiones: vel etiam retento Græco vocabulo. Ad Hypostases. Semper enim inuento valore numeri, propositionem his verbis absoluit Diophantus, quia videlicet vt propositæ quæstionis habeatur perfecta solutio, oportet valorem numeri ad positiones applicare, vt hoc loco, Cùm inuenerimus valorem Numeri esse 30. quia Minor pars propositi numeri posita erat 1. N. erit ea 30. Maior verò quæ posita erat 1. N. + 40. erit vtique 70. & sic numerus 100. diuisus est in duas partes 30. & 70. quarum interuallum 40. vt requirebatur. Poterant etiam positiones aliter institui hac arte. Ponatur maior pars 1. N. erit ergo minor 1. N. −40. harum aggregatum est 2 N.−40. quod æquari debet numero 100. Quare addendo vtrimque 40. fiunt 2. N. æquales 140. vnde fit 1 N. 70. Ad hypostases. Erit maior pars 70. Minor 30. vt priùs. Ex vtraque autem operatione elicitur huiusmodi Canon.

Dato numero diuidendo, adde vel adime datum interuallum, semissis summæ majorem partem; semissis residui, minorem exhibebit.

Qui Canon à nobis syntheticè demonstratus est propos. 23. lib. 1. porismatum Aliter etiam rursus poterant institui positiones. Statuatur interuallum quæsitarum partium 2. N. Maior verò pars esto 50. + 1 N. minor 50 − 1 N. sic enim vtraque simul conficit 100. & interuallum ipsarum est 2. N. quod æquatur numero 40. Quare fit 1. N. 20. Ad positiones. Maior pars quæ posita erat 50 + 1 N erit vtique 70. Minor verò quæ posita erat 50 − 1 N. erit 30. & hinc rursus elicietur alius Canon.

Semißi dati numeri diuidendi, adde vel adime semissem dati interualli, summa & residuum quæsitas exhibebunt partes.

Porro ex vtroque Canone manifestè colligitur, si solutio in integris contingere debeat, necesse esse vt Numerus diuidendus, & datum interuallum, sint simul pares numeri, vel simul impares, nam si alter sit par, alter impar; tam eorum summa, quam quod restat minorem de maiori subtrahendo, erit impar numerus. Quare nec summæ nec residui semissis in integris haberi poterit. Quod tangere voluit Scholiastes. Denique moneo eodem artificio datum quemlibet numerum diuidi in quotlibet partes, quarum interualla data sint. Verbi gratia. Numerus 100. diuidendus sit in tres partes, ita vt mediæ suprà minimam excessus sit 20. maximæ supra mediam excessus sit 24. Ponatur minima 1 N. erit ergo media 1 N + 20. maxima verò 1. N. + 44. Harum summa est 3 N. + 64. æqualis 100. Quare auferendo vtrimque 64. remanent 3 N. æquales 36. & fit 1 N. 12. Ad positiones. Erit minima pars 12. Media 32. Maxima 56. Hinc quoque si placet eliciemus hunc Canonem.

Aufer à numero diuidendo summam interuallorum cuiuslibet partis supra minimam, residuum partire in numerum multitudinis partium, orietur minima pars.

Vnde constat, vt quæstio sit possibilis, summam interuallorum cuiuslibet partis suprà minimam, minorem esse debere numero diuidendo. Cæterùm duobus alijs modis institui possunt positiones, pro vt media vel maxima pars statuetur 1 N. & hinc rursus formari alij Canones, quæ omnia industriæ tuæ relinquo.

QVÆSTIO II.

ΤΟΝ ὑποκείμενον ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. ὑποκείσθω δὴ ὁ ξ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τριπλασίονι. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμὸς τριῶν ἐστιν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων. δεῖ λοιπὸν τοὺς δύο ἴσους εἶναι μονάσιν ξ. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες. ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ἴσοι μονάσιν ξ. ὁ ἀριθμὸς ἄρα μονάδων ιε. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μονάδων ιε. ὁ δὲ μείζων μ̄ με.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in ratione data. Constitutum sit numerum 60. partiri in duos numeros in ratione tripla. Statuatur minor 1. N. igitur maior erit 3. N. & est maior minoris triplus. Superest vt ambo simul æquentur vnitatibus 60. sed ambo compositi sunt 4 N. Proinde 4 N. æquales sunt vnitatibus 60. est ergo 1. N. vnitatum 15. Quamobrem minor est 15. maior autem 45.

IN QVAESTIONEM II.

ALITER etiam institui possunt positiones. Statuatur maior 1. N. Ergo minor $\frac{1}{3}$ N. horum summa 1 $\frac{1}{3}$ N. æqualis est 60. & fit 1. N. 45. Tantus ergo est major, minor verò 15. vt prius. Ex vtraque operatione formatur hic Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum ſummam diuide datum numerum. Quotiens ductus ſigillatim in ſumptos numeros, exhibebit quæſitas dati numeri partes.

Minimos numeros ſumendos eſſe ait Xilander. Sed neceſſe non eſt, niſi facilitatis gratia, quia minores numeri commodius tractantur.

Poteſt & hæc quæſtio extendi ad diuiſionem dati numeri in quotlibet partes, datas rationes ſeruantes, eritque eadem prorſus operatio, & idem Canon, vt ſuperuacaneum ſit id exemplis illuſtrare.

QVÆSTIO III.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in data ratione, & data differentia. Conſtitutum ſit numerum 80. in duos partiri, ita vt maior minoris triplus ſit, & adhuc 4. vnitates ſuperaddat. Statuatur minor 1 N. erit igitur maior 3 N. +4. & ſic maior minoris triplus eſt, & adhuc quatuor vnitates ſuperaddit. Reſtat vt ambo ſimul æquentur vnitatibus 80. ſed ambo ſimul iuncti faciunt 4 N. +4. Igitur 4 N. +4. æquales ſunt vnitatibus 80. Aufero ſimilia à ſimilibus. Relinquuntur ergo vnitates 76. æquales 4. N. & fit 1 N. 19. Ad poſitiones. Erit igitur minor numerus 19. Maior autem 61. ad triplum minoris adiectis 4. quæ de 80. ſubduxeram, vt triplorum numerorum inuenirem quantitatem. Poſtea verò eadem 4. adiicio maiori, vtriuſque quantitate cognita.

ΤΟΝ ὁπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ ᾗ ὑπεροχῇ τοῖς δοθεῖσιν. ὁπιτετάχθω τὸ $\bar{\pi}$ διῃρῆν εἰς δύο ἀριθμους, ἵνα ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ξιπλασίων ᾖ, ᾗ ἔτι μονάσι τέταρσιν ὑπερέχῃ. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἑνός. ὁ μείζων ἄρα ἀριθμοὶ τρεῖς ᾗ μονάδες τέσσαρες. ᾗ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν τριπλασίων, ἔτι ℂ μονάσι τέταρσιν ὑπερέχει. λοιπὸν τοὺς δύο θέλω ἴσους εἶναι μονάσιν $\bar{\pi}$. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες ℂ μονάδες $\bar{\delta}$, ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ℂ μονάδες $\bar{\delta}$, ἴσοι μονάσιν $\bar{\pi}$, καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπαὶ ἄρα μονάδες οϛ ἴσαι ἀριθμοῖς τέσσαρσι, ᾗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϑ. ὅπερ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς $\bar{\mu\eta}$ ιϑ. ὁ δὲ μείζων $\bar{\mu\eta}$ ξα. τοσοῦτοι γάρ $\bar{\delta}$ $\bar{\mu\eta}$, ὧν ἀφεῖλον ἀπὸ τῶ $\bar{\pi}$ $\bar{\mu\eta}$. ἀφεῖλον γὰρ ὥστε εὑρεῖν πόσων μονάδων ἕσαι ἕκαστος ἀριθμός. ὕστερον ᾧ τῷ μείζονι ἀριθμῷ προσέθημα τὰς $\bar{\delta}$ $\bar{\mu\eta}$. μετὰ τὸ γνῶναι πόσων ἕκαστος.

IN QVAESTIONEM III.

IN Græco, vbi ſcriptum erat ἐν λόγῳ ℂ ὑπεροχῇ τῆς δοθείσης repoſui, τοῖς δοθεῖσιν, flagitante ſententia. Cæterum hîc etiam aliter inſtitui poteſt operatio, ſi ponatur Maior 1 N. vnde auferendo 4. remanet 1 N. −4. triplum minoris, Minor ergo eſt $\frac{1}{3}$ N. −1$\frac{1}{3}$ vtriuſque ſumma fit 1$\frac{1}{3}$ N −1$\frac{1}{3}$ æqualis 80. & defectum vtrimque adiiciendo 1$\frac{1}{3}$ N. æquatur 81. $\frac{1}{3}$ Quare fit 1 N. 61. maior numerus. Minor verò 19. vt prius.

Verùm ex operatione Diophanti formabitur iſte Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum ſummam diuide datum numerum dato interuallo multatum; quotientem ſi ducas in minorem ſumptorum, fiet minor quæſitorum.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros qui & datam rationem, & datum ſeruent interuallum. Mandatum ſit maiorem minoris eſſe quincuplum, interuallum autem ipſorum eſſe vnitates 20. ſtatuatur minor 1 N. Maior ergo erit 5 N. Supereſt 5 N. excedere 1 N. vnitatibus 20. At horum interuallum eſt 4 N. hoc igitur æquale eſt vnitatibus 20. & fit 1 N. 5.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμους ἐν λόγῳ δοθέντι, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ὅπως δοθήσεϑ. ὁπιτετάχθω δὴ τὸ μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι πενταπλασίονα, τὴν δ' ὑπεροχὴν αὐτοῖς ποιεῖν μονάδας $\bar{\kappa}$. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἔσαι ἀριθμοὶ $\bar{\epsilon}$. λοιπὸν θέλω ἀριθμους $\bar{\epsilon}$ ὑπερέχειν ἀριθμῷ ἑνὸς μονάδας $\bar{\kappa}$. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστιν ἀριθμοὶ $\bar{\delta}$. ταῦτα ἴσα μονάσιν $\bar{\kappa}$. [ᾗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς $\bar{\epsilon}$] ἔσαι ὁ

ἐλάσσων ἀριθμὸς μ° ε̄. ὁ δὲ μείζων μονάδων κε̄. καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν πενταπλασίων, ἡ δὲ ὑπεροχὴ γίνεται μονάδων κ̄.

Eritque minor numerus vnitatum 5. Maior autem vnitatum 25. ita maiore minoris quincuplo existente, interuallum est 20.

IN QVAESTIONEM IV.

QVADRVPLICITER institui potest operatio. Primò vt habetur apud Diophantum. Secundò sic. Ponatur Maior 1 N. ergo minor $\frac{1}{5}$ N. Horum interuallum $\frac{4}{5}$ N. æquatur 20. & fit 1 N. 25. maior numerus. Ergo minor 5. vt prius. Ex vtraque autem harum operationum iste Canon elicitur.

Sume duos numeros in ratione data, & per horum interuallum diuide datum interuallum, quotiens ductus in sumptos numeros, quæsitos exhibebit.

Tertiò sic operabere. Esto minor 1 N. ergo maior 1 N. + 20. qui cùm sit minoris quincuplus, erunt 5 N. æquales 1 N. + 20. & tandem 4 N. æquantur 20. vel 1 N. æquatur $\frac{1}{5}$ N. + 4. & tandem $\frac{4}{5}$ N. æquantur 4. & vtroque modo fit 1. N. 5. minor numerus. vnde maior est 25. vt prius.

Quartò, esto maior 1 N. ergo minor 1 N. − 20. qui cum sit quinta pars maioris, fiet $\frac{1}{5}$ N. æqualis 1 N. − 20. vel 1 N. æqualis 5. N. − 100. & vtraque æquatione resoluta, fit 1 N. 25. maior numerus, vnde minor est 5. vt prius. Hinc etiam alius Canon elici posset. Quod tibi considerandum relinquo.

QVÆSTIO V.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπερ ἑκατέρων τῶν διηρημένων τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη συντεθέντα ποιεῖ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον δίδοσθαι ὥστε εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν γινομένων δύο ἀριθμῶν ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, ὅπερ τὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἐπὶ τὸ αὐτὸ συντεθέντα ποιεῖ μ° λ̄. τάσσω τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςς̄ ε̄. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου τρίτον ἔσται μονάδων λ̄ λείψει ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων ϟ. λείψει ςς̄ τριῶν. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄, ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δύο. καὶ μονάδας ϟ. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἄρα μονάδες δέκα ἴσαι ἀριθμοῖς δυσίν. ὁ ς̄ ἄρα ἔσται μονάδων ε̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνὸς, ἔσται μονάδων ε̄. αὐτὸς ἄρα μονάδων κε̄. τὸ δὲ τοῦ πρώτου τρίτον μονάδων λ̄ λείψει ἀριθμοῦ ἑνὸς ἔσται μονάδων κε̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται μονάδων οε̄. καὶ μένει τὸ τοῦ πρώτου τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον μονάδες λ̄. ὥσπερ κοινῇ συντεθέντα ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

PROPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt horum vtriusque, non tamen eædem, datæ partes si coniungantur, datum conficiant numerum. Oportet autem talem hunc dari qui sit in medio duorum numerorum qui fiunt, si numeri ab initio propositi præscriptæ partes accipiantur. Imperatum sit partiri 100. in duos numeros, vt primi tertia pars, & secundi quinta pars si coniungantur, conficiant 30. Statuam secundi quintam partem 1 N. ipse igitur erit vnitatum 30 − 3 N. atque adeo ipse primus fiet vnitatum 90 − 3 N. Reliquum est vtrumque simul conficere vnitates 100. At ambo iuncti conficiunt 2 N. + 90. Hæc igitur æqualia sunt vnitatibus 100. Aufero similia à similibus. Restant igitur vnitates 10. æquales 2 N. ergo fit 1 N. 5. Ad positiones. Statueram secundi quintam partem 1 N. erit igitur hæc vnitates 5. atque ideo ipse secundus 25. At primi triens erat 30 − 1 N. est igitur 25. atque ipse primus 75. Et primi quidem tertia, secundi verò quinta pars simul additæ conficiunt numerum 30. prout imperatum erat.

IN QVAESTIONEM V.

HIc duas veluti conditiones apponit Diophantus. Prima est non sumendas esse easdem partes vtriusque segmenti. Quod necessarium est, non vt quæstio sit possibilis, sed vt sit alicuius momenti. Nam si eædem partes vtriusque segmenti petantur, hoc idem erit atque diuidendi numeri partem eandem sumere. Vt si postuletur duo segmenta de 100. fieri, vt vtriusque quinta pars numerum certum conficiat, patet non alium esse posse numerum illum quam 20. qui est quinta pars ipsius 100. quia scilicet idem est sumere quintam partem totius numeri, atque sumere quintam partem singulorum segmentorum illius. Itaque in huiusmodi casu, datus numerus quem debent conficere præscriptæ partes quæsitorum segmentorum, semper idem erit, nimirum eadem pars totius diuidendi numeri vt dictum est. At segmenta ipsa duo quilibet numeri in quos secabitur diuidendus numerus, & sic infinitas solutiones recipiet quæstio; & absque vllo negotio secando propositum numerum in duos quoslibet, satisfactum erit proposito. Secunda conditio prorsus necessaria, est, Numerum quem conficere debent datæ partes quæsitorum segmentorum debere esse in medio partium earundem propositi numeri. Quod ne sola experientia cum Xilandro cognoscamus, hoc argumento probabimus. Sit A. propositus numerus secandus in duos, vt vnius pars ab B. denominata, & alterius pars à C denominata, si coniungantur, fiat D. sitque B. maior quàm C. & ipsius A. partes eædem sint E. F. dico D. necessariò cadere in E. & F. seu esse minorem quidem ipso E. maiorem verò ipso F. Quia enim vt dictum est suprà, si vtriusque segmenti ex A. sumeretur eadem pars B. esset partium summa æqualis ipsi E. patet si vnius segmenti sumatur pars B. alterius verò pars minor, puta C summam partium nimirum D. fore minorem ipso E. Rursus si vtriusque segmenti sumatur eadem pars C, erit summa partium æqualis F. Igitur si vnius quidem segmenti sumatur pars C, altérius verò maior pars, puta B. erit vtique summa partium D. maior quàm F. Quare constat propositum. In Græco autem vbi legebatur, ἑαυτῷ δὲ ἐξ ἀρχῆς ὑπαρχόντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ μέρη, legendum censui, ἐαν τῷ ἐξ ἀρχῆς &c. μὴ τὰ αὐτὰ μέρη.

E 33 1/3 F 20.
A 100.
B 1/3 C 1/7
D 30.

Porro quadruplex instituì potest operatio, vt benè monet Xilander.

Prima est quæ habetur in textu Diophanti, ponendo 1/5 secundi segmenti 1. N.

Secunda fiet si ponatur triens primi segmenti 1 N. tunc enim erit ipsum primum segmentum 3 N. at secundi quintans erit 30 − 1 N. atque adeo ipse secundus fiet 150 − 5 N. vnde vtrumque segmentum faciet 150 − 2 N. æqualia 100. Additòque vtrimque defectu, & auferendo similia à similibus 2. N. æquantur 50. & fit 1 N. 25. primi triens. Reliqua patent.

Tertio, Ponatur primum segmentum 1 N. erit secundum 100 − 1 N. primi triens erit 1/3 N. secundi quintans 20 − 1/5 N. quorum summa 20 + 2/15 N. æquatur 30. & tandem 1/15 N. æquantur 10. fitque 1 N. 75. primum segmentum, secundum 25.

Quarto ponatur secundum segmentum 1 N. erit primum 100 − 1. N. secundi quintans fiet 1/5 N. Primi verò triens 33 1/3 − 2/15 N. quorum summa 33 1/3 − 2/15 N. æquatur 30. & tandem 2/15 N. æquatur 3 1/3 & fit 1. N. 25. secundum segmentum, primum autem est 75. vt prius. Et ex duabus operationibus vltimis quidquid dicat Xilander, Canon fiet non adeo perplexus.

Propositi numeri sume partes similes postulatis partibus, minorem aufer à dato numero quem conficere debent quæsitæ segmentorum partes, à maiori aufer datum numerum, residua sigillatim diuide per interuallum fractionum exprimentium partes postulatas, orientur quæsita segmenta.

Quomodo autem solui possit quæstio si Propositus numerus in plures secandus proponatur, ita vt segmentorum postulatæ partes datum conficiant numerum, non quilibet de vulgo logista doceat. Cùm enim huiusmodi quæstionum genus infinitas, imo infinities infinitas sæpe recipiat solutiones, totum artificium in segmentorum determinatione consistit, quod tradere non pigebit, si prius tyrones monuero ne operam ludant in re fortè captum illorum adhuc superante, sed huius problematis omissa tractatione ad vlteriora progrediantur, donec in Logistica exercitatiores ardua quæque facilè comprehendant.

Sit igitur propositus numerus 100. diuidendus in quatuor numeros, ita vt primi 1/2 secundi 1/3, tertij 1/4, quarti 1/5, hæc omnia simul efficiant 27. Oportet autem præscriptum numerum (puta hîc 27.) cadere inter propositi ad diuidendum numeri maximam & minimam partium similium illis quæ postulantur; hoc est quia maxima pars est 1/2 minima 1/5 sumentes 1/2 & 1/5 de 100. nempe 50. & 20. Oportuit 27. maiorem fuisse quàm 20. minorem quàm 50. cuius rei ratio eadem est quæ supra in conditionis explicatione allata est. Itaque ponatur primum segmentum 1 N. igitur reliqua simul erunt 100. − 1 N. & cùm primi segmenti 1/2 sit 1/2 N. erunt 1/3 secundi, 1/4 tertij, & 1/5 quarti simul 27 − 1/2 N. Itaque iam oportet diuidere 100 − 1 N. in tres numeros, ita vt primi 1/3 secundi 1/4 tertij 1/5 conficiant 27. − 1/2 N. Quare ob appositam conditionem oportet 27 − 1/2 N. cadere inter 1/3 & 1/5 de 100 − 1 N. hoc est oportet

27 − ½ N. esse minus quàm 33. ⅓ − ⅘ N. & maius quam 20 − ⅕ N. & quidē 27 − ½ N. esse minus quàm 33. ⅓ − ⅓ N. luce clarius est. Curandum ergo tantùm vt sit maius quàm 20 − ⅕ N. Hoc autem si ponatur addendo vtrimque ½ N. opportebit 27. esse maius quàm 20 + 3/10 N. & ablatis vtrimque 20. oportebit 7. maius esse quàm 3/10 N. Quare cùm diuidendo 7. per 3/10 fiat quotiens 23 ⅓ Determinatum ergo est de primo segmento, nam statui potest quilibet numerus infrà 23 ⅓ Ponatur ergo 10. erunt itaque reliqua simul 90. & cùm auferendo 5. semissem ipsius 10. de 27. supersint 22. iam diuidendus erit 90. in tres numeros, ita vt primi ⅓ secundi ¼ tertij ⅕ conficiant 22. statuatur primus seu secundum segmentum ipsius 100. 1 N. erunt duo reliqui 90 − 1 N. & cùm primi ⅕ sit ⅓ N. patet ¼ secundi & ⅕ tertij conficere 22 − ⅓ N. Hoc autem vt possibile sit, oportet 22 − ⅓ N. cadere inter ¼ & ⅕ de 90 − 1 N. hoc est oportet 22 − ⅓ N. esse minus quàm 22 ½ − ¼ N. & maius quam 18 − ⅕ N. & primum quidem manifestum est secundum. Autem sic curabimus. Quia 22 − ⅓ N. est maior quàm 18 − ⅕ N. addito vtrimque ⅓ N. manebit 22 maior quàm 18 + 2/15 N. & ablatis vtrinque 18. manent 4. maiora quàm 2/15 N. Quare cùm diuidendo 4. per 2/15 fiat quotiens 30. patet valorem numeri minorem esse debere quàm 30. Itaque posito primo segmento 10. determinatum est etiam de secundo, nam debet esse infrà 30. Ponatur ergo quilibet numerus infrà 30. puta 24. Cùm ergo auferendo 10. & 24. de 100. supersint 66. erit hæc summa tertij & quarti. Cùm verò semissis primi sit 5. & triens secundi 8. sublatis his de 27. remanet 14. pro quadrante tertij & quintante quarti. Diuidatur ergo per propositionem Diophanti numerus 66. in duos, vt vnius quadrans cum alterius quintante conficiat 14. inuenies alterum 16. alterum 50. Quamobrem soluta est quæstio, & sunt numeri 100. quatuor segmenta 10. 24. 16. 50. quæ satisfaciunt postulatis. Manifestum autem est quæstionem infinities infinitas recipere solutiones. Nam vt probatum est, potest primum segmentum poni quilibet numerus infrà 23. ⅓ hi autem ob fractiones infiniti sunt. Deinde sumpto vno ex infinitis illis numeris puta 10. primo segmento manente 10. potest secundum segmentum infinities variari, cùm vt ostensum est poni possit quilibet numerus infrà 30. sed ista sufficiant.

QVÆSTIO VI.

Τὸν ὑπαχθέντα ἀριθμὸν διῖξεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τῷ πρώτου μέρος δοθὲν τῷ ἑτέρῳ μέρει δοθέντος ὑπερέχει δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ δὴ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐλάσσονα εἶναι τῷ γινομένῳ ἀριθμῷ, ἐαν τὸν ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὸ δοθὲν μέρος ἐν ᾧ ἔστιν ἡ ὑπεροχή. ὑπετάχθω δὴ τὸν ρ διῖξεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου τέταρτον τῷ τῷ δευτέρῳ ἕκτου ὑπερέχει μ. κ. τάσσω τὸ τῷ δευτέρῳ ἕκτον ἀριθμῷ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ἀριθμὸς ς τὸ ἄρα τῷ πρώτου τέταρτον ἔσαι ἀριθμῷ ἑνὸς, καὶ μ. κ. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ἀριθμὸς τεσσάρων καὶ μονάδων π. λοιπὸν θέλω τὰς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δέκα, μονάδας π. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἀριθμοὶ δέκα ἴσοι μονάπιν κ. καὶ γίνεται ς μ. β. ὅπι τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τῷ δευτέρῳ ἕκτον ἀριθμῷ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσαι μονάδων δώδεκα. τὸ δὲ τῷ πρώτου τέταρτον, ἀριθμῷ ἑνὸς καὶ μονάδων κ, ἔσαι μονάδων κβ. αὐτὸς ἄρα ἔσαι μ. πη. καὶ μένει τὸ τῷ πρώτου τέταρτον τοῦ τῷ δευτέρῳ ἕκτῳ ὑπερέχον μονάδας κ. οἵτινες κοινῇ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

PROPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt prioris data pars, posterioris datam partem superet dato numero. Hunc autem minorem esse oportet, eo qui fit si propositi ab initio numeri pars illa capiatur, quæ alteram excedit. Constitutum sit ergo partiri 100. in duos numeros, vt prioris quadrans, posterioris sextantem 20. vnitatibus superet. Pono sextantem posterioris 1. N. ipse ergo erit 6. N. Quadrans autem prioris erit 1. N. + 20. Ipse itaque 4. N. + 80. Cæterùm volo duorum summam esse 100. sed vtriusque summa est 10. N. + 80. hæc igitur æquantur vnitatibus 100. Aufero similia à similibus, relinquuntur 10. N. æquales 20. & fit 1. N. vnitatum 2. Ad hypostases. Statueram sextantem posterioris 1. N. Ipse ergo erit 12. At prioris quadrans fuit 1. N. + 20. erit igitur 22. & ipse prior 88. manetque hoc, huius quadrantem sextante illius majorem esse 20. vnitatibus. Ipsi autem coniuncti numeri, propositum restituunt numerum.

IN QVAESTIONEM VI.

CONDITIONIS appositæ ratio in promptu est. Impossibile est enim vt pars aliqua minoris numeri, sit æqualis vel maior eadem parte maioris numeri. Quare cùm diuidendus est 100. in duos hujusmodi numeros, vt prioris quadrans superet sextantem posterioris numero 20. Impossibile est 20. non esse minorem quadrante de 100. Cùm 20. sit minor quadrante vnius segmenti de 100.

Cæterum vt bene monet Xilander sex diuersis operationibus solui poterat quæstio.

Prima est quæ habetur in textu Diophanti, ponendo scilicet sextantem posterioris segmenti 1 N.

Secunda huic respondens est. Si ponatur prioris quadrans 1 N. ipse prior 4 N. vnde fit sextans posterioris 1 N. − 20. ipse posterior 6 N. − 120. qui priori additus summam facit 10 N. − 120. æqualem 100. vnde fit 1. N. 22. prioris quadrans, suntque ipsi numeri vt prius 88. & 12.

Tertia operatio est. Pono primum 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. − 20. est sextans secundi, ipse secundus 1 $\frac{1}{2}$ N. − 120. qui primo additus facit 2 $\frac{1}{2}$ N. − 120. æqualia 100. & fit 1 N. 88. primus scilicet.

Quarta huic respondens est. Pono secundum 1 N. ergo $\frac{1}{8}$ N. + 20. est quadrans primi. ipse igitur primus est $\frac{2}{3}$ + N. 80, qui secundo additus facit 1 $\frac{2}{3}$ N. + 80. æqualia 100. & fit 1 N. 12. secundus numerus.

Quinta operatio est. Pono primum 1 N. ergo secundus est 100 − 1 N. Primi quadrans $\frac{1}{4}$ N. secundi sextans 16 $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{6}$ N. cui addendo 20. fiunt 36 $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{6}$ N. æqualia $\frac{5}{12}$ N. & tandem $\frac{5}{12}$ N. æquantur 36 $\frac{2}{3}$ vnde fit 1 N. 88. vt prius.

Sexta huic respondens est. Pono secundum 1 N. ergo primus est 100. − 1 N. secundi sextans est $\frac{1}{6}$ N. primi quadrans 25 − $\frac{1}{4}$ N. Quare $\frac{1}{6}$ N. + 20. æquantur 25 − $\frac{1}{4}$ N. & tandem 5. æquantur $\frac{5}{12}$ N. vnde fit 1 N. 12. vt suprà.

Ex duabus autem vltimis elicietur huiusmodi Canon.

Propositi numeri sume partes similes postulatis, & minoris adijce datum interuallum, aufer idem interuallum à maiore, summam & residuum partire seorsim per aggregatum fractionum exprimentium partes postulatas, orientur quæsiti numeri.

QVÆSTIO VII.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, vt residui eam seruent quæ dabitur rationem. Iubeamur ab eodem numero auferre 100. & 20. vt maius residuum, minoris sit triplum. Statuatur quæsitus numerus 1 N. ab eo si auferam 100. residuum est 1 N. − 100. & si ab eodem auferam 20. relinquitur 1 N. − 20. Oportet autem residuum maius minoris esse triplum; Ter igitur minus residuum æquatur maiori. Atqui ter minus residuum, fit 3 N. − 300. Hoc ergo æquatur 1 N. − 20. Defectus communis vtrinque addatur, fiunt 3 N. æquales 1 N. + 280. Auferantur à similibus similia; relinquuntur 2 N. æquales vnitatibus 280. & fit 1 N. vnitatum 140. Ad positiones. Numerum quæsitum statueram 1 N. Erit igitur vnitatum 140. & si ab eo abstulero 100. supersunt 40. si autem abstulero 20. restant 120. Et maius residuum minoris est triplum.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ὑπετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν τ̄ ρ̄, καὶ τὸν κ̄. ☾ ποιεῖν τὰ μείζονα τοῦ ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ ζητούμενος, ἀριθμοῦ ἑνός. καὶ μοῦ ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̄ λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς, λείψει μονάδων ρ̄ καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφέλω τ̄ κ̄. λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς λείψει μονάδων κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τοῦ ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τρὶς δὴ ἄρα τὰ ἐλάσσονα γίνεται ἀριθμοὶ γ̄. λείψει μ̄ τ̄ ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ λείψει μονάδων κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις. γίνονται ἀριθμοὶ γ̄ ἴσοι ϛ̄ ἑνὶ ☾ μονάδι σπ̄. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ϛ̄ δύο ἴσοι μονάδι σπ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ρμ̄. ὑπὸ τὰς ὑποσάσεις. ἔταξα τ̄ ζητούμενον ἀριθμὸν ϛ̄ ἑνός. ἔσται ἄρα μ̄ ρμ̄. καὶ μοῦ ἀπὸ τούτου ἀφέλω τ̄ ρ̄ λοιπαὶ μονάδες μ̄. ἐὰν δὴ τ̄ κ̄ λοιπαὶ μονάδες ρ̄κ̄. ☾ μοῦει τὰ μείζονα τοῦ ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VII.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ex ea elicitur huiusmodi Canon.

Ducito maiorem datorum numerorum in denominatorem rationis postulatæ, à producto aufer minorem. Residuum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam cum Francisco Vieta institui poterat operatio. Ponatur 1 N. defectus quo 100. deficit à quæsito numero. Erit ergo quæsitus numerus 1 N. + 100. Quia verò defectus quo 20. deficit ab eodem quæsito numero, triplus est defectus quo 100. ab eodem deficit, erit ipsius 20. defectus 3 N. adeo quæsitus numerus rursus æquabitur 3 N. + 20. Quamobrem æquales sunt 1 N. + 100. & 3 N. + 20. vnde fit 1 N. 40. & quæsitus numerus est 140. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon, nimirum.

Datorum numerorum interuallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur defectus maioris numeri à quæsito numero, quo ei addito, fiet quæsitus numerus.

QVÆSTIO VIII.

DVOBVS datis numeris eundem adiicere numerum, vt compositi ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem minorem esse ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Iubeamur ad 100. & ad 20. eundem numerum adiicere, vt maius compositum, minoris sit triplum. Ponatur addendus vtrique numero 1 N. is si ad 100. addatur, fiet 1 N. + 100. si verò ad 20. adiiciatur, fiet 1 N. + 20. & oportet compositum maius minoris esse triplum. Ter igitur minus compositum æquabitur maiori. Ter autem minus compositum, fit 3 N. + 60. Hoc ergo æquale est 1 N. + 100. Auferantur similia à similibus, supersunt 2 N. æquales vnitatibus 40. & fit 1 N. vnitatum 20. Ad positiones. Statueram adiiciendum vtrique numero 1 N. erit ergo vnitatum 20. & si ad 100. addatur fiunt vnitates 120. At si ad 20. adiiciatur, fiunt vnitates 40. & est maius compositum minoris triplum.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τοὺς γενομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον; δεῖ δὴ τὸν διδόμενον λόγον ἐλάττονα εἶναι τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ἐπιτετάχθω δὴ τῷ ρ̄ καὶ τῷ κ̄ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ προτιθέμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς̄ ἑνός. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, ἔσται ἀριθμοῦ ἑνὸς, μονάδων ρ̄, ἐὰν δὲ τῷ κ̄, γίνεται ἀριθμοῦ ἑνὸς, μ̄ κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἔσται τοῖς μείζοσι. τρὶς δὲ τὰ ἐλάττονα γίνεται ἀριθμοὶ τρεῖς μονάδες ξ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσιν ρ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσιν μ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ κ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς̄ ἑνὸς, ἔσται μονάδων κ̄. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, γίνονται μονάδες ρκ̄. ἐὰν δὲ τῷ κ̄. γίνονται μονάδες μ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VIII.

CONDITIO apposita nil aliud dicit, quàm quod ostendimus propositione prima libri primi porismatum. Reliqua omnia sunt dilucida, & ex operatione Diophanti formabitur iste Canon.

Aufer à maiore datorum numerorum, productum ex minore in denominatorem rationis postulatæ, residuum diuide per eundem denominatorem vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

QVÆSTIO IX.

A DATIS duobus numeris auferre eundem numerum, vt residui ad inuicem datam habeant rationem. Opor-

ΑΠΟ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. δεῖ δὴ τὸν

tet autem datam rationem maiorem esse ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Imperatum sit à 20. & à 100. auferri eundem numerum, vt maius residuum minoris sit sescuplum. Statuatur numerus ab vtroque numero auferendus 1 N. Et si quidem à 100. auferatur, reliquæ sunt vnitates 100 − 1 N. si autem à 20. detrahatur, restant vnitates 20 − 1 N. Et oportet residuum maius, minoris esse sescuplum. Sexies igitur minus residuum æquatur maiori. Sexies autem minus residuum fit 120 − 6 N. hoc æquale est 100 − 1 N. Adiiciatur communis defectus, & auferantur similia à similibus, relinquuntur 5 N. æquales vnitatibus 20. & fit 1 N. vnitatum 4. Ad Positiones. Statueram auferendum ab vtroque numero 1 N. erit is vnitatum 4. Qui quidem si à 100. auferatur, supersunt vnitates 96. si autem à 20. detrahatur, relinquuntur vnitates 16. Et est residuum maius minoris sescuplum.

τὸ δεδομένον λόγον, μείζονα ἔχῃ τὸν λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ὑπιτετάχθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ $\bar{κ}$ ἢ τοῦ $\bar{ρ}$ ἀφῃρεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἢ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ἑξαπλάσια. τετάχθω ὁ ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸς εἷς, καὶ μὲν ἀπὸ τοῦ $\bar{ρ}$ ἀφαιρεθῇ, λοιπαὶ μονάδες $\bar{ρ}$ λείψει $ς^{ᾳ}$ ἑνός. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν $\bar{κ}$. λοιπαὶ μονάδες $\bar{κ}$. λείψει $ς^{ᾳ}$ ἑνός. ἢ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι ἑξαπλάσια. ἑξάκις ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσιν. ἑξάκις δὲ τὰ ἐλάσσονα ποιεῖ $μ^{ο}$ $ρ\bar{κ}$ λείψει $ςς$ $\bar{ς}$. ταῦτα ἴσα μονάσιν $\bar{ρ}$ λείψει $ς^{ᾳ}$ ἑνός. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ $\bar{ε}$ ἴσοι μονάσιν $\bar{κ}$. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων $\bar{δ}$. ὅπερ ἦν τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸν ἕνα, ἕξαι μονάδων $\bar{δ}$. καὶ μὲν ἀπὸ τοῦ $\bar{ρ}$ ἀφαιρεθῇ λοιπαὶ μονάδες $\bar{με}$. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν $\bar{κ}$. λοιπαὶ μονάδες $\bar{ιε}$. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ἑξαπλάσια.

IN QVAESTIONEM IX.

CONDITIONIS hîc appositæ est eadem ratio, quæ suprà. Canon sic formabitur.

Ducito denominatorem rationis in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, residuum diuide per ipsum denominatorem vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter cum Francisco Vieta licebit operari. Ponamus 1 N. excessum ipsius 20 suprà quæsitum numerum, erit ergo 6 N. excessus ipsius 100. supra eundem. Quare quæsitus numerus erit tam 20 − 1 N. quàm 100 − 6. N. Hæc igitur æquantur inter se. Et fit 1 N. 16. excessus ipsius 20. supra quæsitum numerum, quo ablato remanet 4. quæsitus numerus. Et hinc etiam elicietur alius Canon.

Datorum numerorum interuallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur excessus minoris numeri suprà quæsitum numerum, quo ablato remanet quæsitus numerus.

QVÆSTIO X.

DVOBVS datis numeris, eundem numerum minori quidem ex ipsis addere, detrahere autem à maiori, vt compositum ad residuum datam habeat rationem. Imperatum sit ipsi quidem 20. addere, at verò à 100. auferre eundem numerum, vt compositum residui sit quadruplum. Ponatur addendus & adimendus vtrique numero 1 N. & si ad 20. addatur, fiet 1 N. + 20. si verò à 100. detrahatur, fiet 100 − 1 N. & oportet maius minoris esse quadruplum. Quater igitur minus æquabitur maiori. Sed quater minus fit vnitates 400. − 4 N. hoc ergo

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς τῷ μὲν ἐλάσσονι αὐτῷ προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν, ἢ ποιεῖν τὸν γενόμενον πρὸς τὸν λοιπὸν λόγον ἔχειν δεδομένον. ὑπιτετάχθω τῷ μὲν $\bar{κ}$ προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ $\bar{ρ}$ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τετραπλάσια. τετάχθω ὁ προστιθέμενος ἢ ἀφαιρούμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ $ς^{ᾳ}$ ἑνὸς, καὶ μὲν τῷ $\bar{κ}$ προστεθῇ, γίνεται $ς^{ᾳ}$ ἑνὸς $μ^{ο}$ $\bar{κ}$. ἐὰν δὲ τοῦ $\bar{ρ}$ ἀφαιρεθῇ, γίνεται $μ^{ο}$ $\bar{ρ}$ λείψει $ς^{ᾳ}$ ἑνός. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων εἶναι τετραπλάσια. τετράκις ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τετράκις δὲ τὰ ἐλάσσονα γί-

νεται μονάδες ῡ λείψει ἀριθμῷ δ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσιν κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφηρήσθω ἀπ' ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε̄. ἴσοι μονάσι πε̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ος̄. διὰ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ προστιθέμενον καὶ ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἵν' ἕνα. ἔσαι μ°. ος̄. κἂν μὲν τῷ κ̄. μ° ος̄ προστεθῶσι. γίνεται μ° ιξ̄, ἐὰν δὲ τοῖς ρ̄ ἀφαιρεθῶσι, λοιπαὶ μονάδες κδ̄, καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ὄντα τετραπλάσια.

æquatur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & auferantur à similibus similia, superſunt 5 N. æquales vnitatibus 380. & fit 1 N. 76. Ad poſitiones. Statueram addendum & adimendum vtrique numero 1 N. is ergo erit 76. & ſi ad 20. addantur 76. fiunt 96. ſi verò à 100. auferantur, ſuperſunt 24. & patet maius minoris eſſe quadruplum.

IN QVAESTIONEM X.

ADVERTE hîc triplicem caſum dari poſſe. Vel enim datis duobus numeris idem tertius quæſitus maiori eſt adimendus, & addendus minori. Vel contrà eſt addendus maiori, & adimendus minori. Et ex prima conſideratione, rurſus duplex caſus oritur. Vel enim poſcimus rationem collecti ad reſiduum, vel reſidui ad collectum, ita vt collectum nunc ſit maius extremum proportionis, nunc verò minus.

Primus caſus eſt is, in quem incidit operatio Diophanti, cùm petat auferri eundem numerum à maiori 100. & addi minori 20. vt ſumma reſidui ſit quadrupla. In quo caſu nil refert quæ proportio poſtuletur, ſiue nimirum maior proportione datorum numerorum, ſiue minor; etenim numerus minor 20. quantumlibet augeri poteſt, & maior 100. quantumlibet minui, vnde quæcumque proportio poſtuletur, poterit ſumma eſſe maius extremum, & reſiduum minus extremum. Sed in hoc caſu hic formabitur Canon.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in maiorem datorum numerorum, à producto aufer minorem; & reſiduum partire per ipſum denominatorem vnitate auctum, orietur quæſitus numerus.

Aliter etiam poſitiones fieri poterant. Exceſſus numeri 100. ſuprà quæſitum, eſto 1. N. erit ergo quæſitus 100 − 1 N. & quia ſupradictus exceſſus ponitur ſubquadruplus compoſiti ex numero 20. & ex quæſito numero, erit compoſitum illud 4 N. Quare auferendo 20. remanet 4 N. − 20 quæſitus numerus. Proinde 100 − 1 N. æquantur 4 N. − 20. & fit 1 N. 24. exceſſus ipſius 100. ſuprà quæſitum numerum, quare detracto 24. de 100. relinquitur quæſitus 76. Hinc rurſus fiet hic Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur exceſſus maioris datorum numerorum, ſuprà quæſitum; eoque detracto remanebit quæſitus numerus.

Secundus caſus eſt, cùm quæſitus numerus addendus quidem eſt, vt prius minori datorum, & à maiore detrahendus, ſed reſiduum ſit maius extremum proportionis poſtulatæ. Tunc autem oportet rationem poſtulatam minorem eſſe ratione datorum numerorum. Quod ſic oſtenditur. Sint A. B. dati numeri A. maior, & B. minor: & ſit G. quæſitus numerus qui additus ad B. faciat D. detractus ab A. relinquat C. ita vt C. ſit maior quàm D. dico rationem A. ad B. maiorem eſſe ratione C. ad D. Nam ratio A. ad D. maioris inæqualitatis, maior eſt ratione B. ad D. minoris inæqualitatis, cùm maiorem habeat denominatorem. Igitur & [27. Quinti.] permutando ratio A. ad B. maior eſt ratione C. ad D. Quod erat propoſitum.

A 100. B 20.
C 96. D 24.
G 4.

Hîc etiam licet duplicem operationem inſtituere, & duplicem Canonem formare, nimirum.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in minorem datorum numerorum, productum aufer à maiore, & reſiduum diuide per ipſum denominatorem vnitate auctum, orietur quæſitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur ſumma quæſiti numeri & minoris datorum, vnde ſi auferatur minor datorum, remanet quæſitus.

Tertius caſus eſt cùm quæſitus numerus addendus eſt maiori datorum, & à minore detrahendus, vbi neceſſe eſt ſummam maiorem eſſe reſiduo, & oportet poſtulatam rationem, maiorem eſſe ratione datorum numerorum. Quod ſimili prorſus argumento oſtendetur, illius quo ſupra contrarium oſtenſum eſt. Sed & duplex inſtituetur operatio, & duplex Canon formabitnr, nimirum.

Ducito denominatorem rationis poſtulatæ in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, & reſiduum diuide per denominatorem ipſum vnitate auctum, orietur quæſitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, quotiens erit exceſſus minoris datorum numerorum ſuprà quæſitum, quo detracto relinquetur quæſitus.

QVÆSTIO XI.

DVos datos numeros, alterum quidem addere, alterum verò detrahere ab eodem numero, vt geniti ad inuicem datam habeant rationem. Constitutum sit ipsum quidem 20. addere, sed ipsum 100. auferre ab eodem numero, vt maior genitorum, minoris triplus sit. Esto quæsitus 1 N. & si huic adiiciamus vnitates 20. fit 1 N. + 20. si autem ab eodem auferantur vnitates 100. supereſt 1 N. — 100. & oportet maiorem minoris esse triplum. Ter igitur minor æquatur maiori. Sed minor ter fit 3 N. — 300. Igitur 3 N. — 300. æquantur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & similia à similibus auferantur, supersunt vnitates 320. æquales 2 N. & fit 1 N. 160. Ad positiones. Est maior vnitatum 180. minor 60. & patet maiorem minoris esse triplum.

Δυο δοθέντας ἀριθμους, ὧν μὲν προσθῶμεν, τὸν δὲ ἕτερον ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τοὺς γινομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ὑπιτετάχθω τῷ μὲν κ̄ προσθεῖναι, τὸν δὲ ρ̄ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια ἔσω ὁ ζητούμενος ς ἑνός. καὶ μὲν τούτῳ προσκείσθω μ° κ̄. γίνεται ς ἑνὸς μ° κ̄. ἐὰν δὲ ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῇ μ° ρ̄. λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς λείψει μ° ρ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια, ἓξ ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι, ἀλλὰ ἓξ τὰ ἐλάττονα γίνεται ς᾽ ἓξ εἷς λείψει μ° τ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ἓξ εἷς λείψει μ° τ̄. ἴσα ἐστὶ ς ἑνὶ μ° κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, μονάδες τκ̄ ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς ἓξ, καὶ γίνεται ὁ ς° μ° ρξ. ὅπερ ἦν τὰς ὑποθέσεις. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μ° ρπ̄. ὁ δὲ ἐλάττων ξ. καὶ μέν ἐστι μείζονα τοῦ ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis est, vnde Canon vniuersalis elicitur, quamuis eum Xilander ad proportionem multiplicem malè restringat.

Multiplica detrahendum per denominatorem rationis, producto adiice addendum, summam diuide per denominatorem ipsum vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam licet operari. Ponatur defectus ipsius 100. à quæsito numero 1 N. ergo ipse quæsitus numerus est 1 N. + 100. At 3 N. erit summa quæsiti numeri & ipsius 20. Quare ablato 20. remanet quæsitus 3 N. — 20. Proinde 1 N. + 100. æquantur 3 N. — 20. & fit 1 N. 60. defectus ipsius 10. à quæsito, quare quæsitus est 160. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, quotiens erit defectus detrahendi numeri à quæsito, quo restituto fiet quæsitus.

QVÆSTIO XII.

PROPOSITVM numerum diuidere bis in duos numeros, ita vt vnus è prima diuisione ad vnum è secunda diuisione datam habeat rationem. At reliquus ex secunda diuisione ad reliquum è prima rationem item habeat datam. Iniunctum sit nobis numerum 100. diuidere bis in duos numeros, ita vt maior è prima diuisione, minoris è secunda diuisione sit duplus; maior verò è secunda diuisione minoris è prima diuisione sit triplus. Ponatur minor è secunda diuisione 1 N. Maior igitur è prima diuisione erit 2 N. Minor itaque è prima diui-

Τον ὑποκείμενον ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμους δίς. ὅπως ὁ εἷς ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λοιπὸς τῆς ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμους δίς, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ᾖ διπλασίων. ὁ δὲ μείζων τῆς ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, ᾖ τριπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ς ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης

διαιρέσεως ἔσαι ϛ̄ϛ̄ δύο. ὁ ἐλάττων ἄρα τ̄ ἐκ τ̄ πρώτης διαιρέσεως, μονάδων ρ̄. λείψει ἀριθμῷ δύο. ἢ ἐπεί ὅτι ἀυτῷ τριπλασίων ὁ μείζων τ̄ ἐκ τ̄ δευτέρας διαιρέσεως, ἔσαι μονάδων τ̄. λείψει ἀριθμῷ ϛ̄. λοιπὸν ἄρα ἢ τὰς τ̄ δευτέρας διαιρέσεως συντεθέντας ποιεῖν μ̄ ρ̄. ἀλλὰ συντεθέντες ποιοῦσι μονάδας τ̄. λείψει ἀριθμῷ ε̄. ταῦτα ἴσα μοναῖς ρ̄. ἢ γίνεται ὁ ϛ̄ μονάδων μ̄. ὅπι τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τ̄ μείζονα τ̄ ἐκ τ̄ πρώτης διαιρέσεως ϛ̄ϛ̄ δύο. ἔσαι μονάδων π̄. τ̄ ὃ ἐλάσσονα τ̄ αὐτῆς διαιρέσεως μονάδων ρ̄. λείψει ϛ̄ϛ̄ δύο. ἔσαι μ̄ κ̄. τὸν ὃ μείζονα τ̄ ἐκ τ̄ δευτέρας διαιρέσεως μ̄ τ. λείψει ϛ̄ϛ̄ ϛ̄. ἔσαι μ̄ ξ̄. τὸν δὲ ἐλάσσονα τῷ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ϛ̄ ἑνός. ἔσαι μ̄ μ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

sione erit vnitatum 100 — 2 N. & quia huius triplus est maior è secunda diuisione, erit vtique 300 — 6 N. Superest igitur vt ambo ſecundæ diuisionis conjuncti efficiant 100. At coniuncti faciunt 300 — 5 N. Hoc ergo æquatur 100. & fit 1 N. vnitatum 40. Ad positiones. Posueram maiorem è prima diuisione 2 N. erit ergo vnitatum 80. Minorem verò eiusdem diuisionis statueram 100 — 2 N. erit igitur 20. At posueram maiorem è secunda diuisione 300 — 6 N. erit ergo 60. Minor denique è secunda diuisione qui positus fuerat 1 N. erit 40. & euidens est demonstratio.

IN QVAESTIONEM XII.

BENÈ monet Xilander quadruplicem institui posse operationem, eò quod quælibet pars cuiuslibet diuisionis poni potest 1 N. Sed ego præterea ex ipsa Diophanti operatione aio formari posse huiusmodi Canonem.

Ducito sigillatim denominatorem rationis vtriusque vnitate multatum, in datum numerum, producta diuide seorsim per numerum qui fit ex mutua denominatorum multiplicatione vnitate multatum, orientur minores partes vtriusque diuisionis. Item.

Ducito sigillatim denominatorem rationis vtriusque vnitate auctum, in datum numerum producta diuide seorsim per eundem qui suprà numerum, orientur partes maiores.

Cæterùm in similibus quæstionibus, si pars vna prioris diuisionis sit maior vna parte posterioris, necessariò altera posterioris pars est maior altera prioris, quin etiam & eodem interuallo maior est, vt constat ex prop. quarta libri primi porism. Quo fundamento qui niti velit, aliter etiam operationem instituet hac arte. Sit minor pars primæ diuisionis 1 N. Ergo maior secendæ erit 3 N. & cùm harum partium interuallum sit 2 N. oportet & reliquas eodem distare interuallo, sed quia reliqua primæ diuisionis est dupla reliquæ secundæ, illarum interuallum æquale est ipsi minori parti secundæ diuisionis, quare hæc pars est 2 N. quæ maiori nimirum 3 N. addita efficit 5 N. æquales 100. vnde fit 1 N. 20. minor pars primæ diuisionis, &c.

QVÆSTIO XIII.

ΤΟΝ ὑποκείμενον ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ϛ̄ις, ὅπως ὁ εἷς τ̄ ἐκ τ̄ πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῷ ἐκ τ̄ δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λοιπὸς τ̄ ἐκ τ̄ δευτέρας διαιρέσεως, πρὸς ἕνα τ̄ ἐκ τ̄ τρίτης διαιρέσεως, λόγον, ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἔτι ὁ λοιπὸς τῷ ἐκ τ̄ τρίτης διαιρέσεως πρὸς τ̄ λοιπὸν τῷ ἐκ τ̄ πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ ϛ̄ρ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ϛ̄ις, ὅπως ὁ μείζων τ̄ ἐκ τῆς πρώτης τοῦ ἐλάττονος τῷ ἐκ τῆς δευτέρας ᾗ τριπλασίων. ὁ δὲ μείζων τ̄ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως τοῦ ἐλάττονος τῷ ἐκ τῆς τρίτης ᾗ διπλασίων. καὶ ἔτι ὁ μείζων τῷ ἐκ τ̄ τρίτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῷ ἐκ τ̄ πρώτης ᾗ

PROPOSITVM numerum diuidere ter in duos numeros, vt vnus è prima diuisione ad vnum è secunda, datam habeat rationem. Reliquus autem è secunda diuisione, ad vnum è tertia datam habeat rationem. Et rursus reliquus è tertia diuisione ad reliquum è prima datam etiam habeat rationem. Iniunctum sit numerum 100. diuidere ter in duos numeros, vt maior è prima diuisione, minoris è secunda sit triplus; at maior è secunda diuisione, minoris è tertia sit duplus; & adhuc maior è tertia diuisione, minoris è prima sit quadruplus. Ponatur minor è tertia diuisione 1 N. Maior

igitur è secunda diuisione erit 2 N. Et quia totus numerus qui diuiditur est 100. erit minor è secunda diuisione 100 — 2 N. Et quoniam huius triplus est maior è prima diuisione, erit is 300 — 6 N. Igitur minor ex eadem diuisione erit 6 N. — 200. Et quia illius quadruplus est maior è tertia diuisione, erit is 24 N. — 800. Superest vt tertiæ diuisionis vtraque pars simul efficiat 100. sed vtraque simul est 25 N. — 800. Hoc igitur æquatur 100. Et fit 1 N. vnitatum 36. Ad positiones. Erit minor è tertia diuisione 36. maior autem 64. At minor è prima diuisione 16. maior 84. Denique minor è secunda diuisione erit 28. maior 72. Et manifestum est hos satisfacere proposito.

τετραπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῆ̄ ὲκ τ̃ ζ̃ίτης διαιρέσεως ς̃ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τ̃ ἐκ τῆς δ̃ύτέρας διαιρέσεως ἔσαι ςζ̃ δύο. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ διαίρεσίς ἐστι μ̃. ρ̄. ὁ ἄρα ἐλάττων τ̃ ἐκ τ̃ δ̃ύτέρας διαιρέσεως ἔσαι μ̃. ρ̄. λείψει ςζ̃ δύο. καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτ̃ ζ̃ιπλασίων ὁ μείζων τ̃ ἐκ τ̃ πρώτης διαιρέσεως, ἔσαι μ̃ τ̄. λείψει ςζ̃ ς̄. ὁ ἄρα ἐλάσσων τῆ̄ ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ἔσαι ςζ̃ ς̄. λείψει μ̃ σ̄. ☾ ἐπεί ἐστι αὐτ̃ τετραπλασίων μείζων τῆ̄ ἐκ τῆς ζ̃ίτης διαιρέσεως, ἔσαι ςζ̃ κδ̄. λείψει μ̃ ω̄. λοιπόν ἐστι τὼ ζ̃ίτῶ διαίρεσιν συντεθεῖσαν ποιεῖν μονάδας ρ̄. ἀλλὰ συντεθεῖσα ποιεῖ ςζ̃ους κε̄. λείψει μ̃. ω̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̃ μ̃. λς̄. ὅπ̄ι τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν ἐλάσσων τ̃ ἐκ τ̃ ζ̃ίτης διαιρέσεως μ̃. λς̄. ὁ δ᾽ μείζων ξδ̄. ὁ ἐλάσσων τῆ̄ ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ις̄. ὁ δὲ μείζων πδ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων τῆ̄ ἐκ τ̃ δ̃ύτέρας διαιρέσεως κῆ̄. ὁ δὲ μείζων οβ̄. καὶ δῆλον ὅτι ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Igitur minor ex eadem diuisione erit 6 N. — 200. Et quia illius quadruplus est maior è tertia diuisione, erit is 24 N. — 800. Superest vt tertiæ diuisionis vtraque pars simul efficiat 100. sed vtraque simul est 25 N. — 800. Hoc igitur æquatur 100. Et fit 1 N. vnitatum 36. Ad positiones. Erit minor è tertia diuisione 36. maior autem 64. At minor è prima diuisione 16. maior 84. Denique minor è secunda diuisione erit 28. maior 72. Et manifestum est hos satisfacere proposito.

IN QVÆSTIONEM XIII.

SEXTVPLICITER institui posse operationem benè monet Xilander. Ego verò & Canonem fabricor satis ingeniosum.

Sume tres denominatores eo quo proponuntur ordine, & ducito quemlibet vnitate multatum in eum qui ab ipso tertius est, productum vnitate auctum ducito in datum numerum, & productum diuide per solidum sub denominatoribus contentum vnitate auctum, habebis minores partes singularum diuisionum. vel.

Ducito quemlibet denominatorem vnitate multatum in eum qui ab ipso tertius est, productum vnitate auctum ducito in reliquum denominatorem, & productum ducito in datum numerum, productumque diuide per solidum de quo suprà, habebis maiores partes singularum diuisionum.

Propositis autem tribus numeris, tertius à quolibet dicitur ille qui tertius ab eo numeratur, si cùm perueneris ad vltimum, recurras ad primum. Vt hisce propositis 3. 2. 4. Tertius ab ipso 3. est 4. At tertius ab ipso 2. est 3. denique tertius ab ipso 4. est 2.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione ad eorumdem summam datam habeat rationem. Oportet autem multitudinem vnitatum quæ statuetur pro altero numerorum maiorem esse denominatore rationis datæ. Mandatum sit productum ex multiplicatione, ad summam habere rationem triplam. Ponatur alter numerorum 1. N. alter (vt addita conditio præcipit) maior quàm 3. nempè 12. & est productus eorum multiplicatione 12 N. summa verò illorum 1 N. + 12. supereſt vt 12 N. sint tripli ad 1 N. + 12. Ter igitur minor æquabitur maiori, & fit 1 N. vnitatum 4. Erit ergo alter illorum 4. alter verò

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τ̃ πολλαπλασιασμῶ̃ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. δεῖ δὴ τὸ ὑποτιθέμενον πλῆθος τ̃ μονάδων ἑνὸς τ̃ ἀριθμῶ̃ μεῖζον εἶ̃ τῶ̃ ὁμωνύμῳ τῷ̃ δεδομένῳ λόγου. ὑπετάχθω δὴ τ̃ ἐκ τ̃ πολλαπλασιασμῶ̃ πρὸς τ̃ ἐκ τ̃ συνθέσεως λόγον ἔχειν τετράπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν εἷς αὐτ̃ ἀριθμὸς ἑνός. ὁ δ᾽ ἕτερος κ̃ τὸν προσδιορισμὸν πλείων μονάδων γ̄. ἔσω μονάδες ιβ̄. καὶ ὅτι τὸ μὲν ἐπ᾽ αὐτ̃ ς̃ους ιβ̄. ἡ δ᾽ συνθεσις αὐτ̃ ἀριθμῶ̃ ἑνὸς μονάδων ιβ̄. λοιπόν ἐστιν ἀριθμοὺς ιβ̄. τετράπλασίονας εἶ̃ ἀριθμῶ̃ ἑνὸς μονάδων ιβ̄. τοὺς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ̄. ἔσαι ὁ μὲν

ἀυτῶν μ° δ. ὁ δὲ μ°. ιβ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

duodecim & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XIV.

CONDITIO apposita sic demonstrari potest. Sint duo Numeri A B. B C. quorum mutuo ductu fiat G. & sit G ad totum A C. in ratione cuius denominator D, ita vt ex D in A C. fiat G. dico D minorem esse quolibet ipsorum A B. B C. Quia enim idem G fit ex A B. in B C. & ex D in A C.[1] erit A B ad A C. vt D ad B C. sed A B. est minor quàm A C. pars quàm totum, ergo & D est minor quàm B C. & eodem argumento probabitur idem D minor quàm A B. igitur patet propositum.

G 18.
19. septimi. A..... B.....C
D 2.

Porrò aduerte Canonem à Xilandro traditum nimis particularem esse, cùm iubeat sumere pro altero quæsitorum numerorum, ipsum denominatorem rationis vnitate auctum. Nos itaque ex ipsa Diophanti operatione elicimus hunc legitimum Canonem

Statue pro altero quæsitorum, quemlibet numerum maiorem denominatore rationis, eumque ducito in ipsum denominatorem, productum diuide per interuallum sumpti numeri & eiusdem denominatoris, orietur alter quæsitorum.

Sed & operatio Diophanti, & hic Canon eatenus locum habent; quatenus productum est maius extremum proportionis. Nam si summa debet esse maior producto, sic erit proponenda quæstio.

Inueniantur duo numeri quorum summa ad productum eorum multiplicatione datam habeat rationem.

Mandatum sit summæ ad productum rationem esse triplam. Ponatur numerorum alter 1 N. alter quilibet numerus puta 2. erit ergo summa 2. + 1. N. productum 2 N. Quare cùm illa sit huius tripla, 6 N. æquabuntur 2 + 1 N. & fert 1 N. $\frac{2}{5}$ sunt igitur quæsiti numeri 2. & $\frac{2}{5}$ & satisfaciunt postulatis.

Conditio hîc non apponitur, quia potest alter quæsitorum esse maior denominatore rationis, dum is tantus sit, vt eo ducto in denominatorem rationis, productus superet vnitatem. Et hinc formatur Canon huiusmodi.

Sume quemlibet numerum pro altero quæsitorum, eumque ducito in denominatorem rationis, & per productum vnitate multatum diuide sumptum numerum, orietur alter quæsitorum.

Cæterum ipsam quæstionem decimamquartam soluit infinitè Diophantus quæstione 41. lib. 4.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος παρ' ἑκατέρου λαβὼν τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν, λόγον ἔχῃ δεδομένον, πρὸς τὸν ὑπολειφθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τοῦ δευτέρου λαβόντα μονάδας λ̄. γίνεσθαι αὐτοῦ διπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μονάδας ν̄. γίνεσθαι αὐτοῦ τριπλασίονα. τετάχθω ὁ δεύτερος ς̄ ἑνὸς καὶ ὧν δίδωσι μονάδων λ̄. ὁ ἄρα πρῶτος ς̄ δύο λείψει μ° λ̄. ἵνα λαβὼν παρὰ τοῦ δευτέρου τὰς λ̄. μ°. γένηται διπλασίων αὐτοῦ. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μ° ν̄ γίνεσθαι αὐτοῦ τριπλασίονα. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος μονάδας ν̄. λοιπούς ἔχει ς̄ δύο λείψει μ° π̄. λαβὼν δὲ αὖ ὁ δεύτερος τὰς ν̄ μ° γίνεται ς̄ ἑνὸς μ° π̄. λοιπόν ἐστι ς̄ ἕνα μ° π̄. τριπλασίονα εἶναι ς̄ δύο λείψει μ° π̄. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ° ξδ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδων ζη̄. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων ζδ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt vterque ab altero imperatum numerum accipiens, ad residuum datam habeat rationem. Postuletur itaque vt prior acceptis à posteriore 30. vnitatibus, sit residui duplus. Posterior autem acceptis à priore vnitatibus 50. sit triplus ad residuum. Ponatur posterior 1 N. & præterea 30. vnitatum quas dat priori; erit ergo prior 2 N. − 30. vt acceptis 30. vnitatibus à posteriore, sit residui duplus. Restat vt posterior acceptis à priore 50. vnitatibus, sit triplus ad residuum. Prior autem si det 50. vnitates, relinquitur 2 N. − 80. At posterior acceptis 50. fit 1 N + 80. superest vt 1 N. + 80. sit triplus ad 2 N. − 80. Ter igitur minor æquatur maiori. & fit 1 N. vnitatum 64. Erit ergo prior 98. posterior 94. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XV.

HIc formo huiuſmodi Canonem.

Summam duorum numerorum inuicem præſtandorum, ducito ſigillatim in vtrumque denominatorem vnitate auctum, producta diuide per planum ſub denominatoribus vnitate multatum, orientur defectus præſtandorum numerorum à veris.

Vt in exemplo Diophanti ſumma ipſorum 30. & 50. eſt 80. qua ſigillatim ducta in 3. & in 4. fiunt 240. & 320. quæ ſi diuidas per 5. productum ex 2. in 3. vnitate multatum, fiunt 48. & 64. defectus ipſorum 50. & 30. à quæſitis. Quare addendo 48. ad 50. & 64. ad 30. fiunt quæſiti numeri 98. & 94.

QVÆSTIO XVI.

INVENIRE tres numeros vt bini ſimul ſumpti faciant imperatos numeros. Oportet autem vt ſummæ trium imperatorum ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum. Imperetur itaque primum & ſecundum ſimul additos efficere 20. ſecundum & tertium conficere 30. At tertium cum primo facere 40. Ponatur ſumma trium 1 N. & quoniam primus & ſecundus efficiunt 20. ſi ab 1 N. auferam 20. habebo tertium, nempe 1 N. — 20. Ob hæc eademerit primus 1 N. — 30. At ſecundus 1. N. — 40. Reliquum eſt vt tres ſimul additi æquentur 1 N. Atqui tres ſimul additi faciunt 3. N. — 90. hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 45. Ad poſitiones. Erit primus quidem 15. ſecundus vero 5. Tertius 25. & euidens eſt demonſtratio.

τέιτος μ° κε̄. ϗ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὲς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τὲς ὑποκειμένας ἀριθμές. δεῖ δὴ τ̀ ὑπαντλουμένων ξιῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον εἶ) ἑκάστου αὐτῶν. ὑπετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον μ̄ τ̀ δευτέρε συντιθέντας ποιεῖν μ° κ̄. τὸν δ̀ δεύτερον μ̄ τῦ τρίτου ποιεῖν λ̄. τὸν δ̀ τρίτον μ̄ τῦ πρώτου ποιεῖν μ° μ̄. τετάχθωσαν οἱ ξεῖς ς̄ ἑνὸς ϗ ἐπὶ ὁ πρῶτος, ὁ δ̀ δεύτερος ποιῆσι μ° κ̄. ἐαὶ ἄρα ὑπὸ ς̄ ἑνὸς ἀφέλω μ° κ̄. ἔξω τ̀ τρίτον ς̄ ἑνὸς λείψει μ° κ̄. διὰ τὰ αὐτὰ ϗ ὁ μὲν πρῶτος ἔσαι ς̄ ἑνὸς λείψει μ° λ̄. ὁ δ̀ δεύτερος ς̄ ἑνὸς λείψει μ° μ̄. λοιπὸν ὅτι τὲς ξεῖς συντεθέντας ἀριθμὲς γίνεσθαι ἴσους ς̄ ἑνί. ἀλλ' οἱ ξεῖς συντεθέντες, ποιῦσιν ς̄ ξεῖς λείψει μ° ζ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνί. ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° μ̄ε̄. ὅπ̀ ταῖς ὑποκάσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ° ιε̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° ε̄. ὁ δ̀

IN QVAESTIONEM XVI.

CONDITIONIS appoſitæ ratio eſt, quia cùm tres numeri bini & bini ſumuntur, aggregatum ſummarum quas bini & bini conficiunt, continet bis ſummam trium numerorum, quod euidens eſt, quia quilibet trium numerorum bis ſumitur. Oportet autem ſummam trium numerorum maiorem eſſe ſumma duorum ex illis. Hinc etiam euidens fit cauſa Canonis à Xilandro traditi, qui tamen & ab operatione Diophanti elicitur.

Aggregati ſummarum quas bini & bini conficiunt tres numeri, cape dimidium; hinc aufer ſigillatim dictas ſummas, reſtabunt quæſiti numeri.

Eodem ferè artificio ſoluetur quæſtio ſi quærantur quotlibet numeri multitudine impari, dentúrque ſummæ primi cum ſecundo, ſecundi cum tertio, tertij cum quarto, quarti cum quinto: & ſic deinceps. Ac demum vltimi cum primo. Verbi gratia. Quærantur quinque numeri vt primus cum ſecundo faciat 8. ſecundus cum tertio faciat 9. tertius cum quarto faciat 10. quartus cum quinto faciat 14. denique quintus cum primo faciat 11. Pone ſummam quinque numerorum 1 N. Cùm ergo primus & ſecundus ſint 8. & tertius & quartus 10. erit quintus 1 N. — 18. Rurſus quia ſecundus & tertius ſunt 9. quartus & quintus 14. erit primus, 1 N. — 23. Rurſus quia tertius & quartus ſunt 10. quintus & primus 11. erit ſecundus 1 N. — 21. Item quia quartus & quintus ſunt 14. primus & ſecundus 8. erit tertius 1 N. — 22. Denique quia quintus & primus ſunt 11. at ſecundus & tertius 9. erit quartus 1 N. — 20. Horum ſumma 5 N. — 104. æqualis eſt 1 N. & fit 1 N. 26. ſumma quinque numerorum, vnde ſi auferas ſigillatim ſummam quatuor quorumlibet, nempe ipſos 23. 21. 22. 20. 18. remanent quæſiti numeri 3. 5. 4. 6. 8. Quod ſi artificium ſupra allati Canonis libeat imitari. Sume aggregatum ſummarum datarum 8. 9. 10. 14. 11. nempe 52. huius ſemiſſis 26. eſt ſumma quinque quæ-

sitorum numerorum, vnde vt prius si auferas quatuor quosque remanebit quintus. Præterea in tractatu nostro de iucundis quæstionibus quæ per numeros absoluuntur, alium tradidimus Canonem, hoc vtique non deteriorem, quem, si vacat, videre poteris in praxi vigesima secunda.

Verùm si multitudo quæsitorum numerorum fuerit par, qui eodem modo bini sumantur, & vltimus iungatur primo, nec operatio similis nec traditus Canon locum habebunt vt euidens est, cuius rei ratio est, quia in hoc casu quæstio non vnam recipit solutionem, sed infinitas dum modo possibilis proponatur, vt si quærantur sex numeri, ita vt primus cum secundo faciat 13. secundus cum tertio faciat 15. tertius cum quarto faciat 19. quartus cum quinto faciat 11. quintus cum sexto faciat 10. Poterunt esse quæsiti numeri 8. 5. 10. 9. 2. 8. Itemque hi 7. 6. 9. 10. 1. 9. imò & quemcumque sumas pro primo qui cadat inter 6. & 13. satisfacies quæstioni. Itaque huiusmodi quæstiones hac arte resoluo. Ponatur in dato exemplo primus 1 N. ergo secundus est 13 − 1 N. vnde tertius fit 2 + 1 N. Quare quartus erit 17 − 1 N. igitur quintus fiet 1 N. − 6. Ac denique sextus 16 − 1 N. Restat vt & sextus cum primo faciat 16. Quare cùm 16 − 1 N. & 1 N. verè conficiant 16. nulla restat ad æquationem via; ita vt vna species, alteri speciei æqualis reperiatur. Quamobrem cùm inuenti numeri in terminis Algebricis omnes propositi partes impleant, manifestum est quæstionem infinitè solutam esse, hoc est quemlibet numerum sumi posse pro valore Numeri, modo possit positionibus ritè applicari. Etenim non quolibet numero pro valore Numeri sumpto, aptè resolui poterunt hypostases, quod accidit quia in aliis reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum, in aliis Numeri cum defectu vnitatum. Quare determinandum de valore Numeri, & præscribendi sunt termini inter quos cadere debeat. Hoc autem sic præstabitur. Sume hypostasim illam in qua est minimus vnitatum numerus cum maximo defectu Numerorum, itemque illam in qua est minimus Numerorum numerus cum maximo defectu vnitatum, sunt hæ 13 − 1 N. & 1 N. − 6. Diuide ergo vtrobique vnitates per multitudinem Numerorum, fient 13. & 6. quæsiti termini. Igitur necesse est valorem Numeri maiorem esse quàm 6. minorem quàm 13. Quicunque autem ponatur inter 6. & 13. satisfiet postulatis. Modus iste præscribendi terminos inter quos cadere debet valor numeri, in quæstionibus quæ infinitè soluuntur, à nemine ante nos (quod sciam) traditus est, cùm sit facilis, & ad ardua problemata soluenda necessarius vt iam monui in libello iucundarum quæstionum quæ per numeros absoluuntur, & fusius docebo ad quadragesimam primam quarti.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως σὺν ἑνὶ ποιῶσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τὴν τετράδα τὸ τρίτον μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. δοθέντα δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου ἓξ τὸ ἑξῆς συντεθέντας ποιεῖν μονάδας κ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἓξ ποιεῖν μονάδας κβ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου ἓξ ποιεῖν μονάδας κδ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τετάρτου ἓξ ποιεῖν μονάδας κζ. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ς ἑνὸς, καὶ ἐὰν ἀφέλω ἀπὸ ς ἑνὸς ἀφέλω τοὺς πρώτους ἓξ, τουτέστι μονάδας κ. λοιπὸν ἔξω τὸ τέταρτον ς ἑνὸς, λείψει μ κ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γίνεται, ς ἑνὸς λείψει μ κβ. ὁ δὲ δεύτερος ς ἑνὸς λείψει μ κδ. ὁ δὲ τρίτος ς ἑνὸς λείψει μ κζ. λοιπὸν ὅσοι τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἀριθμοὺς ἴσους γίνεσθαι ἀριθμῷ ἑνί. ἀλλ' οἱ τέσσαρες συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς τέσσαρας λείψει μ ϙγ. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ. λα. ὑπὲρ τὰς ὑποθέσεις ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ θ. δεύτερος μ ζ. ὁ δὲ τρίτος μ δ. ὁ τέταρτος μ ια. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti faciant postulatos numeros. Oportet autem eorum qui postulantur numerorum summæ trientem maiorem esse quolibet ipsorum. Statutum sit primum & duos deinceps simul iunctos facere 20. secundum & duos deinceps facere 22. tertium & duos deinceps facere 24. Denique quartum & duos deinceps facere 27. Ponatur quatuor numerorum summa 1 N. Igitur si ab 1 N. abstulero tres primos, nempe 20. reliquum habebo quartum, nimirum 1 N − 20. eadem de causa primus erit 1 N. − 22. secundus 1 N − 24. tertius 1 N. − 27. Superest vt quatuor simul additi sint æquales 1 N. sed quatuor simul additi efficiunt 4 N. − 93. Hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 31. Ad positiones. Erit primus quidem 9. secundus verò 7. tertius 4. quartus 11. & hi satisfaciunt quæstioni.

QVÆSTIO

IN QVAESTIONEM XVII.

CONDITIO hîc apponitur eadem de causa, qua factum est vt præcedenti apponeretur, quia videlicet cùm quatuor numeri, terni sumuntur, quoties fieri potest diuersis modis, omnes sumuntur ter. Hinc autem patet, quæstionem huiusmodi proponi posse de quotlibet numeris qui sumantur omnes, vno minus, quoties fieri potest diuersis modis, & erit eadem operationis ratio; sed & Canon vniuersaliſſimus formabitur.

Aggregatum summarum datarum diuidatur per numerum multitudinis numerorum vnitate multatum. Quotiens erit summa numerorum quæsitorum, à qua si auferantur sigillatim datæ summæ, sient quæsiti numeri.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros vt bini iuncti superent reliquum imperato numero. Iniunctum sit primum & secundum superare tertium vnitatibus 20. secundum & tertium superare primum vnitatibus 30. Tertium verò & primùm superare secundum vnitatibus 40. Ponatur summa trium 2 N. & quoniam primus & secundus superant tertium vnitatibus 20. Adiecto vtrimque communi tertio; trium summa erit bis tertius, & interuallum 20. Si igitur à summa trium, hoc est à 2 N. abstulero 20. habebo bis tertium, scilicet 2 N. — 20. simplex ergo tertius est 1 N. — 10. Ob hæc eadem erit & primus 1 N. — 15. secundus verò 1 N. — 20. supereſt vt tres simul æquentur 2 N. sed tres simul efficiunt 3 N. — 45. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 45. Ad positiones. Erit primus 30. secundus 25. tertius 35. & hi satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὲς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τῶ λοιπῶ ὑπερέχωσι τῷ ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ. ὑπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας κ̄. τὸν δὲ δεύτερον καὶ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ̄. τὸν δὲ τρίτον καὶ τὸν πρῶτον τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. τετάχθωσαν οἱ ξεῖς, ϛϛ^οι β̄. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ τρίτου, οἱ τρεῖς, δίς ἐϛι ὁ τρίτος καὶ ἡ ὑπεροχὴ μονάδες κ̄. ἐαν ἄρα ἀπὸ τελῶν, τουτέϛιν ἀριθμοῦ, δύο ἀφέλω μονάδας κ̄. ἕξω δὶς τὸ ξῖτον, ἀριθμοῦ δύο λείψει μ^ο κ̄. ἅπαξ ἄρα ὁ ξῖτος ἔϛαι ϛ^ε ἑνὸς λείψει μ^ο ῑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔϛαι ϛ^ε ἑνὸς, λείψει μ^ο ιε̄. ὁ δεύτερος ϛ^ε ἑνὸς λείψει μ^ο κ̄. λοιπὸν δὶς τοὺς ξεῖς ἑξῆς ἴσους ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ' οἱ τρεῖς σωτεθέντες ποιοῦσιν ϛϛ^ας τρεῖς λείψει μ^ο με̄. ταῦτα ἴϛα ϛϛ^οις δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο με̄. ἐπὶ τὰς ὑποϛάσεις. ἔϛω ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο κε̄. ὁ δὲ τρίτος μ^ο λε̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆ προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

ADIECTO *vtrimque communi tertio*, &c. Res à Scholiaste obscuratur potius quàm illustretur. Quod autem ait Diophantus tale est. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. simul superent tertium C. interuallo D. infert Diophantus. Ergo tres A B C. simul continent bis ipsum C. & semel ipsum D. quia enim A B. simul æquantur ipsis C D. simul, si vtrimque addatur ipse C. erunt tres A B C. simul, æquales ipsi D. & duplo ipsius C. Quod erat propositum. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

A 3. B 4. C 5. D 2.

A semisse aggregati excessuum aufer sigillatim semissem cuiuslibet excessus, residua erunt quæsiti numeri. vel quod idem est.

Ab aggregato excessuum aufer sigillatim ipsos excessus, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

Hinc autem manifestè colligitur Aggregatum ipsum excessuum æquale esse summæ quæsitorum numerorum. Quod tamen etiam aliter demonstrabitur hac arte. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. superent C. excessu D. Ambo B C. superent A excessu E. denique ambo A C. superent B. excessu F. dico summam ipsorum A B C. æquari summæ ipsorum D E F. Quoniam enim per mox demonstrata tres A B C. continent bis ipsum C. & semel ipsum D. itemque tres A B C. continent bis ipsum A & semel ipsum E. ac denique tres A B C. continent bis ipsum B & semel ipsum F. Patet summam ipsorum A B C. ter, continere bis

A 30. B 25. C 35. D 20. E 30. F 40.

ipſos A B C. & ſemel ipſos D E F. Quare ſi vtrimque auferantur ipſi A B C. bis, remanent iidem A B C. ſemel, æquales ipſis D E F. ſemel. Quod erat oſtendendum.

QVÆSTIO XIX.

Ἄλλως.

ΕΠΕΙ ὁ πρῶτος ἢ ὁ δεύτερος τῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ἔστω ὁ τρίτος ς̄ ἑνός. συναμφότερος ἄρα ὅτε πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἔσαι ς̄ ἑνὸς μ̊ κ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος ☾ ὁ τρίτος ♀ πρώτου ὑπερέχουσι μονάδας λ̄. τάσσω ♀ δεύτερον τοσούτων μονάδων ὅσων ὄξι ὁ ἥμισυς τῦ τε κ̄. ☾ λ̄. ἰσταῖσι μονάδων κε̄. ἢ ἐπεὶ ὁ πρῶτος ἢ ὁ δεύτερός ὄξιν ς̄ ἑνὸς μ̊ κ̄. ὧν ὁ δεύτερός ὄξι μονάδων κε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσαι ἀριθμῦ ἑνὸς λείψει μ̊ ε̄. λοιπὸν ᾗ καὶ τὸν τρίτον μ̄ τῦ πρώτου, τῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. ἀλλὰ ὁ πρῶτος μ̄ τῦ τρίτου ὄξιν ἀριθμοὶ δύο λείψει μονάδων ε̄. ἴσοι ἄρα εἰσὶν μονάσιν ξ̄ε̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις· ἀριθμοὶ ἄρα δύο ἴσοι μονάσιν ο̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̊ λε̄. ἐπὶ τὰς ὑποτάσεις. ἔταξα ♀ πρῶτον ς̄ ἑνὸς λείψει μ̊ ε̄. ἔσαι μ̊ λ̄. τὸν ᾗ δεύτερον μονάδων κε̄. τὸν δὲ τρίτον ς̄ ἑνὸς, ἔσαι μ̊ λε̄.

Aliter.

QVANDOQVIDEM primus & ſecundus ſuperant tertium vnitatibus 20. eſto tertius 1 N. Igitur primus & ſecundus iuncti erunt 1 N. + 20. Rurſus quoniam ſecundus & tertius ſuperant primum vnitatibus 30. Pono ſecundum tot vnitatum, quantus eſt ſemiſſis numerorum 20. & 30. nimirum vnitatum 25. Et quia primus & ſecundus iuncti ſunt 1 N. + 20. quorum ſecundus eſt vnitatum 25. reliquus erit primus 1 N. — 5. Supereſt vt tertius & primus iuncti ſecundo ſuperaddant vnitates 40. ſed primus cum tertio eſt 2 N — 5. hoc ergo æquatur vnitatibus 65. Communis addatur defectus. Igitur 2 N. æquantur 70. & fit 1 N. 35. Ad poſitiones. Statueram primum 1 N — 5. erit ergo 30. ſecundum autem poſueram 25. At tertium 1 N. Quamobrem erit 35.

IN QVAESTIONEM XIX.

HIC Diophantus vſurpat huiuſmodi Theorema.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet ſimul reliquo ſint maiores, ſumma duorum exceſſuum quibus bini reliquum ſuperant, dupla eſt vnius ex tribus datis numeris, illius ſcilicet ad quem reliquorum exceſſus non eſt relatus.

Quod ſic demonſtratur. Sint tres dati A B C. & iidem exceſſus qui prius D E F. dico ſummam exceſſuum D E. eſſe duplum ipſius B. & ſic de aliis. Quia enim ambo A B. æquantur ambobus C D. itémque ambo B C. æquantur ambobus A E. erunt ipſi A C. ſemel & B. bis æquales ipſis A C D E. Quare auferendo vtrimque ipſos A C. remanet B bis æqualis ipſis D E. Quod erat propoſitum. Eodem argumento oſtendemus ſummam duorum E F. eſſe duplam ipſius C. & ſummam amborum D F eſſe duplam ipſius A. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum. Hinc autem elicitur huiuſmodi Canon.

A 30. B 25. C 35.
D 30. E 30. F 40.

Summa duorum quorumlibet exceſſuum cape ſemiſſem, habebis quæſitos numeros.

Cæterùm placet in artis ſpecimen ex ſupradicto Theoremate aliud etiam non iniucundum adducere, nimirum.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet ſimul reliquo ſint maiores, duorum exceſſuum differentia dupla eſt differentiæ duorum datorum numerorum, inter quos viciſſim facta eſt exceſſuum comparatio.

A 30. B 25. C 35.
D 20. E 30. F 40.
G 10. K 5.

Sint dati qui prius A B C. & iidem exceſſus D E F. & duorum D E. differentia ſit G. cuius ſemiſſis K. dico K eſſe differentiam ipſorum A C. Quia enim vt oſtenſum eſt amborum D E ſumma dupla eſt ipſius B [1] ſunt D B E. arihtmeticè proportionales. Quare duorum D B. idem eſt interuallum, quod duorum B E. Cum ergo extremorum differentia componatur ex differentiis extremorum & medij, patet G duplum eſſe differentiæ D ad B vel B. ad E. Quamobrem K eſt differentia D & B. Itaque quoniam ambo AB. æquantur ambobus C D. ex hypotheſi [2] erit in arithmetica medietate A ad C. vt D ad B. Quare cùm oſtenſum ſit K eſſe differentiam ipſorum D B. erit idem K differentia ipſorum A C. Quod erat oſtendendum. Eodem modo oſtendemus ſemiſſem differentiæ ipſorum E F. eſſe differentiam ipſorum A B. itemque ſemiſſem differentiæ ipſorum D F. eſſe differentiam ipſorum B C. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

5. 1. *poriſ.*

4. 1. *poriſ.*

Quod si lubeat theorematis huius opem implorare, licebit rursus alia operatione ab vtraque Diophanti longè diuersa problema istud absoluere. Ponatur A 1 N. Cùm ergo E sit minor quàm F numero 10. erit A minor quàm B, semisse ipsius 10. Quare B erit 1 N. — 5. Rursus quia E maior est quàm D. numero 10. erit & C maior quàm A semisse ipsius 10. Erit igitur C. 1 N + 5. Iam ergo cùm tres quæsiti numeri sint 1 N. 1 N — 5. 1 N. + 5. triplici via licet ad æquationem peruenire. Nam primi & secundi summa 2 N — 5. æquatur summæ tertij & interualli D. nimirum 1 N. + 25. Rursus secundi & tertij summa nimirum 2 N. æquatur summæ primi & interualli E, nimirum 1 N + 30. Denique primi & tertij summa 2 N. + 5. æquatur summæ secundi & interualli F. nimirum 1 N. + 35 & has tres æquationes si resoluas sigillatim, fiet semper 1 N. 30. primus scilicet numerus. Posset etiam poni 1 N. pro secundo, vel pro tertio, & vtroque modo triplici via ad æquationem perueniri, vt manifestum est.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti reliquum superent numero imperato. Oportet autem semisse summæ quatuor interuallorum minorem esse quemlibet ipsorum. Postuletur itaque vt primus & duo deinceps coniuncti quarto superaddant vnitates 20. secundus & duo deinceps primo superaddant vnitates 30. tertius & duo deinceps similiter secundo superaddant vnitates 40. & adhuc quartus & duo deinceps coniuncti tertio superaddant vnitates 50. Ponatur quatuor numerorum summa 2 N. & quandoquidem primus & duo deinceps quarto superaddunt vnitates 20. & quo tres primi superant quartum, eo quatuor simul superant duplum quarti, sunt autem quatuor simul 2 N. igitur 2 N. superant duplum quarti vnitatibus 20. Quamobrem duplum quarti est 2 N. — 20. Ergo ipse quartus est 1 N. — 10. eadem de causa, erit & primus 1 N. — 15. secundus 1 N. — 20. & tertius 1 N. — 25. supereſt vt quatuor simul æquales sint 2 N. sed quatuor simul faciunt 4 N. — 70. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 35. Ad positiones. Erit primus 20. secundus 15. tertius 10. quartus 25. & quæstioni satisfaciunt.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμὰς ὅπως οἱ ἓξῆς λαμβανόμενοι τῶ λοιπῶ ὑπερέχωσιν ὡρισμένῳ ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶ τεσσάρων τῶ ἡμίσου ἐλάττονα εἶναι ἕκαστον αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τὰς μὲν ἀπὸ πρώτου ἓξῆς καὶ τὸ ἑξῆς σωτεθέντας τῶ τετάρτου ὑπερέχειν μονάδας κ̄. τὰς δὲ ἀπὸ τῶ δευτέρου τρεῖς τῶ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ̄. τὰς δὲ ἀπὸ τῶ ἕβδομου ὁμοίως τῶ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. καὶ ἔτι τὰς ἀπὸ τετάρτου τρεῖς καὶ τὸ ἑξῆς σωτεθέντας τῆς τρίτου ὑπερέχειν μονάδας ν̄. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ δύο, καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τῶ πρώτου τρεῖς τῶ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ὧν δὲ ὑπερέχουσιν οἱ πρῶτοι τρεῖς τῶ τετάρτου, τούτῳ ὑπερέχουσιν καὶ οἱ τέσσαρες τῶ τετάρτου δίς, καὶ εἰσὶν οἱ τέσσαρες ςς^{οὶ} β̄. ἀριθμοὶ ἄρα δύο, δὶς τῆς τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ὁ ἄρα διπλασίων τῶ τετάρτου ἔσαι ςς^{οὶ} β̄ λείψει μ^{ὰς} κ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ς^{ὸς} ἑνὸς λείψει μ^{ὰς} ῑ̄. διὰ ταὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσαι ς^{ὸς} ἑνὸς λείψει μονάδων ιε̄. ὁ δὲ δεύτερος ς^{ὸς} ἑνὸς λείψει μ^{ὰς} κ̄. καὶ ἔτι ὁ τρίτος ς^{ὸς} ἑνὸς λείψει μ^{ὰς} κε̄. λοιπὸν ὅτι τὰς τέσσαρας ἴσους εἶναι ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ᾽ οἱ τέσσαρές εἰσιν ςς^{οὶ} δ̄ λείψει μ^{ὰς} ō. ταῦτα ἴσα ςς^{οἷς} β̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ὰς} λε̄. ὅπερ τὰς ὑποθέσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ^{ὰς} κ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ὰς} ιε̄. ὁ δὲ τρίτος μ^{ὰς} ῑ̄. ὁ δὲ τέταρτος μ^{ὰς} κε̄. καὶ πιθανὸν τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

CONDITIONIS adiectæ ratio est, quia vt mox ostendetur, excessuum summa dupla est summæ ipsorum quatuor numerorum. Quare semissis summæ excessuum qui æqualis est summæ numerorum debet esse maior tribus quibuslibet, ac proinde multò magis, maior est excessu trium super reliquum. Quod autem summa excessuum, sit dupla summæ numerorum, sic ostendo. Sint quatuor numeri A B C D. & excessus trium quorumlibet super reliquum sint E F G H. Dico summam ipsorum E F G H duplum esse summæ ipsorum A B C D. Quia enim A B C. simul excedunt D numero E. erunt A B C. simul æquales ipsis D E. & addendo vtrimque ipsum D. erit summa ipsorum A B C D. æqualis ipsi

A 20. B 15. C 10. D. 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

D bis, & ipſi E ſemel. Eodem modo oſtendemus ſummam eorumdem A B C D æquari ipſi A bis & F ſemel, itemque ipſi B bis & G ſemel, ac denique ipſi C bis & H ſemel. Ergo ſumendo quater ipſos A B C D. erit quadruplum hoc æquale ipſis A B C D bis, & ipſis E F G H ſemel. Quare auferendo vtrimque ipſos A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis æquales ipſis E F G H ſemel. Quod erat propoſitum.

Ceterùm patet demonſtrationis medium congruenti modo applicari poſſe cuilibet Numerorum multitudini propoſitæ, vnde fiet regula generalis.

Si fuerint quotlibet numeri, quorum omnium vno dempto ſuper reliquum exceſſus dentur, erit exceſſuum ſumma ſummæ numerorum multiplex ſecundum numerum multitudinis numerorum binario multatum.

Ita ſi fuerint quinque numeri, erit exceſſuum ſumma ſummæ numerorum tripla, & ſi fuerint ſex numeri, erit exceſſuum ſumma, numerorum ſummæ quadrupla, & ſic in infinitum. Atque ex his & ex ipſa Diophanti operatione elicietur Canon generalis ad huiuſmodi quæſtiones ſoluendas propoſita qualibet multitudine numerorum.

Summam exceſſuum diuide per numerum multitudinis numerorum binario multatum, à quotiente auſer ſigillatim ipſos exceſſus, reſiduorum ſemiſſes erunt quæſiti numeri.

QVÆSTIO XXI.

Αλλως. *Aliter.*

ΕΠΕΙ ὑ ἀπὸ τῦ πρώτου ζεῖς τῦ τετάρτε ὑπερέχουσι μ̊ κ̄. τετάχθω ὁ τέταρτος ς̄ ἑνὸς, οἱ ζεῖς ἄρα ἔσονται ς̄ ἑνὸς μ̊ κ̄. πάλιν ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τῦ δευτέρε ζεῖς τῦ πρώτου ὑπερέχουσι μ̊ λ̄. τετάχθω σωαμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μ̊ τοσούτων, ὅσων ὅξιν ὁ ἡμισυς τῦ δύο ὑπεροχῶν. λέγω δὴ τ̄ κ̄. καὶ τ̄ λ̄. τυτέστι μ̊ κε̄. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τῦ πρώτου ζεῖς εἰσὶν ς̄ ἑνὸς μ̊ κ̄. ὧν ὁ δεύτερος ℭ ὁ τρίτος μ̊ κε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσαι ς̄ ἑνὸς λείψει μ̊ ε̄. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τ̄ δευτέρε ζεῖς ὑπερέχουσι τῦ πρώτου μ̊ λ̄. οἱ δὲ ἀπὸ τῦ τρίτου ζεῖς ὑπερέχουσι τ̄ δευτέρε μ̊ μ̄. σωαμφότερος ἄρα ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἔσαι μ̊ λε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσαι μ̊ λε̄. λείψει ς̄ ἑνός. ἔσι ὃ καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μ̊ κε̄. ὧν ὁ τρίτος μ̊ λε̄ λείψει ς̄ ἑνὸς, λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ς̄ ἑνὸς λείψει μ̊ ῑ. λοιπόν ὅξι τὰς ἀπὸ τετάρτε τρεῖς τῦ τρίτου ὑπερέχειν μ̊ ν̄. ἀλλ᾽ οἱ τρεῖς σωτεθέντες ποιῶσι ἀριθμὸς τρεῖς λείψει μ̊ ιε̄. ὁ ὢ τρίτος μ̊ λε̄. λείψει ς̄ ἑνός. δεῖ δὴ καὶ ς̄ τρεῖς λείψει μ̊ ιε̄ ὑπερέχειν μονάδας λε̄ λείψει ς̄ ἑνὸς, μ̊ ν̄. ὥτε μονάδες πε̄ λείψει ς̄ ἑνὸς ἴσαι εἰσὶν ς̄ τρισὶ λείψει μ̊ ιε̄. ℭ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̊ κε̄. ὅπερ τας ὑποτάξας. ἔταξα τὸν πρῶτον ς̄ ἑνὸς λείψει μ̊ ε̄. ἔσαι μ̊ κ̄. ὁ ὢ δεύτερος ὁμοίως μ̊ ιε̄. ὁ δὲ τρίτος μ̊ ī, ὁ δὲ τέταρτος μ̊ κε̄.

QVONIAM tres à primo ſuperant quartum vnitatibus 20. Ponatur quartus 1 N. Tres ergo reliqui erunt 1 N. + 20. Rurſus quia tres à ſecundo ſuperant primum vnitatibus 30. Ponantur ſecundus & tertius ſimul tot vnitatum, quot continet ſemiſſis duorum interuallorum, duorum ſcilicet 20. & 30. hoc eſt vnitatum 25. Et quoniam tres à primo ſunt 1 N. + 20. quorum ſecundus & tertius ſunt 25. relinquitur primus 1 N. − 5. Et quia tres à ſecundo ſuperant primum vnitatibus 30. At tres à tertio ſuperant ſecundum vnitatibus 40. erunt vtique tertius & quartus ſimul 35. Igitur relinquitur pro tertio 35 − 1 N. Sunt autem ſecundus & & tertius ſimul 25. quorum tertius eſt 35 − 1 N. relinquitur ergo ſecundus 1 N. − 10. Supereſt vt tres à quarto ſuperent tertium vnitatibus 50. ſed tres illi ſimul ſunt 3 N. − 15. Tertius autem eſt 35. − 1 N. Oportet itaque 3 N. − 15. ſuperare 35 − 1 N. æquantur 3 N. − 15. & fit 1 N. vnitatum 25. Ad poſitiones. Statueram primum 1 N. − 5. erit ergo 20. ſecundus verò ſimiliter 15. tertius 10. quartus 25.

IN QVAESTIONEM XXI.

HIC ſupponit Diophantus, hoc theorema.

Datis quatuor numeris, ita vt tres quilibet reliquo ſint maiores, ſumma duorum exceſſuum, quibus tres reliquum ſuperant, dupla eſt ſummæ duorum ad quos exceſſuum relatio facta non eſt.

A 20. B 15. C. 10. D. 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

Sint numeri & exceſſus qui ſuprà. Dico ſummam exceſſuum E F. duplam eſſe ſummæ ipſorum B C. & ſic de aliis. Etenim quia tres A B C. æquantur duobus D E itemque tres B C D. æquantur duobus A F. erunt A D. ſemel & B C. bis æquales ipſis A D E F. Quare auferendo vtrimque ipſos A D. remanent B C. bis æquales ipſis E F. Quod erat propoſitum.

Hinc etiam patet hoc Theorema ad quotlibet numeros congruenter extendi, ſemper enim eodem modo oſtendetur ſummam duorum exceſſuum duplam eſſe ſummæ omnium ad quos non eſt facta exceſſuum relatio. Ita ſi fuerint quinque numeri duorum exceſſuum ſumma erit dupla ſummæ trium numerorũ ad quos non fiet exceſſuum relatio, & ſic in infinitum. Sed & eadem ratione ad quotlibet numeros extendemus Theorema quod attulimus adquæſtionẽdecimam nonam, & illud ſic proponemus.

Datis quotlibet numeris, ita vt omnes ſimul vno dempto ſint ſemper reliquo maiores; duorum exceſſuum differentia dupla eſt differentiæ duorum numerum, inter quos viciſſim facta eſt exceſſuum comparatio.

M 25.
A 20. B 25. C 10. D 25.
E 20. F 30. G 40. H 50.
K 10. L 5.

Sint quatuor numeri A B C D. & exceſſus trium quorumlibet ſuper reliquum ſint E F G H. & ipſorum E F. interuallum K cuius ſemiſſis L. Dico L. eſſe interuallum ipſorum A D. Nam ſumpta M ſumma reliquorum B C. inter quos non fit exceſſuum relatio, erit per iam oſtenſa, ſumma duorum E F. dupla ipſius M. [1] Quare E M F. erunt in arithmetica medietate. Atque adeo cùm extremorum E F differentia ſit K, eius ſemiſſis L. erit differentia ipſorum E M. Itaque quia tres A B C. ſeu duo A M. æquantur duobus D E ex hypotheſi, [2] erunt in arithmetica medietate A ad D. vt E ad M. Quare & ipſorum A D. interuallum erit L. Quod demonſtrandum erat. Eademque eſt ratio ſi plures fuerunt numeri, vt patet. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum. Licebit ergo & huius theorematis auxilio alia operatione, eaque ſane multiplici ſoluere huiuſmodi quæſtiones, vt docuimus ad decimam nonam. Sed de his hactenus.

quinta 1. poriſm.

quarta 2. poriſm.

QVÆSTIO XXII.

PROPOSITVM numerum in tres numeros partiri, vt vteruis extremorum adſumpto medio ad reliquum extremum datam habeat rationem. Statutum ſit numerum 100. diuidere in tres numeros, vt primus & ſecundus tertij triplum conſtituant. At ſecundus & tertius quadruplum primi. Ponatur tertius 1 N. & quia primus & ſecundus faciunt triplum tertij, erunt vtique ambo 3 N. Tres ergo numeri ſimul erunt 4 N. æquales ſane numero 100. & fit 1 N. 25. Ad poſitiones. Poſueram tertium 1 N. erit ergo 25. Statueram autem primum & ſecundum ſimul 3 N. erunt ergo 75. Rurſus quia ſecundus & tertius conſtituunt quadruplum primi. Ponatur primus 1 N. erunt igitur ſecundus & tertius 4 N. Tres ergo ſimul ſunt 5 N. ſed & vnitates 100. fit igitur 1 N. 20. eſt ergo primus 20. tertius verò 25. Reſiduum igitur eſt ſecundus, nimirum 55. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΤΟΝ ὑποκείμενον ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄκρων πρὸς λαβὼν τὸν μέσον πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἄκρων λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ. διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ᾖ τριπλασίων. ὁ δὲ δεύτερος πρὸς ὁ τρίτος τοῦ πρώτου ᾖ τετραπλασίων. τετάχθω ὁ τρίτος ϛ ἑνός, καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπὲρ τριπλασίων τετάχθωσαν οἱ δύο, ἀριθμοὶ τρεῖς. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ϛ δ. οὗτοι ἴσοι μονάσιν ρ καὶ γίνε ὁ ἀριθμὸς μ κε. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν τρίτον ϛ ἑνός. ἔσαι μ κε. τὸν δὲ πρῶτον καὶ δεύτερον ϛϛ τριῶν, ἔσον μ οε. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος πρὸς ὁ τρίτος τοῦ πρώτου εἰσὶ τετραπλασίονες. τετάχθω ὁ πρῶτος ϛ ἑνός, ἔσαι ἄρα ὁ δεύτερος πρὸς ὁ τρίτος ϛϛ τεσσάρων. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ϛ ε. ἀλλὰ πρὸς μ ρ. γίνε ὁ ϛ μ κ. ἔσαι ἄρα ὁ πρῶτος μ κ. ὁ δὲ τρίτος μ κε. λοιπὸς ἄρα ὁ β ἔσαι μ νε. πρὸς ποιᾶσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXII.

EX operatione Diophanti eliciemus huiuſmodi Canonem.

Datum numerum diuide ſigillatim per denominatorem vtriuſque rationis poſtulata vnitate auctum orientur extremi quæſitorum.

Porrò quamuis operatio Diophanti per duas poſitiones ſit elegans, poteſt tamen ſolui quæſtio

per vnicam tantum positionem, etiam sine auxilio regulæ quantitatis, quicquid dicat Xilander. Quod ita fiet. Ponatur primus 1 N. ergo secundus & tertius simul erunt 4 N. & trium summa 5 N. quæ si diuidatur in duas partes, quarum altera alterius sit tripla, habebimus hinc tertium, inde summam primi & secundi. Diuidemus autem 5 N. in duas partes seruantes proportionem triplam per Canonem secundæ huius, eruntque 1 $\frac{1}{4}$ N & 3 $\frac{3}{4}$ N. est ergo primus 1 N. tertius 1 $\frac{1}{4}$ N. & siue à summa secundi & tertij quæ est 4 N. auferatur tertius, siue à summa primi & secundi quæ est 3 $\frac{3}{4}$ N. auferatur primus, remanet secundus 2 $\frac{3}{4}$ N. Omnes autem simul faciunt 5. N. Igitur 5 N. æquantur 100. & fit 1 N. 20. Ad hypostases, erit primus 20. secundus 55. tertius 25. & constat.

QVÆSTIO XXIII.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως ὁ μέγιστος τῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ ὴ μέσος τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ ὴ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τῦ τῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν μέσον τῦ ἐλαχίστου, τοσούτῳ μέρει τῦ μεγίστου ὑπερέχειν, ὥστε τὸν ὁμώνυμον τῦ τοιούτου μέρους ὅπι τ ὑπεροχὴ τῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάχιστον πολλαπλασιαζόμενον, ποιεῖν ἐν αὐτῷ πλῆθος ἀριθμῶν πλεῖον, ἢ ἐν τῷ μέτρῳ. ὑπετάχθω δὴ τὸν μέγιστον τῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τῦ ἐλαχίστου τρίτῳ, τὸν ὴ μέσον τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τ μεγίστου ζ΄τῳ, τὸν ὴ ἐλάχιστον ὑπερέχειν μονάδας ῑ τῦ τῦ μέσου τρίτου μέρους. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάασων ς^{ς} ἑνὸς, ☾ ὧν ὑπερέχει τῦ μέσου τρίτου μονάδων ῑ. ὁ ἄρα μέσος ἔσαι ἀριθμῶν τριῶν, ἵνα ἔχῃ ὁ ἐλάχιστος τὸ τρίτον τῦ μέσου ἢ μονάδας ῑ. ἢ ἢ ὅπως. τετάχθω ὁ μέσος ἀριθμὸς ξεῖς, ☾ ἐπεὶ θέλω τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχειν τῦ τρίτου μέρους τῦ μέσου μ^{ο} ῑ. ἔσαι ς^{ς} ἑνὸς, ἢ μ^{ο} ῑ. λοιπὸν ὅτι ἢ τὸν μέσον τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τ πρώτου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ μέσος τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει ς^{οις} δυσὶ λείψει μ^{ο} ῑ. ταῦτα ἄρα τρίτον μέρος ὅτι τῦ μεγίστου, αὐτὸς ἄρα ὁ μέγιστος ἔσαι ςς̄ λείψει μ^{ο} λ̄. δεήσῃ ἄρα ἢ τ μέγιστον τῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ μέγιστος τῦ μέσου ὑπερέχει ςς^{οις} ξεισὶ λείψει μ^{ο} λ̄. ταῦτα ἄρα τρίτον ὅτι μέρος τῦ ἐλαχίστου, ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσαι ἀριθμῶν θ̄ λείψει μ^{ο} 4. ἀλλὰ ἢ ἀριθμῦ ἑνὸς μ^{ο} ῑ διρέθη. ἢ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ο} ιβ̄. ἢ ἥμισυ. ἔσαι ἄρα ὁ μὲν τρίτος μ^{ε} κϑ̄. καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέσος λζ. καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέγιστος μ^{ο} μ̄ε̄. ἢ πεῖσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum maximus medium excedat minimi data parte; medius minimum superet maximi data parte. At minimus dato numero superet datam medij partem. Oportet autem medium tanta parte maximi præstare minimo, vt denominatore partis illius ducto in id quo medius excedit minimum, maior in eo existat Numerorum multitudo, quàm in medio. Constitutum sit maximum medio præstare, triente minimi. Medium autem minimo superaddere trientem maximi. Minimum denique superare trientem medij 10. vnitatibus. Ponatur itaque minimus 1 N. & 10. vnitatum quibus præstare debet triente medij. Erit ergo medius 3 N. vt contineat minimus trientem medij & vnitates 10. vel sic. Ponatur medius 3 N. & quia volo minimum superare trientem medij decem vnitatibus, erit minimus 1 N. + 10. Restat vt medius minimum superet maximi triente, sed quo medius minimum superat est 2. N. — 10. hoc ergo est triens maximi, ipse igitur maximus est 6 N. — 30. Oportet itaque & maximum medio præstare, triente minimi, sed quo maximus medium excedit est 3 N. — 30. hoc ergo est triens minimi, minimus ergo est 9 N. — 90. sed & repertus est 1 N. + 10. Quamobrem fit 1 N. 12. $\frac{1}{2}$ erit igitur tertius 22 $\frac{1}{2}$. Medius 37 $\frac{1}{2}$. Maximus 45. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPORTET *autem medium* &c. Refertur hæc conditio ad Algebricos numeros nota N. affectos, & eius necessitas ita demonstrari potest. Quia Diophantus ponit pro medio certam Numerorum multitudinem, erit & minimus certa Numerorum multitudo + certis vnitatibus, quia videlicet minimus est certa pars medij + certis vnitatibus. Quare medius excedet minimum certa mul-

titudine Numerorum — certis vnitatibus, cùm enim in medio nullæ ſint vnitates abſolutæ, non poterunt ab eo ſubtrahi vnitates quæ ſunt in minimo, niſi per ſignum —. Cùm ergo exceſſus iſte medij ſupra minimum ſit certa pars maximi, vt habeatur maximus, ducetur hic exceſſus in denominatorem partis, fietque maximus conſtans ex multitudine Numerorum — certis vnitatibus. Neceſſe eſt autem vt hæc Numerorum multitudo exiſtens in maximo, ſit maior Numerorum multitudine exiſtente in medio, alioquin ſi ponatur minor vel æqualis, cùm præterea adiunctum habeat defectum vnitatum, ſequetur maximum minorem eſſe medio. Quod eſt abſurdum. Quæ omnia ex ipſamet Diophanti operatione manifeſta ſunt. Sed (quod pace Diophanti dictum velim) hæc conditio, parum congruenter aſſignata videtur. Etenim cùm quæſtioni apponitur conditio, id fit vt per eam agnoſcamus vtrum poſſibilis ſit quæſtio, necne, ne videlicet oleum operamque perdamus circa impoſſibilem fruſtra operantes, ac proinde talis eſſe debet conditio, vt ante ipſam operationem naturam quæſtionis nobis aperiat. Quod ſane non præſtat hæc Diophanti conditio, cùm per eam non niſi iam prouecta operatione, de ſtatu quæſtionis iudicium fieri poſſit. Itaque ſolitum authoris acumen hîc deſidero. Certè non erat difficile legitimam conditionem præſcribere, hoc modo.

Oportet denominatorem partis medij minorem eſſe numero, qui fit ex eodem denominatore vnitate multato in denominatorem partis maximi.

Canonem hîc ſi formare libet, neceſſe erit eum perplexiorem fieri, hoc ſcilicet modo.

Duc inter ſe denominatores partium maximi & minimi, & productum vnitate auctum ducito in datum numerum, productúmque diuide per ſolidum ſub tribus denominatoribus multatum vnitate & numero qui fit ex denominatore partis minimi in ſummam aliorum duorum denominatorum. Quotienti adde datum numerum, fiet minimus quæſitorum. Et eundem quotientem ducito in denominatorem partis medij, fiet ipſe medius.

Verbi gratia debeat maximus ſuperare medium quarta parte minimi. Medius minimum ſexta parte maximi. minimus quintam partem medij numero 12. ducito inter ſe 4. & 6. producto 24. adde 1. fit 25. quem ducito in 12. fit 300. quem diuide per ſolidum ſub denominatoribus 5. 6. 4. multatum vnitate & producto ex 4. in ſummam aliorum, hoc eſt diuide 300. per 75. fit 4. cui ſi addas 12. fit minimus quæſitorum 16. & ſi ducas 4. in denominatorem 5. fiet 20. medius, vnde facile eſt reperire maximum 24. cùm ſit ſextuplus ad interuallum medij & minimi.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros vt maximus medium ſuperet, minimi data parte. Medius minimum excedat, maximi data parte. Minimus dato numero ſuperet datam medij partem. Oportet autem maximi talem partem dari, vt adiecta minimo, numeros pauciores conficiat iis qui pro medio numero ab initio ponebantur. Ponatur rurſus minimus ⅓ 1 N. & 10. vnitates quibus ſuperat medij trientem; erit ergo medius 3. N. vt ſcilicet minimus ſuperet 10. vnitatibus trientem medij. Rurſus quia volo maximum medio præſtare triente minimi, ſi addidero medio minimi trientem habebo maximum, nimirum 3 ⅓ N. + 3 ⅓. Reſtat vt medius æqualis ſit minimo, & maximi trienti. Sed minimus cum triente maximi eſt 2 ⅓. Hoc igitur æquatur medio ſeu 3 N. Aufero ſimilia à ſimilibus. Ergo ⅓ N. æquantur 11 ⅓. Omnia nouies. Igitur 8 N. æquantur 100.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὲς ὅπως ὁ μέγιστος τῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ ϑ μέσος τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ ϑ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τῦ τῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον τῦ μεγίστου μέρος τηλικῦτον δίδοσθαι, ὥστε προσλιθέμενον τῷ ἐλαχίστῳ ποιεῖν τοὺς ἐν αὐτῷ ἀριθμὲς ἐλάσσονας τ ἐξ ἀρχῆς λαμβανομένων τῦ μέσου. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς ἑνὸς, ϗ ὧν ὑπερέχει τῦ μέσου ξίτου μέρος μονάδων ι. ἔσαι ἄρα ὁ μέσος ςᵃ ξεῖς, ἵνα ὑπερέχῃ ὁ ἐλάχιστος μονάδας ι τῦ τῦ μέσου τρίτου μέρος. πάλιν ἐπεὶ θέλω τ μέγιστον τῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει, ἐὰν προσθῶ τῷ μέσῳ τῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος, ἕξω τ μέγιστον ςς Γ. αᵛ μ̊ γ̄ αᵛ. λοιπὸν δεῖ ϗ τ μέσον ἴσον εἶ τῷ ἐλαχίστῳ, ϛ τῷ τ μεγίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ ἐλάχιστος μ̊ τῦ τρίτου μέρος τῦ μεγίστου ἀριθμοί εἰσι β αᵟ. ϛ μονάδες ιᾱ αᵟ. ταῦτα ἴσα τοῖς τῦ μέσου ἀριθμοῖς τρισίν. ὑπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀριθμῷ ἄρα ηᵟ. ἴσά ἐστι μονάσιν ιᾱ αᵟ. πάντα ἐννεάκις. ςςᵃ ὀκτὼ ἴσοι μ-

νάσιν ἑκατόν. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ°. ιβ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ἡ αὐτὴ δεῖξις τῇ ἐπάνω.

& fit 1 N. 12 ½ & eadem est quæ suprà demonstratio.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EST eadem prorsus quæstio cum præcedente, sed alia operatio. Conditio adiecta eiusdem est naturæ cum ea quæ præcedenti apponitur, & eius necessitas simili ratiocinatione potest deprehendi, sed eodem vitio laborat atque præcedens, nec per eam determinari quicquam potest de quæstione proposita, antequam peracta operatione ad æquationem peruentum sit. Quare melius præscribetur sic.

Oportet denominatorem partis medij maiorem esse numero qui sit si eiusdem denominatoris auctli parte vnitatis à parte minimi denominata, sumatur pars à parte maximi denominata, vnitate aucta.

Canon etiam ab hac operatione formari posset, sed intricatus. Quare cum huiusmodi Canones vix vsui esse possint ob eorum perplexitatem, illis supersedere satius erit.

QVÆSTIO XXV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς, ἑαυτῷ δεδῶ μέρος τὸ ὑπιταχθέν. ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ὑπιτάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι ἑαυτῷ τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ τέταρτον. καὶ ἔτι τὸν τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ πέμπτον, καὶ γενέσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τινῶν τρίτον ἐχόντων μέρος, ἐπεὶ τρίτον δίδωσιν. ἔστω δὴ ἀριθμὸς τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος δοὺς ℂ λαβὼν ς̄ ἑνὸς μ° τριῶν. λοιπὸν ὄντι τῷ πρώτου δόντα ℂ λαβόντα γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ° γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτῷ τὸ τρίτον ς̄ν ἕνα, λαβὼν δὲ μονάδας ξεῖς λείψει ἀριθμὸν ἑνὸς, γίνεται ς̄ ἑνὸς, μ° γ̄. μονάδες ἄρα ξεῖς λείψει ς̄ ἑνὸς πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἐστὶ μ° ιε̄ λείψει ς̄ ε̄. δήσῃ ἄρα καὶ τὸ τρίτον δοθέντα μὲν ἑαυτῷ τὸ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ° τριῶν. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτῷ τὸ πέμπτον μονάδας τρεῖς λείψει ς̄ ἑνὸς, λοιπὸς ὂν μονάδων ιβ̄ λείψει ς̄ δ̄. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεται μ° ιγ̄ λείψει ς̄ δ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάδι τεσσὶ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° δ̄. ὁ δὲ τρίτος μ° ε̄. ℂ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum si quisque proximè ipsum sequenti sui partem quæ mandatur dederit, inter eos qui dederunt & acceperunt fiat æqualitas. Statutum sit vt primus secundo det sui trientem; secundus tertio sui quadrantem; Tertius primo sui quintantem, & post mutuam hanc contributionem fiant æquales. Ponatur primus quotlibet numerorum qui trientem habeant, quandoquidem daturus est trientem, esto itaque 3. N. Statuatur secundus quotlibet vnitatum quæ quadrantem habeant, quia daturus est quadrantem; esto itaque vnitatum 4. & erit secundus datis & acceptis quæ imperata sunt 1 N. + 3. Restat vt & primus vbi dederit acceperitque, fiat 1 N. + 3. sed dans sui trientem 1 N. accipiens autem 3 − 1 N. fit 1 N. + 3. Igitur 3 − 1 N. est quinta pars tertij. ipso ergo tertius est 15 − 5 N. Oportet ergo & tertium dantem quidem sui quintantem, accipientem verò à secundo quadrantem illius, nempe vnitatem, fieri 1 N. + 3. sed dans sui quintantem, nimirum 3 − 1 N. relinquitur 12 − 4 N. Accipiens autem à secundo quadrantem, puta vnitatem, fit 13 − 4 N. Hoc ergo æquatur 1 N. + 3. & fit 1 N. 2. Ad positione. Erit primus 6. secundus 4. tertius 5. & constat propositum.

IN QVAESTIONEM XXV.

HÆC quæstio infinitas recipit solutiones, vt patet, cùm posito primo 3 N. poni possit pro secundo quilibet vnitatum numerus. Eodemque modo si ponas secundum 4 N. poni poterit tertius

tertius quilibet vnitatum numerus. Et si ponatur tertius 5 N. ponetur primus ad libitum quilibet vnitatum numerus.

Quod si determinare velis huiusmodi quæstiones ad vnicam solutionem, præscribendus est numerus in quo fieri debet æqualitas, vt si proponatur quæstio hoc modo. Sint inueniendi tres numeri, ita vt primus impertiendo sui trientem secundum, secundus sui quadrante tertium. Tertius sui quintante primum, post hanc mutuam contributionem quilibet trium numerorum inueniatur esse 10. Tunc autem sic erit operandum. Esto primus 3 N. qui dando sui trientem secundo, remanebit 2 N. Quare cùm accipiendo quintantem tertij, debeat esse 10. Erit quintans tertij 10 − 2 N. ac proinde ipse tertius 50 − 10 N. qui dando sui quintantem remanet 40 − 8 N. vnde cùm accipiendo quadrantem secundi, debeat esse 10. erit vtique quadrans secundi 8 N. − 30. ac proinde ipse secundus 32 N − 120. supereſt vt secundus dando sui quadrantem, & accipiendo trientem primi, fiat etiam 10. fit autem 25 N. − 90. Igitur 25 N. − 90. æquantur 10. & fit 1 N. 4. Ad positiones. Erit primus 12. secundus 8. tertius 10. *Ab hac quæstione parum differunt decima octaua & decima nona secundi vt fusius eo loco docebimus, ita vt videantur hinc eò translatæ.*

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE quatuor numeros quorum quilibet proximè sequenti se, det sui partem quæ imperabitur, ita vt dantes & accipientes fiant æquales. Imperatum fit primum secundo dare sui trientem; secundum tertio dare sui quadrantem; tertium quarto, sui quintatem; Quartum primo, sui sextantem, vt post hanc mutuam contributionem fiant æquales. Ponatur primus aliquot numerorum trientem habentium, quoniam trientem daturus est sitque 3 N. secundus autem ponatur aliquot vnitatum quadrantem habentium, quandoquidem quadrantem daturus est, sitque 4. secundus igitur dans sui quadrantem, nempe 1. & accipiens primi trientem, puta 1 N. fit 1 N. + 3. Oportet ergo & primum cùm dederit sui trientem 1 N. & acceperit sextantem quarti fieri 1 N. + 3. sed cùm dedit 1 N. relinquitur 2 N. oportet igitur hoc adscito, sextantem quarti fieri 1 N + 3. Quamobrem 3 − 1 N. est sextans quarti, atque ipse quartus est 18 − 6 N. Restat vt & quartus dato sui sextante, & accepto quintante tertij, fiat 1 N. + 3. sed dato sui sextante, nempe 3 − 1 N. remanet 15 − 5 N. Oportet igitur hunc adsumentem quintantem tertij fieri 1 N. + 3 sed si adsumat 6 N. − 12. fit 1 N. + 3. Igitur 6 N − 12. est quintans tertij. Ipse ergo tertius est 30 N − 60. Oportet ergo & tertium dato sui quintante, accepto vero quadrante secundi

ΕΤΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμὰς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτῆ διδῶ μέρος τὸ ὁπιταχθέν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ὁπιτετάχθω τὸ μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τρίτον. τὸ δὲ δεύτερον τὸ τρίτῳ τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον τῷ τετάρτῳ τὸ πέμπτον. καὶ ἔτι τὸ τέταρτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕκτον, καὶ γενέσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμῶν τινῶν τρίτον μέρος ἐχόντων ἐπεὶ τρίτον δίδωσιν. ἔστω ἀριθμῶν τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τέταρτον δίδωσιν, ἔστω μ° δ. ὁ ἄρα δεύτερος δοὺς μὲν ἑαυτῆ τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἕνα γίνεται ς^{ξ} ἑνὸς μ° γ̄. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον δόντα μὲν ἑαυτῷ τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἕνα, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τετάρτου τὸ ἕκτον γίνεσθαι ἀριθμοῦ ἑνὸς μ° γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ς^{ν} ἕνα λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς δύο. δεήσει ἄρα τὸ τοῦ τετάρτου ἕκτον λαβόντα αὐτὸν γίνεσθαι ς^{ξ} ἑνὸς μ° γ̄. μονάδες ἄρα ξ̄ εἰς λείψει ς^{ξ} ἑνὸς ἕκτον μέρός εἰσι τοῦ τετάρτου. αὐτὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται μ° ιη̄ λείψει ςξ̄ λοιπόν ὅτι καὶ τὸν τέταρτον δόντα μὲν ἑαυτῷ τὸ ἕκτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τρίτου τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς^{ξ} ἑνὸς μ° γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτῷ τὸ ἕκτον μονάδας ξ̄ εἰς λείψει ς^{ξ} ἑνὸς, λοιπός ὅτι μ° ιε̄ λείψει ςξ̄ ε̄. δεήσει ἄρα αὐτὸν καὶ λαβόντα τὸ τοῦ ξ̄ίτου πέμπτον γίνεσθαι ς^{ξ} ἑνὸς μ° γ̄. ἀλλὰ ἂν λάβῃ ἀριθμοὺς ε̄ λείψει μ° ιβ̄ γίνεται ς^{ξ} ἑνὸς μ° γ̄. οἵτε ἀριθμοὶ ε̄ λείψει μ° ιβ̄. πέμπτον μέρός εἰσι τοῦ ξ̄ίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςξ̄ λ̄ λείψει μ° ξ. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ξ̄ίτον δόντα μὲν τὸ ἑαυτῆ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς^{ξ} ἑνὸς μ° γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτῷ τὸ τέμπτον ἀριθμοὺς ε̄ λείψει μ° ιβ̄. λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς κδ̄ λείψει μ° μη̄. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον

γίνεται ς̄ς̄ κδ̄ λείψει μ̊ μ̄ς̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τεισί. ☾ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ν̄ εἰκοσοτρίτων. δῆλα τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ρν̄, εἰκοσοτρίτων. ὁ δ' δεύτερος ϡβ̄, εἰκοσοτρίτων. ὁ δὲ τρίτος ρκ̄, εἰκοσοτρίτων, ὁ δὲ τέταρτος ριδ̄ εἰκοσοτρίτων, περιπλάσω τὸ μόριον. ἔσαι δηλαδὴ ὁ μὲν πρῶτος μ̊ ρν̄ ὁ δ' δεύτερος ϡβ̄. ὁ δὲ τρίτος ρκ̄. ὁ δὲ τέταρτος ριδ̄. καὶ ποιῶσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

fieri 1 N. + 3. sed dato sui quintante, puta 6 N. — 12. remanet 24 N — 48. Accepto autem secundi quadrante fit 24 N. — 47. Hoc ergo æquale est 1 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{50}{23}$ Ad positiones erit primus $\frac{150}{23}$ secundus $\frac{92}{23}$. tertius $\frac{120}{23}$. quartus $\frac{114}{23}$ Abiiciatur denominator partium. Erit itaque primus 150. secundus 92. tertius 120. quartus 114. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XXVI.

EADEM ratio est huius quæstionis, quæ & præcedentis. Quæstio infinitas recipit solutiones, & si determinanda sit ad vnicam, præscribendus est numerus in quo fieri debet æqualitas, tuncque operabimur vt in præcedente traditum est. Quod autem denominatores abiici iubet Diophantus, vt solutio in integris habeatur, id fit quia si inuenti semel numeri quæstioni satisfacientes, per eundem multiplicentur vel diuidantur, producta itidem & quotientes quæstionem soluent, cuius rei ratio est quam attingit Xilander, quia scilicet quæsiti numeri, partes proportionales vicissim dant & accipiunt, quæ autem partium cognominum eadem totorum inter se, ac vicissim est ratio. Vnde etiam colligi potest alius modus soluendi huiusmodi quæstiones, cùm numerus præscribitur in quo fiat æqualitas. Nam si quæstio prius soluatur per operationem Diophanti, & numerus in quo fit æqualitas diuidatur per eum qui præscribitur, & per quotientem diuidantur item inuenti numeri per operationem Diophanti, habebuntur quæsiti numeri. Verbi gratia, si quærantur quatuor numeri dantes & accipientes easdem partes quas requirit Diophantus, ita vt facta contributione quilibet reperiatur 59. $\frac{1}{2}$ solues prius quæstionem cum Diophanto, & inuenies numeros 150. 92. 120. 114. Et numerus in quo fit æqualitas erit 119. Hunc ergo si diuidas per numerum præscriptum 59. $\frac{1}{2}$ erit quotiens 2. per quem si diuidas sigillatim inuentos numeros, fient 75. 46. 60. 57. quæsiti numeri. Posset etiam tam hæc quàm præcedens paulò aliter proponi, requirendo scilicet vt facta mutua contributione fiant numeri, diuersi non æquales. Verbi gratia, sint inueniendi quatuor numeri vt primus dando sui trientem & accipiendo sextantem quarti fiat 6. Secundus dando sui quadrantem, & accipiendo trientem primi fiat 7. Tertius dando sui quintantem, & accipiendo quadrantem secundi fiat 14. Quartus dando sui sextantem, & recipiendo quintantem tertij, fiat 23. Et tunc imitabimur artificium operationis quæ ad præcedentem tradita est, hoc modo. Ponatur primus 3 N. cum ergo multatus suo triente & auctus sextante quarti faciat 6. erit 6 — 2 N. sextans quarti, & ipse quartus 36 — 12 N. vnde ablato sextante, manent 30. — 10 N. quæ cùm quintante tertij debent facere 23. Igitur quintans tertij est 10 N. — 7. Ideoque ipse tertius est 50 N. — 35. qui multatus quintante manet 40 N — 28. debetque tunc cum quadrante secundi facere 14. Quare 42 — 40 N. est quadrans secundi, & ipse secundus 168 — 160 N. vnde ablato quadrante manent 126 — 120 N. quæ cum triente primi debent facere 7. sed faciunt 126 — 119 N. hoc ergo æquatur 7. & fit 1 N. 1. Ad positiones primus est 3. secundus 8. tertius 15. quartus 24.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος ωδῆ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λάβῃ μέρος τὸ ὁπιοῦν, καὶ γένωνται ἴσοι. ὁπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον ωδῆ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον ωδῆ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ πέμπτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ἑνὸς, οἱ δὲ λοιποὶ δύο μονάδων πνδ̄ τῶ πρὸ τοῦ ἕνεκεν τρίτον μέρος ἔχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔσωσαν μ̊ γ̄. οἱ ἄρα τρεῖς ἔσονται ς̄ ἑνὸς μ̊ γ̄. καὶ δὴ ὁ πρῶτος λαβὼν παρὰ τῶν λοιπῶν δύο τὸ τρί-

INVENIRE tres numeros vt quilibet à reliquis duobus coniunctis partem imperatam accipiat, & fiant æquales. Statutum sit primum à reliquis duobus coniunctis sumere trientem. Secundum à reliquis duobus coniunctis accipere quadrantem. Tertium à reliquis duobus conjunctis sumere quintantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò duo compendij gratia, quia trientem dare debent, statuantur vnitatum quotlibet, trientem habentium, sintque 3. Tres ergo numeri simul erunt 1 N. + 3.

& sanè primus sumens à reliquis duobus trientem, fit 1 N. + 1. Oportet ergo & secundum à duobus reliquis coniunctis sumpto quadrante fieri 1 N. + 1. Sumantur omnia quater. Quater igitur secundus adscitis duobus reliquis, est ter secundus adsciscens ipsos tres numeros. Ter ergo secundus adiunctis tribus numeris fit 4 N. + 4. Si igitur inde abstulero tres numeros relinquuntur 3 N. + 1. quod est ter secundus, ipse ergo secundus est 1 N. + $\frac{1}{3}$. Oportet itaque & tertium sumpto reliquorum duorum quintante fieri 1 N. + 1. Omnia similiter sumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N. + $\frac{1}{2}$. Supereſt vt tres simul iuncti sint æquales 1 N. + 3. & fit N. $\frac{13}{15}$ & omissa denominatione partis, fit primus 13. secundus 17. tertius 19. & implent postulata.

τον, γίνεται ς^{ε} ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον ἁθροῦ τοῦ δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς^{ε} ἑνὸς μονάδος μιᾶς, πάντα τετράκις. τετράκις ἄρα ὁ δεύτερος ἀφαιρεθὲν τὰς δύο, τρίς ἐστι ὁ δεύτερος ἀφαιρεθὲν τὰς ξεῖς. τεῖς ἄρα ὁ δεύτερος ἀφαιρεθὲν τὰς ξεῖς γίνεται ἀριθμοὶ δ̄ μονάδες δ̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτων ἀφέλω τὰς ξεῖς. λοιποὶ ἀριθμοὶ ξεῖς μοναὶ μιᾶ τρίς ἐστι ὁ δεύτερος. αὐτὸς ἄρα ὁ δεύτερος, ἔσται ς^{ε} ἑνὸς, μονάδος τρίτου. δεήσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον ἁθροῦ τῶ δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς^{ε} ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα ὁμοίως πεντάκις, καὶ συνάγεται διὰ τοῦ ὁμοίων ὁ τρίτος ς^{ε} ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. λοιπόν ἐστι τὰς τρεῖς συντεθέντας ἴσας γενέσθαι ἀριθμῷ ἐνὶ μονάσι τεισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ̄ δωδεκάτων. καὶ ἀφαιρουμένου τὸ μορίου. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^{ι} ιγ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ι} ιζ̄. ὁ δὲ τρίτος μ^{ι} ιθ̄. καὶ ποιεῖσι τὰ τῆς ὑποθέσεως.

IN QVAESTIONEM XXVII.

SVMANTVR *omnia quater*, &c. Hæc si obscuriora videantur, sic poterunt elucidari. Quia oportet secundum sumpto quadrante reliquorum fieri 1 N + 1. sumendo huius quadruplum patet 4 N + 4. continere quater secundum, & semel reliquos. Quare si inde auferatur semel summa trium numerorum, nempe 1 N + 3. patet residuum 3 N + 1. continere ter secundum. Quare fiet ipse secundus 1 N. + $\frac{1}{3}$. Similiter quia 1 N. + 1. continet semel tertium, & quintantem reliquorum, si sumatur huius quintuplum, patet 5 N. + 5. continere quinquies tertium, & semel reliquos. Quare si auferatur inde summa omnium, nimirum 1 N. + 3. residuum 4 N. + 2. erit tertij quadruplum, erit ergo tertius 1 N. + $\frac{1}{2}$ cætera patent.

Hæc etiam quæstio infinitas solutiones recipit, & inuentis semel numeris quæstionem soluentibus, quotquot sumentur in iisdem rationibus, ij satisfacient proposito, vt satis indicat Diophantus cùm denominatorem abiicit. Quod si præscribatur numerus in quo fiat æqualitas, iam determinabitur quæstio ad vnicam solutionem. Verbi gratia. Sit propositum inuenire tres numeros vt primus cum $\frac{2}{3}$ reliquorum faciat 40. Itemque secundus cum $\frac{3}{4}$ reliquorum, & rursus tertius cum $\frac{4}{5}$ reliquorum faciat etiam 40. Ponatur primus 1 N. ergo $\frac{2}{3}$ reliquorum erunt 40 − 1 N. Quare ipsa summa secundi & tertij fiet 60. − 1 $\frac{1}{2}$ N. & summa omnium 60 − $\frac{1}{2}$ N. Itaque cùm 40. contineat secundum & $\frac{4}{5}$ reliquorum, huius quadruplum 160. continebit quater secundum, & ter reliquos, auferatur ergo hinc triplum summæ omnium, puta 180 − 1 $\frac{1}{2}$ N. remanebit secundus 1 $\frac{1}{2}$ N. − 20. Similiter quia 40. continet tertium, & $\frac{4}{5}$ reliquorum, huius quintuplum, nempe 200. continet quinquies tertium, & quater reliquos, auferatur hinc quadruplum summæ omnium, nimirum 240 − 2 N. remanet tertius 2 N. − 40. Supereſt vt huic addendo $\frac{4}{5}$ tam primi, quàm secundi nempe $\frac{4}{5}$ N. & $\frac{6}{5}$ N. − 16. fiat 40. fiunt autem 4 N. − 56. æqualia 40. & fit 1 N. 24. Ad hypostases. Est primus 24. secundus 16. tertius 8.

Eodem artificio soluetur quæstio, si singuli numeri cum certa parte aliorum diuersos conficiant numeros, vt si primus cum $\frac{1}{2}$ aliorum faciat 32. secundus cum $\frac{1}{3}$ aliorũ faciat 28 tertius cum $\frac{1}{4}$ aliorũ faciat 31. Ponatur enim primus 1 N. ergo semissis aliorum est 32 − 1 N. summaque ipsorũ 64 − 2 N. & summa omniũ 64 − 1 N. Cùm ergo 28. contineat secundum & $\frac{1}{3}$ reliquorum, huius triplum 84. continet ter secundum & semel reliquos, quare si hinc auferatur summa omnium 64 − 1 N. residuum 20 + 1 N. erit duplum secundi, ac proinde ipse secundus est 10 + $\frac{1}{2}$ N. Similiter quia 31. continet tertium & $\frac{1}{4}$ reliquorum, huius quadruplum 124. continet quater tertium & semel reliquos. Quare si inde auferatur summa omnium 64 − 1 N. residuum 60 + 1 N. est triplum tertij: ergo ipse tertius est 20 − $\frac{1}{3}$ N. supereſt, vt huic addendo $\frac{1}{4}$ tam primi quàm secundi nempe $\frac{1}{4}$ N. & 2 $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{8}$ N. fiat 31. fit autem 22 $\frac{1}{2}$ + $\frac{19}{24}$ hoc ergo æquatur 31. & fit 1. N. 12. Ad positiones. Primus est 12. secundus 16. tertius 24.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος μετὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνῃ μέρος τὸ ὁπιζηθέν, καὶ γένωνται ἴσοι. ὑποτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον μετὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον μετὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς τὸ τέταρτον, τὸν τρίτον ὁμοίως τὸ πέμπτον. τὸν δὲ τέταρτον τὸ ἕκτον. καὶ γίνεσθαι ἴσους. τετάχθω ὁ πρῶτος ς ἑνός. οἱ δὲ λοιποὶ τρεῖς μονάδων τινῶν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μ γ̄. ὁ ἄρα πρῶτος μετὰ τ̄ λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνων τὸ τρίτον γίνεται ς ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα ☾ τ̄ δεύτερον μετὰ τ̄ λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα πάλιν ὁμοίως τετράκις. καὶ συναγει διὰ τ̄ αὐτ̄ ὁ μὲν δεύτερος ς ἑνὸς μονάδος τρίτου. ὁ δὲ τρίτος ς ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. ὁ δὲ τέταρτος ς ἑνὸς μονάδος τριῶν πέμπτων. λοιπὸν δεῖ τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι ς ἑνὶ μονάσι τρισί. συνάγει ὁ ἀριθμὸς μ ρζ ἐν μορίῳ ἐννενηκοστῷ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ ρζ. ὁ δὲ δεύτερος μ οζ. ὁ δὲ τρίτος μ ρβ. ὁ δὲ τέταρτος μ ρα. ☾ ποιοῦσι τὰ τ̄ προτάσεως.

INVENIRE quatuor numeros, vt quilibet à tribus reliquis coniunctis accipiat partem imperatam, & fiant æquales. Imperatum sit primum à reliquis tribus coniunctis sumere trientem. Secundum à reliquis tribus coniunctis sumere quadrantem. Tertium similiter sumere quintantem. Quartum verò, capere sextantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò tres, quandoquidem trientem dare debent, statuantur vnitatum quotlibet trientem habentium, putà 3. Primus igitur à tribus reliquis coniunctis sumpto triente fit 1 N. + 1. Oportet ergo & secundum sumpto à reliquis tribus quadrante fieri 1 N. + 1. Rursus omnia vt in præcedenti quater sumantur, & iisdem de causis inuenietur secundus 1 N. + $\frac{1}{3}$ Tertius verò 1 N. + $\frac{1}{2}$. At quartus 1 N. + $\frac{3}{5}$ Restat vt quatuor numeri simul iuncti æquentur 1 N. + 3. & fit tandem 1 N. $\frac{47}{90}$ Erit ergo primus 47. secundus 77. tertius 92. quartus 101. & hi satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

EADEM omnia quæ ad præcedentem dicta sunt, hîc etiam locum habent. Vnde apparet simili prorsus artificio extendi posse quæstionem ad quinque, ad sex vel ad plures numeros, siue ea determinetur ad vnicam solutionem, siue non; & siue singuli numeri cum certa parte reliquorum æquales faciant numeros, siue diuersos. Itaque de his satis.

QVÆSTIO XXIX.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσευρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς ἑκάτερον πολλαπλασιάσας ποιῇ ὃν μὲν τετράγωνον, ὃν δὲ πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, ὅτε σ̄, ☾ ὁ ε̄. καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος ς εἷς, καὶ μὲν ὅτι τὰς σ̄ μονάδας πολλαπλασιάσῃ ποιεῖ ς σ̄. ἐὰν δὲ ὅτι τὰς ε̄ μονάδας, ποιεῖ ς ε̄. δεῖ δὲ τούτων τὸν μὲν εἶναι τετράγωνον, τὸν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ. ἐὰν τοίνυν τοὺς ε̄. ἀριθμοὺς τετραγωνίσω, γίνονται δυνάμεις κε̄ ἴσαι ς σ̄. πάντα δὲ ἀριθμὸν. ἀριθμοὶ ἄρα κε̄ ἴσοι μονάσι σ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ η̄. καὶ ποιεῖ τὰ τ̄ προτάσεως.

DVOBVS datis numeris, inuenire aliquem numerum qui in vtrumque ductus, hunc quidem quadratum efficiat, illum verò latus eiusdem quadrati. Sint dati duo numeri 200. & 5. & ponatur is qui quæritur 1 N. qui si ducatur in 200. facit 200 N. At si ducatur in 5. facit 5 N. Oportet autem horum alterum quadratum esse, alterum latus eius; si ergo quadrauero 5 N. fient 25 Q. æquales vtique 200 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 25 N. æquantur 200. & fit 1 N. 8. Ac is quæstioni satisfacit.

IN QVAESTIONEM XXIX.

DVPLEX casus hîc considerari potest, prout tertivs quæsitus ductus in vtrumque datorum, productum ex maiore facit quadratum, & ex minore latus quadrati. Vel contrà productum ex minore facit quadratum, & ex maiore latus. In priorem casum incidit æquatio Diophanti. In posteriorem ista. Ponatur 5 N. quadratus, & eius latus 200 N. ergo 5 N. æquantur 40000. Q. & fit 1 N. $\frac{1}{8000}$ qui quæstioni satisfacit. Pro vtroque autem casu fiet vnus Canon vniuersalior eo quem affert Xilander.

Alterum datorum numerorum diuide per quadratum alterius, orietur quæsitus numerus.

Porro quod ait Xilander, si quidem in numeris non surdis & integris quæstio consistat, duos propositos numeros semper esse quadratorum similes, falsissimum est si per propositos numeros, datos ab initio intelligat, vt ex ipso Diophanti exemplo manifestum fit, nam 200. & 5. non sunt plani similes. Si autem intelligat tertium quæsitum, & alterum datorum, id verum est. Semper enim tertius quæsitus & is in quem ille ductus quadratum facit, sunt quadratorum similes. Sed si hoc voluit Xilander obscurè locutus est, & malè ad integros numeros id restrinxit. Quicumque enim sumantur Numeri, idem euenire necesse est, [2] cùm ponatur ex eorum mutuo ductu produci quadratum. [2] octaui.

Quod autem ait Diophantus, πάντα ἁπλᾶ ἀριθμὸν, depressionem specierum intelligit, quam alibi vocat ὑποβιβασμὸν, de qua definitione vndecima actum est. Cùm enim 5 N. sint æquales 25 Q. si vtraque æquationis pars per 1 N. diuidatur, fiunt 5. æquales 25 N. quia scilicet Æquales numeri per eundem numerum diuisi, æquales dant quotientes.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & productus ex eorum multiplicatione datos efficiant numeros. Oportet autem inueniendorum numerorum summæ semissis quadratum, quadrato superare productum multiplicationis. Est autem hoc Plasmaticum. Constitutum sit summum efficere 20. at productum multiplicationis 96. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. Et quoniam summa ipsorum est 20. si hanc bifariam secuero, erit pars quælibet diuisionis, seu semissis summæ 10. Et si semissem interualli, puta 1 N. vni parti adiecero, & detraxero ab altera, manebit rursus vtriusque summa 20. & interuallum 2 N. Ponatur ergo maior 1 N. + 10. erit minor 10 − 1 N. & manet summa 20. interuallum 2 N. Restat vt productus multiplicationis sit 96. sed productus ille est 100 − 1 Q. Hoc ergo æquatur 96. & fit 1 N. 2. Est igitur maior 12. minor 8. & satisfaciunt proposito.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμὺς ὅπως ἡ συνθεσις αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν δυρισκομένων τὸ ἀπὸ τῆς ἡμίσεος τῆ συναμφοτέρε τετράγωνον, τῆ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ὅτι ἡ τοῦ πλασματικόν. ὑποκείσθω δὴ τῶν μὲν συνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν μονάδας ϛ̄ϛ̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, ϛ^οι β̄. καὶ ἐπεὶ τὸ συνθεμα αὐτῶν ὅτι μ^ο κ̄. ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα. ἔσαι ἑκάτερος τῶν ἀπὸ τῆς διαιρέσεως. ἡμισυ τῆ συνθέματος μ^ο ῑ̄. καὶ τὸ ἡμισυ τῆ ὑπεροχῆς τουτέστι ϛ^ῳ ἕνα, ἑνὶ μὲν τῶν ἀπὸ τῆ διαιρέσεως προσθῶ. τῶ δὲ λοιπῶ ἀφῴρω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα μ^ο κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. τετάχθω ἓν ὁ μείζων ϛ^ος ἑνὸς καὶ μ^ο ῑ̄. τῶν ἡμίσεων τῆ συνθέματος. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσαι μ^ο ῑ̄. λείψει ϛ^ος ἑνός. ϛ^ος μένει τὸ μὲν σύνθεμα μ^ο κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛ^οι β̄. λοιπὸν ὅτι ϛ^ος τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϛ̄ϛ̄. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ὅτι μονάδες ρ̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς. ταῦτα ἴσα μονάσι ϛ̄ϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ος μ^ο β̄. ἔσαι ἄρα ὁ μὲν μείζων μ^ο ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ^ο η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τοῦ προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXX.

DVO indicat conditio apposita. Primum an absolutè possibilis sit quæstio necne, secundum an per numeros rationales solui possit, vel per surdos tantum. Primo enim cùm constet per secundam secundi porismatum. Quadratum semissis summæ duorum numerorum æquari producto multiplicationis eorundem, & quadrato semissis interualli ipsorum, fieri non potest vt productum multiplicationis sit maius quadrato semissis summæ, sed oportet æquale esse, vel minus. Æquale

quidem si æquales sint numeri, nam semissis summæ æqualium numerorum, idem est atque alter ipsorum, ac proinde productum multiplicationis æquatur quadrato eiusdem semissis. Minus verò, si sint inæquales numeri, quia tunc, vt dictum est, productum multiplicationis vnà cum quadrato semissis interualli æquatur quadrato semissis summæ. Quare oportet, vt à quadrato semissis summæ auferendo productum, superſit quadratus semissis interualli. Vnde constat Diophantum per conditionem appositam supponere quæsitos numeros esse inæquales. Deinde patet vt solutio contingat rationalis, oportere vt detracto producto à quadrato semissis summæ, residuum sit quadratus numerus. Nam cùm hoc residuum sit quadratus semissis interualli, si residuum illud non sit quadratus numerus, erit interuallum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Verbi gratia, si diuidendus sit 20. in duos numeros, quorum productum sit 98. operando cum Diophanto inueniemus tandem 1 Q. æqualem 2. Quare semissis interualli erit R 2. atque ipsi numeri 10 − R 2. & 10 + R 2. Porro tam ex conditione appositа, quàm ex ipsa operatione elicitur iste Canon.

A quadrato semissis summæ, aufer productum multiplicationis, residui radix quadrata, addita & adempta eidem semissi summæ, quæsitos exhibebit numeros.

Aliter etiam proponi poterat conditio, nimirum.

Oportet numerorum summæ quadratum, quadrato numero superare quadruplum producti.

Nam vt ostensum est quinta secundi porismatum. Quadratus, summæ duorum numerorum, æqualis est quadruplo plani sub ipsis numeris, vnà cum quadrato interualli ipsorum. Vnde etiam alius Canon formabitur, nimirum.

Aufer quadruplum producti à quadrato summæ, residui radicem quadratam adde & adime ipsi summæ, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Sed & notatu dignum est ad hanc quæstionem, illam etiam posse reduci.

Dato medio trium proportionalium, & aggregato extremorum, extremos inuenire.

Lo. septimi Vt dato medio 8. & summa extremorum 20. sint inueniendi ipsi extremi. [1] Quia in tribus proportionalibus, planus sub extremis æquatur quadrato medij, cùm medij quadratus sit 64. patet eo reduci propositam quæstionem, vt diuidatur 20. in duos numeros, quorum mutuò ductu fiat 64. Quod idem est cum Diophantæo problemate, & per illud, vel per eius Canones inuenientur extremi quæsiti 4. & 16. Quod autem attinet ad verba illa, ὅτι δὲ τοῦτο πλασματικόν, quæ nos retento Græco vocabulo vertimus, *Est autem hoc plasmaticum*, Xilander verò Diophanti mentem minimè assecutus, malè interpretatur, *Hoc autem est effectum aliunde.* Nos ea explicabimus infra quæstione trigesima tertia.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ᾖ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δὶς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρων αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετραγώνῳ. * ὅτι ᾖ καὶ τοῦτο πλασματικόν. * ὑποτετάχθω δὴ τὸ μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὸν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σπ̄. τετάχθω δὴ ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛϛ^{ου} β̄ ᾖ ἔστω ὁ μείζων ϛ^{ος} ἑνὸς ᾗ μ^{ων} ῑ. τῶν ἡμίσεων πάλιν τὸ συναμφότερον ῑ, ὁ δὲ ἐλάσσων μ^{ων} ῑ. λείψει ϛ^{ος} ἑνός. ᾗ μένει πάλιν τὸ σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. λοιπὸν ὅτι ᾖ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σπ̄. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις δύο μονάδας σ̄. ταῦτα ἴσα μονάσι σπ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ος} μ^{ων} β̄. ὅπερ ἦν ὑποτάσεις. ἔσται ὁ μὲν μείζων μ^{ων} ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ^{ων} η̄. ᾗ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt & summa ipsorum, & summa quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum summæ quadratorum, quadrato superare quadratum summæ numerorum. * Et hoc quoque Plasmaticum est. * Imperatum sit summam numerorum esse 20. & summam quadratorum ab ipsis ortorum esse 208. Ponatur itaque interuallum ipsorum 2 N. & esto maior 1 N. + 10. vnitates, quot scilicet continet semissis summæ, minor autem sit 10 − 1 N. & manet rursus eorum summa 20. Interuallum verò 2 N. Superest vt summa quadratorum ab ipsis, sit 208. Atqui summa quadratorum facit 2 Q. + 200. Hoc igitur æquale est vnitatibus 208. & fit 1 N. 2. Ad positiones. Erit maior 12. minor 8. & satisfaciunt postulatis.

IN QVAESTIONEM XXXI.

HIc etiam conditio indicat an possibilis sit quæstio, & an per numeros rationales solui possit, idémque prorsus dicit quod septima secundi porismatum, nimirum. Quadratus summæ duorum numerorum & quadratus interualli eorum æquantur duplo aggregati quadratorum. Quare vt quæstio sit possibilis necesse est duplum aggregati quadratorum, esse maius quadrato summæ, nisi propositi numeri sint æquales, tunc n. duplum quadratorum æquabitur quadrato summæ. [1] Quia quadratus summæ æquatur quadratis numerorum & duplo producti, at cùm numeri sunt æquales, duplum producti æquatur ipsis quadratis. Quare in hoc casu quadratum summæ æquatur duplo quadratorum. Vt verò solutio sit rationalis necesse est duplum quadratorum excedere quadratum summæ, quadrato numero, cùm enim hic excessus sit quadratus interualli numerorum, vt docuimus, si huiusmodi excessus non sit quadratus, erit interuallum numerorum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Cæterùm ex hac conditione sic explicata pendet Canon à Xilandro traditus, nimirum. 4. *secundi.*

A duplo agregati quadratorum, aufer quadratum summæ numerorum, residui latus quadratum adde & adime ipsi summæ numerorum, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet summam quadratorum superare duplum quadrati semissis summæ numerorum duplo quadrati numeri.

Quia enim per sextam secundi porismatum constat summam quadratorum duplam esse quadratorum qui fiunt à semisse summæ laterum, & à semisse interualli eorumdem, patet si à summa quadratorum, auferatur duplum quadrati à semisse summæ numerorum, residuum æquari duplo quadratis semissis interualli numerorum. Itaque ex hac etiam conditione sic explicata, & ex ipsamet Diophanti operatione elicietur alter Canon.

A summa quadratorum aufer duplum quadrati semissis summæ numerorum, residui semissis latus quadratum additum vel ademptum ipsi semissi numerorum, quæsitos dabit numeros.

Verba autem illa, ὅτι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικὸν, hîc, vt arbitror, subreptitia sunt, vt ad trigesimam tertiam fusius docebo, nolui tamen ea de textu tollere, ne audax plus æquo vel temerarius alicui forte viderer, sed ea asterisis includere satis habui.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, datos faciant numeros. Constitutum sit summam numerorum esse 20. Interuallum verò quadratorum ab ipsis ortorum esse 80. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. erit similiter maior 1 N. + 10. Minor autem 10 − 1 N. & manet rursus summa ipsorum 20. interuallum verò 2 N. supereſt vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum sit 80. sed interuallum quadratorum ab ipsis est 40 N. Hoc ergo æquatur 80. & fit rursus maior 12. Minor 8. & soluunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. ὑποτετάχθω δὴ τῶν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας π̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛ̄ς β̄. ἔσαι ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ϛ̄ ἑνὸς μ̄ ῑ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ ῑ̄, λείψει ϛ̄ ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛ̄ι β̄. λοιπὸν ὅτι καὶ τὰ ὑπεροχὴν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μ̄ π̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶν ϛ̄ς μ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν π̄. καὶ συναγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μ̄ ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάττων μ̄ η̄. καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXII.

HIc nulla opus est conditione vt solutio contingat rationalis, semper enim, dum quæstio sit possibilis eam per numeros rationales solui continget, verum vt sit possibilis sanè aliqua limitatione indiget, quicquid dicat Scholiastes, quam ego ita concipio.

Oportet excessum quadrati super quadratum minorem esse quadrato summæ numerorum.

Cuius necessitas euidens est, quia [1] Quadratus summæ æquatur ipsis quadratis numerorum, & duplo producti, quare nisi pars ponatur æqualis toti, vel etiam maior, impossibile est interuallum 4. *secundi.*

quadratorum esse æquale vel maius quadrato summæ numerorum. Itaque in exemplo Diophanti posita summa numerorum 20. cùm eius quadratus sit 400. poterit interuallum quadratorum præscribi quilibet numerus minor quàm 400. æqualis, autem vel maior nequaquam. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

Diuide interuallum quadratorum per duplum summæ numerorum, quotiens additus vel ademptus semissi summæ, dabit quæsitos numeros.

Hoc autem idem fere est quod demonstratum est prop. tertia secundi porismatum. nimirum.

Diuide interuallum quadratorum per summam numerorum, orietur interuallum numerorum.

Data porro summa numerorum & eorum interuallo soluitur quæstio per Canonem primæ huius. Potest etiam aliter institui operatio, & tamen ad æquationem simplicem deuenietur. Esto alter numerorum 1 N. alter 20 − 1 N. horum quadrati sunt 1 Q. & 1 Q. + 400. − 40 N. quorum interuallum est 400 − 40 N. hoc ergo æquatur 80. & fit 1 N. 8. Hinc etiam elicietur Canon alius, priore non deterior.

Quadrato summæ adde vel adime interuallum quadratorum, summam & residuum diuide seorsim per duplum summæ numerorum, orientur quæsiti numeri.

QVÆSTIO XXXIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ποιεῖν τετράγωνον ὅτι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν. ἔστω τετάχθω δὴ τοῦ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν εἰ μονάδας δ. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν μονάδας ις. τετάχθω τὸ συνθεμα αὐτῶν ης β. ἔχουσι καὶ τοῦ ὑπεροχὴ μ̄ δ. ἔσται ὁμοίως ὁ μείζων ς ἑνὸς μ̄ β ὁ δὲ ἐλάσσων ς ἑνὸς λείψει μ̄ β. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν ἀριθμοὶ β. ἢ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες δ. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ις. ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ὅτι δυ α. γ μ̄ δ. ταῦτα ἴσα μ νάσι ις. καὶ γίνεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μ̄ ιβ. ὁ δὲ ἐλάττων μ̄ η. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt interuallum ipsorum, & productum multiplicatione faciant datos numeros. Oportet autem quadruplum producti multiplicationis cum quadrato interualli iunctum, facere quadratum. Et hoc quoque Plasmaticum est. Statutum sit interuallum esse 4. productum vero multiplicationis 96. Ponatur summa ipsorum 2 N. habemus autem & interuallum 4. erit itaque maior 1 N. + 2. Minor 1 N − 2. & manet summa ipsorum 2. N. interuallum 4. Restat vt productum multiplicatione sit 96. est autem huiusmodi productum 1 Q. + 4. Hoc ergo æquatur 96. & fit rursus maior 12, minor 8. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

HIC apposita conditio non est ad ostendendum an quæstio sit possibilis, sed tantùm an per numeros rationales solui possit. Etenim non potest absolutè proponi huiusmodi quæstio impossibilis, quodcumque enim præscribatur numerorum interuallum, & qualecumque statuatur productum multiplicationis eorum, soluetur quæstio. Sed vt solutio contingat rationalis, necesse est vt quadruplo producti addendo quadratum interualli, quadratus fiat, quia scilicet, [1] quadruplum producti cum quadrato interualli æquatur quadrato summæ numerorum. Hinc autem elicitur Canon à Xilandro traditus. 5. 2. poris.

Quadrato interualli adde quadruplum producti, aggregati latus est summa numerorum, cui si addas & adimas interuallum, semissis summæ & residui quæsitos dat numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet quadratum semissis interualli additum producto, conficere quadratum.

2. 2. poris. [2] Quia scilicet quadratus interualli cum producto, quadratum efficit semissis summæ. Vnde etiam & ex ipsamet operatione Diophanti alium elicimus Canonem.

Adde producto quadratum semissis interualli, aggregati latus est semissis summæ numerorum, cui addendo & adimendo semissem interualli, fient quæsiti numeri.

Est etiam notatu dignum non differre quæstionem istam ab illa. *Dato medio trium proportionalium & differentia extremorum, inuenire extremos.* Vt dato medio 8. & interuallo extremorum 12. quærantur extremi. Quia planus sub extremis æquatur quadrato medij, & is est 64. eò reducitur quæstio, vt

vt inueniantur duo numeri, quorum interuallum sit 12. productum multiplicationis 64. Quod idem est cum quæstione ista Diophanti. Quare per eam vel per Canones allatos inuenientur extremi quæsiti 4. & 16. Superest vt explicem verba illa, δεῖ δὲ τοῦτο πλασματικὸν, quæ tum huic quæstioni tum trigesimæ & trigesimæ primæ adiecta sunt statim post conditionem, quæque hoc loco dilucidanda recepi. Prius tamen monendus est lector, nec Scholiastem, nec Xilandrum mentem Diophanti assequutum esse, quod cuilibet fiet manifestum qui ea quæ vterque ad trigesimam commentus est legere voluerit. Sanè non vacat in eorum nugis refellendis diutius immorari. Præterea Xilander verba ipsa male reddidit, nam Plasmaticum, interpretatus est, effictum aliunde; cum potius significet id à quo aliud quippiam effingi & plasmari potest. Ego itaque nil aliud voluisse Diophantum aio, quam indicare ex huiusmodi quæstionum solutione, seu ex conditionibus adiectis, vel ex canonibus inde deductis formari & plasmari quodammodo regulas illas quas vocant compositas, cùm scilicet ex tribus infimis speciebus, duæ vni æquales reperiuntur, seu vt loquitur Franciscus Vieta, regulas de quadrato affecto sub latere. Etenim prima & secunda illarum regularum, ab hac ipsa quæstione trigesima tertia facilè deducuntur. Tertia verò pendet omnino à trigesima. Quamobrem cùm à trigesima prima nulla formetur huiusmodi regula, non dubito eadem verba ibi temerè inculcata esse, ab ipso scilicet Scholiasta, vel imperito amanuensi ex aliis quæstionibus eò translata.

Quomodo autem ab his quæstionibus formentur supradictæ regulæ, non pigebit in tyronum gratiam adscribere, ipsas etiam tradendo regulas, tum eo modo quo communiter absoluuntur, tum eo quem tradit Petrus Nonius ad vitandas Fractiones sæpe commodo, ac denique methodum ipsam Diophanti exhibendo.

PRIMA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati & Numeri æquales vnitatibus.

Fiat prius reductio ad vnum Quadratum per paraboliſmum, diuidendo scilicet singulas æquationis partes per numerum Quadratorum. Tunc capiatur semissis Numerorum, & eius quadrato addantur vnitates, ab aggregati latere auferatur semissis Numerorum, residuum est valor Numeri.

Verbi gratia 2 Q. + 8 N. sint æquales 42. fiet reductio ad 1 Q. diuidendo omnia per 2. fientque 1. Q. + 4 N. æqualia 21. Tunc sumpto semisse Numerorum 2. eius quadratum 4. addo vnitatibus 21. fit 25. cuius latus 5. vnde auferendo semissem Numerorum, remanet 3. valor Numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Facto vt supra paraboliſmo si opus sit. Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum; ab aggregati latere aufer numerum Numerorum, residuum erit valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q + 5 N. sint æquales 24. Quia nullo hîc opus est paraboliſmo, quadrato ipsius 5. nimirum ipsi 25. adde quadruplum ipsius 24. nimirum 96. fit 121. cuius latus 11. vnde auferendo 5. remanet 6. duplum numeri, ergo Numerus est 3. vtrumque autem modum ab hac quæstione trigesima tertia deduci sic ostendemus. Ponantur 1 Q. + 4 N. æquales 21. & fit CD 1 N. cui addatur B C ipsi æqualis. Et illis addatur adhuc A B æqualis numero Numerorum, puta 4. Tunc constat ex C D in B C. fieri 1 Q. & ex C D in A B fieri 4 N. Igitur ex C D in totum A C fit 21. Quamobrem cùm notum sit duorum A C. C D. interuallum esse A B, nempe 4. & productum ex eorum multiplicatione esse 21. patet nos eo deduci vt quæramus duos numeros quorum interuallum 4. productum multiplicatione sit 21. Quod ipsum quærit Diophantus quæstione hac trigesima tertia. Minor autem quæsitorum erit C D. seu 1 N. quod inueniendum proponebatur. Itaque si vtamur secundo Canone supra allato, capiemus semissem Numerorum, seu interualli, nempe ipsius 4. & eius quadratum addemus vnitatibus seu producto 21. vnde fient 25. cuius latus 5. vnde si auferantur 2 semissis ipsius 4. remanet 3 minor quæsitorum, seu C D. seu 1 N. vnde patet à secundo illo Canone deduci modum communem perficiendi hanc regulam.

A....B...C...D

Quod si ad inueniendum duos numeros quorum interuallum sit 4. productum 21. vtaris primo Canone supra allato, incides sane in regulam Petri Nonij. Nam quadrato ipsius 4 qui est 16. addes quadruplum ipsius 21. nempe 84. vnde fiet 100. à cuius latere 10. auferes 4. & residuum 6. erit duplum Numeri, nempe ipsius 3.

SECVNDA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati æquales Numeris & vnitatibus.

Facto si opus sit paraboliſmo, adde vnitatibus quadratum ſemiſſis Numerorum, lateri aggregati adde ipſum ſemiſſem Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 1 Q. ſit æqualis 4 N. + 21. addo ad 21. quadratum ſemiſſis ipſius 4. nempe 4. fit 25. cuius lateri 5. addo ſupradictum ſemiſſem 2. fit 7. valor numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum, lateri aggregati adde numerum Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q. ſi æqualis 5 N. + 24. Adde 25. ad quadruplum ipſius 24. nempe ad 96. fit 121. cuius lateri 11. adde 5. fit 16. duplum Numeri. Quare ipſe Numerus eſt 8. Vtrumque modum deriuari quoque ab hac quæſtione trigeſima tertia ſic probabimus. Sit 1 Q. æqualis 4. N. + 21. imprimis patet 1 N. maiorem eſſe quàm 4. numerum Numerorum, nam ex quolibet latere in ſeipſum, vel in numerum ipſo maiorem, fit vel quadratus lateris, vel numerus eodem quadrato maior. Quare ſi 4. eſſet æqualis vel major quàm 1 N. eſſent 4 N. æquales vel maiores quàm 1 Q. ac proinde non poſſet 1 Q. æquari 4 N. + 21. Hoc poſito. Sit A C. 1 N. erit ergo A C maior quàm 4. vt probatum eſt. Sumatur igitur in eo A B 4. & reliquo B C addatur æqualis ei C D.

A....B...C...D

Patet ergo quadratum ex A C eſſe 1 Q. & productum ex A C in A B eſſe 4 N.

2. ſecundi. [1] Quare cùm quadratus ex A C ſit æqualis productis ex A C. in A B. & ex A C. in B C. ſeu in C D. ſequitur productum ex A C. in C D. æquari 21. Igitur vt prius quærendi ſunt duo numeri A C. C D. quorum interuallum A B ſeu 4. & productum multiplicationis eſt 21. nam horum maior A C. erit valor numeri. Itaque à duplici Canone, duplex vt ſupra eruitur regula, primæ prorſus ſimilis, finali tantum ſubſtractione in additionem mutata, quia videlicet ibi quærebatur minor numerus C D. Hîc vero quæritur maior A C.

TERTIA REGVLA COMPOSITARVM.

Numeri æquales Quadratis & vnitatibus.

Facto ſi opus ſit Paraboliſmo. A quadrato ſemiſſis Numerorum aufer vnitates, reſidui latus adde vel adime ſemiſſi Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 10 N. ſint æquales 1 Q. + 21. Quadratus ſemiſſis Numerorum eſt 25. vnde ſi auferas 21. vnitates ſupereſt 4. cuius latus 2. ſi addas & adimas ſemiſſi Numerorum 5. fit valor Numeri vel 3. vel 7.

EADEM EX PETRO NONIO.

A quadrato numeri Numerorum aufer quadruplum vnitatum, reſidui latus adde vel adime ipſi numero Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 7 N. ſint æquales 1 Q. + 10. à quadrato ipſius 7. puta à 49. aufer quadruplum ipſius 10. nempe 40. ſupereſt 9. cuius latus 3. adde vel adime ipſi 7. fiet vel 4. vel 10. duplum Numeri. Quare Numerus eſt vel 2. vel 5. vtramque regulam deduci à trigeſima quæſtione Diophanti facilè probabitur. Sunto 10 N. æquales 1 Q. + 21. imprimis patet numerum Numerorum 10. maiorem eſſe quàm 1 N. nam ſi eſſet æqualis, vel minor, eo ducto in 1 N. fierent 10 N. æquales 1 Q. vel minores illo. Quare cùm 10 N. præter 1 Q contineant 21. oportet 10. eſſe maiorem quàm 1 N. Hoc poſito ſit A B 10. in quo ſumatur 1 N. A D. vel D B. & ſi ponatur 1 N. A D. conſtat ex A B in A D. fieri 10 N. & quadratum ex A D. eſſe 1 Q. Quare cùm productus ex A B. in A D. [2] ſit æqualis quadrato ex A D. vnà cum producto ex A D. in D B. relinquitur productum ex A D in D B. eſſe 21. Igitur quærendi ſunt duo numeri quorum ſumma ſit 10. productum 21. Eodem modo ſi 1 N. ponatur D B. oſtendemus ex A B. in D B. fieri 10. N. & ex A D. in D B. fieri 21. Quare vt prius quærendi erunt duo numeri, quorum ſumma ſit 10. productum 21. Quod ipſum quærit Diophantus quæſtione trigeſima.

A.....D...B

3 ſecundi.

Itaque ſi libeat vti primo Canone ibi allato. Summæ 10. ſemiſſe capto nempe 5. ab illius quadrato

25. auferemus productum 21. & residui 4. latus 2. addemus vel adimemus ipsi 5. & fient quæsiti numeri 7. & 3. quorum alter est A D. alter D B. & vterque valor Numeri esse potest. Qui est primus modus hanc regulam perficiendi. Quod si vtaris secundo Canone, incides in regulam Petri Nonij vt manifestum est. Sed & ex annotatis ad trigesimam patet si quadratus semissis Numerorum æqualis sit vnitatibus, ipsum eundem semissem esse valorem Numeri, signum enim est quæsitos A D. D B. æquales esse.

Cæterùm quia Diophantus vt iam monui ad definitionem vndecimam, peculiari vtens methodo, & nunquam adhibens paraboliſmum æquationes resoluit, quomodo id perficiat iam docendum est.

REGVLAE COMPOSITAE EX DIOPHANTO.

Ducito numerum Quadratorum in vnitates, producto adde quadratum semissis *Numerorum in prima & secunda regula.* vel ab eodem quadrato aufer idem productum *in tertia regula.* Summæ vel residui cape latus; & huic adde vel adime semissem Numerorum in prima vel secunda regula. Contra semissi numerorum adde vel adime idem latus in tertia regula. Summam vel residuum diuide per numerum quadratorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 3 Q. + 20 N. sint æquales 52. ducito 3. in 52. fit *156.* cui adde 100. quadratum semissis Numerorum, fit *256.* cuius latus *16.* vnde si auferas 10. remanet *6.* quo diuiso per 3. fit 2. valor Numeri, eademque est aliarum regularum ratio. Differt Ergo Diophantæa methodus à communi in hoc solum, quod in communi diuisio per numerum Quadratorum fit ab initio, in Diophantæa methodo, eadem diuisio fit in fine. Sed demonstrandum est vtramque methodum eodem recidere. Sit enim A numerus quadratorum, & B numerus Numerorum, & C vnitatum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in C. fiat D. sumptoque E semisse ipsius B. eius quadratus F addatur ad D. & fiat G. cuius latus esto H. vnde auferendo E superst K. Deinde per communem methodum diuidandur per A. ipsi A. B. C. vnde fiant vnitas M. & numeri N. P. sumptoque Q. semisse ipsius N. eius quadratus R. addatur ad P. & fiat T. cuius latus esto V. vnde ablato Q. superst X. Erit ergo vt demonstratum est in prima regula, X. valor numeri. Dico si K. per A. diuidatur produci eundem X. valorem Numeri. Sumatur enim L. quadratus ipsius A. Quoniam ergo M. est vnitas, erunt continuè proportionales L A M. in ratione cuius denominator est A, & rationis ipsius L. ad M. denominator erit L. Cùm autem idem A. ductus in P & in C. producat C & D, erit D ad C vt C ad P. & ipsi D C P. erunt proportionales ipsis L A M. eritque D ad P. vt L. ad M. Quare ex L in P. fiet D. Quia etiam A ductus in N. facit B, erit B ad N. vt A ad M. Quare & dimidium E. ad dimidium Q. erit vt A. ad M. Quamobrem & quadratus F. ad quadratum R erit vt L ad M. Igitur vt F ad R. ita est D ad P. Quare & [2] antecedentes simul, puta G. ad consequentes simul, puta ad T. erunt vt L ad M. Ergo rursus latus H. ad latus V. erit vt A. ad M. Itaque cùm ostensum sit esse quoque E. ad Q. vt A. ad M. erit vt totus H. ad totum V. ita ablatus E. ad ablatum Q. [3] Quare & reliquus K ad reliquum X erit quoque vt A ad M. Quamobrem diuiso K per A prodibit X. Quod demonstrandum erat.

Y 36. K 6. H 21. F 225. G 441. L 9. E 15. D 216.

A 3. B 30. C 72. M 1. N 10. P. 24.

R 25. Q 5. T 49. Z 12. X 2. V 7.

17. *septimi.*

12. *septimi.*

21. *septimi.*

Eadem prorsus ratione, idem euenire ostendetur in secunda regula. Nam omnia eodem modo perficiuntur, nisi quod in fine fit additio loco substractionis. Vt in communi methodo, addatur Q ad V. fiet Z valor Numeri. Itaque in Diophantæa methodo addatur E ad H. & fiat Y. dico si Y diuidatur per A. prodire eundem valorem Numeri Z. Cùm enim vt ostensum est sit H ad V, sicut E ad Q. erunt & antecedentes simul, puta Y ad consequentes simul, puta ad Z in eadem ratione, quæ eadem est cum ratione A ad M. Quamobrem diuiso Y. per A, orietur Z. Quod erat ostendendum.

Non dissimili ratione ostendetur vtramque methodum conuenire in tertia regula. Sit enim A quadratorum numerus & B vnitatum, & C numerorum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in B fiat D. & semissis ipsius C. esto E cuius quadratus F vnde auferendo D. superst G. cuius latus H. quo detracto ex E superst K, & eodem H addito ad eundem E fiat Y. Deinde per communem methodum diuidantur per A ipsi A B C. & fiant M N P. & ipsius P semissis esto Q. cuius quadratus R, vnde auferendo N. superst T. cuius latus V. quo detracto ex Q superst X, & eodem V ad Q addito fiat Z. Erit igitur valor Numeri tam X quàm Z. Dico itaque si ipsi K. Y. per A diuidantur prodire eosdem X Z. Nam sumpto L quadrato ipsius A, rursus vt prius ostendemus esse L ad M vt D ad N. sed & est C ad P vt A ad M. ergo rursus semissis E ad semissem Q. est vt A ad M. Quare & quadratus F ad quadratum R est vt L ad M. seu vt D ad N. Quamo-

Y 24. H 9. K 6. G 81. F 225. L 9. D 144. E 15.

A 3. B 48. C 30. M 1. N 16. P 10.

R 25. T 9. Q 5.
Z 8. V 3. X 2.

brem & reliquus G ad reliquum T est vt L ad M, ac proinde & latus H ad latus V est vt A ad M seu vt E ad Q. Itaque cùm sit E ad Q. vt H ad V. siue addantur HE, itemque QV. siue detrahatur H ex E itemque V ex Q.[1] erit rursus compositorum Y & Z,[2] Itemque residuorum K & X eadem ratio quæ A ad M. Quare si ipsi Y & K diuidantur per A orientur ipsi Z & X. Quod demonstrandum erat.

12. *septimi.*

11. *septimi.*

Ex his tribus modis absoluendi regulas compositas, eum seliget peritus logistа, quem compendiosiorem iudicabit. Sanè si paraboliſmus citrà fractiones fieri possit, communem præstat amplecti methodum, sin secus, Diophantæa compendiosior est. In vtraque porrò si numerus Numerorum sit impar, Nonij methodum adhibere iuuabit, nam ea commodè aptari potest, non minus Diophantææ quàm communi, Vt si 3 Q + 7 N. æquentur 26. ducto 3 in 26. fit 78. & quia numerorum Numerus est impar sumo eius quadratum 49. cui addo quadruplum ipsius 78. puta 312. fitque 361. cuius latus 19. vnde si auferas 7. supereſt 12. quo diuiso per numerum quadratorum 3. fit 4 valor numeri duplicati, ac proinde ipse Numerus est 2. vel si placet diuide 12. per duplum numeri quadratorum, nimirum per 6. fiet statim valor Numeri 2. sed de his satis.

Quoniam vero quærendo duos numeros quorum summa, vel summa quadratorum, vel interuallum, vel interuallum quadratorum, aut productum multiplicationis data sint diuersimodè, multæ aliæ non inelegantes quæstiones fieri possunt, quas omisit Diophantus, libet hîc earum nonnullas subiicere, in quibus nobis non erit magnoperè cauendum, ne in regulas compositas æquatio deuoluatur, cùm illæ iam nobis sint familiares, dum per conditiones adiectas innoteſcat, an in numeris rationalibus solutio contingat.

QVAESTIO PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt summa quadratorum ab iis ortorum, & productus eorum multiplicatione sint quales poscimur. Oportet autem, siue addatur, siue adimatur, summæ quadratorum, duplum producti, fieri vtrimque quadratum.

Esto summa quadratorum 34. productum multiplicationis 15. si placet per reductionem ad alias quæstiones, ista variis modis solui potest.[3] Quia enim summa quadratorum adscito duplo producti, æquatur quadrato summæ numerorum.[4] At summa quadratorum multata duplo producti, relinquit quadratum interualli numerorum; si ad 34. addas 30. fiet 64. quadratus summæ. Quare ipsa summa est 8. Item si à 34. auferas 30. remanet 4. quadratus interualli. Quare ipsum interuallum est 2. Iam ergo per quatuor quæstiones inueniri possunt quæsiti numeri. Primò per trigesimam quærendo duos numeros quorum summa 8. productum 15. Secundò per trigesimam primam quærendo duos numeros quorum summa 8. & summa quadratorum 34. Tertiò per trigesimam tertiam quærendo duos numeros, quorum interuallum 2. productum 15. Quartò denique per primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. interuallum 2.

4. *secundi.*

2. 2. *poriſ.*

Sed si peculiari operatione rem absoluere placeat. Ponatur interuallum quadratorum 2. N. erunt ipsi quadrati 17 − 1 N. & 17 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 289 − 1 Q. æquale quadrato producti 15. nempe 225. Quare tandem 64. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 8. Ad positiones sunt quæsiti quadrati 25. & 9. quorum latera 5. & 3. sunt quæsiti numeri. Hinc etiam Canonem formare licet.

A Quadrato semissis summæ quadratorum aufer quadratum producti, residui latus additum & ademptum semissi summæ quadratorum, ipsos exhibebit quadratos.

QVAESTIO SECVNDA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & summa quadratorum ab ipsis ortorum, sint quales poscimur. Oportet autem duplum summæ quadratorum multatum quadrato interualli, relinquere quadratum.

Esto interuallum 6. summa quadratorum 68. si per reductionem, quæstionem propositam soluere libet.[1] Quia duplum summæ quadratorum, æquatur quadrato summæ numerorum, & quadrato interualli, à duplo ipsius 68. nempe à 136. aufer quadratum ipsius 6. nempe 36. remanet 100. cuius latus 10. est summa numerorum. Iam ergo soluetur quæstio per trigesimam primam, quærendo duos numeros quorum summa 10. & summa quadratorum 68. & rursus per primam quærendo duos numeros, quorum summa 10. interuallum 6. sed si peculiari est vtendum operatione id ita fiet. Cùm interuallum præscribatur 6. Ponatur alter numerorum 3 + 1 N. alter 1 N − 3. fiet summa quadratorum 18 + 2 Q. æqualis 68. Quare fit 1 N. 5. & sunt quæsiti numeri 8. & 2. Hinc etiam Canon formabitur.

7. 2. *poriſ.*

Dimidium quadrati interualli aufer à summa quadratorum, residui semissis latus additum & ademptum semissi interualli quæsitos numeros exhibebit.

Qui sanè Canon prorsus conuenit cum sexta secundi poriſmatum, vt manifestum est.

QVAESTIO TERTIA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem esse interuallo quadratorum.

Sit interuallum numerorum 6. interuallum quadratorum 60. si libet vti reductione.[2] Quia ex interuallo numerorum in summam eorundem, fit interuallum quadratorum, diuidendo 60. per 6. quotiens 10. erit summa numerorum. Igitur soluetur quæstio per trigesimam secundam quærendo duos numeros, quorum summa 10. interuallum quadratorum 60. Rursus soluetur per primam quærendo duos numeros quorum summa 10. interuallum 6. Sed si peculiarem requiras operationem. Pone minorem quæsitorum 1 N. ergo maior 1 N. + 6. interuallum quadratorum est 36 + 12 N. quod æquatur 60. & fit 1. N. 2. minor numerus. Vel, Pone maiorem 1 N. erit minor 1 N. − 6. Interuallum quadratorum est 12 N. − 36. quod æquatur 60. & fit 1 N. 8. maior numerus. Hinc formatur Canon. 3. 2. *poris.*

Quadratum interualli numerorum adde & adime interuallo quadratorum, summam & residuum diuide per duplum interualli numerorum, prodibunt quæsiti numeri.

Aliter etiam esto minor 1 N − 3. maior 1 N + 3. fiet interuallum quadratorum 12 N. æquale 60. Quare fit 1 N. 5. & sunt numeri vt prius 2. & 8. Hinc etiam Canon alius formari potest.

Diuide interuallum quadratorum per duplum interualli numerorum, quotienti adde & adime semissem interualli numerorum: habebis quæsitos numeros.

QVAESTIO QVARTA.

Inueniantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, sint quales poscimur. Oportet autem quadratum dupli producti additum quadrato interualli quadratorum, efficere quadratum, cuius lateri siue addatur siue adimatur duplum producti, fiat quadratus.

Esto productus 15. interuallum quadratorum 16. Ponatur summa quadratorum 1 N. Ergo si addatur ei duplum producti[1], fiet 1 N. + 30. æquale quadrato summæ numerorum: & si ab 1 N. auferatur idem duplum producti 30.[2] fiet 1 N. − 30. æquale quadrato interualli numerorum. Porro[3] quia ex interuallo numerorum in summam ipsorum fit interuallum quadratorum, patet ex quadrato interualli numerorum in quadratum summæ, fieri quadratum interualli quadratorum. Quamobrem ex 1 N. − 30. in 1 N. + 30. productus 1 Q. − 900. æquatur quadrato ipsius 16. nempe 256. & fit 1 N. 34. summa quadratorum. Reducetur ergo iam quæstio ad primam istarum quærendo duos numeros, quorum productum 15. summa quadratorum 34. vel etiam ex summa quadratorum 34. & interuallo ipsorum 16. reperientur figillatim ipsi quadrati 25. & 9. per primam huius libri, vnde & latera 5. 3. innotescent. 4. *secundi.* 4. 2. *poris.* 3. 2. *poris.*

Aliter etiam, & facilius institui potest operatio, & alia quoque conditio præscribi. nimirum. Oportet quadratum producti additum quadrato semissis interualli quadratorum facere quadratum, cuius lateri siue addatur siue adimatur semissis interualli quadratorum, fiat item quadratus. Ponatur quadratorum alter 1 N. + 8. alter 1 N. − 8. Sic enim est eorum interuallum 16. Igitur cùm ex quadratorum mutuo ductu fiat quadratus plani sub lateribus, ex 1 N. + 8. in 1 N. − 8. fiet 1 Q. − 64. æquale quadrato producti 15. nempe 225. & fit 1 N. 17. suntque quadrati quæsiti 25. & 9. vnde & ipsa latera 5. & 3. noscuntur. Hinc elicietur huiusmodi Canon.

Quadratum producti adde quadrato semissis interualli quadratorum, summæ lateri adde & adime semissem interualli quadratorum, fient quadrati quæsitorum numerorum.

QVAESTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex summa quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem quadruplum aggregati ex producto multiplicationis, & ex summa quadratorum multatum triplo quadrati summæ, relinquere quadratum.

Esto summa 10. aggregatum ex producto & ex summa quadratorum 76. Esto alter numerorum 5 + 1 N. alter 5. − 1 N. erit summa quadratorum 50 + 2 Q. productum multiplicationis 25 − 1 Q. ergo aggregatum horum erit 75 + 1 Q. æquale 76. & fit 1 N. 1. sunt ergo quæsiti numeri 6. & 4. Hinc formatur iste Canon.

Ab aggregato ex ſumma quadratorum & ex producto multiplicationis aufer, dodrantem quadrati ſummæ, reſidui latus additum & ademptum ſemiſſi ſummæ, quæſitos dabit numeros.

Vel quod idem eſt.

A quadruplo aggregati aufer triplum quadrati ſummæ, reſidui latus additum & ademptum ipſi ſummæ, præſtabit duplum quæſitorum numerorum.

4. *ſecundi.* Quod ſi per reductionem velis hoc problema ſoluere. [1] Quoniam quadratus ſummæ æquatur ſummæ quadratorum & duplo producti, ſi à quadrato ſummæ 100. auferas 76. compoſitum ex ſumma quadratorum & ex producto ſemel, reſiduum 24. æquabitur producto. Iam ergo tripliciter reducetur quæſtio. Primo ad trigeſimam quærendo duos numeros quorum ſumma 10. productum multiplicationis 24. ſecundo ad trigeſimam primam quærendo duos numeros quorum ſumma 10. & ſumma quadratorum 52. nam cognito producto 24. cognoſcitur & ſumma quadratorum auferendo 24. de 76. Tertio ad primam iſtarum quærendo duos numeros quorum productum 24. ſumma quadratorum 52.

QVAESTIO SEXTA.

Dato aggregato ex ſumma quadratorum, & ex producto multiplicationis, datoque altero è duobus numeris, alterum inuenire. Oportet autem datum aggregatum multatum dodrante quadrati dati numeri, relinquere quadratum.

Eſto datum aggregatum 124. alter numerorum 10. Ponatur compoſitum ex quæſito numero & ex ſemiſſe dati 1. N. ergo quæſitus 1 N. – 5. cuius quadratus eſt 1 Q. + 25 – 10 N. At alterius quadratus eſt 100. productum verò multiplicationis ipſorum eſt 10 N. – 50. Quæ omnia ſimul efficiunt 1 Q. + 75. æqualia 124. Quare fit 1 N. 7. ergo quæſitus numerus qui ponebatur 1 N. – 5. erit 2. Hinc elicietur huiuſmodi Canon.

A dato aggregato aufer dodrantem quadrati dati numeri, à reſidui latere aufer ſemiſſem dati numeri, relinquetur quæſitus.

QVAESTIO SEPTIMA.

Inueniantur duo numeri, vt ſumma quadratorum, & compoſitum ex ſumma numerorum, & ex producto multiplicationis, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum huius compoſiti vnitate auctum, additum ſummæ quadratorum, efficere quadratum, cui proximè minor quadratus, ablatus à duplo ſummæ quadratorum relinquat etiam quadratum.

Sit ſumma quadratorum 34. Compoſitum ex ſumma numerorum, & ex producto multiplicationis ſit 23. Ponatur ſumma numerorum 1 N. ergo productum eſt 23 – 1 N. cuius duplum 46 – 2 N.
4. *ſecundi.* quo addito ſummæ quadratorum 34. [2] fit 80. – 2 N. æquale quadrato ſummæ 1 Q. & tandem 1 Q. + 2 N. æquantur 80. quæ eſt prima compoſitarum, & fit 1 N. 8. ſumma ſcilicet numerorum. Quare productum multiplicationis eſt 15. Itaque iam reducetur quæſtio ad tres alias. Primò ad trigeſimam quærendo duos numeros quorum ſumma 8. productum 15. ſecundò ad trigeſimam primam quærendo duos numeros quorum ſumma 8. & ſumma quadratorum 34. tertiò ad primam iſtarum, quærendo duos numeros quorum productum 15. ſumma quadratorum 34. & omnibus modis inuenientur quæſiti numeri 3. & 5. Hinc fiet Canon.

Summæ quadratorum adde duplum compoſiti ex ſumma numerorum & ex producto, vnitate auctum. Aggregati latus vnitate multatum, erit ſumma numerorum.

Porro hic & in ſequentibus per quadratum proximè minorem, intelligo illum cuius latus deficit vnitate à latere quadrati cuius fit mentio.

QVAESTIO OCTAVA.

Inueniantur duo numeri, vt productum multiplicationis eorum, & compoſitum ex ſumma numerorum, & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem octuplum producti vnitate auctum, additum quadruplo compoſiti conficere quadratum, cui proximè minor quadratus multatus ſedecuplo producti relinquat quadratum.

Eſto productum 6. Compoſitum ex ſumma numerorum & quadratorum 18. Ponatur ſumma numerorum 1 N. ergo ſumma quadratorum 18 – 1 N. cui addendo 12. duplum producti [3] fiet 30. –
4. *ſecundi.* 1 N. æqualis quadrato ſummæ numerorum, puta 1 Q. Quare 1 Q. + 1 N. æquatur 30. & fit 1 N. 5. ſumma ſcilicet quæſitorum numerorum. Quamobrem ſumma quadratorum eſt 13. Itaque iam licet ad tres alias quæſtionem hanc reuocare, ſicut & præcedentem, nimirum ad trigeſimam primam,

& primam istarum. Inuenienturque quæsiti numeri 2. & 3. Hinc formatur huiusmodi Canon.

Quadruplo compositi adde octuplum producti vnitate auctum, aggregati latus vnitate multatum, erit duplum summæ numerorum.

QVAESTIO NONA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & compositum ex eorum interuallo, & ex summa quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato composito auferendo semissem quadrati summæ, residui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Esto summa 8. Compositum ex interuallo numerorum, & ex summa quadratorum 56. Ponatur minor 4 − 1 N. maior 4 + 1 N. horum interuallū est 2 N. summa quadratorum 32 + 2 Q. Quare 32 + 2 N. + 2 Q. æquantur 56. & tandem 2 Q + 2 N. sunt æquales 24. vnde fit 1 N. 3. semissis interualli, ipsum ergo interuallum est 6. summa quadratorum 50. Itaque iam ad tres alias reuocabitur quæstio. Primò ad primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. interuallum 6. Secundò ad trigesimam primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. summa quadratorum 50. Tertiò ad secundam istarum quærendo duos numeros, quorum interuallum 6. summa quadratorum 50. & omnibus modis inuenientur quæsiti numeri 1 & 7. Hinc etiam elicitur facilis Canon.

Aufer à dato composito semissem quadrati summæ, residui duplo adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum ipsorum, & compositum ex summa numerorum, & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato composito auferendo semissem quadrati interualli, residui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Esto interuallum 6. compositum ex summis numerorum & quadratorum 58. Ponatur summa numerorum 2 N. ergo summa quadratorum erit 58 − 2 N. ipsi verò numeri 1 N − 3. & 1 N. + 3. vt eorum interuallum maneat 6. Fiet autem summa quadratorum 2 Q. + 18. sed iam erat 58 − 2 N. Igitur 58 − 2 N. æquantur 2 Q. + 18. & tandem 2 Q. + 2 N. æquantur 40. & fit 1 N. 4. semissis summæ numerorum. Est summa ergo numerorum 8. & summa quadratorum 50. Quare rursus reuocabitur quæstio ad easdem tres ad quas præcedens reduci ostensa est, & inuenientur quæsiti numeri 1 & 7. fiet etiam Canon.

Aufer à dato composito semissem quadrati interualli, residui duplum vnitate auctam quadratus fiet, cuius latus vnitate multatum erit summa numerorum.

Non adiicitur hîc alia huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum, & compositum ex summa numerorum & ex eorum interuallo datos conficiant numeros.

Quia facilè citrà Algebram solui potest. Sit enim summa quadratorum 50. compositum ex summa numerorum, & ex eorum interuallo 14. Patet per Canonem primæ libri huius, vel per vigesimam tertiam primi porism. 14. esse duplum maioris numeri. Quare ipse maior numerus est 7. cuius quadratum 49. si auferas à 50. remanet 1. quadratus minoris.

QVAESTIO VNDECIMA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex interuallo ipsorum datos conficiant numeros.

Oportet autem vt excessus quadrati semissis summæ super aggregatum, vnitate auctus conficiat quadratum. Vel vt excessus aggregati super quadratum semissis summæ, ab vnitate detractus, relinquat quadratum.

Esto primum summa numerorum 16. aggregatum ex producto & interuallo 56. Ponatur interuallum 2 N. ergo productum erit 56. − 2 N. ipsi verò numeri 8 + 1 N. & 8 − 1 N. quorum productum fit 64. − 1 Q æquale 56 − 2 N. & tandem 2 N. + 8. æquantur 1 Q. vnde fit 1 N. 4. semissis interualli, ac proinde ipsum interuallum est 8. productum 48. Itaque iam reducetur quæstio ad primam, cum summa sit 16. interuallum 8. vel ad trigesimam, cum summa sit 16. productum 48. vel ad trigesimam tertiam, cùm interuallum sit 8. productum 48. & inuenientur numeri 4. & 12. Deinde esto summa $\frac{1}{3}$ aggregatum ex producto & interuallo $\frac{1}{3}$. Posito vt prius interuallo 2

N. erit productum $\frac{1}{3}-2$ N. ipsi verò numeri $\frac{5}{12}+1$ N. & $\frac{5}{12}-$N. 1 quorum productum sit $\frac{25}{144}-1$Q. æquale $\frac{1}{3}-2$ N. & tandem 1 Q. $+$. $\frac{23}{144}$ æquantur 2. N. & fit 1. N. $\frac{1}{12}$ semissis interualli, ergo ipsum interuallum est $\frac{1}{6}$ productum item $\frac{1}{6}$ & per quæstiones suprà citatas reperientur quæsiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ Hinc fit iste Canon.

Aufer à quadrato semissis summæ datum aggregatum, residuum vnitate auctum est quadratus, cuius latus vnitate auctum est semissis interualli numerorum. Vel.

Aufer à dato aggregato quadratum semissis summæ, residuum ab vnitate detractum relinquit quadratum, cuius latus detractum ab vnitate est semissis interualli numerorum.

QVAESTIO DVODECIMA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex summa, & ex producto ipsorum, datos faciant numeros. Oportet autem vt quadrato semissis interualli ad datum aggregatum vnitate auctum adiecto, fiat quadratus.

Esto interuallum 8. aggregatum ex summa & producto 32. Ponatur summa 2 N. ergo productum relinquetur $32-2$ N. ipsi autem numeri erunt 1 N. $+$ 4 & 1 N. -4. quorum productum 1 Q. -16. æquatur $32.-2$ N. & tandem 1 Q. $+$ 2 N. æquatur 48. & fit 1 N. 6. semissis summæ. Ipsa ergo summa est 12. productum 20. Soluetur igitur quæstio per eadem per quas superior, & inuenientur quæsiti numeri 2 & 10. & fiet Canon.

Quadrato semissis interualli adde datum aggregatum vnitate auctum, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum erit semissis summæ numerorum.

Hic etiam non subiicitur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, quorum productum, & aggregatum ex summa ipsorum & interuallo, datos conficiant numeros.

Etenim nullo negotio absque Algebra soluitur. Esto productum 48. aggregatum summæ & interualli 24. patet per Canonem primæ huius, vel per vigesimam tertiam primi porism. 24. esse duplum maioris numeri. Est ergo maior 12. per quem si diuidas 48. fit minor 4.

QVAESTIO DECIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quintuplo quadrati semissis summæ auferendo datum aggregatum, superfit quadratus.

Esto summa 12. aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 116. Ponatur minor 1 N. maior $12-1$ N. interuallum quadratorum erit $144-24$ N. productum verò 12 N. -1 Q quæ iuncta faciunt $144-12$ N. -1 Q. æqualia 116. & tandem 1 Q. $+$ 12 N. æquantur 28 & fit 1 N. 2. minor numerus. Ergo maior est 10. Hinc formatur Canon.

A quintuplo quadrati semissis summæ aufer datum aggregatum, remanebit quadratus cuius latus multatum semisse summæ, minorem exhibet numerum.

Hic videntur desiderari duæ quæstiones quibus quæruntur duo numeri dato producto, & aggregato ex summa numerorum, & ex interuallo quadratorum. Vel dato interuallo quadratorum & aggregato ex summa numerorum & ex producto. Sed quia resolui non possunt per regulas Algebræ perfectè Canonicas, quandoquidem incidunt in æquationes in quibus duæ species duabus speciebus æquales reperiuntur, non possunt hîc commode tractari. Qua de causa nonnullas etiam alias omisimus eiusdem naturæ.

QVAESTIO DECIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem aggregatum interuallorum esse minus quadrato summæ aucto suo latere.

Esto summa 10. aggregatum interuallorum 44. Ponatur interuallum Numerorum 2. N. erunt ipsi $5-1$ N. & $5+1$ N. quadratorum interuallum fiet 20. N. æquale $44.-2$ N. & fit 1 N. 2. semissis interualli, quare quæsiti numeri sunt 3. & 7. Hinc fit Canon.

Diuide aggregatum interuallorum per duplum summæ binario auctum, orietur semissis interualli numerorum.

Reducitur ergo ad primam vel ad trigesimam secundam Diophanti, vel ad tertiam harum. Aliter

ter ponatur alter numerorum 1 N. alter 10 − 1 N. fiet aggregatum interualli numerorum & quadratorum 110 − 22 N. vel 22 N. − 110. prout 1 N. nunc maior nunc minor ſtatuetur. Igitur 110 ⊸ 22. N. æquantur 44. & fit 1 N. 3. minor numerus. Vel 22. N − 110. æquantur 44. & fit 1. N. 7. maior numerus. Hinc etiam fiet Canon.

Quadrato ſummæ ſuo latere aucto adde vel adime aggregatum interuallorum: ſummam, & reſiduum diuide per duplum ſummæ binario auctum, orientur quæſiti numeri.

QVAESTIO DECIMA QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex ſumma ipſorum, & ex interuallo quadratorum, datos conficiant numeros.

Oportet autem datum aggregatum maius eſſe interualli quadrato aucto ſuo latere.

Eſto interuallum 4. aggregatum ex ſumma numerorum, & ex interuallo quadratorum 50. Ponatur alter 1 N. alter 1 N + 4. fiet aggregatum ex ſumma numerorum & interuallo quadratorum 10. N + 20 æquale 50. vnde fit 1 N. 3. minor numerus. Quod ſi ponatur maior 1 N. minor 1 N. − 4. fient 10 N − 20 æqualia 50. vnde erit 1 N. 7. maior numerus. Hinc formatur Canon.

Dato aggregato adde vel adime interualli quadratum auctum ſuo latere, ſummam & reſiduum diuide per duplum interualli auctum binario, orientur, quæſiti numeri.

Aliter etiam fiet operatio poſita ſumma 2 N. & ipſis numeris 1 N − 5. & 1 N + 5. vt tibi conſiderandum relinquo. Hic quoque prætermitto quæſtionem de inueniendis duobus numeris dato interuallo quadratorum, & aggregato ex ſumma & interuallo numerorum, nam ſoluitur abſque Algebra.

QVAESTIO DECIMA SEXTA.

Inueniantur duo numeri, vt ſumma quadratorum, & aggregatum ex interuallo numerorum, & ex producto multiplicationis datos conficiant numeros. Oportet autem vt ſi à ſumma quadratorum auferatur duplum dati aggregati vnitate multatum, remaneat quadratus.

Eſto ſumma quadratorum 58. aggregatum interualli & producti 25. Ponatur interuallum 1 N. erit ergo productum 25 − 1 N. Sed à ſumma quadratorum 58. auferendo quadratum interualli 1 Q. [3] reſiduum 58 − 1 Q. duplum eſt producti. Ergo 58 − 1 Q. æquatur 50 − 2 N. & fit 1 N. 4. interuallum numerorum, productum ergo eſt 21. Itaque iam reducetur quæſtio vel ad trigeſimam tertiam Diophanti, vel ad primam, vel ad ſecundam harum, & inuenientur quæſiti numeri 3. & 7. 4. 2. *poriſ.*

Aduertendum autem fieri poſſe vt ſumma quadratorum ſit minor duplo aggregati. Quo caſu ſic præſcribenda erit conditio. Oportet vt ſummam quadratorum auferendo à duplo aggregati, reſiduum ab vnitate detractum, relinquat quadratum. Et pro vtroque caſu Canon formabitur.

A ſumma quadratorum aufer duplum aggregati, reſiduum vnitate auctum quadratus erit, cuius latus vnitate auctum erit interuallum numerorum.

Vel in alio caſu.

A duplo aggregati aufer ſummam quadratorum, reſiduum ab vnitate detractum relinquet quadratum, cuius latus ab vnitate detractum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA SEPTIMA.

Inuenire duos numeros quorum interuallum, & aggregatum ex producto & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt ſi ab aggregato auferatur quadratus ſemiſſis interualli, reſidui triens ſit quadratus.

Eſto interuallum 4. aggregatum ex producto & ex ſumma quadratorum 79. Per ſolam reductionem ſolui poteſt quæſtio hac arte. [2] Quia ſumma quadratorum continet duplum producti & quadratum interualli, patet 79. continere ter productum & ſemel quadratum interualli. Quare ſi inde auferatur 16. quadratus interualli, reſiduum 63. erit triplum producti, erit ergo productum 21. ſumma quadratorum 58. Quare multis modis reducetur quæſtio, vt manifeſtum eſt. Aliter ponatur ſumma Numerorum 2 N. ergo ipſi numeri ſunt 1 N. − 2 & 1 N. + 2. aggregatum ex ſumma quadratorum & ex producto eſt 3 Q. + 4. æquale 79. vnde fit 1 N. 5. ſemiſſis ſummæ. Quare ipſa ſumma 10. ex qua & interuallo per primam huius libri noſcuntur numeri 3. & 7. Canon. 4. 2. *poriſ.*

Aufer ab aggregato quadratum ſemiſſis interualli, reſidui triens eſt quadratus ſemiſſis ſummæ numerorum.

QVAESTIO DECIMA OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt productum multiplicationis & aggregatum ex interuallo ipsorum, & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadruplum excessus aggregati suprà duplum producti, adscita vnitate faciat quadratum.

Esto productum 21. aggregatum ex interuallo numerorum, & ex summa quadratorum 62. Ponatur interuallum numerorum 2 N. erit ergo summa quadratorum 62 − 2 N. vnde si auferatur quadratus interualli, nimirum 4 Q. [1] residuum 62 − 2 N. − 4 Q. æquatur duplo producti, hoc est vni-
4. 2. poris. tatibus 42. Quare tandem 4 Q + 2 N. æquantur 20. & fit 1 N 2. semissis interualli numerorum. Quare ipsum interuallum est 4. summa quadratorum 58. Itaque reducitur quæstio ad trigesimam tertiam Diophanti. Vel ad primam istarum, vel ad secundam, & inueniuntur quæsiti numeri 3. & 7. Hinc etiam fit Canon.

Quadruplo excessus aggregati suprà duplum producti adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum duplum est interualli numerorum.

QVAESTIO DECIMA NONA.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum & aggregatum ex producto, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros.

Oportet autem vt quintuplum interualli quadratorum ortorum à data summa, & à dato aggregato, additum vel ademptum quadrato aggregati summam vel residuum faciat quadratum.

Esto summa quadratorum 58. aggregatum ex producto, & ex interuallo numerorum 61. Ponatur productum 1 N. Igitur eius duplo addito ad summam quadratorum, [1] fit 58 + 2 N. quadratus
4 secundi. summæ numerorum. At eodem duplo detracto ab eadem summa quadratorum, [2] remanet 58 − 2 N.
4. 2. poris. quadratus interualli numerorum. Quoniam igitur ex summa numerorum in eorum interuallum, [3]
3. 2. poris. fit interuallum quadratorum; vtique ex quadrato summæ numerorum in quadratum interualli eorum, fiet quadratus interualli quadratorum. Igitur ex 58. + 2 N. in 58 − 2. N. fiet 3364. − 4 Q. æqualis quadrato ipsius 61 − 1 N. nimirum 3721. + 1 Q. − 122 N. & tandem 5 Q + 357 æquabuntur 122 N. & fiet 1 N. 21. productum scilicet. Ergo interuallum quadratorum erit 40. vnde licet varia vti reductione, & inuenire quæsitos numeros 3. & 7.

Accidit autem vt data summa nunc minor sit, nunc verò maior dato aggregato, vt in superiore exemplo minor extitit, sed in sequente maior est. Esto summa quadratorum 34. Aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 31. eodem vtentes ductu inueniemus tandem 62 N. + 195. æquales 5 Q. & fiet 1 N. 15. productum scilicet, vnde interuallum quadratorum est 16. & ipsi quadrati 25. & 9. Hinc elicitur Canon.

Quintuplum excessus quadrati à dato aggregato super quadratum à data summa, aufer à quadrato aggregati, residui latus adde aggregato, summæ quinta pars erit productum. Vel.

Quintuplum excessus quadrati à data summa super quadratum à dato aggregato, adde quadrato aggregati, summæ latus adde aggregato, compositi quinta pars erit productum.

Aduertendum porrò, vt omnino solutio sit rationalis, præter appositam conditionem, necesse esse vt inuento interuallo quadratorum, id ademptum vel additum summæ quadratorum, summam & residuum faciat quadratum.

QVAESTIO VIGESIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum quadratorum, & aggregatum ex summa quadratorum, & ex producto datos conficiant numeros.

Oportet autem vt triplum excessus quadrati à dato aggregato super quadratum à dato interuallo, additum quadrato aggregati efficiat quadratum, cuius latus multatum eodem aggregato, numerum relinquat cuius triens additum rursus eidem aggregato, faciat quadratum.

Esto interuallum quadratorum 40. Aggregatum ex summa quadratorum, & ex producto 79.
4. 2. poris. esto productum 1 N. ergo summa quadratorum 79 − 1 N. vnde auferendo duplum producti,
4. secundi. [1] residuum 79 − 3 N. est quadratus interualli numerorum. Sed etiam si ad 79 addatur productum 1
3. 2. poris. N. [2] fit 79 + 1 N. quadratus summæ numerorum. [3] Igitur cùm ex summa numerorum in eorum

interuallum fiat interuallum quadratorum, vtique ex quadrato ſummæ 79 + 1 N. in quadratum interualli 79 − 3 N. fiet 6241 − 158 N. − 3 Q. æquale quadrato interualli quadratorum, nimirum 1600. & tandem 4641. æquantur 3 Q. +. 158 N. & fit 1 N 21. productum. Quare per reductionem ad præcedentes regulas ſoluitur quæſtio. Hinc fiet Canon.

Triplum exceſſus quadrati ab aggregato ſuper quadratum ab interuallo, adde ipſi quadrato aggregati; à ſummæ latere aufer idem aggregatum, reſidui triens erit productum multiplicationis.

Alia quæſtio qua quæruntur numeri daro producto, & aggregato ex ſumma & interuallo quadratorum facilis eſt, & ſoluitur abſque algebra.

QVAESTIO VIGESIMA PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, itemque aggregatum ex ſummis numerorum & quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem ſiue aggregatum interuallorum addatur aggregato ſummarum, ſiue adimatur, duplum ſummæ & reſidui addita vnitate fieri vtrimque quadratum.

Eſto aggregatum interuallorum 14. aggregatum ſummarum 26. Quoniam igitur addendo interuallum numerorum ſummæ numerorum, fit duplum maioris numeri, & addendo interuallum quadratorum ſummæ quadratorum, fit duplum maioris quadrati, patet addito 14. ad 26. ſummam 40. continere bis maiorem numerum, & bis eius quadratum. Ergo 20. eſt maior numerus & eius quadratus. Ponatur maior numerus 1 N. erit eius quadratus 1 Q. Igitur 1 Q. + 1 N. æquatur 20. fitque 1 N. 4. maior numerus. Eadem ratione auferendo 14. de 26. reſiduum 12. eſt duplum minoris numeri & eius quadrati. Quare 6. eſt minor numerus & eius quadratus. Poſito ergo minore numero 1 N. fiet 6. æqualis 1 Q. + 1 N. & erit 1 N. 2. minor numerus. Hinc formatur Canon. 23. 1. *poriſ.*

Duplo ſummæ duorum aggregatorum, & duplo interualli ipſorum, adde ſeorſim vnitatem, fient duo quadrati, quorum latera vnitate multata, dupla manebunt quæſitorum numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt aggregatum ex ſumma ipſorum, & ex interuallo quadratorum, itemque aggregatum ex ſumma quadratorum, & ex interuallo numerorum datos faciant numeros. Oportet autem vt duplum ſummæ aggregatorum addita vnitate faciat quadratum. Et vt duplum interualli eorundem vel additum vnitati, vel detractum ab vnitate faciat quadratum.

Eſto prius aggregatum 18. poſterius 22. Patet ob rationem allatam in præcedente horum ſummam 40. eſſe duplum maioris numeri & quadrati ipſius. Quare vt ſuprà inuenietur maior numerus 4. Quia verò auferendo 18. de 22. ſupereſt 4. patet 4. eſſe duplum minoris quadrati minus duplo lateris. Quare poſito minore numero 1 N. duplum minoris quadrati erit 4 + 2 N. Quare 2 + 1 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 2.

Sed eſto prius aggregatum 20 $\frac{2}{9}$. Poſterius 19. $\frac{7}{9}$. Quia horum ſumma eſt quoque 40. erit 4 maior numerus vt prius. Sed quia prius aggregatum excedit poſterius, erit horum interuallum $\frac{4}{9}$ dupli minoris numeri, minus duplo ſui quadrati. Quare poſito minore numero 1 N. fient $\frac{4}{9}$ + 2 Q. æqualia 2 N. vnde erit 1 N. $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ Et vtrumque ſatisfacit propoſito. Hinc fit Canon.

Duplum ſummæ aggregatorum vnitate auctum fit quadratus, cuius latus vnitate multatum eſt duplum maioris lateris, & duplum exceſſus poſterioris aggregati ſuper prius aggregatum; addita vnitate quadratus fit, cuius latus vnitate auctum eſt duplum minoris lateris. At duplum exceſſus prioris aggregati ſuper poſterius aggregatum, detractum ab vnitate quadratum relinquit, cuius latus additum & ademptum ſemiſſi vnitatis, vtroque modo exhibet duplum minoris numeri.

Sed & aduertendum eſt, ſi vnum aggregatum alteri ſit æquale, tunc minorem numerum eſſe ſemper vnitatem vt facilè eſt demonſtrare.

QVAESTIO VIGESIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros vt productum ex interuallo numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex ſumma numerorum in ſummam quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum poſterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

3. 2. poriſ. Eſto prius productum 32. poſterius 272. Ponatur ſumma numerorum 1 N. Igitur $\frac{272}{1N}$ eſt ſumma quadratorum, & quia ex ſumma numerorum in interuallum eorundem fit interuallum quadratorum, quo rurſus ducto in numerorum interuallum fit 32. erit $\frac{32}{1N}$ quadratus interualli numerorum, 7. 2. poriſ. qui ſi auferatur à duplo ſummæ quadratorum, nimirum à $\frac{544}{1N^2}$ reſiduum $\frac{512}{1N}$ æquatur quadrato ſummæ numerorum 1 Q. & omnia ducendo in 1 N. fiunt 512 æquales 1 C. & fit 1 N 8. ſumma numerorum, & 34. ſumma quadratorum, & 2. interuallum eorundem. Vnde facilè reperiuntur numeri 3. & 5. Hinc fit Canon.

Aufer prius productum à duplo poſterioris, reſiduum eſt cubus ſummæ numerorum, per quam ſi diuidas prius productum, fit quadratus interualli numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros vt productum ex ſumma numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex ſumma quadratorum in interuallum numerorum, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum poſterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

Eſto prius productum 128. poſterius 68. Ponatur interuallum numerorum 1 N. ergo ſumma quadratorum erit $\frac{68}{1N}$ & ob cauſam in precedente allatam $\frac{128}{1N}$ erit quadratus ſummæ numerorum. Itaque 7. 2. poriſ. ſi à duplo ſummæ quadratorum quod eſt $\frac{136}{1N}$ auferatur quadratus ſummæ numerorum nimirum $\frac{128}{1N^3}$ reſiduum $\frac{8}{1N}$ eſt quadratus interualli numerorum. Quare $\frac{8}{1N}$ æquatur 1 Q. & omnia in 1 N. fiunt 8. æquales 1 C. eſt ergo 1 N 2. interuallum numerorum, & ſumma quadratorum 34. & quadratus ſummæ numerorum 64. vnde licet variis modis quæſtionem ſoluere, & inuenire quæſitos numeros 3. & 5. Hinc fit Canon.

Aufer prius productum à duplo poſterioris, reſiduum eſt cubus interualli numerorum, itaque per eius latus diuidendo prius productum, oritur quadratus ſummæ numerorum.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας δεδομένον ὅπως ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς σύναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὸν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων σύναμφοτέρου εἶναι πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἐστὶν ς γ. λοιπὸν ἐστὶ τὸ σύνθεμα, τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι πενταπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα, τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ι. τὸ δὲ αὐτῶν σύνθεμα ςς δ. ὥστε δυνάμεις ι πενταπλασίονές εἰσιν ςς δ. ἀριθμοὶ ἄρα κὸ ἴσοι δυνάμεσι ι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ β. ἔστω ὁ μὲν ἐλάσσων μ β ὁ δὲ μείζων μ ε. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, datam inter ſe rationem habentes, vt & ſumma quadratorum ab ipſis, ad ſummam ipſorum datam habeat rationem. Imperatum ſit maiorem minoris eſſe triplum; ſummam autem quadratorum; ſummæ numerorum eſſe quincuplam. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Superest vt ſumma quadratorum ab ipſis, ſummæ vtriuſque ſit quincupla. Cæterùm ſumma quadratorum ab ipſis ortorum fit 10 Q. ſumma verò ipſorum eſt 4 N. vnde conſtat 10 Q. quincuplos eſſe ad 4 N. Quamobrem 20 N. æquantur 10 Q. & fit 1 N. 2. Eſt igitur minor 2. maior 6. & quæſtioni ſatisfaciunt.

IN QVÆSTIONEM XXXIV.

CIRCA hanc quæſtionem & octo ſequentes nulla eſt difficultas, nec ampliori indigent explicatione. Canones etiam pro qualibet formari nullo negotio poſſunt, quod tibi relinquo peragendum.

QVÆSTIO XXXV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt ſumma quadratorum ab

ipsis ortorum, ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Iniunctum sit maiorem minoris triplum esse; summam autem quadratorum ab ipsis ortorum, interualli ipsorum esse decuplam. Ponatur minor 1 N. Maior ergo erit 3 N. Cæterum volo summam quadratorum ab ipsis, interualli ipsorum esse decuplam. Sed summa quadratorum ab ipsis facit 10 Q. Interuallum autem ipsorum 2 N. Igitur 10 Q. decupli sunt ad 2 N. sed & 20 N. decupli sunt ad 2 N. Igitur 20 N. æquales sunt 10 Q. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 10 N. æquales 20. & sit 1 N. 2. & est rursus minor 2. maior 6. & satisfaciunt proposito.

τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα, τὸ δὲ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δεκαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^{ου} α̅. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς^{ς} γ̅. λοιπὸν θέλω τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δεκαπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ι̅. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ς^{οι} β̅ δυνάμεις ἄρα ι̅ δεκαπλάσιοί εἰσιν ς^{ς} β̅. ἀλλὰ καὶ ς^{οι} κ̅ δεκαπλάσιοί εἰσιν ς^{ς} β̅. ἀριθμοὶ ἄρα κ̅ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ι̅., καὶ πάντα παρὰ ἀριθμόν. ς^{οι} ἄρα ι̅ ἴσοι μονάσιν κ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ο} β̅. καὶ ἔσται πάλιν ὁ ἐλάσσων μ^{ο} β̅. ὁ δὲ μείζων μ^{ο} ϛ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad summam ipsorum datam habeat rationem. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum. Interuallum autem quadratorum ab ipsis summæ ipsorum esse sescuplum. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Superest vt & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum summæ vtriusque sit sescuplum. Sed interuallum quadratorum ab ipsis est 8 Q. summa autem numerorum ipsorum est 4 N. Igitur 8 Q. sescupli sunt ad 4 N. Quamobrem 24 N. æquantur 8 Q. & fit 1 N. 3. & est minor quidem 3. Maior verò 9. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι ὅπως καὶ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς ἀμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τῶν ἐλάττονος εἶναι τριπλασίονα. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς^{ου} ἑνὸς, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς^{ς} γ̅. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ δυνάμεις η̅. συναμφότερος δὲ ς^{ς} δ̅. δυνάμεις ἄρα η̅. ἑξαπλασίονές εἰσι ς^{ς} δ̅. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̅. ἴσοι εἰσὶν δυνάμεσιν η̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ο} γ̅, καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^{ο} γ. ὁ δὲ μείζων μ^{ο} θ̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO XXXVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt etiam interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Imperatum sit maiorem minoris esse triplum; interuallum quadratorum, interualli numerorum esse duodecuplum. Ponatur rursus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. superest vt & interuallum quadratorum, interualli numerorum sit duodecuplum. Sed interuallum quadratorum est 8. Q. Hoc ergo duodecuplum est ad 2 N.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τῶν ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, τὸν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δωδεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς^{ου} ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς^{ς} γ̅. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι δωδεκαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ δυνάμεις η̅. αὐταὶ ἄρα δω-

δεκαπλασίονές εἰσιν ϛ̄ς̄ β̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄ ἴσοι εἰσὶ δυσὶ μεσι η̄. καὶ γίνεται πάλιν ὁ ϛ̄ μ̄ο γ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

Ομοίως δὲ διὰ τῆς αὐτῆς εὑρεθήσονται καὶ ἀριθμοὶ δύο πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς σωαμφότερον λόγον ἔχειν δεδομένον. ☾ πάλιν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς τὸν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχειν δεδομένον.

Quamobrem 24. N. æquantur 8 Q. & fit rursus 1 N. 3. & demonstratio est manifesta.

Similiter hac ipsa ratione inuenientur duo numeri datam ad inuicem rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad summam ipsorum datam habeat rationem. Et rursus duo numeri datam inter se rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad ipsorum interuallum datam habeat rationem.

QVÆSTIO XXXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος πρὸς τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον ὑπερεπάχθω δὲ τὸν μὲν μείζονα τῆς ἐλάττονος τριπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος τῆς μείζονος ἑβδομαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ϛ̄ς̄ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ̄ς̄ γ̄. λοιπὸν δεῖ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος, ἑβδομαπλασίονα τῆς μείζονος. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τ̄ ἐλάσσονός ἐστι δυσὶ μεσι μιᾶς. δύναμις ἄρα μία ἑξαπλασίων ἐστὶν ἀριθμοῦ ζητουμένου. ἀριθμοὶ ἄρα ιη̄ ἴσοι δυσὶ μεσι μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ο ιη̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ο ιη̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ο νδ̄. καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus à minore ortus ad maiorem datam habeat rationem. Iniunctum sit maiorem minoris esse triplum; quadratum autem minoris, esse maioris sescuplum. Ponatur rursus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. supereſt vt & quadratus à minore ortus, sit maioris sescuplus. Sed quadratus minoris est 1 Q. Igitur 1 Q. sescuplus est ad 3 N. Quamobrem 18 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 18. Erit ergo minor 18. Maior 54. & hi satisfaciunt quæstioni.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς αὐτὸν τὸν ἐλάττονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπερεπάχθω τὸν μείζονα τῆς ἐλάσσονος ἑβδομαπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτῆς τῆς ἐλάσσονος ἑξαπλασίονα. ἔστω ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ϛ̄ς̄ γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ϛ̄ς̄ ἑνός, καὶ μέρει ὁ μείζων τῆς ἐλάττονος τριπλασίων. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτῆς ἐλάσσονος ἑβδομαπλασίονα. δύναμις ἄρα μία ἑξαπλασίων ἐστὶ ἀριθμοῦ ἑνός. ἀριθμοὶ ἄρα ϛ̄. ἴσοι δυσὶ μεσι μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ο ϛ̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάττων μ̄ο ϛ̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ο ιη̄. καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad ipsum minorem datam habeat rationem. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum; Minoris autem quadratum ipsius minoris esse sescuplum. Esto similiter maior 3 N. minor 1 N. & manet maior minoris triplus. Restat vt minoris quadratus, ipsius minoris sit sescuplus. Quamobrem 1 Q. sescuplus est ad 1 N. Proinde 6. N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 6. erit igitur minor 6. Maior 18. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XL.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τ̄ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς σωαμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπερεπάχθω τὸν μείζονα τῆς ἐλάττονος τριπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τετράγωνον σωαμφοτέρων διπλασίονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ϛ̄ς̄ γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ϛ̄ς̄ ἑνός. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad summam vtriusque datam habeat rationem. Statutum sit maiorem minoris esse triplum; quadratum verò minoris summæ vtriusque esse duplum. Esto rursus Maior 3 N. minor 1 N. Supereſt vt quadratus à minore ortus, summæ vtriusque sit du-

plus, ſed quadratus minoris eſt 1 Q. ſumma verò vtriuſque 4 N. Igitur 1 Q. duplus eſt ad 4 N. Quamobrem 8 N. æquales ſunt 1 Q. & fit 1 N. 8. Erit igitur minor 8. maior 24. Et ſatisfaciunt quæſtioni.

τετράγωνον συναμφοτέρου εἶναι διπλασίονα. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος ἐστὶ δυνάμεως μιᾶς, συναμφότεροι δὲ ςς δ̄. δύναμις ἄρα μία διπλασίων ἐστὶ ςς δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα η̄. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° η̄. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ° η̄. ὁ δὲ μείζων μ° κδ̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XLI.

INVENIRE duos numeros in ratione data, vt quadratus minoris ad ipſorum interuallum datam habeat rationem. Conſtitutum ſit maiorem minoris eſſe triplum. Quadratum autem minoris interualli ipſorum eſſe ſeſcuplum. Eſto rurſus maior 3 N. minor verò 1 N. Supereſt vt quadratus minoris interualli ipſorum ſit ſeſcuplus. Igitur 1 Q. ſeſcuplus eſt ad 2 N. Quamobrem 12 N. æquales ſunt 1 Q. vnde fit 1 N. 12. Erit ergo minor 12. maior 36. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ἑξαπλασίονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ςς γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς° ἑνός. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι ἑξαπλασίονα. δύναμις ἄρα μία, ἑξαπλασίων ἐστὶ ςς β̄. ἀριθμοὶ ἄρα ιβ̄, ἴσοι εἰσὶ δυνάμει μιᾷ ὁ ἄρα ἀριθμὸς ἔσται μ° ιβ̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων ιβ̄. ὁ δὲ μείζων μ° λς̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

QVÆSTIO XLII.

SIMILITER ob hæc eadem, inuenientur duo numeri in data ratione, ita vt maioris quadratus ad minorem datam habeat rationem. Et rurſus duo numeri in data ratione, vt quadratus maioris ad ipſum maiorem datam habeat rationem. Et ſimiliter duo numeri in data ratione, vt maioris quadratus ad ſummam vtriuſque datam habeat rationem. Et adhuc duo numeri in ratione data, vt & maioris quadratus ad interuallum ipſorum datam habeat rationem.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ διὰ τῶν αὐτῶν εὑρεθήσονται ἀριθμοὶ δύο ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὸν ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς αὐτὸν τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ὁμοίως δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ἔτι δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

QVÆSTIO XLIII.

DVOBVS datis numeris, alium numerum inuenire, vt ex his tribus bini quique coniuncti, & in reliquum multiplicati, producant tres numeros æqualibus ſe incrementis ſuperantes. Sint duo dati numeri 3. & 5. & oporteat inuenire alium numerum, vt bini coniuncti, & in reliquum multiplicati producant tres numeros, quorum æqualia ſint interualla. Eſto quæſitus 1 N. & ſi adiiciatur ad 5. fit 1 N. + 5. Quod ſi multiplicetur in reliquum, nimirum in 3. fit 3 N. + 15. Rurſus ſi 1 N. addatur ad 3. fit 1 N. + 3.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς, προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως τῶν τριῶν ἐκκειμένων σὺν δύο συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ ὅτε τρία καὶ ὁ πέντε, καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως σὺν δύο συντεθέντες, καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ἔστω ὁ ζητούμενος ς° ἑνὸς ὡς ἐὰν μὲν συντεθῇ μ^τ μ° ε̄. γίνεται ς° εἷς μ° ε̄. ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λοιπὸν τουτέστι τὸν Γ̄. γίνονται ςς^οι τρεῖς μ° ιε̄. πάλιν ἐὰν ς° εἷς συντεθῇ μ^τ μ° Γ̄. γίνεται ς° εἷς μ° Γ̄. ἐὰν δὲ, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν

λοιπόν τουτέστι τὸν ε. γίνονται ςς^οι ε μ^ο ιε. ἡ ἔστι ἐὰν μ^ο ε. σωτελῶσι μ^ῳ μ^ο Γ. ἡ αἰγινόμεναι μ^ο η̄. πολλαπλασιαθῶσαν ὅπερ ς^α ἑνί. γίνονται ςς^οι η̄. ὅτι μὲν οὖν οὐδέποτε ἔσαι μέγιστος ὁ τ^ῳ ςς̄ γ̄. μ^ο ιε φανερόν. μείζων γὰρ ἐστὶν ὁ τῶν ἀριθμῷ ε μ^ο ιε. ὁ ἄρα ςς̄ γ̄. μ^ο ιε. ἤτοι μέσος ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ὁ δὲ τῶν ςς̄ ε μ^ο ιε. ἤτοι μέγιστός ἐστιν, ἢ μέσος. ὁ δὲ τ^ῳ ςς̄ η̄. καὶ μέγιστος, καὶ μέσος, καὶ ἐλάχιστος δύναται τυγχάνειν τῷ ἄδηλον εἶναι τίνι τῶν ς^α ὑποσασιν. τετάχθω οὖν πρῶτον μέγιστος μὲν ὁ τ^ῳ ςς̄ ε μ^ο ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τ^ῳ ςς̄ γ̄ μ^ο ιε. μέσος δὲ δηλονότι ὁ τ^ῳ ςς̄ η̄. ἐὰν δὲ ὦσιν ἀριθμοὶ ἔξῆς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου, καὶ ἔστιν ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος ςς^οι η̄ μονάδες λ̄. ταῦτα ἴσα ςς^οις ις̄ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δεκαπέντε τεταρτῶν μονάδος. τοσούτων ἔσαι ὁ ζητούμενος. καὶ ποιῶν τὰ τῆς προτάσεως.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τ^ῳ ςς̄ ε μ^ο ιε. μέσος δὲ ὁ τ^ῳ ςς̄ γ̄ μ^ο ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τ^ῳ ςς̄ η̄. ἐὰν δὲ ὦσι ἔξῆς ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ᾧ ὑπερέχει ὁ μέγιστος τὸν μέσον, τούτῳ ὑπερέχει ὁ μέσος τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχει δὲ ὁ μὲν μέγιστος τὸν μέσον ἀριθμοὺς β̄. ὁ δὲ μέσος τὸν ἐλάχιστον μονάδας ιε̄ λείψει ςς̄ ε̄. μονάδες ἄρα ιε̄ λείψει ςς̄ ε̄. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε̄ ἑβδόμων τοσούτων ἔσαι ὁ ζητούμενος, καὶ ποιῶν τὸ προβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τ^ῳ ςς̄ η̄. μέσος δὲ ὁ τ^ῳ ςς̄ ε μ^ο ιε. ἐλάχιστος δὲ ὁ τ^ῳ ἀριθμῷ γ μονάδων ιε̄. ἐπεὶ οὖν πάλιν ὁ μέγιστος & ἐλάχιστος διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος εἰσὶν ςς^οι ιᾱ μονάδες ιε̄. ταῦτα διπλάσια εἰσὶ τοῦ μέσου. ὁ δὲ μέσος ἐστὶ ςς̄ ε μ^ο ιε̄. ςς^οι ἄρα ῑ. μ^ο λ̄. ἴσοι εἰσὶν ςς^οις ιᾱ μονάσι ιε̄. ἔσαι ἄρα ὁ ζητούμενος μ^ο ιε̄. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

quod si multiplicetur in reliquum, puta in 5. fit 5 N. + 15. Denique si 3. & 5. coniungantur, & qui conficitur 8. ducatur in 1 N. fiunt 8 N. Enimverò 3 N. + 15. non esse trium productorum maximum liquet, maior enim illo est 5 N. + 15. Ergo 3 N. + 15. aut minimus est, aut medius. At 5 N. + 15. aut maximus est, aut medius, Denique 8 N. & maximus, & medius, & minimus ésse potest, eo quod ignotum sit quantum valeat 1 N. Ponatur ergo primò maximus 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. medius subinde 8 N. Iam si tres numeri æqualibus se superent interuallis, maximus & minimus coniuncti, duplum sunt medij. Maximus autem & minimus faciunt 8 N. + 30. Hoc ergo æquale est 16 N. & fit 1 N. $\frac{15}{4}$. Tantus est quæsitus, & satisfacit postulatis.

Iam verò sit maximus quidem 5 N. + 15. sed medius 3 N. + 15. minimus verò 8 N. Atqui si tres numeri æqualibus se superent interuallis, quanto maximus medium superat, tanto medius superat minimum. Sed excessus maximi supra medium est 2 N. Medij autem supra minimum excessus est 15 − 5 N. Igitur 15 − 5 N. æquantur 2 N. & fit 1 N. $\frac{15}{7}$. Tantus est quæsitus, & quæstioni satisfacit. Denique maximus esto 8 N. medius autem 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. Quandoquidem rursus maximus & minimus duplum medij conficiunt, sed maximus & minimus faciunt 11 N. + 15. hoc duplum est medij; medius autem est 5 N. + 15. Igitur 10 N. + 30. æquantur 11 N. + 15. Erit ergo quæsitus numerus 15. & implet postulata.

IN QVÆSTIONEM XXXXIII.

QVOD hîc assumit Diophantus. Si tres numeri fuerunt in arithmetica medietate, summa extremorum est æqualis duplo medij, demonstratum est propositione quinta libri primi porismatum. Cæterùm ex triplici operatione, triplex Canon formari potest nimirum.

Diuide duplum producti multiplicationis datorum numerorum, per summam eorundem, orietur tertius quæsitus. vel.

Diuide productum multiplicationis per compositum ex maiore numero & interuallo numerorum, orietur tertius quæsitus. vel denique.

Diuide productum multiplicationis per id quo duplum minoris numeri excedit maiorem, orietur tertius quæsitus.

Ex hoc autem vltimo Canone manifestum est requiri vt duplum minoris numeri excedat maiorem. Nec tertia operatio Diophanti absque tali limitatione locum habere potest.

DIOPHANTI

DIOPHANTI ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBER SECVNDVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE duos numeros, vt ſumma ipſorum, ad ſummam quadratorum ab ipſis ortorum datam habeat rationem. Imperatum ſit ſummam ipſorum ſummæ quadratorum ab ipſis ortorum eſſe decimam partem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. fit ſumma ipſorum 3 N. Summa verò quadratorum ab ipſis ortorum eſt 5 Q. Oportet igitur 3 N. eſſe decimam partem de 5 Q. Quare 30 N. ſunt æquales 5 Q. & fit 1 N. 6. Eſt ergo minor 6. maior 12. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν πρὸς τὴν τ' ἀπ' αὐτῶν συνθέσιν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπετάχθω δὴ τῶν συνθέσιν αὐτῶν τὸ τ' ἀπ' αὐτῶν συνθέσεως εἶναι μέρος δέκατον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς ἑνός. ὁ δὲ μείζων ςς β. γίνεται ἡ μὲν σύνθεσις αὐτῶν ςς γ. ἡ δὲ συνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, δυνάμεις ε. καὶ δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς γ. δεκάδων μέρος εἶναι δυνάμεων ε. ἵνα γίνεται ὁ ς μ̄ ε̄ ἴσα ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ ε̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ιβ. καὶ ποιεῖσι τὸ προβλημα.

In II. Librum Diophanti Commentarij.

IAM animaduerterunt & Scholiaſtes & Xilander quatuor quæſtiones initio libri huius expoſitas, cum quatuor priore libro traditis, in omnibus ferè conuenire, nimirum primam & ſecundam huius cum trigeſima quarta & trigeſima ſeptima primi. At quartam & quintam huius cum trigeſimaquinta & trigeſima ſexta illius. Nec in alio differunt hæ quæſtiones ab illis, niſi quod iſtæ vniuerſalius proponuntur, in illis verò numerorum quæſitorum ratio præſcribitur, ſed operandi modus idem eſt. Itaque vt quod ſentio, liberè dicam, vix adducor vt credam hæc ſcripſiſſe Diophantum, & in re facili tam inani vſum eſſe repetitione. Iudicent alij.

QVÆSTIO II.

INVENIRE duos numeros, vt interuallum ipſorum, ad interuallum quadratorum ab ipſis ortorum datam habeat rationem. Conſtitutum ſit interuallum ipſorum 3 interualli quadratorum ab ipſis, eſſe ſextantem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. & fit interuallum ipſorum 1 N. At interuallum quadratorum ab ipſis ortorum eſt 3 Q. Oportet igitur 1 N. ſextantem eſſe de 3 Q. Quamobrem 6 N.

ΕΤΡΕΙΝ. δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν τ' ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπετάχθω δὴ τῶν ὑπεροχὴν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχῆς εἶναι μέρος ἕκτον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς ἑνός, ὁ δὲ μείζων ςς β. γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ἀριθμὸς εἷς, ἡ δὲ τ' ἀπ' αὐτ' τετραγώνων ὑπεροχὴ δυνάμεις γ. δεήσει ἄρα ς ἕνα ἕκτον μέρος εἶναι δυνάμεων γ. ςς ἄρα ς ἴσοι δυνάμεσι τρισί. γὴ

γίνεται ὁ ς^ο μ^ο β̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδες β̄. ὁ δὲ μείζων μ^ο δ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

æquantur 3 Q. & sit 1 N. 2. Est ergo minor 2. maior 4. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO III.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἵνα ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς συναμφότερον ἢ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ πρότερον τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τοῦ συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα· τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ς^ο εἷς, καὶ ςς^οι β̄. δύναν τοῦ οὗτοι προβάλλεσθαι καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν δυνάμεις β̄. ὁ δὲ συναμφότερος ςς^οι γ̄. δεήσει ἄρα δυνάμεις β̄ ἑξαπλασίους εἶναι ςς γ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ιη̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ς^ο μ^ο θ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^ο θ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο ιη̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Εὰν δὲ ἐπιταχθῇ τὴν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὑπεροχῆς εἶναι ἑξαπλασίονα. ἔσται πάλιν ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυνάμεις β̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμὸς εἷς, ἀριθμοὶ πάλιν ς̄. ἴσοι δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο γ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο ς̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ad summam vtriusque, vel ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Constitutum sit primò productum multiplicationis, summæ sescuplum esse. Ponantur quæsiti numeri 1 N. & 2 N. (Cæterùm possent etiam in qualibet data ratione poni.) Erit igitur productus ex eorum multiplicatione 2 Q. summa verò vtriusque 3 N. Oportet ergo 2 Q. sescuplos esse ad 3 N. Proinde 18. N. æquantur 2 Q. & fit 1 N. 9. Erit ergo primus 9. secundus 18. & soluunt quæstionem.

Quod si imperatum sit productum multiplicationis interualli esse sescuplum. Erit rursus productum multiplicationis 2 Q. At interuallum 1 N. Proinde rursus 6 N. æquabuntur 2. Q. & fiet 1 N. 3. Erit ergo primus 3. secundus 6. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM III.

HÆC quæstio cùm nulla primi libri conuenit, quicquid dicat Scholiastes, qui eam reuocat ad trigesimam & trigesimam tertiam. Sed quàm meritò, sola collatione fiet manifestum. Cæterùm sicut hîc Diophantus comparat productum ex multiplicatione duorum numerorum, cum eorum summa, & cum eorum interuallo, sic & idem productum comparari potest interuallo quadratorum, & summæ eorundem. vnde duæ huiusmodi formabuntur quæstiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt à quadrato semissis denominatoris rationis, auferendo vnitatem supersit quadratus.

Esto summa quadratorum ad productum vt 5. ad 2. Ponatur alter numerorum 1 N. alter 1. erit summa quadratorum 1 Q. + 1. productum 1 N. Quare 1 Q. + 1. æquatur $\frac{5}{2}$. N. & fit 1 N. vel 2. vel $\frac{1}{2}$. Itaque duo quilibet numeri in ratione dupla satisfacient proposito. Hinc fit Canon.

A quadrato semissis denominatoris rationis datæ, aufer vnitatem, residui lætus adde vel adime eidem semissi, orietur vtroque modo denominator rationis, in qua duo quilibet sumpti numeri soluunt quæstionem.

Ceterùm notatu dignum est summam quadratorum ad productum, eandem semper habere rationem, quam habet ad vnitatem summa quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuisione. Quod etiam sic ostendetur. Sint latera A B. quorum quadrati E F, productum G. & diuiso A & B. sit quotiens C. diuisoque B per A sit quotiens D. Dico ambos E F. simul ad G. esse sicut ambos C D simul ad vnitatem. Etenim quia ducto D in A. & producto B in B fit F, [1] idem F. fiet ducto A in B, & producto G in D. Eodem argumento ostendemus E fieri ex G in C. Cùm ergo G ductus in singulos C D producat singulos E F. patet ex summa ipsorum C D. in G fieri summam ipsorum E F. Quare ex definitione multiplicationis est summa ipsorum E F. ad G. sicut summa ipsorum C D. ad vnitatem. Quod demonstrandum erat.

A 2. B. 6. C $\frac{1}{3}$. D 3. E 4. F 36. G 12.

3. 1. porism.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt quadrato ſemiſſis denominatoris rationis datæ addendo vnitatem, fiat quadratus.

Eſto interuallum quadratorum ad productum, vt 8. ad 3. Ponatur alter Numerorum 1 N. alter 1. erit interuallum quadratorum 1 Q. − 1. At productum 1 N. Quare 1 Q. æquabitur 1 + $\frac{8}{3}$ N. & fiet 1 N. 3. vel ſi 1 N. ſupponatur minor quàm 1. erit interuallum quadratorum 1 − 1 Q. Quare 1. æquabitur 1 Q. + $\frac{8}{3}$ N. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$ Quare manifeſtum eſt quoſlibet numeros in proportione tripla ſoluere quæſtionem, hinc fiet Canon.

Quadrato ſemiſſis denominatoris ratione datæ adde vnitatem, lateri ſummæ adde vel adime eundem ſemiſſem, vtroque modo innoteſcet denominator rationis, in qua duo quilibet numeri ſumpti ſatisfacient propoſito.

Hîc etiam accidit interuallum quadratorum ad productum multiplicationis eandem habere rationem, quam habet ad vnitatem interuallum quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuiſione. Quod ex demonſtratis in præcedente, manifeſtè colligitur.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros vt compoſitus ex quadratis ipſorum ad ipſorum numerorum interuallum, datam habeat rationem. Conſtitutum eſto compoſitum ex quadratis ipſorum interualli eſſe decuplum. Ponatur rurſus primus 1 N. ſecundus 2 N. erit igitur compoſitus ex quadratis ipſorum 5 Q. interuallum autem ipſorum eſt 1 N. Oportet ergo 5 Q. decuplos eſſe ad 1 N. Proinde 5. Q. æquantur 10. N. & fit 1 N. 2. erit ergo primus 2. ſecundus 4. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς εἶναι δεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν πρῶτος μὲν ς̄ ἑνὸς, ὁ δὲ, δεύτερος, ςς̄ β̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις ε̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ς̄ εἷς. δεήσει ἄρα δυνάμεις ε̄ δεκαπλασίονας εἶναι ς̄ ἑνός. δυνάμεις ἄρα ε̄ ἴσαι ἀριθμοῖς ῑ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ β̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ β̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ δ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO V.

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipſis ortorum, ad ſummam ipſorum numerorum, datam habeat rationem. Imperetur vt interuallum quadratorum, ſummæ numerorum ſit ſeſcuplum. Ponantur rurſus quæſiti numeri, hic quidem 1 N. ille verò 2 N. & fit interuallum quadratorum ab ipſis ortorum 3. Q. ſumma verò numerorum 3 N. Proinde 3 Q. æquantur 18. N. & fit 1 N. 6. & euidens eſt demonſtratio.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ἑξαπλασίονα. καὶ πάλιν τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ὃς μὲν ς̄ ἑνὸς ὃς δὲ ςς̄ β̄. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις γ̄. συναμφότερος δὲ ςς̄ οἱ γ̄. δεήσει ἄρα δυνάμεις γ̄. ἑξαπλασίονας εἶναι ςς̄ γ̄. δυνάμεις ἄρα τρεῖς ἴσαι εἰσὶ ἀριθμοῖς ιη̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ς̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE duos numeros, dato eorum interuallo, vt interuallum qua-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ δοθείσῃ, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν

τετραγώνων τ ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχῃ δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ τ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτ τετράγωνον ἐλάσσονα εἶ) συναμφοτέρᾳ αὐτ τε τ ὑπεροχῆς, καὶ τῷ διπλασίῳ τ ἀπ' αὐτ φρὸς τ αὐτῶν ὑπεροχὴν. ὑπιτετάχθω δ' ἡ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶ) μονάδων β. τ ὧ ὑπεροχὴν τ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τ ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχειν μονάδας κ. τετάχθω δ' ὁ ἐλάσσων ς ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσαι ς ἑνός μ β. ☾ μὴ ὑπερέχῃ αὐτῶν μονάδες β. ἡ δὲ τ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ ςϙ δ μ δ. δείσει ἄρα ἀριθμοὺς δ μ δ. ὑπερέχειν μονάδων β μονάσιν κ. ὥστε ἀριθμοὶ δ μονάδες δ ἴσοι εἰσὶ μονάσιν κβ. καὶ γίνεται ὁ ς μ δ καὶ ἥμισυ. ἔσαι ὁ μὲν ἐλάσσων μ δ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μείζων ε καὶ ἥμισυ. καὶ πιθὶ τὰ τῆς πρτάσεως.

dratorum ab ipsis ortorum, interuallum ipsorum superet dato numero. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem esse composito tum ex ipsomet interuallo, tum ex dato numero quo quadratorum interuallum superat ipsum numerorum interuallum. Imperetur vt interuallum numerorum sit 2. Interuallum autem quadratorum superet interuallum numerorum vnitatibus 20. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 1 N. + 2. & manet interuallum ipsorum 2. interuallum autem quadratorum est 4 N. + 4. Oportet igitur 4 N. + 4. superare vnitates 2. vnitatibus 20. Quamobrem 4 N. + 4. æquantur 22. & fit 1 N. $4\frac{1}{2}$. Erit igitur minor $4\frac{1}{2}$. maior $6\frac{1}{2}$. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM VI.

HÆc quæstio verbis paulum immutatis eadem est cum tertia illarum, quas ad trigesimam tertiam primi sumus commenti. Nam verbi gratia quærere duos numeros quorum interuallum sit 2. & interuallum quadratorum superet ipsum 2. numero 20. nil aliud est quàm velle vt interuallum numerorum sit 2. interuallum verò quadratorum 22. Itaque conditio ibi apposita eadem est cum illa quam hîc præscribit Diophantus, nimirum. *Quadratus interualli numerorum debet esse minor interuallo quadratorum*, cuius Theorematis si quis peculiarem requirat demonstrationem, eam afferre non pigebit. Sint dati numeri A B. B C. quorum interuallum A D. ita vt D B. B C. sint æquales. Dico quadratum ipsius A D minorem esse interuallo quadratorum ab ipsis A B. B C. etenim

4. secundi. A..D...B...C Quadratus A B est æqualis quadratis partium A D. D B. & duplo plani sub ipsis. Igitur interuallum quo quadratus ab A B superat quadratum abs D B seu abs B C est æquale quadrato ipsius A D. & duplo producti ex A D. in D B. Quare interuallum quadratorum superat quadratum interualli numerorum, duplo producti ex minore numero in ipsum interuallum numerorum. Quod erat propositum. Sic contra si interuallo quadratorum addatur quadratus interualli numerorum, fiet duplum producti ex maiore numero in idem interuallum numerorum. Nam si quadrato ipsius A D. & duplo producti ex A D in D B. addatur rursus quadratus ipsius A D. erit totum compositum æquale duplo quadrati ex A D, & duplo producti ex A D in D B, hoc est duplo producti ex A B. maiore numero in A D interuallum numerorum. Quod erat propositum. Quamuis itaque Canones allati ad tertiam illarum quas attulimus ad trigesimam tertiam primi, sint faciles & expediti, ex hoc tamen Theoremate alium colligemus Canonem, sane non inelegantem.

Interuallo quadratorum adde vel adime quadratum interualli numerorum, summam & residuum diuide per interuallum numerorum, quotientes erunt dupli quæsitorum numerorum.

QVÆSTIO VII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, τ ὑπεροχῆς αὐτῶν δοθέντι ἀριθμῷ μείζων ᾖ καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. τετάχθω τ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τ ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶ) τριπλασίονα, καὶ ἔτι ὑπερέχειν μονάδας ι. δεῖ δὴ τὸν ἀπὸ τ ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶ) συναμφοτέρᾳ τῷ τριπλασίονι τ ὑπεροχῆς, καὶ τ δοθεισῶν μονάδων ι. τετάχθω ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β. ὁ δὲ ἐλάσσων

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipsis, dato numero superet interuallum numerorum, & sic ad illum in data ratione. Constitutum sit interuallum quadratorum, interualli numerorum esse triplum, & superaddere adhuc vnitates 10. Oportet autem quadratum interualli numerorum, minorem esse composito ex triplo sui ipsius, & ex datis vnitatibus 10. Ponatur

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

ς ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς ἑνὸς μ̄ β̄. δεήσει ἄρα ἀριθμὸς δ̄ μονάδας δ̄ τριπλασίονας ἓξ μ̄ β̄. ἔτι ὑπερέχειν μ̄ ῑ̄. τρὶς ἄρα μονάδες β̄ μ̄ μ̄ ῑ̄. ἴσαι εἰσὶν ςς δ̄ μονάσι δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ γ̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ γ̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ε̄. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem rattio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 — 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. — 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. — 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 — 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ὑποταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ις̄ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ ϖοσ̄τος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ις̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας ἓξ τετραγώνῳ. πλάσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς̄. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μ̄ ὅσων ἔχει ἡ τ̄ ις̄ μ̄ πλευρά. ἔστω ςς̄ β̄ λείψει μ̄ δ̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ̄ μ̄ ις̄ λείψει ςς̄ ις̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ις̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ ϖροσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε̄ ἴσαι ἀριθμοῖς ις̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̄. πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνς̄ εἰκοσοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ̄ εἰκοσοπέμπτων, καὶ οἱ δύο σωτεθέντες ποιοῦσι τ̄ εἰκοσόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ις̄. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. — 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. — 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. — 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ις̄ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τῶ ϖρώτου πλευρὰ ς ἑνὸς, ἡ δὲ τῶ ἑτέρου ςς̄ ὅσων δήποτε λείψει μ̄ ὅσων ἔχει ἡ τῶ διαιρεμένου πλευρά. ἔστω δὴ ςς̄ β̄ λείψει μ̄ δ̄. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὁ μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὁ δὲ δυνάμεων δ̄ μ̄ ις̄ λείψει ςς̄ ις̄. βάλλομαι τὰς δύο λοιπὰς συντεθέντας ἴσους ἓξ μ̄ ις̄. δυνάμεις ἄρα ε̄ μ̄ ις̄ λείψει ςς̄ ις̄ ἴσαι μ̄ ις̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̄ πέμπτων.

ἔσται ἡ μὲν τῆ πρώτου πλευρὰ ις πέμπτων. αὐτὸς ἄρα σνϛ εἰκοσοπέμπτων. ἡ δὲ τῆ δευτέρου πλευρὰ ιβ πέμπτων. αὐτὸς ἄρα ἔσται ρμδ κε. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

ergo primi latus $\frac{16}{5}$. Atque ipse quadratus $\frac{256}{25}$. secundi latus verò erit $\frac{12}{5}$. Atque ipse quadratus $\frac{144}{25}$. & manifesta est demonstratio.

IN QVAESTIONEM VIII. & IX.

PARVM aut nil differunt hæ duæ quæstiones, cùm idem quærant, & eodem prorsus operandi modo. Quare vnica indigent explicatione. Operatio est subtilis & Diophanti propria, qua in sequentibus pulcherrima & difficillima perficit problemata, & ab alio ante ipsum nunquam excogitata. Proinde tyronibus hîc omni ope laborandum est, vt methodum istam fingendorum laterum perfectè comprehendant, illique assuescant. Cùm igitur Diophantus æquare velit quadrato 16 − 1 Q. id tali artificio peragit vt æquatione ritè præparata, tandem inter duas species proximas æqualitas consi stat, sic enim cùm nulla opus sit radicis extractione, sed sola diuisione inueniatur valor Numeri, patet solutionem contingere rationalem. Et hoc vnum voluisse Diophantum præter quàm quod res ipsa clamat, ipsemet disertis verbis testatur quæstione vndecima infra, vbi cùm de fingendo latere quadrati præceptum dedisset, subiicit, *Sic enim vna specie vni speciei æquali remanente, expedietur quæstio.* Quod rursus iisdem ferè verbis repetit quæstione duodecima & decima tertia. Hîc itaque vt æquatio ritè procedat, tria sunt obseruanda.

Primò vt in latere fictitij quadrati ponatur vnitatum numerus æqualis lateri quadrati diuidendi in duos quadratos, ita Diophantus fingit hoc latus 2 N. − 4. Quod fit idcirco, quia sic necesse est in quadrato fictitio reperiri vnitates æquales ipsi quadrato diuidendo, nimirum 16. cùm lex multiplicationis requirat vt ex − 4. in − 4. fiant 16. Quare cùm idem vnitatum numerus sit etiam in altera æquationis parte, puta in 16 − Q. euidens est auferendo similia à similibus, vnitates omnino tolli ab vtraque parte, & æqualitatem consistere inter proximas duas species, Quadratos scilicet & Numeros.

Secundò necesse est vt vnitates quæ ponuntur in fictitio latere, adiunctum habeant signum defectus, sic Diophantus ponit huiusmodi latus 2 N. − 4. & ratio est quia si poneretur 2 N. + 4. nulla quadrati pars adiunctum haberet signum defectus, esset enim quadratus 4 Q. + 16 N. + 16. Quare cùm in altera æquationis parte sint vnitates cum defectu quadratorum, nempe 16 − 1 Q. ablatis vtrimque vnitatibus 16. vt supra dictum est, & addendo defectum vtrinque, nempe 1 Q. remanerent 5 Q. + 16. N. æquales nihilo. Vt igitur Numeri deficiant necesse fuit ponere latus quadrati cum defectu vnitatum, puta 2 N. − 4. sic enim fit quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. Quare ablatis vtrimque vnitatibus 16. & addendo vtrimque 1 Q. tum 16 N. remanent hinc 5. Q. inde 16. N. inter se æquales. Denique multitudo Numerorum qui ponuntur in latere fictitio, debet esse maior vel minor vnitate. Nam si ponatur vnitas, orietur valor Numeri æqualis lateri ipsius quadrati diuidendi, & resoluendo hypostases, ipsum latus fictitium, reperietur nihil. Ita si ponas in exemplo Diophanti, latus fictitium 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q − 8 N. + 16 æquandus 16 − 1 Q. Quare auferendo similia à similibus, & supplendo defectus, remanent 2 Q. æquales 8 N. & fit 1 N. 4. Quare latus quod positum erat 1 N. − 4. erit 4 − 4. seu nihilum. Cur autem id contingat, ratio est euidens. Nam numerus quadratorum qui in æquatione remanet, semper æqualis est quadrato Numerorum qui ponuntur in latere ficto, adscita vnitate, quare cùm in latere ficto ponetur 1 N. numerus quadratorum qui manent in æquatione, erit 2. Q. At multitudo Numerorum cui æquantur 2 Q. est duplum lateris quadrati diuidendi, quia scilicet fit ex ductu 1 N. in dictum latus bis. Verbi gratia in dato exemplo 2 Q. æquantur 8 N. Quare cùm duplum lateris, puta 8. diuidetur per 2. necesse erit oriri ipsum latus 4 pro valore Numeri. Quod erat propositum.

His sanè probè intellectis totum Diophanti artificium percipietur. Sed abundantioris doctrinæ gratia libet aduertere, eandem solutionem contingere, quamuis dupliciter instituatur positio secundi lateris, nimirum, siue ponatur in eo quælibet multitudo Numerorum maior ea quæ posita est in primo latere, siue alia minor, ita tamen vt inter harum vtramque, illa sit media proportionalis. Verbi gratia in exemplo Diophanti, siue ponas latus fictitium 2 N. − 4. siue $\frac{1}{2}$ N. − 4. eadem continget solutio, fiet enim vtrobique 1 N. $\frac{16}{5}$. Quia scilicet 1 N. est medius proportionalis inter 2 N. & $\frac{1}{2}$ N. & sic de aliis. Cuius symptomatis causa pendet ab huiusmodi Theoremate.

Si fuerint tres numeri proportionales, vt se habet aggregatum quadratorum à duobus primis ad primum, ita & aggregatum quadratorum à duobus postremis ad postremum.

Sint tres proportionales A. B. C. quorum quadrati D E G. Dico esse D E simul ad A, sicut E G simul ad C. [1] Quia enim D ad E est in duplicata ratione lateris A. ad latus B [2] sed & A ad C est duplicata ratio rationis A ad B, erit D ad E sicut A ad C. eodem argumento ostendetur esse E ad G vt A ad C. Quare est D ad E vt E ad G. & conuertendo G ad E vt E ad D. Quia verò est D ad E vt A ad C [3] est & vicissim D ad A vt E

D 16. E 36. G. 81.
A 4. B 6. C 9.

11. *octaui.*
10. *defin.* 5.
13. *septimi.*

C. Itaque cùm sit E ad D vt G. ad E erunt componendo D E simul ad D, sicut E G simul ad E, sed vt D ad A, sic E ad C. vt ostensum est iam. [4] Igitur ex æquo vt D E simul ad A, sic E G simul ad C. Quod erat propositum. 14. *septimi.*

Hoc posito esto B numerus Numerorum primi lateris, medius proportionalis inter A & C. dico siue A ponatur numerus Numerorum secundi lateris, siue C. eandem contingere solutionem. Sit enim D latus quadrati diuidendi in duos quadratos. Igitur A — D erit secundum latus, [5] cuius quadratus constabit ex quadratis ipsorum A & D. minus duplo producti ex A in D. cui addendo quadratum ex B. totum compositum æquabitur quadrato diuidendo abs D. Quare auferendo vtrimque quadratum abs D, & transferendo defectum in alteram æquationis partem, manent quadrati ex A & B simul æquales duplo producti ex A in D. vnde fit valor Numeri diuidendo duplum producti ex A in D per aggregatum quadratorum ab, A & B. similiter ostendemus si secundum latus statuatur C — D valorem Numeri haberi diuidendo duplum producti ex C in D per aggregatum quadratorum abs B & C. Cùm ergo per præcedens Theorema sit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad A. ita aggregatum quadratorum abs B & C ad C. ac proinde per eundem duplum ipsius D multiplicando consequentes, [6] sit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad duplum producti ex A in D. ita aggregatum quadratorum abs B & C ad duplum producti ex C in D. patet diuiso seorsim duplo producti ex A in D per aggregatum quadratorum abs A & B, & duplo producti ex B in C per aggregatum quadratorum abs B & C. fieri ob æqualitatem proportionis, eundem quotientem vtrobique, atque ideo eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quod demonstrandum erat. 4. *secundi.* *Schol. 22.*

$A\frac{1}{2}N-D4.B1N.C2N-D4.$

Aduertendum præterea primi quadrati latus poni posse quemlibet Numerorum numerum, dum in secundi latere ponatur maior vel minor Numerorum numerus, verbi gratia ponatur primi latus 3 N. erit quadratus 9 Q. Igitur secundus quadratus erit 16 — 9 Q. cuius latus fingatur 2 N. — 4. fiet quadratus 4 Q. — 16 N. + 16, æqualis 16 — 9 Q. & tandem 13 Q. æquabuntur 16 N. & fiet 1 N. $\frac{16}{13}$ erit igitur primum latus $\frac{48}{13}$ secundum $\frac{32}{13}$ quorum quadrati $\frac{2304}{169}$ & $\frac{400}{169}$ quorum summa $\frac{2704}{169}$ seu 16. vbi accidit (quod animaduersione dignum est) resoluendo hypostasim secundi lateris illud reperiri non 2 N. — 4. sed 4 — 2 N. Manet tamen eadem æquatio, & res æquè bene succedit, quia quadratus 4 Q. — 16 N. + 16. cum quo æqualitas instituitur, habere potest duplex latus, nimirum 2 N. — 4. vel 4 — 2 N. nec interest à quo illorum effingi concipiatur. Quod semel monuisse sufficiat, ne cui scrupulum moueat quotiescunque deinceps simile quid continget. Sanè Franciscus Vieta in tali casu defectum sub ambiguitate relinquens tali nota vteretur ad eum significandum 2 N. — 4. Indicans scilicet ob indeterminationem Numeri qui talis esse potest vt 2 N. nunc maiores sint quàm 4. nunc minores, latus illud poni vel 2 N — 4. vel 4 — 2 N. prout valor Numeri commodius positionibus applicari poterit.

Cæterùm ex operatione Diophanti nullo negotio Canon erui potest. Sed omnium facillimus ad huiusmodi quæstiones soluendas, elicitur ex propositione tertia libri tertii porismatum. nimirum. Canon.

Dati quadrati latus diuide in duos numeros planos similes, horum interuallum, & duplum medij proportionalis inter eos cadentis, latera exhibent quæsitorum quadratorum.

Vt si datus sit quadratus 16. diuide latus eius 4. in planos duos similes, habentes scilicet rationem quam 4 ad 1. quod fiet per Canonem secundæ primi, eruntque $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$ quorum interuallum $\frac{12}{5}$ Quare latera quæsitorum quadratorum sunt $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Si autem 4. diuidatur rursus in alios duos planos similes seruantes aliam proportionem, alia reperietur solutio, vt si diuidatur in duas partes seruantes rationem quam habent 4. ad 9. erunt hæ $\frac{16}{13}$ & $\frac{36}{13}$ quarum interuallum, & duplum medij proportionalis sunt $\frac{20}{13}$ & $\frac{48}{13}$ latera scilicet quæsitorum quadratorum. Attamen, ne quid tyrones fallat, aduertendum est fieri posse, vt idem numerus bis diuidatur in duos planos similes, nec tamen per geminam illam diuisionem quadratus illius bis componatur ex duobus quadratis. Quod accidit quotiescunque partium prioris diuisionis interuallum æquatur duplo medij proportionalis cadentis inter partes posterioris diuisionis, & è conuerso. Vnde necesse est per vtranque diuisionem eadem quadratorum latera reperiri, non autem diuersa. Verbi gratia, si idem 4. diuidatur in planos similes $\frac{2}{5}$ & $\frac{18}{5}$ quorum ratio est quæ 1 ad 9. sunt hi diuersi à iam expositis $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Attamen quia eorum interuallum $\frac{14}{5}$ idem est cum duplo medij qui cadit inter $\frac{4}{5}$ & $\frac{16}{5}$. & è conuerso interuallum ipsorum $\frac{7}{5}$ & $\frac{16}{5}$ idem est cum duplo medij qui cadit inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{18}{5}$ nimirum $\frac{12}{5}$ patet per vtramque diuisionem eadem reperiri latera $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. Vt autem hæc ex altiori principio repetantur, id huiusmodi planis similibus accidit, quia illi sunt in ratione quadratorum 1 & 9. isti verò in ratione quadratorum 1. & 4. at priorum latera æquantur summæ laterum posteriorum & eorum interuallo, etenim posteriorum latera sunt 1. & 2. quorum summa & interuallum, nimirum 3. & 1. conficiunt latera priorum. Hanc porrò esse veram symptomatis huius causam more nostro libet demonstrare.

Sunto quadrati A C. quorum latera G H. itemque quadrati D F quorum latera K L, ita vt ipsorum K L summa sit æqualis ipsi G, & eorumdem K L interuallum sit æquale ipsi H. Tunc ducatur

idem numerus M in ipsos A C, vt fiant plani similes Q S. itemque ducatur idem N. in ipsos D F, vt fiant plani similes T X. ita tamen vt amborum Q S. summa sit æqualis summæ amborum T X. & ipsorum Q S. medius proportionalis esto R, interuallum verò Y. Ipsorum quoque T X medius proportionalis esto V, interuallum Z. dico tam Z ipsius R. quàm vicissim Y ipsius V duplum esse. Sumantur enim & ipsorum A C. & D F medij proportionales B E, & eorumdem interualla O P. [1] Quoniam igitur quadratorum D F interuallum P fit ex summa laterum K L in eorundem interuallum, fiet P ex G in H ex hypothesi, at [2] ex G in H fit etiam B. igitur B P. sunt æquales. [3] At verò quadrati A C, simul quadratorum D F. simul dupli sunt, & ex M in ipsos A C fiunt Q S. ex N autem in ipsos D F fiunt T X, cùm ergo summa duorum Q S. sit æqualis summæ amborum T X. patet ex M in summam ipsorum A C fieri eundem numerum qui fit ex N. in summam ipsorum D F. Igitur [4] est vt summa ipsorum A C ad summam ipsorum D F, ita N. ad M. Quare & N. duplus est ipsius M. Rursus cum ex M in ipsos A C. fiant Q S. patet etiam ex M. in ipsos B. O. fieri R Y. similiterque ex N in ipsos E P. fieri V. Z. Quoniam itaque ex N in P fit Z, & ex M in B fit R. & B. P. ostensi sunt æquales, patet ex eodem numero in ipsos N M. fieri ipsos Z R. [5] Quamobrem est Z ad R sicut N ad M. ac proinde Z est duplus ipsius R. Quod erat ostendendum.

M 5. O 8. Y 40.
G 3. H 1. A 9. B 3. C 1. Q 45. R 15. S 5.
K 2. L 1. D 4. E 2. F 1. T 40. V 20. X 10.
N 10. P 3. Z 30.

3. 2. *porism.* 11. *octaui.* 7. 2. *porism.* 19. *septimi.* 17. *septimi.* 23. 1. *poris.* 23. 1. *poris.* 3. 2. *porism.*

Deinde cum summa ipsorum G H constet ex summa ipsorum K L & eorum interuallo, [6] erit summa ipsorum G H dupla ipsius K. & quia interuallum eorundem G H fit ex summa ipsorum K L multata eorundem interuallo. [7] erit interuallum ipsorum G H duplum ipsius L. Quare productus ex summa ipsorum G H in eorundem interuallum, [8] nimirum O æquabitur producto ex duplo K in duplum L, seu quadruplo producti ex K in L. Igitur O quadruplus est ipsius E. Proinde productus ex N in O quadruplus erit producti ex N in E seu ipsius V. sed quia N est duplus ipsius M. idem productus ex N in O duplus est producti ex M in O seu ipsius Y. Igitur Y. duplus est ipsius V. Quod demonstrandum erat. Itaque ex omni parte constat propositum.

Hinc euidens est cur etiam cum Diophanto positionibus diuersimodè institutis, eadem tamen nonnunquam solutio contingat, si enim primò statuantur numeri Numerorum vtriusque lateris quales sunt K L. & secundò statuantur iidem numeri Numerorum quales sunt G H. eadem per vtramque positionem inuenietur solutio. Nam si ponas cum Diophanto latus vnum 1 N, aliud verò 2 N − 4. fiunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$ si autem rursus ponas latum vnum 1 N. aliud verò 3 N − 4. fient rursus eadem quadratorum latera $\frac{16}{5}$ & $\frac{12}{5}$ Eadem de causu si prima vice ponas numeros Numerorum 2. & 3. secunda vice 1 & 5. non contingit solutio diuersa, quia scilicet ipsorum 2 & 3. summa & interuallum conficiunt ipsos 5 & 1. & sic de aliis. Denique ex dictis melius & vniversalius quàm modo à Xilandro tradito, licebit cognoscere an propositus quadratus componatur ex duobus quadratis integris, immò & quoties in duos integros quadratos diuidi possit, respiciendo scilicet an latus eius è duobus planis similibus integris componatur, & quoties ex planis similibus integris & diuersis componatur, adhibita tamen cautione ne duorum ex iis planis similibus interuallum æquale sit duplo medij proportionalis inter alios duos cadentis. Hac arte inuenies quadratum lateris 65. quater componi ex duobus quadratis integris, quia scilicet ipse 65. quater componitur è duobus planis similibus integris, nimirum ex 1 & 64. & 13. & 52. ex 16. & 49. & denique ex 20. & 45. Itaque per Canonem suprà traditum inuenies latera quadratorum, ex quibus quadratus ipsius 65. componitur, videlicet 63. & 16. vel 39. & 52. vel 33. & 56. vel demum 25. & 60. Sed de his satis.

QVÆSTIO X.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ὃς σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, μεταδιβάσαι εἰς δύο ἑτέρους τετραγώνους. ἔστω τὸν ιγ̄ συγκείμενον ἐκ τε τῶν δ̄. καὶ θ̄ τετραγώνων. μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους. εἰλήφθωσαν τῶν προειρημένων τετραγώνων αἱ πλευραὶ μονάδες β̄ μονάδες γ̄. καὶ τετράθωσαν αἱ τὸν ὁπιζητουμένων τετραγώνων πλευραὶ, ἡ μὲν ς̄ ἑνὸς μ̄ β̄. ἡ δὲ ς̄ ὅταν δήποτε, λείψει μονάδων ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ λοιποῦ πλευρὰ γ̄. ἔστω ς̄ β̄ λείψει μ̄ γ̄. καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι. ὁ μὲν δ̄ ἀπὸ μεως μιᾶς ς̄ δ̄. μ̄ δ̄. ὁ δὲ ἀπὸ μεων δ̄ μ̄, θ̄. λοιπὸν ἐστὶ τὰς δύο συντεθέντας ποιεῖν μο-

DATVM numerum qui ex duobus componitur quadratis, in alios quadratos partiri. Numerum 13. compositum ex quadratis 4. & 9. diuidere oporteat in alios duos quadratos. Sumantur latera prædictorum quadratorum 2. & 3. & ponantur quæsitorum quadratorum latera: hoc quidem 1 N. + 2. Illud verò numerorum quotcunque, cum defectu tot vnitatum quot continet latus alterius quadrati, puta 3. & esto 2 N. − 3. & fiunt quadrati, ille quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Hic verò 4 Q. + 9. − 12 N.

Restat

Reſtat vt ambo ſimul iuncti conficiant vnitates 13. ſed ambo ſimul iuncti faciunt 5 Q. + 13. — 8 N. Hoc ergo æquatur 13. & fit 1 N. $\frac{8}{5}$. Ad Poſitiones. Poſueram priorii latus 1 N. + 2. erit ergo $\frac{18}{5}$. ſtatueram autem poſterioris latus 2 N. — 3. erit vtique $\frac{1}{5}$. Ipſi ergo quadrati erunt, ille quidem $\frac{324}{25}$. Hinc autem $\frac{1}{25}$. Et ambo ſimul faciunt $\frac{325}{25}$ ſeu imperatas vnitates 13.

νάδας ιγ̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιῶσι δυνάμεις ε̄ μονάδας ιγ̄ λείψει ἀριθμῷ η̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ιγ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ η ε̄. ὅπου τὰς ὑποτάσεις, ἔταξα τοῦ μὲν τοῦ πλευρὰν ς̄ ἑνὸς μ̄ο̄ β̄. ἔσαι, ιη̄ ε̄. τοῦ δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰν ς̄ β̄ λείψει μ̄ο̄ γ̄ ἔσαι ἑνὸς πέμπτου, αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι ἔσονται. ὁς μὲν τοῦ κδ̄ κε̄. ὁς δὲ ἑνὸς εἰκοστοπέμπτου, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι τοῦ κε̄, ἃ σώζει τὰς ὑποτεθείσας μονάδας δεκατρεῖς.

OBSERVATIO D. P. F.

NVm verò numerum ex duobus cubis compoſitum diuidere poterimus in alios duos cubos? Hæc quæſtio difficilis ſane nec Bacheto aut Vietæ cognita fortaſſe nec ipſi Diophanto; eius tamen ſolutionem dedimus infra in notatis ad quæſtionem ſecundam lib. 4.

IN QVAESTIONEM X.

PVLCHERRIMVM eſt hoc problema, & eiuſdem naturæ cum præcedente, cuius magnus eſt vſus in ſequentibus, præſertim libro quinto. Sed circa operationem Diophanti multa ſunt obſeruanda, quæ Scholiaſtes & Xilander, vel non viderunt omnino, vel imperfectè tractarunt.

Primò obſeruandum ne in vtroque latere fictitio idem ſtatuatur Numerorum numerus, alioquin non inuenientur diuerſa quadratorum quæſitorum latera à datis iam lateribus, ſed eadem prorſus, & inutilis erit operatio. Ita in exemplo Diophanti ſi ponas fictitia latera 1 N. — 2. & 1 N. — 3. vel rurſus 1 N. + 2. & 1 N. — 3. inuenies per vtramque poſitionem eadem latera 2. & 3. quæ iam data ſunt, & nihil actum erit. Quod vt ſua demonſtratione fulciatur ſunto B C. latera data quadratorum, quorum ſumma K. & ponatur A certus Numerorum numerus in vtroque latere fictitio, ita vt alterum ſit A — B, alterum A — C. duplum autem quadrati abs A eſto D. & duplum producti ex K in A eſto E. patet diuiſo E per D. oriri valorem Numeri. Nam ducere B in A, & C in A idem eſt atque ducere ſummam ipſorum B C. nempe K in A. Quare duplum productum ex B in A, & ex C in A, æquatur duplo producti ex K in A, puta ipſi E. Quamobrem E eſt numerus Numerorum qui reperiuntur in aggregato quadratorum à fictitiis lateribus A — B & A — C. Atqui D eſt numerus Quadratorum qui ſunt in eodem aggregato. Proinde diuiſo E per D fit valor Numeri. Itaque quia duplum A in ipſum A ductum facit D, & duplum A in K facit E, erit D ad E ſicut A ad K. Quare diuiſo K per A prodibit idem valor Numeri qui oſtenſus eſt prodire diuiſo E per D. Proinde cùm reſoluendo hypoſtaſes, ducetur valor Numeri in A, fiet K, à quo auferendo B reſtabit vtique C, & auferendo C, reſtabit B. Igitur latus A — B idem erit quod ipſe C, & latus A — C idem erit quod B. Quod erat demonſtrandum.

K 5.
A 6 N. — B 2. A 6 N. — C 3.
D 72 Q. E 60 N.

Deinde ponatur vnum latus A + B. alterum A — C. & ſit K interuallum ipſorum B C ſit autem D vt prius duplum quadrati A. ſed E. ſit duplum producti ex A in K. Patet ob ſigni diuerſitatem, haberi numerum Numerorum contentorum in aggregato quadratorum qui fiunt à fictitiis lateribus, ſi à duplo producti ex A in C, auferatur duplum producti ex A in B. hoc autem idem eſt atque ducere duplum A in interuallum ipſorum B C. ſeu in K. Igitur E eſt ille numerus Numerorum. Itaque cùm D ſit numerus quadratorum in eodem aggregato contentorum, diuiſo E per D. orietur valor numeri. Quia ergo ducendo duplum A in A fit D, & ducendo idem duplum A in K fit E, erit A ad K vt D ad E. Proinde diuiſo K per A orietur item valor Numeri, & reſoluendo hypoſtaſes cùm A ducetur in valorem Numeri fiet K. Quamobrem A + B æquabitur ipſi C. & A — C hoc eſt C — A æquabitur ipſi B. Quod erat propoſitum.

K 1
A 6 N. + B 2 A 6 N. — C 3.
D 72 Q. E 12 N.

Aduertendum ſecundò ad hoc vt æquatio procedat, in lateribus fictitiis ponendum eſſe latus vtrumque datorum cum ſigno defectus, vel ſaltem alterum, ita vt in aggregato quadratorum fictitiorum numerus Numerorum reperiatur cum ſigno defectus, ac proinde tranſeat in alteram æquationis partem, & maneant Numeri æquales quadratis. Quare tutiſſimus omnium modus fingendi latera quadratorum eſt, cùm in vtroque ponuntur data latera cum ſigno defectus, & tunc nulla

cautio adhibenda est, præter eam qua tradita est aduertendo primo vt scilicet numeri Numerorum sint diuersi, & eam de qua agetur aduertendo vltimo. Ita si ponas latera 1. N. − & 2. N. − 3. fiet 1 N. $\frac{16}{5}$ & latera quæsita erunt $\frac{6}{5}$ & $\frac{17}{5}$. & sic aliis infinitis modis variari positiones poterunt, & variæ contingent solutiones, prout varij ponentur Numerorum numeri, qui tamen non sint prius positis proportionales, alioquin si proportionales sint eandem exhibebunt solutionem, vt facile est demonstrare. Quod si alterum tantum datorum laterum statuatur cum signo minoris, alterum verò cum signo pluris, dupliciter id accedere potest, quia vel minus latus afficitur signo − vel maius latus. Itaque.

Aduertendum tertiò, cùm minus datorum laterum afficitur signo − maius verò signo +. Necesse esse vt numerus Numerorum appositus minori ad numerum Numerorum appositum maiori maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Quare in hoc casu si ponatur verbi gratia alterum latus 1 N. + 3. ponendum erit alterum 2 N. − 2 vel 3 N. − 2. & sic in infinitum, ita vt numerus Numerorum secundi lateris excedat 1 $\frac{1}{2}$ qui ad vnitatem seu ad numerum Numerorum primi lateris eandem habet rationem quàm 3. ad 2. Huius rei causa euidens est, quia oportet, vt dictum est, in aggregato quadratorum fictitiorum numerum Numerorum esse cum signo −. Quare in hoc casu oportet duplum producti ex minore datorum laterum in Numeros sibi appositos, superare duplum producti ex maiore in Numeros sibi adiunctos, quod patet fieri non posse nisi obseruetur quod traditum est.

Aduertendum quartò cùm maius latus datorum afficitur signo, − minus verò signo + tunc necesse esse vt numerus Numerorum appositus maiori ad appositum minori lateri, maiorem habeat rationem ratione datorum laterum. Ita si ponatur alterum latus 1 N. − 3. statuendum erit alterum 1 $\frac{1}{3}$ N. + 2. vel 1 $\frac{1}{4}$ N. + 2. & sic in infinitum, ponendo in secundo latere quemlibet numerum Numerorum minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. vel si secundum latus statuatur 1 N. + 2. statuendum erit primum 2. N. − 3. vel 4. N. − 3. & sic in infinitum ponendo in primo latere quemlibet numerum Numerorum maiorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Quod obseruari oportet ob causam in præcedente aduertendo allatam. Ita possunt hæc duo præcepta in vnicum contrahi, nimirum. Cùm in vno latere fictitio ponitur alterum laterum datorum cum signo, + alterum verò ponitur in altero latere fictitio cum signo. − Oportet vt numerus Numerorum qui afficitur signo − ad eum qui afficitur signo + maiorem rationem habeat, ratione datorum laterum.

Aduertendum postremò, cùm maius datorum laterum afficitur signo − & minus signo + tunc cauendum esse, ne numerus Numerorum maiori appositus, ad appositum minori eandem rationem habeat, quam habet summa datorum laterum ad eorundem interuallum; alioquin idem sequetur absurdum quod in primo aduertendo sequi ostensum est, reperientur scilicet eadem latera quæ data sunt, & nihil effectum erit. Verbi gratia si ponas alterum latus 5 N. − 3. alterum 1 N. + 2. quia 5 N. ad 1 N. se habet sicut summa ipsorum 3. & 2. ad eorundem interuallum inuenies tandem 5 N. − 3. nil aliud esse quàm 2. & 1 N. + 2 esse idem quod 3. Huius symptomatis causa ex huiusmodi Theoremate pendet.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad secundum sit vt summa tertij & quarti, ad excessum tertij suprà quartum: erit aggregatum quadratorum primi & secundi, ad productum ex primo in tertium multatum producto ex secundo in quartum: Sicut primus ad semissem summæ tertij & quarti, vel sicut secundus ad semissem interualli eorundem.

F 5.
A 15. C 6.
E 2.
B 3. D 4. G 1.
H 234. K 78.
L 225. R 75.
M 9. P 3.

Sint dati quatuor numeri A B C D. & ipsorum C D interuallum sit E cuius semissis G. & eorundem C D summæ semissis sit F. & aggregatum quadratorum ab A & B sit H. productum autem ex A in C multatum producto ex B in D esto K. & ponatur esse A ad B sicut summa duorum C D ad eorundem interuallum E, hoc est sicut F ad G. dico esse sicut H ad K. sic A ad F vel B ad G. Quia enim est A ad B sicut F ad G, erit vicissim A ad F sicut B ad G. Itaque sumantur L M quadrati ipsorum A B. quorum aggregatum positum est H. & ex F in A fiat R. & ex G in B fiat P. Quia igitur F est semissis summæ ipsorum C D, & G semissis interualli eorundem; D G simul [1] æquantur ipsi F, & G F simul æquantur ipsi C.

coroll. 25. *1. poris.* Quare ducere C in A idem est, atque ducere G & F in A, [2] productum autem ex G in A æquatur producto ex F in B (quia est A ad B vt F ad G) Igitur productum ex C in A æquatur productis ex

19. septimi. F in A, & ex F in B. Quoniam verò F æquatur ipsis D G. productum ex F in B æquatur productis ex D in B, & ex G in B. Quamobrem productum ex C in A æquatur productis ex F in A. & ex D in B. & ex G in B. Itaque si hinc auferatur productus ex D in B, vtique productus ex C in A multatus producto ex D in B, hoc est K manebit æqualis productis ex F in A & ex G in B, hoc est ipsis R P. Iam verò quia idem A ductus in seipsum, & in F producit L & R. erit L ad R sicut A ad F seu sicut B ad G. Similiter quia idem B ductus in seipsum & in G producit M & P. erit M ad P sicut B ad G. Igitur est L ad R sicut M ad P. & duo antecedentes simul, nempe H ad consequentes simul, nempe ad K, sunt vt A ad F seu B ad G. Quod demonstrandum erat.

His præmissis, si ponantur data latera C D. & sint A. B. numeri Numerorum, sitque vnum latus fictitium A − C, alterum B + D. fiet æquatio inter aggregatum quadratorum ab A & B, & inter duplum producti ex A in C multatum duplo producti ex B in D. nempe inter H & duplum ipsius K.

A 15 N. − C 6 F 5. E 2. B 3 N + D 4. G 1. H 234 Q. K 78 N.

Quare orietur valor Numeri diuidendo duplum ipsius K per H, Quia autem vt H ad K, sic est A ad F. erit & H ad duplum K, sicut A ad duplum F. hoc est ad summam ipsorum C D. Quare hac summa diuisa per A orietur quoque valor Numeri. Proinde resoluendo hypostases cùm vnitates ipsius A ducentur in valorem Numeri, fiet A æqualis summæ ipsorum C D, vnde patet A − C fore æqualem ipsi D. Similiter quia vt H ad duplum K. sic est B ad duplum G. nempe ad E, diuiso E per B orietur rursus valor Numeri. Vnde resoluendo hypostases cùm vnitates ipsius B. ducentur in valorem Numeri, fiet B æqualis ipsi E. Quamobrem B + D necesse erit æquari ipsi C. Quare ex omni parte patet propositum.

Idem quoque absurdum sequitur, cùm in vtroque latere fictitio ponuntur data latera cum signo defectus, si Numerorum numerus minori appositus, ad appositum maiori eandem rursus habeat rationem quam habet summa datorum laterum ad eorundem interuallum, vt si in hypothesi Diophanti ponatur alterum latus 5 N. − 2 alterum 1 N. − 3. Quod eadem facilitate demonstratur, hoc præmisso Theoremate.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad secundum sit vt summa tertij & quarti ad excessum quarti supra tertium, erit aggregatum quadratorum primi & secundi, ad aggregatum productorum ex primo in tertium, & ex secundo in quartum, sicut primus ad semissem summæ tertij & quarti, vel sicut secundus ad semissem interualli eorundem.

Demonstratur autem hoc theorema eadem ferè ratione qua & præcedens, imò ex illo facilè infertur, probando scilicet eundem K fieri siue à producto ex A in C. auferatur productus ex B in D; siue producto ex A in D. addatur productus ex B in C. Quod tibi relinquo considerandum exercitationis ergo.

Varij Canones ex varia positionum institutione formari possent, sed quia parum in eis esset compendij, huic labori supersedeo. Verùm Canonis loco libet explicare modum perficiendi hoc problema à Francisco Vieta traditum zetetico 3. libri quarti, qui talis est.

Constituantur latera data, hypotenusæ duorum triangulorum rectangulorum similium. Summa baseos primi & perpendiculi secundi; itemque interuallum perpendiculi primi & baseos secundi: vel interuallum baseos primi & perpendiculi secundi; itemque summa perpendiculi primi, & baseos secundi constituent quæsitorum quadratorum latera.

Porrò quilibet numerus sit hypotenusa trianguli rectanguli per præcedentem, diuidendo scilicet eius quadratum in duos quadratos. Verbi gratia, sint data latera 2. & 3. si per Canonem præcedentis diuida 2. in duos planos similes, videlicet qui sint in ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{1}{5}$ & $\frac{8}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{6}{5}$ & $\frac{8}{5}$. Rursus diuide 3. in duos planos similes, quique sint in eadem ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{9}{5}$ & $\frac{12}{5}$. Habemus itaque latera circa rectum triangulorum similium, nimirum $\frac{6}{5}\frac{8}{5}$ & $\frac{9}{5}\frac{12}{5}$. summa baseos primi & perpendiculi secundi est $\frac{18}{5}$ interuallum autem perpendiculi primi & baseos secundi est $\frac{1}{5}$. Sunt ergo latera quæsitorum quadratorum $\frac{18}{5}$ & $\frac{1}{5}$. vel summa perpendiculi primi & baseos secundi est $\frac{17}{5}$ interuallum autem baseos primi & perpendiculi secundi est $\frac{6}{5}$. Rursus ergo quæsitorum latera esse possunt $\frac{17}{5}$ & $\frac{6}{5}$. Huius rei demonstratio in promptu est. Sunto data latera A. B. & inuenienda sint alia latera, quorum quadrati æquentur quadratis ipsorum A B. fiat A hypotenusa trianguli rectanguli per præcedentem, sintque latera circa rectum C D. fiat item B hypotenusa similis trianguli, cuius latera circa rectum sint E F. Ita vt quadrati ipsorum C D sint æquales quadrato abs A & quadrati ab E & F. sint æquales quadrato abs B. & sit C ad D vt E ad F. Denique ipsorum C F summa esto G interuallum L. Item ipsorum E D summa esto K interuallum H. Dico latera quæsita esse G H. vel etiam K L. Quia enim est C ad D vt E ad F. [1] Erunt tam quadrati duorum G H. quàm quadrati duorum K L æquales quadratis omnium C D. E F. At quadrati ipsorum C D. E F æquantur quadratis duorum A B ex hypothesi, igitur quadrati ipsorum A B æquantur quadratis ipsorum G H. vel etiam ipsorum K L. Quod erat demonstrandum.

A 10. B 15. C 8. E 12. D 6. F 9. G 17. H 6. K 18. L 1.

[1] 6. 3. *porism.*

QVÆSTIO XI.

INVENIRE duos quadratos numeros in dato interuallo. Constitutum sit interuallum ipsorum esse 60. Ponatur alterius latus 1 N. alterius verò 1 N. & quot-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμὸς τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ὑπεκτάχθω δὴ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἑξ) μ ξ. τετάχθω ἑνὸς μὲν πλευρὰ ς ἑνὸς. ἑνὸς δὲ ἡ πλευρὰ ς ἑνὸς, καὶ μ

ὅσων δή ποτε, μόνον ἵνα μὴ ὁ ἀπὸ τ̃ μ̊ τε-
τράγωνος ὑπεράρῃ τ̃ ὑπεροχὴν τ̃ δοθεῖσαν,
ἔστω γὰρ ἑνὸς εἴδους ἑνὶ εἴδει ἴσου καταλειπο-
μένου συναθήσεται τὸ προβλημα. ἔστω ς̃ ἑνὸς
μ̊ γ̃. αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι ἔσονται δ̃ μία,
ϗ δ̃ς μία, ςς̊ι ϛ. μ̃ θ̃. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν
ςς̊ι ϛ̃ μ̊ θ̃ ταῦτα ἴσα μονάσιν ξ̃. ϕ γίνεται ὁ
ς̃ μ̊ ἡ̃ καὶ ἥμισυ. ἔσαι ἄρα ἡ τ̃ πρώτου
πλευρὰ μ̊ ἡ̃ καὶ ἥμισυ. ἡ δὲ τ̃ δευτέρα μ̊
ια̃ καὶ ἥμισυ. αὐτοὶ δ̃ οἱ τετράγωνοι ἔσονται
ὃς μὲν μ̊ οβ̃ α. δ̃ ὃς δ̃ ρλβ̃ α. δ̃ καὶ φανερὰ
τὰ τ̃ς πρ̃τάσεως.

libet vnitatum, dummodo harum quadratus non ſuperet interuallum datum. Sic enim vna ſpecie vni ſpeciei æquali remanente expedietur quæſtio. Eſto igitur 1 N. + 3. Ipſi igitur quadrati erunt 1 Q. & 1 Q. + 6 N. + 9. Interuallum ipſorum eſt 6 N. + 9. Hoc æquatur vnitatibus 60. & fit 1 N. 8 ½. Erit igitur prioris latus 8 ½. Poſterioris verò ½. Ipſi autem quadrati erunt, 72. ¼ & 132. ¼ & manifeſtum eſt ſatisfactum eſſe quæſtioni.

IN QVAESTIONEM XI.

VERBA illa, *Dummodo harum quadratus non ſuperet interuallum datum*, cautè accipienda ſunt. Nam in exemplo Diophanti, vbi interuallum datum 60. non eſt quadratus numerus, res bene habet, nam cùm non poſſit dari quadratus æqualis numero non quadrato qualis eſt 60. quicunque quadratus accipiatur non maior quàm 60. is neceſſariò minor erit, quod requiritur vt æquatio ritè procedat. Sed ſi datum interuallum eſſet quadratus numerus, tunc non ſufficeret ponere in latere ſecundi quadrati vnitates, quarum quadratus non ſuperaret datum interuallum, ſed ponendæ eſſent vnitates, quarum quadratus deficeret à dato interuallo. Verbi gratia ſit datum interuallum 25. Ponatur latus alterius quadrati 1 N. alterius verò 1 N. + 5. fient 10 N. + 25. æquales 25. Quare 10 N. æquabuntur nihilo. Itaque oportet fingi latus ſecundi quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 25. vt 1 N. + 1. & fient 2 N. + 1 æquales 25. eritque 1 N. 12. ſunt ergo quæſita latera 12. & 13. & ſatisfaciunt propoſito. Quamobrem melius & vniuerſalius præſcribetur conditio hoc pacto. *Dummodo harum quadratus ſit minor dato interuallo.* Cæterùm ex operatione Diophanti elicietur huiuſmodi Canon.

Sume quemuis quadratum minorem dato interuallo, eumque ſubtrahe à dato interuallo, reſiduum diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, cui ſi addas latus ſumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter etiam inſtitui poteſt operatio, nimirum. Ponatur minor quæſitorum quadratorum 1 Q. ergo maior erit 1 Q. + 60. fingatur eius latus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſit minor quàm 60. & fiet operatio eadem cum operatione Diophanti. Vel fingatur quadrati eiuſdem latus ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſit maior quàm 60. verbi gratia fingatur ab 1 N. − 10. fiet quadratus 1 Q. − 20 N. + 100. æqualis 1 Q. + 60. & fiet 1 N. 2. eruntque quæſita latera 2. & 8. Hinc rurſus formabitur iſte Canon.

Sume quemuis quadratum maiorem dato interuallo, & ab eo ſubtrahe datum interuallum, reſiduum diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, quod ſubtrahe à latere ſumpti quadrati, fiet alterum latus.

Aliter rurſus Ponatur maior Quadratus 1 Q. erit ergo minor 1 Q. − 60. cuius latus fingatur ab 1 N. − quotlibet vnitatibus, puta ab 1 N. − 10. fiet quadratus 1 Q. − 20 N. + 100. æqualis 1 Q. − 60. & fiet 1 N. 8. eruntque quæſita latera 8. & 2. Hinc etiam formatur huiuſmodi Canon.

Sume quemlibet quadratum quem adde dato interuallo, ſummam diuide per duplum lateris ſumpti quadrati, orietur vnum latus quæſitorum, à quo aufer latus ſumpti quadrati, vel contrà; fiet alterum latus.

Porrò Canon omnium elegantiſſimus, & quo ſequenti quæſtione vtitur Diophantus, & alibi ſæpe elicitur ex tertia ſecundi poriſmatum, adiuuante vigeſima tertia primi, vel Canone primæ primi Diophanti, nimirum.

Cape duos numeros quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, horum ſummæ ſemiſſis, & ſemiſſis interualli eorundem, quæſitorum quadratorum exhibebunt latera.

A 60.
B 10. C 6.
D 8. E 2.

Sit enim A datum interuallum, & ex B in C fiat A. ſummæ autem ipſorum B C ſemiſſis eſto D, ſemiſſis verò interualli eorundem B C. eſto E. Quia ergo conſtat per vigeſimam tertiam primi poriſmatum, vel per Canonem primæ primi Diophanti ſummam ipſorum D E æquari ipſi B, & interuallum eorundem D E æquari ipſi C patet A fieri ex ſumma ipſorum D E in eorundem interuallum. Quamobrem A eſt interuallum quadratorum ab ipſis D E. Quod erat propoſitum.

Hinc autem melius & vniuerſalius quàm modo à Xilandro tradito cognoſci poterit, an in in-

tegris quæstio solui possit, immò & an pluribus modis in integris solutio contingat: si enim ipsi B C tales deligi possint, vt vterque sit par vel vterque impar, patet tam eorum summæ, quàm interualli semissem in integris haberi. Quare ipsi D E integri erunt vt iam docuimus ad primam primi. Si autem ipsorum B C. alter sit par, alter impar, non poterunt ipsi D E haberi nisi diuisa vnitate. Quamobrem quot modis reperiri poterunt duo numeri mutuo ductu conficientes datum interuallum, quorum vterque sit par, vel vterque impar, tot modis per integros soluetur quæstio. Vt dato interuallo eodem 60. quia id fit tum ex 10 in 6. tum ex 30. in 2. quorum vterque par est duobus modis in integris continget solui quæstionem, eruntque quæsita latera 8 & 2 vel 16 & 14, similiter dato interuallo 15. quia id fit tum ex 15 in 1. tum ex 5 in 3. duobus modis in integris soluetur quæstio, eruntque quæsita latera 8 & 7. vel 4 & 1. Rursus dato interuallo 48. quia id fit tum ex 2. in 24. tum ex 4 in 12. tum ex 6 in 8. tribus modis soluetur quæstio per integros, & erunt quæsita latera 13. & 11. vel 8 & 4. vel denique 7 & 1. Vnde sequitur quod iam aliter demonstrauimus in Corollario vigesimæ secundæ primi porism. si datum interuallum sit pariter impar tantùm, non posse solui quæstionem in integris, nam non metietur illud numerus par per parem, alioquin esset pariter par contra hypothesim, non metietur etiam idem interuallum numerus impar per imparem, alioquin esset impar, quod est etiam contra hypothesim. Quamobrem relinquitur vt metiatur tantùm illud numerus par per imparem, ac proinde, vt ostensum est, non continget solutio in integris. Si autem datum interuallum sit impar, vel quilibet numerus pariter par supra quaternarium, soluetur quæstio semper in integris. Quia quemlibet imparem vnitas metitur per ipsummmet imparem. At quemlibet pariter parem metitur binarius per eiusdem pariter paris semissem: qui semper est par. Excluditur autem quaternarius, quia metitur eum tantum binarius per binarium non potest autem idem binarius esse summa & interuallum duorum eorundem numerorum, nisi pars ponatur æqualis toti. 8. 1. poris.

QVÆSTIO XII.

DATIS duobus numeris addere eundē numerum, & vtrumque quadratum efficere. Sint dati numeri 2 & 3. & esto addendus 1 N. erit ergo tum 1 N. + 2. tum 1 N. + 3. æqualis quadrato. Et hoc genus vocatur duplicata æqualitas, æquatur autem sic. Interuallo conspecto, quære duos numeros quorum vnius in alterum multiplicatio producat istud interuallum. Sunt autem hi 4. & $\frac{1}{4}$. Horum vel interualli semissis in se ductus æquatur minori, vel summæ semissis in se ductus æquatur maiori. Sed interualli semissis in se ductus facit $\frac{225}{64}$ hoc æquatur 1 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{97}{64}$. Summæ verò semissis in se ductus facit $\frac{289}{64}$ hoc æquatur maiori, nimirum 1 N. + 3. & fit 1. N. rursus $\frac{97}{64}$. Erit igitur addendus numerus $\frac{97}{64}$ & manifestum propositum.

Ne autem in duplicatam æqualitatem incidamus, sic agendum. Inuenire numerum qui & ad 2. & ad 3. additus, vtrumque quadratum efficiat. Quæro prius numerum aliquem qui adsumens binarium faciat quadratum, vel quis numerus adiecto ternario fiat quadratus. Porro à quocunque quadrato subtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur. Agamus de 2. is ausfe-

Δυσὶ δεδεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἔστω τῷ β καὶ τῷ γ καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος ς ἑνός. ἔσαι ἄρα ὁ μὲν ς ἑνὸς μ β. ὁ δὲ ς ἑνὸς μ γ ἴσοι τετραγώνοις. καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοισότης, ἰσοῦται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. ἰσῶν τινῶν ὑπεροχὴν ζητεῖ δύο ἀριθμούς, ἵνα τὸ ἐπ' αὐτῇ ποιεῖ τινὰ ὑποχήν. εἰσὶ δὲ μ δ καὶ μονάδος τέταρζιν. πύταν ἤτι τῆς ὑποχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ᾖ τῷ ἐλάσσονι, ἢ τῆς σωθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι. ἀλλὰ δ ὑποχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ᾖ σκε ξδ. ταῦτα ἴσα ς ἑνὶ μονάσι δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ς ἕζ ξδ. δ ἦ σωθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ᾖ σπθ ξδ. ταῦτα ἴσα τῷ μείζονι, τυτέσι ς ἑνὶ μονάσι τεισί. καὶ γίνεται ὁ ς πάλιν ἕζ ξδ. ἔσαι ἄρα ὁ προστιθέμενος ἕζ ξδ. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῶν ἰσότητα ἐμπέσῃ δεικτέον οὕτως. τῷ δύο καὶ τῷ τρία προσδρεῖν τινὰ ς ὃς ἑκατέρῳ προστεθεὶς ποιεῖ τετράγωνον ζητῶ πρότερόν τινα ἀριθμὸν ὃς προσλαβὼν μονάδας δύο ποιεῖ τετράγωνον, ἢ καὶ τὶς ἀριθμὸς προσλαβὼν μονάδας ζεῖς ποιεῖ τετράγωνον. ἀφ' οὗ δ' ἂν τετραγώνου ἀφέλω τὰς μονάδας ὅθεν ἔσαι ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ ὅπου τὰ μονάδων δύο, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ δυνά-

μεως μιᾶς, λοιπὸν ἔσαι δύναμις μία λείψει μ^{ᾳ} β. καὶ δῆλον ὡς ἐαν̀ προσλάβῃ μονάδας β ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ἐαν̀ προσλάβῃ μονάδας ξεῖς, γίνε) δύναμις μία, μοναὶ μία. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς^{ῦ} ἑνὸς λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὴν δ δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προσκτεθειμένας δ λείψεως μονάδας, οἷον ὡς ὅτι τῶ παρόντος τὰς μονάδας β. οὕτως γὸ ἐν ἑκατέρῳ αὐτῷ μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καθαιρεθήσε). ἔστω ἀπὸ ς^{ῦ} ἑνὸς λείψει μ^{ᾳ} δ. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ὁ τετράγωνος δύναμις μία, μ^{ᾳ} ιε̄ λείψει ςς̄ η̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάδι μιᾷ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ἀριθμοὶ η̄ ἴσοι μονάδι ιε̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιε̄ η̄. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ratur ab 1 Q. supereſt 1 Q. − 2 & eſt euidens hunc ſi abſumat 2. fore quadratũ. Sed ſi adſumat 3. fit 1 Q. + 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum vt reſolutis hypoſtaſibus 1 Q. ſuperetipſas ante poſitas defectus vnitates, nimirum 2. Sic enim ex vtraque parte vna ſpecies vni ſpeciei æqualis relinquetur. Eſto ergo ab 1 N. − 4 ipſe quadratus erit 1 Q. + 16 − 8 N. Hoc æquatur 1 Q. + 1. Communis addatur defectus, & auferantur à ſimilibus ſimilia, relinquuntur 8 N. æquales 15. & fit 1 N. $\frac{15}{8}$ Ad poſitiones. Erit addendus numerus $\frac{17}{64}$.

IN QVAESTIONEM XII.

DVPLICI operatione quæſtionem hanc eleganter abſoluit Diophantus, ſed neutram Scholiaſtes, Xilanderve ſatisfeliciter explicauit. Sanè quod ad primam attinet, in qua duplicata æqualitate vtitur author, benè monet vterque eam niti primæ ſecundi. Sed id ſolùm non ſufficit vt eius adæquata ratio perfectè comprehendatur, nam licet inuenerim is duos quadratos eodem interuallo diſtantes quo diſtant dati numeri ea lege vt maior maiorem datorum ſuperet, & minor minorem, non ſtatim conſtat per hanc duplicatam æqualitatem vtrobique reperiri eundem valorem Numeri, quod vnum curandum eſt vt quæſtio perfectè ſoluta ſit. Hoc ergo ſic demonſtrabimus. Sint dati Numeri A B. quorum interuallum C. Ponendo ergo quæſitum numerum 1 N. erunt quadrato æquandi 1 N. + A & 1 N. + B. ſumantur duo quadrati D E eodem interuallo C diſtantes, ita vt D ſit maior quàm A, & E ſit maior quàm B. Dico ſiue D æquetur 1 N. + A. ſiue E æquatur 1 N + B. eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quia enim ex conſtructione eſt in arithmetica medietate A ad B vt D. ad E. erit & permutando in eadem medietate A ad D, ſicut B ad E. Igitur ſi ſumatur F exceſſus D ſuper A, erit idem F exceſſus E ſuper B. Cùm ergo æquando D cum 1 N + A. detrahentur ſimilia à ſimilibus, nimirum cùm A vtrimque auferetur, remanebit F æqualis 1 N. ſed etiam æquando E cum 1 N + B auferetur vtrimque. B & remanebit idem F æqualis 1 N. Quare conſtat propoſitum.

A		B
1 N. + 30.		1 N. + 6.
	C 24.	
D 49.	F 19.	E 25.

7. 1. *poriſm.*

Hoc demonſtrato, patet totum duplicatæ æqualitatis negotium in eo verſari, vt inueniantur duo quadrati eodem interuallo diſtantes quo diſtant dati numeri, quod ſanè fit per Canonem poſtremum ad præcedentem allatum, qui vt oſtenſum eſt, totus pendet à tertia ſecundi poriſmatum, quæ eadem eſt cum quinta ſecundi elementorum. Verùm quilibet quadrati quorum ſit idem interuallum qui & datorum numerorum, non ſtatim apti ſunt duplicatæ æqualitati reſoluendæ, ſed tales deligendi ſunt, vt maior ſuperet maiorem datorum numerorum, & minor minorem.

Hoc quidem vidit Scholiaſtes, ſed in eo allucinatus eſt, vt benè monet Xilander, quod arte certa tales quadratos reperiri poſſe negauit. Ipſe quoque Xilander in affinem eius quem reprehendit errorem lapſus meliora non affert, ſed indicata tantum neceſſitate tales quadratos reperiendi, quo pacto id fieri oporteat, minimè docet. Res tamen facilis eſt, nam tales numeri ſumendi ſunt quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, vt ſummæ illorum ſemiſſis quadratus excedat maiorem datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti, vbi interuallum eſt 1. maior numerorum 3. oportet inuenire duos numeros quorum mutuo ductu fiat 1. & quorum ſummæ ſemiſſis quadratus ſit maior quàm 3. Quare cùm ſummæ ipſius quadratus ſit quadruplus quadrati ſemiſſis, oportet ſummæ quadratum excedere 12. Proinde cùm latus proximè maius ipſius 12. ſit 3. $\frac{1}{2}$. neceſſe eſt ſummam quæſitorum numerorum quorum mutuo ductu fiat 1. excedere 3 $\frac{1}{2}$. vel ſanè non eſſe minorem. Hinc eſt cur abiectis 2. & $\frac{1}{2}$. Itemque 3. & $\frac{1}{3}$. ſe legerit Diophantus 4. & $\frac{1}{4}$. potueritque eorum loco ſumere 5. & $\frac{1}{5}$. vel 6. & $\frac{1}{6}$ alioſque infinitos, quorum ſumma maior eſt quàm 3 $\frac{1}{2}$. Ita ſi dati numeri ſint 30. & 6. cùm eorum interuallum ſit 24. maior vero ipſorum 30. cuius quadruplum 120. quærendi erunt duo numeri quorum mutuo ductu fiat 24. ita vt eorum ſummæ quadratus excedat 120.

Quare cùm radix proximè maior ipſius 120. ſit 11. oportebit quæſitorum numerorum ſummam eſſe maiorem quàm 11. vel certè non minorem. Quarè ritè ſumi poterunt 2. & 12. vel 3. & 8. aliique infiniti quorum ſumma maior, vel non minor quàm 11. ſed eandem ob cauſam reiicientur 4. & 6. aliique infiniti quorum ſumma minor quàm 11.

Quod attinet ad ſecundam operationem verba, illa ὥστε τὸν δ δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προεκτεθειμένας τῆς λείψεως μονάδας, alio mendo non laborant, quicquid dicat Xilander, niſi quod vox τετάρτης temerè inculcata erat, nam legebatur in codice manuſcripto, αὐτὰς τὰς προεκτεθειμένας τῆς τετάρτης λείψεως μονάδας. Cæterùm hac voce ſublata, reliqua bene habent, nec vllam pariunt difficultatem, niſi ex praua Xilandri interpretatione, qui ea ſic conuertit. *vt ſubſtantia quadrati earum ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates.* Cùm tamen vox Hypoſtaſis hoc loco & alibi ſemper apud Diophantum ſignificet, non ipſas vnitates quæ ponuntur in latere fictitio, ſed ipſum valorem numeri vel quadrati poſitionibus applicatum, vt iam docuimus ad primam primi. Hinc etiam erroris cauſam præbuit Xilander Chriſtophoro Clauio cap. 29. ænigmate 98. ſed & Raphaël Bombellius in eodem lapſus eſt lib. 3. ſuæ Algebræ Problemate 66. Quare relictis illorum inutilibus commentis, genuinus horum verborum ſenſus hic eſt. *vt quadrati hypoſtaſis ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates*, vel vt clarioris doctrinæ gratia interpretati ſumus, *vt reſolutis hypoſtaſibus* 1 Q. *ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates.* Cùm enim quæſitus numerus poſitus ſit 1 Q − 2. manifeſtum eſt valorem quadrati talem reperiri debere vt ſuperet 2. Id autem arte certa qui conſequi poſſis non docuit hîc Diophantus. Sed profectò in ſequentibus ſæpe tali vtitur artificio quoties ſimile quid accidit. Quia numerus æquandus quadrato eſt 1Q + 1. patet ſi eius latus fingatur 1 N − aliquot vnitatibus valorem Numeri oriri diuidendo quadratum ipſarum vnitate multatum per duplum earundem vnitatum. Quia vero 1 Q. vt dictum eſt debet eſſe maior quàm 2. ſumpto latere proximè maiore ipſius 2. nimirum 1 $\frac{1}{2}$. oportet valorem numeri maiorem eſſe, vel certe non minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Igitur eò redacti ſumus vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate multatus & diuiſus per duplum ipſius numeri, det quotientem maiorem vel certè non minorem quàm 1 $\frac{1}{2}$. Eſto huiuſmodi numerus 1 N. ergo 1 − $\frac{1}{2}$ Q − $\frac{8}{N}$ maior eſt vel certè non minor quàm 1 $\frac{1}{2}$. & omnia multiplicando per 2 N. fit 1 Q − 1. non minor quàm 3 N, ac proinde 1 Q. non minor quàm 3 N. + 1. qua æquatione reſoluta, fit 1 N. non minor quàm R 3 $\frac{1}{4}$ + 1 $\frac{1}{2}$. ſumptoque latere ipſius 3 $\frac{1}{4}$. nimirum 1 $\frac{1}{2}$ ſi ei addas 1 $\frac{1}{2}$. fit 1. N. non minor quàm 3 $\frac{3}{8}$. Quamobrem æquantes quadrato 1 Q. + 1. fingemus eius latus 1 N. − quotlibet vnitatibus quæ ſuperent 3 $\frac{3}{8}$. ſic Diophantus finxit hoc latus 1 N. − 4. Poſſetque etiam fingi 1 N. − 5. vel 1 N − 6. & ſic in infinitum. Itaque vt iſta tyronum memoriæ firmius inhæreant, placet paulò aliter poſitiones inſtituere, quod fieri poſſe indicauit Diophantus his verbis. *Porro à quocunque quadrato ſubtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur.* Ponatur quæſitus numerus 1 Q. − 3. is enim adſumpto 3. quadratum facit: At idem abſumpto 2. facit 1 Q − 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt hypoſtaſis quadrati ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates, nimirum 3. vt ergo determinemus de hoc vnitatum de numero, quia fiet valor Numeri diuidendo quadratum quæſitarum vnitatum auctum vnitate per duplum earundem vnitatum; At oportet 1 Q. maiorem eſſe quàm 3. atque adeo 1 N. maiorem eſſe vel certè non minorem latere proximè maiore ipſius 3. quod eſt 2. Patet eò nos adduci vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate auctus, & diuiſus per duplum ipſius numeri det quotientem non minorem quàm 2. Eſto huiuſmodi numerus 1 N. ergo 1 − $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{1}{N}$ maior eſt, vel certè non minor quàm 2. & omnia in 2 N. Igitur 1 Q. + 1. maior eſt vel certè non minor quàm 4 N. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. vel 2 + R 3. vel 2 − R 3. & loco R 3 ſumendo latus proximè minus ipſius 3. nempe 1 $\frac{2}{3}$. fit 1 N. vel maior quàm 3. $\frac{2}{3}$. vel minor quàm $\frac{1}{3}$. Hic enim ob valorem Numeri duplicem, duplex inuenitur terminus alter ſupra quem, alter verò infrà quem, ſumi poteſt valor Numeri. Poſſumus ergo quadrato æquantes 1 Q. − 1. eius latus fingere ab 1. N. − quotlibet vnitatibus quæ ſint maiores quàm 3 $\frac{2}{3}$. vel minores quàm $\frac{1}{3}$. fingatur 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q. − 1. & tandem 1 N. eſt $\frac{17}{8}$ vnde fit quæſitus numerus $\frac{97}{64}$. idem qui repertus eſt per operationem Diophanti. Fingatur rurſus latus Quadrati 1 N. − $\frac{2}{5}$ fiet quadratus 1 Q. − $\frac{3}{5}$ N. + $\frac{1}{25}$ æqualis 1 Q. − 1. vnde fit 1 N. $\frac{13}{5}$ & eſt quæſitus numerus $\frac{24}{25}$. cui addendo 3. & 2. fiunt quadrati $\frac{169}{5}$ & $\frac{244}{25}$.

Si cui porrò laborioſior videbitur hæc operatio, licebit etiam aliam inſtituere magis expeditam, & quæ tantas difficultates minimè patiatur. Fingatur in eodem exemplo, quadratus aliquis ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet maiorem datorum numerorum 3. puta ab 1. N. + 2. fiet quadratus 1. Q. + 4 N. + 4. Hinc ergo auferendo 3. ſtatuatur reſiduum quæſitus numerus, nempe 1 Q. + 4 N. + 1. is enim adſumens 3. facit quadratum. Reſtat vt & adſumpto 2. quadratum faciat. Facit autem 1 Q. + 4 N. + 3. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 3. vnitates numeri quadrato æquandi, eſto latus illud 1 N. − 3. fiet quadratus 1 Q. − 6 N. + 9. æqualis 1 Q. + 4 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{1}{5}$ eſtque quæſitus numerus

$\frac{24}{25}$ vt ſuprà. Ex his omnibus operationibus varij Canones elici poſſunt , ſed omnium facillimus à prima fit, nimirum.

Cape duos quadratos eodem interuallo diſtantes quo & dati numeri diſtant , ſed illis maiores, & à maiore quadrato aufer maiorem numerum , vel à minore minorem , reſiduum quod erit idem vtrobique , quæſitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIII.

Ἀπὸ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐπετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ θ. καὶ τοῦ κα. ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. οἷον δ' ἂν τετράγωνον ἀφέλω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν, τάσσω τὸν λοιπὸν λείψει τούτου, οἷον γὰρ ἀφαιρούμενος καταλείπει τετράγωνον. ἔστω οὖν ὁ ἀπὸ τοῦ μ̄ ᾱ ἀφαιρούμενος τετράγωνος δύναμις μία , λοιπαὶ ἄρα μονάδες θ̄ λείψει δυνάμεως ᾱ. δέησει ἄρα ἡ ἀπὸ μ̄ καὶ ἀφελεῖν μ̄ θ̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἢ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ μ̄ κᾱ ἀφῶ μ̄ θ̄ λείψει δυνάμεως ᾱ λοιπὴν δύναμις ᾱ μ̄ ιβ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσω τὴν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ ἑνὸς λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον πλείονας ποιεῖν τοῦ μ̄ ιβ̄. οὕτω γὰρ πάλιν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν εὐ εἶδος ἐνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω δὴ μ̄ δ̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς, μ̄ ις̄ λείψει ςς̄ η̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάσι ιβ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· λοιποὶ ςς̄ αι η̄ ἴσοι μονάσι δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ̄ η̄. αἱ μὲν θ̄ μονάδες σωζουσιν οβ̄ η̄. τουτέστι φος̄ ξδ̄. ἡ δὲ λεῖψις δυνάμεως μιᾶς ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτῆς ις̄ ξδ̄. ☾ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

ADatis duobus numeris auferre eundem numerum, & facere reſiduum vtrumque quadratum. Iniunctum ſit vt à 9. & à 21. auferatur idem numerus, & vtrumque reſiduum ſit quadratus numerus. Qualemcunque verò quadratum aufero de altero ipſorum ; ſtatuam reliquum cum hujus defectu, is enim detractus relinquet quadratum. Eſto igitur quadratus à 9. detractus 1 Q. relinquentur ergo 9 — 1 Q. Oportet igitur etiam à 21. auferre 9 — 1 Q. & facere quadratum. Sed ſi à 21. abſtulero 9. — 1. Q. relinquitur 1 Q. + 12. Hoc ergo æquatur quadrato, Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt quadratum earum amplius ſit quàm 12. Sic enim rurſus ab vtraque parte vna ſpecies vni ſpeciei æqualis relinquetur. Eſto itaque vnitatum 4. ipſe igitur quadratus erit 1 Q. + 16. — 8. N. qui æquabitur 1 Q. + 12. Auferantur à ſimilibus ſimilia : relinquuntur 8 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{4}{8}$ Atqui 9. faciunt $\frac{72}{8}$ ſeu $\frac{570}{64}$, vnde defectus 1 Q. auferatur, ſcilicet $\frac{256}{64}$. & ſatisfit propoſito.

IN QVÆSTIONEM XIII.

IMITATIO quam præſcribit Diophantus circa latus fictitium, omnino inſufficiens eſt. Quod ſi libet experiri finge illud 1 N. — 8. quandoquidem quadratus ipſius 8. excedit 12. fiet quadratus 1 Q. — 16 N. + 64. æqualis 1 Q. + 12. & fiet 1 N. 3 $\frac{1}{4}$. Quare quæſitus numerus qui poſitus erat 9. — 1 Q. haberi non poterit , quia 1 Q. eſt maior quàm 9. Itaque cùm duo præſcribendi eſſent termini intra quos cadere debet numerus vnitatum ponendus in latere fictitio, vnum duntaxat præfiniuit Diophantus , nimirum 12. ſeu potius latus ipſius 12. Quod cùm ſit paulò minus quàm 3 $\frac{1}{2}$. rectè dicemus cum Diophanto numerum illum vnitatum debere ſuperare 3 $\frac{1}{2}$. vel certè non eſſe minorem. Sed hoc non ſufficit, nam præterea neceſſe eſt, talem fieri valorem Numeri vt reſoluendo hypoſtaſes 1 Q. ſit minor quam 9. quia ſcilicet quæſitus numerus poſitus eſt 9 — 1 Q. Quare oportet 1 N. minorem eſſe quàm 3. Quia ergo æquando quadrato 1 Q. + 12. & fingendo latus 1 N. — aliquot vnitatibus, fit valor Numeri ex quadrato vnitatum illarum multato numero 12. & diuiſo per duplum ſui lateris, eo redigimur vt inueniamus talem vnitatum numerum , cuius quadratus multatus numero 12. & diuiſus per duplum ſui lateris, det quotientem minorem quàm 3. Eſto talis numerus 1 N. Ergo $\frac{1Q-12}{2N}$ minor eſt quàm 3. & omnia in 2 N. fit 1 Q. — 12. minor quàm 6 N. & tandem fit 1 Q. minor quàm 6. N. + 12. qua reſoluta occaſione 1 Q. minor quàm ℞ 21. + 3. ſeu minor quàm 7 $\frac{5}{9}$ ferè quamobrem neceſſe eſt omnino numerum vnitatum ponendarum in latere fictitio cadere inter 3 $\frac{1}{2}$ & 7 $\frac{5}{9}$ quales ſunt 4. 5. 6. 7. & alij infiniti admittendo fractiones.

Cæterum,

Cæterum, vt benè monet Xilander, hæc quæstio non secus ac præcedens per duplicatam æqualitatem ritè solui potest. Verbi gratia si dati sint numeri 9. & 21. Ponatur quæsitus ab vtroque auferendus 1 N. ergo tam 9. — 1 N. quam 21 — 1 N. æquatur quadrato. Horum interuallum est 12. Quare tales seligendi sunt numeri, quorum mutuo ductu fiat 12. vt semissis summæ illorum quadratus sit minor quàm 21. vel quod idem est, vt semissis interualli quadratus sit minor quàm 9. ob contrariam scilicet rationem eius, ob quam in præcedente requirebatur contrarium. Memores igitur eorum quæ docuimus in præcedente, quia quadruplum ipsius 21. est 84. dicemus numerorum quorum mutuo ductu fiet 12. summæ quadratum minorem esse debere quàm 84. Quare cùm proximum latus de 84. sit 9. $\frac{1}{2}$. oportebit summam talium numerorum minorem esse quàm 9 $\frac{1}{2}$. qualis est summa ipsorum 2. & 6. vel ipsorum 3. & 4. & aliorum infinitorum. Quod si sumamus 2. & 6. erit quadratus semissis summæ illorum 16. at quadratus semissis interualli fiet 4. Siue igitur 4 æquetur 9. — 1 N. siue 16. æquetur 21. — 1 N. fiet vtrobique idem valor numeri 5. Quare 5. est quæsitus numerus, qui ab vtroque datorum detractus relinquit quadratos 4. & 16. Hinc etiam cum Xilandro eliciemus Canonem.

Sume duos quadratos eodem distantes interuallo, quo dati numeri distant, sed minores illis. Tum à maiore numero aufer maiorem quadratum, vel à minore minorem. Residuum quod erit idem vtrobique, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIV.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, ita vt residuum vtrumque sit quadratus numerus. Constitutum sit ab eodem numero auferre 6. & 7. & vtrumque residuum facere quadratum. Ponatur quæsitus numerus 1 N. & si ab eo abstulero 6. relinquitur 1 N. — 6. æqualis quadrato. Si autem abstulero 7. relinquitur 1 N. — 7. & rursus in hoc casu duplicata æqualitas existit. Et quoniam horum interuallum, puta 1. continetur sub 2. & $\frac{1}{2}$ fiet tandem 1 N. $\frac{121}{16}$ & satisfacit proposito.

Ne verò in duplicatam æqualitatem deueniatur, sic indagabimus. Quæremus primò à quo numero 6. subtractus, relinquat quadratum. Cæterùm cuicunque quadrato adiiciamus 6. is erit qui quæritur. Esto igitur quadrato 1 Q. erit ergo qui quæritur 1 Q. + 6. & patet si ab eo auferantur 6. relinqui quadratum. Oportet igitur auferre quoque 7. ab 1 Q. + 6. & facere quadratum. Quamobrem 1. Q. — 1. æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. — 2. Ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 4. — 4 N. Hoc æquatur 1 Q. — 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Erit ergo qui quæritur $\frac{121}{16}$ & soluit quæstionem.

ΑΠΟ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμοὺς ϗ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ὑπιτετάχθω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφῃρεῖν τ̄ ε̄ ϗ τὸν ζ̄. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ ζητούμενος ς̄ ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφῃῶ μονάδας ε̄ λοιπὸς ς̄ ᾱ λείψει μ̄ ε̄ ἴσος τετραγώνῳ, ἐὰν δὲ μονάδας ζ. λοιπὸς ς̄ εἷς λείψει μ̄ ζ̄. καὶ πάλιν ὁμοίως ὅτι τούτου ὄντι ἡ διπλοϊσότης. ἐπειδὴ περ ἡ ὑπεροχὴ μονὰς οὖσα μία διέρχεται ὑπὸ μ̄ β̄. καὶ μονάδος ἥμισέος. ϗ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ρκᾱ ῑε̄. καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα.

Ινα δὲ μὴ εἰς διπλοῦν ἴσωσιν ἐξέρχηται. ζητητέον οὕτως. ζητῶ πρότερον ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἐὰν ἀφῃῶ μ̄ ε̄ ποιεῖ τετράγωνον. ᾧ δ' ἂν τετραγώνῳ δηλονότι προστῶ τὰς μ̄ ε̄. ἐπεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ δυνάμεως μιᾶς. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος δύναμις ᾱ μονάδες ε̄. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφῃῶ μ̄ ε̄ ὁ λοιπὸς ἔσται τετράγωνος. δεήσει ἄρα καὶ μονάδας ζ. ἀφελεῖν ἀπὸ τ̄ δυνάμεως μιᾶς μ̄ ε̄. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δύναμις ἄρα μία λείψει μονάδος μιᾶς ἴσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ ᾱ λείψει μ̄ β̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις μία, μονάδες δ̄ λείψει ς̄ δ̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ λείψει μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄ δ̄. ἔσαι ὁ ζητούμενος ρκᾱ. ῑε̄ καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIV.

PRIMÆ operationi, in qua vtitur duplicata æqualitate Diophantus, nullam adiicit conditionem, nec adiicienda est aliqua, vt malè arbitratur Xilander. Cùm enim quadrati qui capiun-

tur eodem distantes interuallo quo & dati numeri, addendi sint ipsis datis numeris, minor scilicet maiori, & maior minori, patet vt additio perfici possit non referre vtrum tales quadrati maiores sint datis numeris vel, minores. Quod in duabus præcedentibus circumspiciendum erat, quia in illis substractione vtendum fuit non additione; allucinatus ergo est Xilander existimans vtendum hîc eadem cautione in huiusmodi quadratis deligendis, qua fuit vtendum in duodecima. quod & exemplo ab ipsomet allato confirmare facile est. Sint dati numeri 41. & 65. quorum interuallum 24. quod fit ex 4. in 6 vel ex 3. in 8. hos tamen binos rem expedire posse negat Xilander, idque constare experientia ait. Sed sanè constat experientia falli Xilandrum. Nam ipsorum 4. & 6. summæ & interualli semisses sunt 5. & 1. quorum quadrati 25. & 1. Quare si addas 1. ad 65. vel 25. ad 41. fiet vtroque modo quæsitus numerus 66. vt patet. Rursus ipsorum 3. & 8. summæ & interualli semisses sunt $\frac{11}{2}$ & $\frac{5}{2}$ quorum quadrati $\frac{121}{4}$ & $\frac{25}{4}$ & si addas ad 65. vel $\frac{121}{4}$ ad 41. fit vtroque modo quæsitus numerus $71\frac{1}{4}$ qui satisfacit proposito.

Portò vt modus hîc vtendi duplicata æqualitate perfectè demonstratus maneat, sint dati numeri A maior & B minor, horumque interuallum C. & ponatur quæsitus numerus 1 N. Igitur æquandi quadrato erunt 1 N. − A. & 1 N. − B. Sumantur itaque duo quilibet quadrati D maior & E minor, quorum interuallum sit idem C. Quia ergo ob maiorem defectum totus 1 N. − A minor est toto 1 N. − B. æquabimus illi minorem quadratum E, maiorem verò D huic. Et in prima æquatione supplendo defectum, fiet 1 N. æqualis summæ ipsorum A E. At in secunda fiet 1 N. æqualis B D. summa autem ipsorum A E æqualis est prorsus summæ ipsorum B D, quia, cùm sint arithmeticè proportionales A ad B vt D ad E, est summa extremorum A E æqualis summæ mediorum B D. Quamobrem in vtraque æquatione fit idem valor Numeri. Quod demonstrandum erat. Hinc elicitur Canon à Xilandro traditus.

1 N. − A 30. 1 N. − B 6.
C 24.
E 25. D 49.

4. 1. *porism.*

Cape duos quadratos eodem distantes interuallo, quo & dati numeri, horum minorem adde maiori numero, & maiorem minori, vtroque modo fiet idem quæsitus numerus.

Secundæ verò operationi vt perficitur à Diophanto, limitatio quædam adiicienda erat; nam cùm numerus quadrato æquandus sit 1 Q − 1. debet eius latus fingi ab 1 N. − tot vnitatibus, vt tandem valor quadrati inueniatur excedens 1. Quare si eodem vtaris artificio, quo vsi sumus in præcedentibus, inuenies latus illud fingendum esse ab 1 N − aliquo vnitatum numero maiore quàm 1. vel minore quàm 1. alioquin si ponatur latus illud 1 N. − 1. reperietur 1 Q. − 1 nihil esse. Ita si propositi numeri sint 30. & 6. ponatur quæsitus 1 Q. + 6. vnde auferendo 30. remanet 1 Q. − 24. æquandus quadrato. Cuius latus fingendum ab 1 N. − tot vnitatibus vt tandem 1 Q. sit maior quàm 24. Quare cùm latus proximè maius ipsius 24. sit 5. oportet 1 N. non minorem esse quàm 5. fit autem 1 N. ex quadrato vnitatum quæ ponuntur in latere fictitio, adsumente numerum 24. diuisoque per duplum sui lateris. Ponatur ergo hic vnitatum numerus 1 N. Igitur $\frac{1}{2}\frac{Q}{N} + \frac{24}{N}$ maior est vel saltem non minor quàm 5. & omnia in 2 N. fit 1 Q. + 24. non minor quàm 10 N. Qua æquatione rasoluta fit 1 N. vel 6. vel 4. Quare oportet talem poni in latere fictitio vnitatum numerum, vt sit non minor quàm 6. vel non maior quàm 4. Qua ratione excluduntur tantùm omnes numeri inter 4. & 6. fingatur ergo latus 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q. − 24. Vnde fiet 1 N. 5. erit ergo quæsitus numerus 31. & satisfacit proposito. Vel fingatur idem latus 1 N. − 6 fiet rursus 1 N. 5. & quotiescunque sumentur duo numeri vnus maior quàm 6. alter minor quàm 4. ita vt maior ad ipsum 6. eandem habeat rationem quam habet 4. ad minorem, eadem per vtramque æquationem continget solutio. Ita si eiusdem numeri 1 Q. − 24. latus fingas 1 N. − 2. vel 1 N. − 12. fiet idem valor Numeri 7. Itemque siue fingas idem latus 1 N. − 3. siue 1 N. − 8. fiet idem valor Numeri $5\frac{1}{4}$. & sic de alijs. Quod adnotasse fuit operæ pretium.

Potest tamen operatione paulum immutata, tam laboriosæ conditionis necessitas euanescere. Si videlicet, ponatur quæsitus numerus 1 Q. + maiore datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti ponatur quæsitus numerus 1 Q. + 7. hinc ergo detracto 6. remanet 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 1. & manifesta est solutionis ratio. Ita si dati sint numeri 30. & 6. Pono quæsitum 1 Q. + 30. vnde auferendo 6. remanet 1 Q. + 24. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 24. Hinc etiam licebit elegantem formare Canonem.

Datorum numerorum interuallum aufer ab aliquo quadrato, residuum diuide per duplum lateris eiusdem quadrati, quotientis quadratus additus maiori datorum numerorum, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XV.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσδιορίσαι αὐτοῖς τετρά-

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum,

qui vtramque partem adſumens faciat quadratum. Sit diuidendus 20. in duos numeros. Exponantur duo numeri, vt quadrati eorum ſimul minores ſint quàm 20. puta 2. & 3. & ſi vtrique adiiciatur 1 N. erunt quadrati ab ipſis, hic quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Ille verò 1 Q. + 6 N. + 9. Si ergo ab vtroque abſtulero 1 Q. qui vtique quadratus eſt, habebo quæſitos numeros, qui adſumentes videlicet quadratum, facient quadratum. Sed ſi abſtulero 1 Q. relinquuntur, hinc quidem 4 N. + 4. Inde verò 6 N. + 9. Oportet ergo ſummam iſtorum, nimirum 10. N. + 13. æquari 20. & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. Eſt igitur hic quidem $\frac{68}{100}$ ille verò $\frac{132}{10}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

γωνον ὃς προσλαβὼν ἑκάτερον τ̃ ὑπηκμένων ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω τ̀ κ̄. δεῖ εἰς δύο ἀριθμοὺς. ἔκθου δύο ἀριθμοὺς ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους ἐλάσσονας εἶ μ̊ κ̄ ἔστω δὴ ὁ δύο ☾ ὁ τρία. καὶ προσεπένθω ἑκατέρῳ ς̃ ἑνὸς, ἔσονται οἱ ἀπὸ τούτων τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ςῆ δ̄ μ̊ δ̄. ὃς δὲ δυνάμεως μιᾶς ςῆ ε̄ μ̊ θ̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ἑκατέρου ἀφέλω τ̀ δύναμιν, τουτέστι τὸν τετράγωνον ἕξομαι τοὺς ὑπιζητουμένους, οἱ προσλαμβάνοντες δηλονότι τετράγωνον ποιοῦσι τετράγωνον· ἀλλ' ἐὰν φέλω δύναμιν μίαν λοιποὶ ἔσονται. ὁ μὲν ςῆ δ̄ μ̊ δ̄. ὁ δὲ ςῆ ε̄ μ̊ θ̄. δήσει ἄρα τὸν συνθέσιν αὐτῶν, τουτέστιν ςῆς ῑ μ̊ ιγ̄. ἴσους εἶ μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ̄ ῖ. ἔσαι ὁ μὲν ξη̄ ῖ. ὁ δὲ ρλβ̄ ῖ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XV.

IN hac quæſtione nulla eſt difficultas. Cur velit Diophantus ſumi duos numeros, quorum quadrati ſimul minores ſint numero diuidendo nemo eſt qui non videat. Itaque ex operatione ipſa hunc formamus Canonem.

Sume duos numeros quorum quadrati ſimul minores ſint numero diuidendo, horum quadratorum ſummam aufer à numero diuidendo, reſiduum diuide per duplum ſummæ ſumptorum numerorum, orietur latus quæſiti quadrati, cuius duplum ſi ducas ſeorſim in ſumptos numeros, & productis addas ſeorſim quadratos ſumptorum numerorum, fient quæſitæ partes numeri diuidendi.

Vt ſi datus ſit numerus 33. ſume duos numeros 2. & 3. quorum quadrati ſimul faciunt 13. quo detracto de 33. ſuperſunt 20. quæ diuiſa per duplum ipſorum 2. & 3. nimirum per 10. dant 2. latus quadrati quæſiti, cuius duplum 4. ductum ſigillatim in ipſos 2. & 3. facit 8. & 12. quibus ſi addas ſeorſim quadratos eorundem 2. & 3. nempe ipſi 8. quadratum 4. & ipſi 12. quadratum 9. fient 12. & 21. quæſitæ partes numeri 33. quibus addendo eundem quadratum 4. fiunt quadrati 16. & 25.

QVÆSTIO XVI.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, à quo vterque detractus, relinquat quadratum. Numerus diuidendus iterum eſto 20. Ponatur is qui quæritur quadratus à latere 1 N. cum tot vnitatibus, vt harum quadratus non ſuperet 20. Eſto ab 1 N. + 2. Quadratus ergo erit 1 Q. + 4 N. + 4. & patet ſi hinc auferantur 4 N. + 4. relinqui quadratum, & ſimiliter ſi hinc auferantur 2 N. + 3. relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. + 2 N. + 1. Statuo igitur, hac de cauſa, primum quidem 4 N. + 4. Secundum verò 2 N. + 3. Quæſitum autem 1 Q. + 4 N. + 4. & hic dempto vtroque illorum, facit quadratum. Supereſt vt ambo ſimul æquentur numero diuidendo. Sed

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λειπὸν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ὑπετέθη πάλιν τ̀ κ̄ δεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ τετάχθω ὁ ζητούμενος τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ς̃ ἑνὸς ☾ μ̊ ποσούτων, ὥστε τ̀ ἀπ' αὐτῶν μὴ ὑπερβάλλειν τὸν κ̄. ἔστω δὴ ς̃ ἑνὸς μ̊ β̄. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσαι δυνάμεως μιᾶς ςῆ δ̄. καὶ δῆλον ὡς λοιπῶν ἀριθμοὺς δ̄ μονάδας δ̄ καταλείπει τετράγωνον, καὶ ὁμοίως λοιπῶν ςῶν β̄ μ̊ γ̄. καταλείπει τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς, ςῆ β̄ μ̊ ᾱ. τάσσω οὖν δὴ ταῦτα τ̀ μὲν πρῶτον ςῆ δ̄ μ̊ δ̄. τὸν δὲ δεύτερον ςῆ β̄ μ̊ γ̄. τὸν ὃν ζητούμενον δύναμιν μίαν, ςῶν δ̄ μ̊ δ̄. καὶ λείψει ἑκατέρου ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὴν δεῖ τὰς δύο ἴσους εἶ τῷ διαιρουμένῳ. ἀλλ' οἱ δύο ποιοῦσι ςῶν ε̄ μ̊ ζ̄.

ταῦτα ἴσα μονάσιν κ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ̄ ς. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος οσ̄ ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μδ̄ ς̄. ὁ δὲ τετράγωνος χκε̄ λς̄. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

ambo simul faciunt 6 N. + 7. Hoc ergo æquatur 20. Auferantur à similibus similia, & fit 1 N. $\frac{13}{6}$. erit ergo primus $\frac{76}{6}$ secundus $\frac{44}{6}$. Quadratus autem $\frac{625}{36}$. & faciunt postulata.

IN QVAESTIONEM XVI.

FRVSTRA laborat Scholiastes, vt implicatum Theorema nobis obtrudat quasi necessarium ad intelligendam operationem Diophanti, cùm illo carere possimus absque vllo artis dispendio. Etenim cùm ponat Diophantus quadratum quæsitum 1 Q. + 4 N. + 4. quem finxit à latere 1 N. + 2 Primò euidens est cur alteram partem numeri diuidendi ponat 4 N. + 4. quia scilicet, his ablatis à quadrato exposito, relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. Deinde vt aliam partem numeri diuidendi reperiat, fingit alium quadratum ab 1 N. + certo vnitatum numero minore quàm 2. qui positus est in latere quæsiti quadrati, puta ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo detracto à quæsito quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. remanet alia pars numeri diuidendi, nimirum 2 N. + 3. vnde etiam colligitur aliter atque aliter sumi posse partes numeri diuidendi, eodem etiam quadrato exposito manente, prout ab eo detrahentur alij atque alij minores quadrati.

Quod autem attinet ad limitationem quam præscribit Diophantus circa latus quæsiti quadrati, illud scilicet fingendum esse ab 1 N. + tot vnitatibus quarum quadratus non superet numerum diuidendum, hanc ego nec sufficientem puto, nec omnino necessariam. Sufficiens quidem non est, quia etsi obseruetur deueniri poterit ad absurdum. Nam ponatur latus quæsiti quadrati 1 N. + 4. erit ipse quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. cuius vnitates minores sunt numero diuidendo 20. vnde constat obseruatam esse limitationem præscriptam. Si tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 8 N. + 16. altera verò 2. N. + 7. quæ habetur si ab exposito quadrato auferatur quadratus à latere 1 N. + 3. nimirum 1 Q. + 6 N. + 9. erit summa duarum partium 10 N. + 23. æqualis 20. Quod est impossibile. Non est etiam necessaria huiusmodi conditio, quia quamuis non seruetur, ritè tamen perfici poterit æquatio. Etenim fingatur quadratus quæsitus à latere 1 N. + 5. erit is 1 Q. + 10. N. + 25. cuius vnitates excedunt numerum diuidendum 20. contrà id quod præcipit Diophantus. Tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 2 N. + 9. quæ habetur si ab exposito quadrato auferatur quadratus à lateri 1 N. + 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 16. Rursus ponatur pars altera 1 N. + $4\frac{3}{4}$. quæ habetur si à quadrato exposito auferatur quadratus à latere 1 N. + $4\frac{1}{4}$. nimirum 1 Q. + 20. $\frac{1}{4}$. Erit partium summa 3 N. + $13\frac{3}{4}$. æqualis 20. Vnde fiet 1 N. $\frac{25}{12}$. Ad hypostasès erunt quæsitæ partes $\frac{82}{12}$ & $\frac{158}{12}$. Quadratus quæsitus $\frac{7225}{144}$. à latere $\frac{85}{12}$. A quo quadrato si auferas sigillatim partes inuentas, remanent quadrati $\frac{6241}{144}$. & $\frac{5329}{144}$. quorum latera $\frac{79}{12}$. & $\frac{73}{12}$. Aliter igitur præscribenda est conditio huic operationi, nimirum. Ponatur quadratus quæsitus à latere 1 N. + quotlibet vnitatibus. Tum fingantur alij duo minores quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, vt harum quadratis sigillatim detractis à quadrato vnitatum primi quadrati, duo residua simul minora sint numero diuidendo. Hoc autem facillimum factu est, quia dato quolibet quadrato, licet inuenire infinitos minores quadratos, distantes à dato quadrato, interuallo minore quàm quilibet præscriptus numerus. Verbi gratia dato quadrato 25. si velim minores quadratos quibus sigillatim à 25. detractis, supersit minùs quàm 10. quia detrahendo 10. à 25. supereſt 15. oportet quæsitos quadratos minores quidem esse, quàm 25. sed maiores quàm 15. Quare cùm latus 25. sit 5. At latus proximè maius ipsius 15. sit 4. Patet quadratos omnes à lateribus inter 4. & 5. quales sunt à lateribus 4. $4\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{4}$ 4 $\frac{1}{2}$ &c. satisfacere proposito. Hinc est cur posito quadrato quæsito 1 Q. + 10. N. + 25. quærendi erant duo quadrati, quibus sigillatim detractis à 25. residua simul minora essent quàm 20. Quia verò quolibet residuo existente minore quàm 10. sequebatur vtrumque simul minorem esse quàm 20. finxi latera quæsitorum quadratorum 1 N. + 4 & 1 N. + $4\frac{1}{2}$. quia singuli quadrati ipsorum 4. & $4\frac{1}{2}$ minores sunt quàm 10. vt ostensum est. Simili artificio rectificari poterit operatio illa qua deductione ad absurdum ostendimus insufficientiam Diophantææ limitationis. Etenim ponendo eundem quadratum quæsitum 1 Q. + 8 N. + 16. esto pars vna vt prius 8 N. + 16. Cùm ergo ex conditione præscripta constet vnitates vtriusque partis simul minores esse debere numero diuidendo 20. si in vna parte sint 16. vnitates, patet in alia debere esse minùs quàm 4. Oportet igitur fingere quadratum ab 1 N. + tot vnitatibus, vt earum quadratus detractus de 16. relinquat minus quàm 4. Oportet ergo quadratum illarum vnitatum maiorem esse quàm 12. minorem quàm 16. Quare cùm latus ipsius 16. sit 4. & latus proximè maius ipsius 12. sit 3. $\frac{1}{2}$ sumendus erit quilibet vnitatum numerus à 3 $\frac{1}{2}$ inclusiuè vsque ad 4. exclusiuè, quales sunt 3 $\frac{1}{2}$. 3 $\frac{2}{3}$. 3 $\frac{3}{4}$. & alij infiniti. Ita si fingas quadratum ab 1 N. + 3 $\frac{1}{2}$. erit quadratus 1 Q. + 7 N. + 12 $\frac{1}{4}$. quo detracto à quæsito quadrato 1 Q. + 8 N. + 16. supereſt secunda pars numeri diuidendi, nimirum 1 N. + 3 $\frac{3}{4}$. Quare summa partium fit 9 N + $19\frac{3}{4}$ æqualis 20. Qua æquatione resoluta, optimè satisfit proposito.

Ex dictis apparet quàm infinitis variis modis positiones institui possint, & solutiones diuersæ reperiri, nam primò quæsitus quadratus variè fingi potest. Deinde eodem manente quadrato quæsito, partes numeri diuidendi diuersimodè fingi possunt. Sed & Diophantus rursus lib. 3. quæst. 23. hanc ipsam retractans quæstionem alia operatione negotium absoluit, quam ibi explicabimus.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt vterque cum quadrato qui proponetur faciat quadratum. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum, vtrumque autem adscito 9. facere quadratum. Hîc a quocunque quadrato cuius latus sit multitudo quælibet numerorum + vnitatum 3. detraxero 9. residuum erit alter quæsitorum. Esto igitur minor 1 Q. + 6 N. erit ergo maior 3 Q. + 18 N. Oportet itaque & hunc adsumpto 9. facere quadratum. Sed facit 3 Q. + 18. N. + 9. Hoc ergo quadrato æquale, est. Fingo quadratum a 2 N. − 3. & fit 1 N. 30. Erit igitur minor 1080. maior verò 3240. & vterque adiecto 9. facit quod postulatur.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ ὑποταχθέντος τετράγωνα ποιῇ τετράγωνον. ὑποτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τῶν ἐλάσσονος εἶναι τριπλασίονα, ἑκάτερον δ' αὐτῶν μετὰ μονάδος ποιεῖν τετράγωνον. ἀφ' οὗ δ' ἂν τετράγωνος ὑπὸ πλήθους τῶν μετὰ γ ἀφέλω μονάδα θ ἔσται ἔσαι εἰς τὴν ζητουμένων. ἔστω οὖν ὁ ἐλάσσων δυνάμεως α ςῶν ε. ὁ ἄρα μείζων ἔσαι δυνάμεων γ ςῶν ιη. δεῖ δὴ ἄρα καὶ τοῦτον προσλαβόντα μονάδα ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ γίνονται δυνάμεις γ ςῶν ιη· μονάδες θ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὴν τετράγωνον ὑπὸ ςῶν δύο λείψει μονάδος τοιῶν, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ λ. ἔσαι ὁ μὲν ἐλάσσων μδ ωπ. ὁ δὲ μείζων γσμ. ἢ ποιῆσαι μετὰ μονάδων θ τὰ τοῦ προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVII.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ei qui superiorum omnium quæstionum artificium perfectè comprehenderit, nihil hîc obscurum videbitur. Vnum moneo numeri 3 Q. + 18 N. + 9. latus non solùm fingi posse à quolibet Numerorum numero cuius quadratus superet 3 Q. cùm defectu vnitatum 3. lateris scilicet ipsius 9. vt faciat Diophantus qui ponit hoc latus 2 N. − 3. sed etiam fingi posse à numero Numerorum cuius quadratus superet 3. & cuius sextuplum sit minus quàm 18. adiectis tot vnitatibus quot sunt in latere quadrati dati 9. nimirum 3. Idcirco fingi potest hoc latus 2 N. + 3. vel 2 ½ N. + 3. & sic ad + 3. adiungi potest quilibet numerus Numerorum qui cadat inter 2. & 3. Hac ratione fingendo huiusmodi latus 2 N. + 3. fit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. æqualis 3 Q. + 18 N. + 9. & fit 1 N. 6. suntque numeri quæsiti 72. & 216. qui satisfaciunt postulatis.

Sed & sine magna perplexitate, quicquid dicat Xilander, per duplicatam æqualitatem solui quæstio potest. Nam ponatur minor numerus 1 N. est ergo maior 3 N. Quare vtrique adiiciendo 9. sunt quadrato æquandi 1 N. + 9. & 3 N + 9. Horum interuallum est 2 N. Sumendi ergo sunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita tamen vt tam in semisse summæ quàm in semisse interualli eorum reperiatur 3. latus quadrati adiecti 9. vt scilicet in æquationis vtraque parte reperiantur 9. vnitates, quibus vtrumque ablatis, maneat æquatio inter numeros & quadratos. Oportet ergo inuenire duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 2. N. ita vt in eorum summa, & in eorum interuallo reperiantur vnitates 6. Quare sunt huiusmodi numeri 6. & ⅓ quorum interualli semissis 3 − 2/6 N. cuius quadratus 9 − 1 N. + 1/36 Q. æquatur 1 N. + 9. & fit 1 N. 72. suntque quæsiti numeri vt supra 72. & 216. Sed sanè hac ratione operandò vnica tantum reperiri potest solutio, cùm alii numeri præter 6. & ⅓ N. sumi non possint, quorum mutuo ductu fiant 2 N. ob causam allatam. Quare maluit Diophantus aliam inire viam, qua infinitæ solutiones contingunt. Cæterùm ex hac vltima operatione formari potest Canon satis expeditus.

Denominatorem rationis vnitate multatum diuide per quadruplum lateris propositi quadrati, per quotientis quadratum diuide rursus semissem denominatoris vnitate aucti, orietur minor quæsitorum numerorum.

Quoniam verò hîc desiderari videntur aliquot quæstiones non inelegantes, & ad hanc tractationem pertinentes, placet illas subnectere.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator sit quadratus numerus: vt vterque cum numero qui proponetur faciat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque adscito 10. faciat quadratum. Fingatur quadratus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus superet 10. puta ab 1 N. + 4. fiet quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. vnde auferendo 10. residuum 1 Q. + 8 N. + 6. statuatur pro minore quæsitorum numerorum, is enim adscito 10. quadratum facit. Itaque maior erit 4 Q. + 32. N. + 24. qui adscito 10. fiet 4 Q. 32. N. + 34. æquandus quadrato, quod facilè fiet, quia quadratorum numerus est quadratus, fingatur enim latus eius 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 34. puta 2 N. − 6. & fiet 1 N. $\frac{1}{28}$. Ad hypostases Minor numerus est $\frac{4929}{784}$. maior $\frac{17916}{784}$ & vtrique addendo 10 fiunt quadrati $\frac{12769}{784}$ & $\frac{27556}{784}$ quorum latera $\frac{113}{28}$ & $\frac{166}{28}$. Posset etiam hæc quæstio per duplicatam æqualitatem solui, sed vtendum esset eo modo duplicatæ æqualitatis quem tradit Diophantus quæstione decima octaua tertij, cuius hic explicandi locus non est. Quare ipsam operationem hic non afferam, sed Canonem pulcherrimum qui ab ea elicitur non dissimulabo.

Ducito denominatorem rationis vnitate multatum in datum numerum, Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, ab horum minore si auferas datum numerum, relinquetur maior quæsitorum.

Vt in nostra hypothesi ducito 3. in datum numerum 10. fit 30. Cape duos quadratos quorum interuallum sit 30. per Canonem vndecimæ huius; ita tamen vt minor illorum excedat 10. Infinitos tales reperies, quales sunt $\frac{169}{4}$. & $\frac{49}{4}$. Igitur si à minore auferas 10. relinquitur $\frac{9}{4}$. maior quæsitorum numerorum, quare patet minorem esse $\frac{9}{16}$ & vtrique si addas 10. fiunt quadrati $\frac{49}{4}$. & $\frac{169}{16}$.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator sit quadratus numerus, vt vterque multatus dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detracto 5. relinquat quadratum. Ponatur minor 1 Q. + 5. nam detracto 5. relinquet quadratum, erit ergo maior 4 Q. + 20. vnde auferendo 5. relinquitur 4 Q. + 15. æquandus quadrato, fingatur eius latus 2. N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 15. vel etiam 2 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 15. Fingatur ergo 2. N. + 3. erit quadratus 4 Q. + 12. N. + 9. æqualis 4 Q. + 15. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. sunt ergo quæsiti numeri $5\frac{1}{4}$. & 21. qui satisfaciunt proposito. Potest etiam sicut & præcedens per duplicatam æqualitatem solui quæstio. Sed ob causam allatam omissa ipsa operatione, canonem inde depromptum afferre sufficiet, nimirum.

Denominatorem rationis vnitate multatum ducito in datum numerum; Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, maiori adde datum numerum, fiet maior quæsitorum;

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros in data ratione cuius denominator sit quadratus numerus, vt vterque detractus à dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detractus à 20. relinquat quadratum. Ponatur minor 20 − 1 Q. hic enim detractus à 20. relinquit quadratum. Ergo maior erit 80 − 4 Q. quem si à 20. detrahas, relinquitur 4 Q. − 60. æquandus quadrato, fingatur eius latus à 2 N. − tot vnitatibut, vt hypostasis quadrati reperiatur minor quàm 20. quia scilicet alter quæsitorum numerorum positus est 20 − 1 Q. Cum igitur in huiusmodi æquatione valor Numeri fiat ex quodam quadrato adsciscente 60. & diuiso per quadruplum sui lateris, valor autem numeri debeat esse minor quàm latus ipsius 20. putà quàm $4\frac{1}{2}$. eò redacti sumus vt inueniamus quadratum, qui auctus numero 60. & diuisus per quadruplum sui lateris det quotientem minorem quàm $4\frac{1}{2}$. Esto is 1 Q. ergo $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{60}{N}$ minor est quàm $4\frac{1}{2}$. & omnia in 4 N. fit 1 Q. + 60. minor quàm 18 N. qua resoluta æquatione fit 1 N. 9 + R. 21. vel 9 − R. 21. seu per radicis approximationem $13\frac{5}{9}$. vel $4\frac{4}{9}$. Hinc ergo patet latus quadrati qui quæritur cadere necessariò inter $4\frac{4}{9}$. & $13\frac{5}{9}$. Ponatur igitur 10. & fingatur quadratus à latere 2 N. − 10. erit is 4 Q. − 40. N. + 100. æqualis 4 Q. − 60. & fit 1 N. 4. suntque quæsiti numeri 4 & 16.

Non secus etiam ac præcedentes soluetur hæc quæstio per duplicatam æqualitatem, & Canon huiusmodi ex illa operatione formabitur.

Datum numerum ducito in denominatorem rationis vnitate multatum. Tunc cape duos quadratos hoc producto differentes, & minorem aufer à dato numero. Residuum erit maior quæsitorum.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt ſi quiſque proximè ipſum ſequenti partem ſui quæ imperatur tribuat, & præterea datum numerum, dantes & accipientes æquales fiant. Imperetur vt primus det ſecundo ſui quintantem, & adhuc vnitates 6. ſecundus tertio ſui ſextantem, & præterea 7. Tertium primo ſui ſeptantem & vnitates 8. Ponatur primus 5 N. ſecundus ſimiliter 6 N. & ſecundus accipiens à primo 1 N. + 6. fit 7 N. + 6. Dans autem tertio ſui ſextantem, puta 1 N. & præterea 7. remanent 6 N. — 1. Supereſt vt & reliqui datis acceptiſque quæ imperantur fiant 6 N. — 1. ſed primus dans ſui quintantem, & præterea vnitates 6. relinquitur 4 N. — 6. Oportet ergo vt accipiendo à tertio ſeptantem, & vnitates 8. fiat 6 N. — 1. ſed ſi 4 N. — 6. accipiant 2 N. + 5. fiunt 6 N. — 1. Igitur 2 N. + 5. eſt pars ſeptima tertij, & præterea 8. Si ergo à 2 N. + 5. abſtulero 8. reſiduum 2 N. — 3. eſt pars ſeptima tertij. Ipſe igitur tertius eſt 14 N. — 21. Supereſt vt & hic accipiens à medio ſextantem, & vnitates 7. dans autem ſui ſeptantem & vnitates 8. fiat 6 N. — 1. ſed dando ſui ſeptantem & vnitates 8. reſiduum eſt 12 N. — 26. accipiendo verò ſextantem medij & vnitates 7. fit 13 N. — 19. Hoc igitur æquatur 6 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{18}{7}$. Erit ergo primus $\frac{9}{7}$ ſecundus autem $\frac{208}{7}$. Tertius denique $\frac{105}{7}$. & hi ſoluunt quæſtionem.

ΕΤΡΕΙΝ ζεῖς ἀριθμὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτῦ διδῶ μέρος τὸ ὑπ' αὐτοῦ, καὶ ἔτι δοθέντα ἀριθμὸν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ὑπετάχθω δὴ τὸν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τὸ πέμπτον, καὶ ἔτι μονάδας ε̄. τὸ δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον καὶ μονάδας ζ̄. τὸ δὲ τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον καὶ μ° η̄. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ς̄ ε̄. ὁ δὲ δεύτερος ϖ̄ϛ̄ μὲν τὸν πρῶτον λαβὼν ς̄ ε̄ ἕνα μ° ε̄. ἀριθμοὶ ζ̄. μονάδες ε̄. δοὺς δὲ τὸ τρίτῳ τὸ ἕκτον ς̄ ἕνα, ⊄ μ° ζ̄. γίνονται ἀριθμοὶ ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς. λοιπόν ὅτι καὶ τὰς λιπὰς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ς̄ ε̄ λείψει μονάδι μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος τὸ ἑαυτῦ πέμπτον καὶ ἔτι μονάδας ε̄. γίνεται ς̄ δ̄ λείψει μ° ε̄. δώσει ἄρα καὶ λαβόντα αὐτὸν ϖ̄ϛ̄ τῷ τρίτου τὸ ἕβδομον καὶ μ° η̄. γίνεσθαι ς̄ ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλ' ἐὰν ς̄ δ̄ λείψει μ° ε̄ προσλάβωσιν ς̄ οὐ̄ς̄ β̄ μ° ε̄. γίνονται ς̄ ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀριθμοὶ ἄρα β̄ μ° ε̄. μέρος ἕβδομον εἰσὶ τῦ τρίτου καὶ ἔτι μονάδες η̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ς̄ β̄ μ° ε̄. ἀφέλω μονάδας η̄. λοιποὶ ς̄ οὐ̄ β̄ λείψει μ° γ̄. ἕβδομον μέρος εἰσὶ τῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ς̄ ιδ̄ λείψει μ° κᾱ̄. λοιπὸν ἄρα δώσει ⊄ τῶν λαβόντα ϖ̄ϛ̄ μὲν τῷ μέσῳ τὸ ἕκτον ⊄ μ° ζ̄. δόντα δὲ τὸ ἕβδομον καὶ μ° η̄. γίνεσθαι ἀριθμοὺς ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν τὸ ἕβδομον ⊄ μ° η̄. λοιπός ὅτι ς̄ ιβ̄ λείψει μ° κε̄. λαβὼν δὲ ϖ̄ϛ̄ τῷ μέσου τὸ ἕκτον, καὶ μ° ζ̄. γίνονται ς̄ οὐ̄ ιγ̄ λείψει μ° ιθ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμοῖς ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς, ⊄ γίνεται ὁ ς̄ μ° ιη̄ ζ̄. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ζ̄ ζ̄. ὁ δὲ δεύτερος ρ̄ῑ ζ̄. ὁ δὲ τρίτος ρ̄β̄ ζ̄. καὶ ἔτι ποιῶσι τὰ τ̄ προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

HÆC quæſtio parum differt à vigeſimaquinta primi, vt iam ibi monuimus. Nam quæruntur eo loco tres numeri, quorum quiſque vbi proximè ſequenti dederit certam ſui partem, inter dantes & accipientes fiat æqualitas. Hîc vero præterea requiritur, vt præter certam ſui partem quilibet det ſequenti certum etiam numerum, quod parum aut nihil difficultatis adiicit operationi. Cæterùm quid de hac quæſtione, & decima nona ſentiam, dicam ad ſequentem.

QVÆSTIO XIX.

DATVM * numerum diuidere in tres numeros, quorum quiſque vbi proximè ſequenti dederit partem ſui quæ

ΤΟΝ * δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμὺς ζεῖς ὅπως ἕκαστος τῷ ὲκ τῆς διαιρέσεως τῷ ἑξῆς αὐτὸ διδῶ μέρος τὸ ὑπ' αὐτοῦ

χθεν, & ἐπ δοθέντα ς̄ ἵνα δόντες, καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ὑπιτετάχθω δὴ τὸν π̄. διελεῖν εἰς ξεῖς ἀριθμους ὅπως ὁ πρῶτος τῷ δευτέρῳ δίδῳ τὸ πέμπτον, & ἐπ μονάδας ς̄. ὁ δὲ δεύτερος τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ μ̊ ζ̄. ὁ δὲ τρίτος τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μ̊ ἢ ἵνα μὴ τῶν ἀντίδοσιν γένωνται ἴσοι. ✻ Τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ε̄. καὶ ὁ δεύτερος μ̊ ιβ̄. καὶ μιγὲι ὁ δεύτερος λαβὼν παρὰ μὲν τοῦ πρώτου πέμπτον ς̄ ἵνα καὶ μ̊ ς̄ γινόμενος ς̊ ᾱ. μ̊ ιη̄. δους δὲ τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ ἔτι μ̊ ζ̄. γίνεται ς̊. ᾱ. μ̊ θ̄. λοιπὸν ὄζι, καὶ τοὺς λοιποὺς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̊ θ̄. ἀλλὰ δὲς μὲν ὁ πρῶτος ἑαυτῷ τὸ πέμπτον καὶ μ̊ ς̄ λοιπός. ὄζι ς̄ς̄ δ̄ λείψει μ̊ ς̄. δήτει ἄρα καὶ αὐτὸν λαβόντα τὸ ἕβδομον τοῦ τρίτου καὶ μ̊. η̄. γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̊ θ̄. καὶ ἐαν λάβῃ μ̊ ιε̄ λείψει ς̄ς̄ γ̄. γίνεται ς̊ ᾱ μ̊ θ̄. μονάδες ἄρα ιε̄ λείψει ἀριθμῷ γ̄. ἕβδομον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου, καὶ ἐπ μονάδες η̄. ἐαν ἄρα ἀπὸ μονάδων ιε̄ λείψει ἀριθμῷ γ̄. ἀφέλωμεν μ̊ η̄. ἕξομεν τὸ τοῦ τρίτου ἕβδομον μ̊ ζ̄. λείψει ς̄ς̄ γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσαι μ̊ μθ̄ λείψει ς̄ς̄ κᾱ. λοιπὸν ὄζι καὶ τοῦτον λαβόντα μὲν παρὰ τοῦ μέσου τὸ ἕκτον καὶ μ̊ ζ̄. δόντα δὲ τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μ̊ η̄. γίνεσθαι ς̄ς̄ ᾱ μ̊ θ̄. ἀλλὰ δὲς καὶ λαβὼν γίνεται μ̊ μδ̄ λείψει ς̄ς̄ ιη̄. ταῦτα ἴσα ς̄ ἑνὶ μονάδι θ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̊ λγ̄ ιθ̄. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ρ̄ ιθ̄. ὁ δὲ δεύτερος σκη̄ ιθ̄. ὁ δὲ τρίτος σιζ̄ ιθ̄.

imperatur, & præterea datum numerum, inter eos exiſtat æqualitas. Inſtitutum ſit numerum 80. diuidere in tres numeros, vt primus ſecundo det ſui quintantem, & præterea 6. Secundus tertio det ſui ſextantem, & vnitates 7. Tertius primo det ſui ſeptantem, & vnitates 8. & poſt mutuam contributionem, fiant æquales. ✻ Ponatur primus 5 N. ſecundus 12. & ſecundus accipiens à primo quintantem, puta 1 N. & præterea 6. fit 1 N. + 18. dans autem tertio ſextantem ſui & adhuc 7. relinquitur 1 N. + 9. Reſtat vt & reliqui datis & acceptis quæ imperantur, fiant 1 N. + 9. ſed primus cùm dedit ſui quintantem & vnitates 6. remanet 4 N. — 6. Oportet ergo vt accipiens ſeptantem tertij, & vnitates 8. fiat 1 N. + 9 ſed ſi accipiat 15 — 3 N. fit 1 N. + 9 Igitur 15 — 3 N. eſt ſeptima pars tertij, & præterea 8. Quamobrem ſi à 15 — 3 N. ſubducamus vnitates 8. habebimus tertij ſeptantem, nimirum 7 — 3 N. Ipſe igitur tertius erit 49 — 21 N. Supereſt vt & hic accipiens quidem à medio ſextantem & vnitates 7. dans autem primo ſui ſeptantem & vnitates 8. fiat 1 N. + 9. ſed datis acceptiſque quæ imperantur, fit 43 — 18 N. Hæc ergo æquantur 1 N. + 9. & fit 1 N. $\frac{34}{19}$. Erit igitur primus $\frac{170}{19}$. Secundus $\frac{228}{19}$. Tertius $\frac{217}{19}$.

IN QVÆSTIONES XVIII. ET XIX.

PEDIBVS eo in Xilandri ſententiam ſuſpicantis hanc & præcedentem quæſtionem huic quadratorum tractationi temerè inſertas eſſe, ſiue ab imperito librario vt putat ille, ſiue potius vt reor à ſciolo quopiam qui è tredecim libris Diophanti nonnullas in vnum colligens quæſtiones, eos quos habemus præ manibus Arithmeticorum libros conſarcinauit. Sanè ſi Diophanto tribuendæ ſunt, hæ duæ quæſtiones, in primum librum retrahendæ videntur, & collocandæ poſt vigeſimam quintam, à qua parum differunt, vt iam indicauimus; iſta præſertim, quæ illius operationem quàm proximè imitatur. Quidquid ſit, certiſſimum eſt totam huius propoſitionem adulterinam eſſe, & verba illa omnia quæ aſteriſcis incluſimus, eſſe penitus eliminanda, ſufficitque ſi loco propoſitionis ei præfigatur Αλλως. Verè enim à præcedenti non differt hæc quæſtio, ſed eſt eadem prorſus aliter tractata, quod familiare eſt Diophanto, vt conſtat ex decima octaua & decima nona primi, ex vigeſima & vigeſima prima, & rurſus ex vigeſima-tertia & vigeſima-quarta eiuſdem. Ac etiam ex octaua & nona huius. Sed & ipſam hanc operationem non conuenire numero 80. vel etiam alij certo & determinato numero optimè Xilander conuincit, ex eo quod Diophantus ſecundum quæſitorum ponit 12. quod nequaquam ritè in tali caſu fieri poſſet, niſi iam cognito numero ipſo qui quæritur, quod eſt abſurdum. Cæterùm omiſſa propoſitione, cætera bene habent, neque vno corrupto vocabulo vel numero aliquo deficiente, & ita benè & ad amuſſim præcedenti propoſitioni cuncta conueniunt, vt mirum ſit quomodo græculus ille tantum frontis habuerit, qui huic corpori caput alienum imponere tentauit.

Quod ſi quis fateatur quidem propoſitionem tractationi reliquæ non reſpondere, ſed contendat nihilominus, ab alia quæſtione quæ librariorum incuria exciderit, huc tranſlatam huiuſmodi propoſitionem

propositionem, non valdè repugnabo, cùm simile quid accidisse libro quinto certissimis argumentis compertum habeam. Huic ergo vt satisfiat, quæstionem quoque, vt in Græco proposita est, soluemus cum Xilandro, quem sanè immeritò recentiorum quidam arguere conati sunt, & de analyseos inscitia criminari, quia scilicet calculi errore lapsus, falsos exhibuit solutionis numeros. Cùm tamen optimo vtatur logismo, quo saluo calculi error viris doctis non debet imputari. Itaque vt tanto viro debita seruetur reuerentia, in huius quæstionis tractatione ipsamet eius verba referre non pigebit, à mendis duntaxat numerorum, vt par est, expurgata. Cùm tres numeri qui quæruntur, 80. summam conficiant, neque dum eorum partes adduntur detrahunturque, huic summæ quicquam decedat, cùm quod vni aufertur, alteri adjiciatur, & nihil excidat amittaturue; intelligere licet, æqualitatem trium numerorum vltimò existentem eam fore, vt quiuis sit triens ex 80. hoc est 26. $\frac{2}{3}$. Hoc animaduerso ponamus primum esse 1 N. ab eoque auferamus quæ dat secundo $\frac{1}{5}$ N. + 6. relinquitur $\frac{4}{5}$ N. − 6 hoc cum septante tertij & 8. æquabitur 26 $\frac{2}{3}$. Ergo à 26 $\frac{2}{3}$ auferas $\frac{4}{5}$ N − 6. relinquuntur 32 $\frac{2}{3}$ − $\frac{4}{5}$ N. quod est 8. & septans tertij. Aufer 8. relinquitur septans tertij 24 $\frac{2}{3}$ − $\frac{4}{5}$ N. Ergo tertius est 172 $\frac{2}{3}$ − $\frac{2}{5}$ N. Huius & primi summa 172. $\frac{2}{3}$ − 4 $\frac{2}{5}$ N. detracta à 80. vt potè summà trium numerorum, relinquet scilicet secundum 4 $\frac{3}{5}$ N. − 92 $\frac{2}{3}$. Huic sextantem suum & 7. adimemus, nimirum $\frac{23}{30}$ N. − 8. $\frac{4}{6}$ relinquentur $\frac{23}{30}$ N. − 84. $\frac{2}{9}$. His si addamus $\frac{1}{5}$ N. + 6. quod ei à primo accedebat fient $\frac{131}{30}$ N. − 78. $\frac{2}{9}$ æqualia 26. $\frac{2}{3}$ ob causam suprà demonstratam, adde vtrobique 78. $\frac{2}{9}$ erunt $\frac{121}{30}$ N. æquales $\frac{944}{9}$. hoc est 363 N. æquantur 9440. (alterum per 30. alterum per 9. erat multiplicandum, pro his sume minimos 10. & 3. vt alibi docui) fit 1 N. $\frac{2944^{0}}{363}$ primus. Secundus $\frac{2786}{363}$. Tertius ergo $\frac{9814}{363}$ quorum summa $\frac{29040}{363}$ ideſt 80. Cætera omnia congruere ad postulata quæstionis experiendo deprehendes. Hucusque Xilander.

Verùm longè faciliùs ad vitandas fractionum molestias instituentur positiones hac arte. Esto tertius 7 N. hic ergo dando sui septantem + 8. remanebit 6. N. − 8. quod cum sextante secundi & 7. æquatur 26 $\frac{2}{3}$. Quare à 26. $\frac{2}{3}$ auferenda 6 N. − 1. remanet sextans secundi nimirum 27. $\frac{2}{3}$ − 6 N. ergo secundus 166. − 36 N. qui amisso sextante & 7. remanet 131 $\frac{1}{3}$ − 30 N. quod cum quintante primi & 6. æquatur 26 $\frac{2}{3}$. Quare si à 26 $\frac{2}{3}$ detrahas 137. $\frac{1}{3}$ 30 N. remanet quintans primi, nimirum 30 N. − 110. $\frac{2}{3}$. est ergo primus 150 N. 553. $\frac{1}{3}$. Restat vt trium summa conficiat 80. at conficit 121 N. − 387. $\frac{1}{4}$. Hæc ergo æqualia sunt 80. & fit 1 N. $\frac{1202}{363}$. Igitur tertius qui positus erat 7 N. erit $\frac{2233}{363}$. & alij qui prius.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE tres quadratos, vt interuallum maximi & medij, ad interuallum medij & minimi datam habeat rationem. Statutum sit interuallum interualli triplum esse. Ponatur minor 1 Q. Medius verò 1 Q. + 2 N. + 1. à latere nimirum 1 N. + 1. Maximus igitur erit 1 Q. + 8 N. + 4. Oportet igitur 1 Q. + 8 N. + 4. æquari quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. (vt habeam 1 Q.) & præterea à tot vnitatibus, vt reliquæ species quæ in hoc quadrato reperientur, numerorum videlicet & vnitatum, non vtraque sua multitudine superent 8 N. & 4. vnitates, sed altera deficiat, altera excedat. Esto itaque à 3. vnitatibus. Ipse ergo quadratus erit 1 Q. + 6 N. + 9. æqualis vtique 1 Q. + 8 N. + 4. & fit 1 N. 2. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit maximus 30 $\frac{1}{4}$. minimus 6 $\frac{1}{4}$. Medius 12 $\frac{1}{4}$. & satisfaciunt quæstioni.

καὶ ποιῶσι τὸ προβλημα.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος πρὸς τὸν μέσον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπερτεταχθω δὴ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ὑπεροχῆς ἐφ' ἑαυτὴν τριπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων δυνάμεως μιᾶς. ὁ δὲ μέσος δυνάμεως μιᾶς, ϛς̄ β̄. μονάδος μιᾶς, ὑπὸ πλευρᾶς δηλονότι ἑνὸς μονάδος μιᾶς. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ϛς̄ η̄ μ̄ δ̄ δεήσει ἄρα καὶ δύναμιν μίαν ϛς̄ η̄ μ̄ δ̄ ἴσα ἑφ' ἑαυτῷ τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον. ὑπὸ ϛ̄ ἑνὸς ἵνα ἔχω τοῦτο δύναμιν, καὶ ἐπὶ μ̄ τοσούτων ὥστε τὰ λοιπὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ γινόμενα εἶδη τῶν ϛς̄ καὶ τῶν μ̄ μὴ ὑπερβάλλειν κατὰ τὸ πλῆθος τὰς ϛς̄ η̄. καὶ μ̄ δ̄ ἑκάτερα. ἀλλ' ὁ μὲν ἐλλείπειν, τὸ δὲ πλεονάζειν. ἔστω δὲ μ̄ γ̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ϛς̄ ϛ̄ μ̄ θ̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ ϛς̄ η̄ μονάσι δ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ μ̄ β̄ καὶ ἥμισυ. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μέγιστος μ̄ λ̄. ᾱ ϛ̄. ὁ δὲ ἐλάχιστος μ̄ ϛ̄. ᾱ ϛ̄. ὁ δὲ μέσος μ̄ ιβ̄. ᾱ ϛ̄

IN QVAESTIONEM XX.

OPERATIO Diophanti satis est facilis, & ad docendum accommodata. Quod ait numeri quadrato æquandi 1 Q. + 8 N. + 4. latus fingendum esse ab 1 N. + tot vnitatibus, vt species quæ reperientur in quadrato fictitio non vtraque sua multitudine excedant 8 N. + 4. sic accipiendum est, vt talis statuatur in latere vnitatum numerus, cuius quadratus superet 4. sed cuius duplum sit minus quàm 8. Nam quod ait Xilander non inueniri temerè exemplum, vbi pauciore vnitates, pluresque sint Numeri, non solùm id temerè non inuenietur, sed nec vnquam poterit inueniri. Etenim vt numeri alicuius quadratus sit minor quàm 4. oportet ipsum numerum esse minorem quàm 2. vt verò eiusdem numeri duplum sit maius quàm 8. oportet ipsum numerum esse maiorem quam 4. At omnino impossibile est eundem numerum esse simul minorem quàm 2. & maiorem quàm 4. superest igitur, vt talis in latere fictitio ponatur vnitatum numerus, cuius quadratus sit maior quàm 4. & cuius duplum sit minus quàm 8. seu quod idem est, debet ille vnitatum numerus esse maior quàm 2. minor quàm 4. quales infiniti reperiuntur inter 2. & 4. sed Diophantus more suo ad vitandas fractiones, sumpsit 3. & finxit hoc latus 1. N. + 3. facilius tamen fingi potest huiusmodi latus absque tali circonspectione, si ponatur 1 N. – tot vnitatibus quarum quadratus superet 4. vt si ponatur 1 N. – 6. fiet quadratus 1 Q. – 12. N. + 36. æqualis 1 Q. + 8 N. + 4. vnde fit 1 N. 2 $\frac{1}{2}$ vt prius. Cæterùm inuentis semel tribus quadratis proposito satisfacientibus, licebit absque noua operatione infinitos alios reperire idem præstantes, si iam inuenti quadrati ducantur in quemlibet quadratum, nam fient alij quadrati in iisdem rationibus cum iam inuentis quadratis. Quamobrem & eorum interualla eandem inter se rationem habebunt, quam habent iuterualla iam inuentorum quadratorum. Ita si inuentos quadratos 5 $\frac{1}{2}$ 12 $\frac{1}{4}$. & 30 $\frac{1}{4}$. ducas in quadratum 4. fient tres alij 25. 49. 121. idem præstantes, nam maiorum interuallum 72. triplum est interualli minorum, quod est 24. & sic alios infinitos eiusdem naturæ licebit inuenire.

Per hanc etiam quæstionem reperientur tres quadrati in Arithmetica medietate. Hoc enim nil aliud est quàm reperire tres quadratos, vt maiorum interuallum sit æquale interuallo minorum. Quare ponatur minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. erit igitur maximus 1 Q. + 4 N. + 2. cuius latus fingetur 1 N. – tot vnitatibus quarum quadratus superet 2. Verbi gratia 1 N. – 2 fiet quadratus 1 Q. – 4 N. + 4. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{1}{16}$ $\frac{25}{16}$ $\frac{49}{16}$. & si eos per eundem quadratum 16. multiplices, fient alij 1. 25. 49. quos si rursus per eundem quadratum 4 multiplices, fient rursus alij 4. 100. 196. & sic infiniti reperientur. Sed & alia operatione subtili sanè & iucunda solui potest huiusmodi quæstio, etiamsi requiratur præterea vt medius quæsitorum quadratorum sit quilibet datus quadratus. Sint enim inueniendi tres quadrati in Arithmetica medietate, quorum medius sit 25. sume duplum ipsius 25. nempe 50. Quia ergo 50. componitur ex duobus quadratis 25. & 25. diuidatur rursus idem 50. in duos alios quadratos per decimam huius, sintque hi 1. & 49. dico istos esse minimum & maximum quæsitorum, quorum 25.
5. 1. *poris.* est medius arithmeticè proportionalis, quia enim summa ipsorum 1. & 49. ex constructione, dupla est ipsius 25. ', erit 25. inter eos medius in arithmetica medietate. Quod erat propositum. Vnde cùm idem 50. rursus diuidi possit in duos alios quadratos infinitis varijs modis, constat infinitos alios duos quadratos reperiri posse, inter quos 25. sit medius arithmeticè proportionalis.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ἑνός. ὁ δὲ δεύτερος μονάδος μιᾶς ς̄ β̄. ἵν' ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν ὀκτώ, ᾧ τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον. ποιεῖ δυνάμεις δ̄ ἀριθμοὺς ε̄ μονάδα μίαν. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ β̄ λείψει μ̄ β̄. αὐτὸς ἔσται δυνάμεων δ̄, μ̄ δ̄ λείψει ς̄ η̄. ᾧ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄ ιε̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ̄ ιε̄. ὁ δὲ δεύτερος ιδ̄ ιε̄ καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt vtriusque quadratus altero numero adiecto, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 1 + 2 N. vt quadratus primi absumens secundum, quadratum faciat. Superest vt & quadratus secundi primo adiecto faciat quadratum, sed quadratus secundi adiecto primo efficit 4 Q. + 5 N. + 1 Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 2 N. – 2. nempe 4 Q. + 4 – 8 N. & fit 1 N. $\frac{3}{13}$. Erit igitur primus $\frac{9}{13}$. secundus $\frac{15}{13}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE duos numeros vt vtriusque quadratus, altero numero dempto quadratum faciat. Ponatur minor 1 N. & quotquot libuerit vnitatum, esto itaque 1 N. + 1. Maior autem sit quadratus minoris dempto 1 Q. vt minoris quadratus detracto maiore relinquat quadratum. Quia ergo minoris quadratus est 1 Q. + 2 N. + 1. vtique maior dempto 1 Q. erit 2 N. + 1. & patet minoris quadratum dempto maiore facere quadratum. Oportet itaque & maioris quadratum, puta 4 Q. + 4 N. + 1. detracto minore facere quadratum; sed facit 4 Q. + 3 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 3. N. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. erit igitur minor $\frac{8}{5}$. Maior $\frac{11}{5}$. & satisfaciunt proposito.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τοῦ λοιποῦ ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς̄ α̅. ἡ μ̄ ὁσωνδήποτε, ἔστω δὴ μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ μείζων τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνου δυνάμει μίαν, ἵν' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιεῖ τετράγωνον. ἡ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνός ἐστι δυνάμις α̅ ς̄ς̄ β̅ μονάς α̅. ὁ ἄρα μείζων ἔσται τῶν μ̄ τὼ δύναμιν ς̄ς̄ β̅ μ̄ μιᾶς, ἡ μβ̄ύει ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τετράγωνος λείψει τοῦ μείζονος ποιῶν τετράγωνον. δεῖ δὴ ἡ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος δωνάμεις δ̄ ς̄ους̄ δ̄ μονάδα μίαν, λείψει τοῦ ἐλάττονος ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ποιεῖ δωνάμεις δ̄ ς̄ους̄ γ̄· ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάττω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ς̄ γ̄. ⟨ὃ⟩ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄ ε̄. ἔσται ὁ μβ̄ ἐλάσσων η̄ ς̄. ὁ δὲ μείζων ια̅ ς̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

IN QVÆSTIONEM XXI ET XXII.

NIHIL hîc notatu dignum, quod non satis tum à Scholiaste, tum à Xilandro sit animadversum.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE duos numeros, vt vtriusque quadratus adscita numerorum summa faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. Maior verò 1 N. + 1. vt quadratus minoris, nimirum 1 Q. adsumens vtrumque puta 2 N. + 1. faciat quadratum. Superest vt & quadratus maioris adsumens vtriusque summam faciat quadratum. Sed maioris quadratus adiecta vtriusque summa fit 1 Q. + 4 N. + 2. Hoc ergo æquale est quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 2. ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 4 − 4 N. & fit 1 N. $\frac{2}{8}$. Esto ergo minor $\frac{2}{8}$. maior $\frac{10}{8}$. & soluunt quæstionem.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μβ̄ ἐλάσσων ς̄ ἑνός. ὁ ἄ μείζων ς̄ α̅ μονάδος α̅. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος, τουτέστι δύναμις μία προσλαβοῦσα συναμφότερον, τουτέστιν ς̄ους̄ β̅ μονάδα ᾱ̄ ποιεῖ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνον προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται δύναμις α̅ ς̄ς̄ δ̄ μ̄ β̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ α̅ λείψει μ̄ β̅. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις α̅ μ̄ δ̄ λείψει ς̄ς̄ δ̄. ἡ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β̅ ῑ̅. ἔσται ὁ μβ̄ ἐλάσσων β̅ ῑ̅ ὁ δὲ μείζων ι̅ ῑ̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OBSCVRVM fortassis alicui videatur, quanam arte suas positiones ita instituat Diophantus, vt summa vtriusque numeri addita quadrato minoris faciat quadratum. Id autem sic consequitur, fingit quadratum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, verbi gratia ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Quare si ponamus summam numerorum 2 N. + 1. patet eam additam ad 1 Q. facere quadratum. Sed tunc vt satisfiat vni postulatorum, oportet 1 Q. esse quadratum vnius nu-

merorum quæsitorum. Is ergo erit 1 N. quo detracto ex vtriusque summa quæ posita est 2 N. + 1. manet alter 1 N. + 1. Vnde patet priorem illum quadratum fingi potuisse à quolibet numero Numerorum + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia fingatur à 2 N. + 3. fiet quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. Quare ponemus summam numerorum quæsitorum 12 N. + 9. ac proinde alterius quadratus cùm debeat esse 4 Q. erit alter ille 2 N. quo detracto à summa remanet alter 10 N. + 9. Itaque si hac operatione quæstionem absoluere libet, restat vt maioris quadratus, nimirum 100. Q. + 180 N. + 81. adscita vtriusque summa nempè 12 N. + 9. faciat quadratum, facit autem 100. Q. + 192 N. + 90. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus formo abs 10 N. − 30. & fit 1 N. $\frac{45}{44}$ sunt ergo quæsiti numeri $\frac{45}{22}$. & $\frac{273}{22}$.

Quod si velimus vti proprietate numerorum vnitate differentium, quibus accidit vt eorum summa æquetur interuallo quadratorum eorundem (quia scilicet ex summa numerorum in eorum differentiam, fit interuallum quadratorum, & posita differentia numerorum 1. productum ex summa in differentiam æquatur ipsi summæ) longè minore negotio rem expediemus. Etenim ponatur minor quæsitorum quilibet Numerorum numerus, puta 2 N. Tum ponatur maior idem Numerorum numerus + 1, puta 2 N + 1. patet ex demonstratis vtriusque summam additam minoris quadrato efficere quadratum maioris. Restat igitur solùm vt eadem summa cum quadrato maioris faciat quadratum, &c. Et ad hanc numerorum proprietatem fortasse respexit Diophantus, cùm ponat minorem numerum 1 N. maiorem 1 N. + 1 vnde sanè ex illius operatione facillimum elicio Canonem.

Quemlibet quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris auctum quaternario, orietur minor quæsitorum, & addita vnitate fiet maior.

QVÆSTIO XXIV.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει σωαμφοτέρους ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς̄ ᾱ. ὁ δὲ μείζων ς̄ α, μονάδος μιᾶς. ἵνα ὁμοίως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος λείψει σωαμφοτέρους ποιεῖ τετράγωνον. δήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον λείψει σωαμφοτέρους ποιεῖν τετράγωνον. ἔσαι ἄρα δύναμις μία λείψει ς̄ς̄ β̄ μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ ᾱ λείψει μ̄ γ̄. δύναμις ἄρα μία, μ̄ θ̄ λείψει ς̄ς̄ ς̄. ἴσα εἰσὶ δυνάμει μιᾷ λείψει ς̄ς̄ β̄ μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μοῖ β̄ καὶ ἥμισυ. ἔσαι ὁ μὲν ἐλάσσων. μοῖ β̄ καὶ ἥμισυ, ὁ δὲ μείζων μ̄ γ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt vtriusque quadratus dempta vtriusque numeri summa faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. maior 1 N. + 1. vt similiter maioris quadratus dempta vtriusque summa faciat quadratum. Oportet igitur & minoris quadratū dempta summa vtriusque facere quadratum. Facit autem 1 Q. − 2 N. − 1. hoc æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1. N. − 3. Igitur 1 Q. + 9 − 6 N. æquatur 1 Q. − 2 N. − 1. & fit 1 N. 2 $\frac{1}{2}$. erit igitur minor 2 $\frac{1}{2}$. maior 3 $\frac{1}{2}$. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXIV.

HIc etiam euidens est Diophantum vsum proprietate numerorum quorum interuallum est vnitas, quibus, vt ostensum est, accidit summam ipsorum æquari interuallo quadratorum ab ipsis, vnde si quæsiti numeri ponantur vnitate differentes, patet eorum summam à maioris quadrato detractam relinquere quadratum minoris. Porro ex ipsa operatione elicitur huiusmodi Canon.

Quadratum quemlibet vnitate auctum diuide per duplum sui lateris binario multatum, orietur minor quæsitorum, cui addita vnitate fiet maior.

Possunt tamen etiam aliter institui positiones nulla habita ratione numerorum vnitate differentium. Nam ponatur primus Numerorum numerus quilibet + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia, ponatur 1 N. + 3. erit eius quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Quare statuatur summa vtriusque 6 N. + 9. vt detracta à primi quadrato relinquat quadratum. Igitur cùm primus sit 1 N. + 3. hunc auferendo à 6 N. + 9. remanebit secundus 5 N. + 6. Restat vt ab huius quadrato qui est 25 Q. + 60 N. + 36. detrahendo summam vtriusque, nimirum 6 N. + 9. relinquatur quadratus, at remanent 25 Q. + 54 N. + 275. Hæc ergo æquantur quadrato sit eius latus 5. N. − 9. fiet 1 N. $\frac{3}{8}$. eruntque quæsiti numeri 3. $\frac{3}{8}$ & 7 $\frac{7}{8}$.

QVÆSTIO XXV.

INVENIRE duos numeros, vt ſummæ illorum quadratus, adiecto alterutro quadratum faciat. Quandoquidem 1 Q. ſiue ei adiicias 3 Q. ſiue 8 Q. quadratum facit. Pono quæſitorum numerorum alterum 3 Q. alterum 8 Q. quadratum verò ſummæ 1 Q. ſic enim quadratus ſummæ adiecto alterutro facit quadratum. Et quia ſumma vtriuſque eſt 11 Q. quadratus ſummæ erit 121 QQ. ſed eſt quoque 1 Q. Igitur 121 QQ. æquantur 1 Q. Quamobrem & latus lateri æquale eſt. Proinde 1 N. æqualis eſt 11 Q. Omnia per numerum diuidantur. 11 N. æquales erunt 1. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$. Ad poſitiones erit alter $\frac{3}{121}$. alter $\frac{8}{121}$. Quadratus verò ſummæ $\frac{121}{14641}$. Et ſatisfit quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς συναμφοτέρας πρὸς λαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ δύναμις μία ἐάν τε πρὸς λάβῃ δυνάμεις γ̄. ἐάν τε δυνάμις η̄ ποιῇ τετράγωνον. τάσσω τ̄ ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν τ̄ μὲν δυνάμεις γ̄. τ̄ δὲ δυνάμεις η̄. τ̄ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρας δυνάμεως μιᾶς, καὶ μιᾷ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρας πρὸς λαβὼν ἑκάτερον ποιῶν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ συναμφότερός ἐστι δυνάμεις ιᾱ ὁ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρας ἔσται δυναμοδυνάμεων ρκᾱ. ἀλλ' ἔστι καὶ δύναμις μία δυναμοδυνάμεις ἄρα ρκᾱ ἴσοι δυνάμεσιν ιᾱ. καὶ πάντα τὰ δηλ. ἀριθμὸν. ϛς^οὶ ἄρα ιᾱ. ἴσοι μονάδι μιᾷ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς, α̅ ι^α̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν γ̄ ρκα̅. ὁ δὲ ἕτερος η̄ ρκα̅. ὁ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρας ρκα̅ ι^α χκα̅. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXV.

POTERAT analyſis Diophantæa breuius explicari ſic. Quandoquidem 1 Q. ſiue ei addicias 3 Q. ſiue 8 Q. quadratum facit. Pono quæſitorum numerorum alterum 3. Q. alterum 8. Q. Quadratum verò ſummæ 1 Q. erit ergo ipſa ſumma 1 N. Sed etiam 11 Q. Igitur 1 N. æquatur 11 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$ Porro manifeſtum eſt loco 3. & 8. ſumi poſſe quoſlibet alios quadratos vnitate multatos, veluti 15. 24. 35. quorum duo quilibet nota Quadrati affecti, ſtatui poſſunt pro quæſitis numeris, poſito ſcilicet ſummam illorum eſſe ſemper 1 N. & eius quadratum 1 Q. Nam & quadratus ſummæ variari poteſt, & loco 1 Q. poni quilibet quadratorum numerus quadratus, vt 4 Q. 9 Q. 16 Q. Sed tunc oportet quæſitos numeros, ſtatui quadratos multatos eodem ipſo quadrato qui ponitur pro quadrato ſummæ, vt ſi ponatur quadratus ſummæ 4 Q. Ponentur quæſiti numeri 5 Q. & 12 Q. & ſic de aliis. Præterea dignum eſt animaduerſione hanc quæſtionem non ad duos tantùm, ſed ad quotlibet numeros extendi poſſe, eodem prorſus artificio. Quærantur enim quatuor numeri vt ſummæ illorum quadratus quolibet ex ipſis adiecto quadratum faciat. Pone quæſitos numeros, 3 Q 8 Q. 15 Q. 24 Q. & quadratum ſummæ 1 Q. erit ergo ſumma 1 N. ſed eſt quoque 50 Q. Igitur fit 1 N. $\frac{1}{50}$ & ſunt quæſiti numeri $\frac{3}{2500}$ $\frac{8}{2500}$ $\frac{15}{2500}$ $\frac{24}{2500}$ quorum ſumma $\frac{1}{50}$ cuius quadratus quolibet illorum adiecto quadratos facit, vt patet. Ex his demum Canonem eliciemus.

Sume tot quadratos, eodem aliquo quadrato multatos, quot petuntur numeri, hos ducito ſigillatim in ablatitium quadratum, producta ſeorſim diuiſa per quadratum ſummæ ſumptorum numerorum quæſitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE duos numeros vt ſummæ illorum quadratus, vtroque dempto faciat quadratum. Primùm accipio aliquem quadratum, à quo auferendo duos aliquos numeros, ſuperſit quadratus. Eſto 16. is enim detractus ſiue 12. ſiue 7. relinquit quadratum. Statuo ergo illos in quadrato, alterum quidem pono 12 Q. alte-

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ συναμφοτέρας λείψει ἑκατέρα ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνω πρόκτον τινὰ τετράγωνον. ἀφ' οὗ ἀφελὼν δύο τινὰς ἀριθμοὺς καταλείπω τετράγωνον. ἔστω δὲ ὁ ις̄. αὐτὸς γὰρ ἐάν τε λείψῃ μονάδας ιβ̄ γίνεται τετράγωνος. ἐάν τε πάλιν μ̄ ζ̄. γίνεται τετράγωνος. τάσσω οὖν πάλιν αὐτὸς ἐν δυνάμει, καὶ τ̄ μὲν δυνάμεων

ιβ. ἡ ὁ δυνάμεων ζ. τὸν ὁ ἀπὸ σωαμφοτέρας δωνάμεων ις. ἡ μὴ ἐστι ὁ ἀπὸ σωαμφοτέρας λείψει ἑκατέρας ποιῶν τετράγωνον. δεήσει λοιπὸν ἡ ἀπὸ σωαμφοτέρου ἴσον γίνεσθαι δυνάμεσι ις. ὥστε ἑνὶ τῶν πλευρὰν τῇ πλευρᾷ, τουτέστι δωνάμεις ιϛ ἴσας ἀριθμοῖς δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ ις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρκβ τξα. ὁ ὁ δεύτερος ριβ τξα. ἡ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

alterum 7 Q. At ſummæ quadratum 16 Q. ſic enim ſummæ quadratus, vtroque dempto relinquit quadratum. Oportet itaque ſummæ quadratum æqualem eſſe 16 Q. Quare & latus lateri, hoc eſt 19 Q. æquari oportet 4 N. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. erit igitur primus $\frac{192}{361}$. ſecundus $\frac{112}{361}$. & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM XXVI.

VARIARI poſſunt hîc poſitiones ſicut in præcedente. Nam poſito quadrato ſummæ 16 Q. ſtatuemus pro quæſitis duos quoſlibet numeros, qui detracti à 16. ſigillatim relinquant quadratos, quales infiniti reperiuntur, ſi ponas eos 7 Q. & 15 Q. fiet eorum ſumma 22 Q. æqualis 4 N. & erit 1 N. $\frac{2}{11}$. & quæſiti numeri $\frac{28}{121}$ & $\frac{60}{121}$. Rurſus autem loco 16. Q. ſtatui poteſt quadratus ſummæ quilibet alius quadratus, puta 25 Q. 36. Q. & ſic in infinitum. Vnde ſanè diuerſarum ſolutionum ampla ſeges ſuppetit.

Poteſt etiam huiuſmodi quæſtio ad quotlibet extendi numeros. Vt ſi petantur quatuor numeri vt ſummæ quadratus quolibet illorum detracto relinquat quadratum. Ponatur ſummæ quadratus 25 Q. ipſi verò ſint 21 Q. 16. Q. 9. Q. 24 Q. horum ſumma fit 70 Q. æqualis 5 N. eſt ergo 1 N $\frac{1}{14}$ ſuntque quæſiti numeri $\frac{21}{196}$ $\frac{16}{196}$ $\frac{9}{196}$ $\frac{24}{196}$. quorum ſumma $\frac{5}{14}$ à cuius quadrato ſi auferantur ſigillatim inuenti numeri ſemper relinquitur quadratus. Hinc quoque fiet huiuſmodi Canon.

Sume quadratum numerum, à quo aufer ſigillatim tot alios quadratos, quot petuntur numeri, reſidua ducito ſigillatim in ſumptum quadratum, producta ſeorſim diuiſa per quadratum ſummæ eorundem reſiduorum, quæſitos exhibent numeros.

Cæterùm hîc deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio, quæ ſoluitur eodem artificio.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ illorum quadratus à quolibet illorum detractus, quadratum relinquat.

Ponatur ſummæ quadratus 1 Q. quem auferendo tum à 5 Q. tum à 10 Q. cùm relinquantur quadrati, ponantur quæſiti numeri 5 Q. & 10 Q. Erit igitur illorum ſummatum 1 N. tum 15 Q. Quare fit 1 N. $\frac{1}{15}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{45}$. & ſatisfaciunt propoſito. Variari poſitiones poſſunt iiſdemmodis, quibus & præcedentium quæſtionum. Et eodem modo ad plures numeros extendetur quæſtio, & demum formabitur iſte Canon.

Quadratum quemlibet adde totidem aliis quadratis, quot petuntur numeri. Aggregata ducito ſigillatim in additicium quadratum, producta ſeorſim diuiſa per quadratum eorundem aggregatorum, quæſitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐπ' αὐτῷ πολλαπλασίων ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. τῷ ὑ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν ὁποιαοῦν ἀριθμόν. ὑπετάχθω δὴ ποιεῖν τὸν ε. ἐπεὶ ἓν ἐαν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τ ἐλάσσονος ᾖ τετραπλασίων ἀλλὰ μονάδα, ὁ ὑπ' αὐτῶν πολλαπλασίων τ ἐλάττονα ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τ μὲν ἐλάσσονα ς ἑνὸς, τ ὑ μείζονα ςς δ λείψει μονάδος μιᾶς, ἡ συμβαίνει τὸν ὑπ' αὐτῶν πολλαπλασίονα τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει ἄρα ἡ ὁμοίως τ ἐπ' αὐτῷ πολλαπλασίονα τὸν μείζονα τουτέστιν ςς νς δ λείψει μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ ἡ μονάδων ε λείψει τῇ τῆς πλευρᾶς τὸ ἐλάσσο-

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione adſcito alterutro quadratum faciat, quadratorum autem latera iuncta datum conficiant numerum. Imperetur vt faciant 6. Iam cùm duo ſunt numeri, quorum maior eſt quadruplum alterius vnitate deminutum, productus eorum multiplicatione adſcito minore facit quadratum. Pono ergo minorem 1 N. maiorem verò 4 N. — 1. & contingit productum multiplicationis addito minore fieri quadratum. Oportet ergo ſimiliter eundem productum adſcito maiore, puta 4 N. — 1. fieri quadratum, cuius latus ſit 6. cum defectu numerorum qui ſunt latus mino-

ris quadrati, vt ſcilicet (quod requirit quæſtio) duorum latera coniuncta faciant 6. ſed productum multiplicationis adiecto maiore facit 4 Q. + 3 N. − 1. Quadratus autem à latere 6 − 2 N. eſt 4 Q. + 36 − 24 N. Hæc ergo æquantur inter ſe, & fit 1 N. $\frac{37}{27}$. Ad poſitiones. Poſueram minorem 1 N. erit ergo $\frac{37}{27}$. maiorem verò poſueram 4 N. − 1. erit igitur $\frac{121}{27}$. & conſtat propoſitum.

νος ἀριθμῷ, ἵνα μὴ τὸ προβλημα συντεθεῖσαι τ̄ δύο αἱ πλευραὶ ποιῶσι μονάδας τ̄ ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῷ προσλαβὼν τ̄ μείζονα ποιεῖ δυνάμεις δ̄ ς̄ς̄ γ̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ ὑπὸ μονάδων τ̄ λείψει ἀριθμῷ β̄. δυνάμεις δ̄ μονάδας λς̄ λείψει ς̄ς̄ κδ̄. ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις. ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λζ̄ ᾱζ̄. ὅπερ ταῖς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν ἑνὸς, ἔσται λζ̄ ᾱζ̄. τὸν δὲ μείζονα ς̄ς̄ δ̄ λείψει μονάδος ἀ. ἔσται ρκα̅ ᾱζ̄. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVÆSTIONEM XXVII.

BENE' monet Scholiaſtes lemma quod aſſumit Diophantus, non de ſolis quadruplis, ſed de omnibus numeris intelligendum eſſe qui ſint plani ſimiles. Quare ſic vniuerſaliter proponendum eſt & demonſtrandum.

Datis duobus numeris, quorum maiori deſit vnitas, quo minus ad minorem habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex mutua datorum multiplicatione adſumpto minore illorum quadratus ſit.

Sint duo numeri A B & D. tales vt addita vnitate B C maiori A B, fiant plani ſimiles A C. & D. dico productum ex A B in D adſcito ipſo D fieri quadratum.

A.....B. C
D 2.

Quia enim A C. & D ſunt plani ſimiles, [1] productus ex A C in D quadratus eſt. At productus ex A C in D [2] æquatur productis ex A B & ex B C in D. productus autem ex vnitate B C in D. æqualis eſt ipſi D. Igitur productus ex A B in D adſumpto ipſo D. quadratus eſt. Quod demonſtrandum erat. 1. *noni.* 1. *ſecundi.*

Hinc patet poſitiones infinitis aliis modis inſtitui potuiſſe. Nam poſito minore 1 N. poni poterat maior non ſolùm 4 N. − 1. vt fecit Diophantus, ſed etiam 9 N. − 1. 16 N. − 1. & ſic in infinitum. Vel etiam poſito minore 3 N. poni poſſet maior 12 N. − 1. vel 27 N. − 1. &c. & poſito rurſus minore 9 N. poneretur maior 16. N. − 1. vel 25 N. − 1. &c. Ex ipſa autem operatione elicietur iſte Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipſius in ſummam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum ſummæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum initio ſumptum, productus vnitate multatus erit maior quæſitorum.

Sit data ſumma laterum 7. Cape quemlibet quadratum vnitate multatum, puta 8. cui adde 42 qui fit bis ex 7. in latus quadrati ſumpti, erit aggregatum 50. per quod diuide quadratum ipſius 7. vnitate auctum, puta 50. fiet 1. minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum 9. initio ſumptum, productus vnitate multatus, nimirum 8. erit maior numerus. Itaque 1. & 8. ſatisfaciunt propoſito. Quamobrem in huiuſmodi Canone tradendo allucinatus eſt Raphael Bombellius lib. 3. Problemate 88. & è falſo Canone falſos elicuit ſolutionis numeros $\frac{50}{47}$ & $\frac{403}{48^2}$. quos minimè ſoluere quæſtionem experiendo deprehendes.

Cæterùm ſicut per ſuum lemma Diophantus ſic ſuas inſtituit poſitiones, vt productus adſcito minore numero faciat quadratum, ſic poterimus eas rurſus ita inſtituere, vt productus adſcito maiore numero faciat quadratum, tali præmiſſo lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minori deſit vnitas quo minus ad maiorem, habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adſumpto maiore quadratum facit.

A 9.
B... C.D

Sit maior A, & B C minor, cui addita vnitate C D fiant A. & B D. plani ſimiles, dico productum ex A in B C adſumpto ipſo A facere quadratum. Etenim ex A in B D fit quadratus. Sed productus ex A in B D æquatur productis ex A in B C. & in C D. & productus ex A in C D æquatur ipſi A. Igitur productus ex A in B C. addito ipſo A. fit quadratus. Quod demonſtrandum erat,

Hoc ſuppoſito ſtatuatur maior 4 N. minor 1 N. − 1. ſic enim productus 4 Q. − 4. N. adſcito maiore facit quadratum 4 Q. reſtat vt idem productus adſcito minore, faciat quadratum, cuius latus ſit 6 − 2 N. facit autem 4 Q. − 3 N. − 1. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{37}{21}$ ſuntque quæſiti numeri $\frac{148}{21}$ & $\frac{16}{12}$. Hinc elicietur Canon alter.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipſius in ſummam laterum

datam, per reſiduum diuide quadratum ſummæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæſitorum vnitate auctus, quem ſic vnitate auctum ſi ducas in ſumptum ab initio quadratum, fiet maior quæſitorum.

Sit data ſumma laterum 7. vt prius. Sume quadratum 9. vnde ablata vnitate, reſiduum 8. aufer à 42. qui fit ex ipſo 7. bis in latus ipſius 9. relinquitur 34. per quem diuide quadratum ipſius 7. vnitate auctum, nimirum 50. fiet $\frac{25}{17}$ vnde ablata vnitate relinquitur $\frac{8}{17}$ minor quæſitorum; At ducto $\frac{25}{17}$ in quadratum 9. fit maior $\frac{225}{17}$.

Sed & multò vniuerſalius proponi poteſt hæc quæſtio, nimirum ſic.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, adſcito quolibet alterutrius multiplice quadratum faciat, & quadratorum latera iuncta datum conficiant numerum.

Soluetur autem eadem arte auxilio eorundem lemmatum, quæ & ipſa in vnum contracta ſic proponentur vniuerſalius.

Datis duobus numeris quorum vni deſint quotlibet vnitates, quo minus ad alium rationem habeat quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adſumpto alterius multiplice ſecundum vnitates quæ alteri deſunt, fit quadratus.

Quærantur ergo duo numeri, vt productus eorum multiplicatione adſcito alterutrius duplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur minor 1 N. maior per lemma præcedens eſto 4 N. − 2. ſic enim productus 4 Q. − 2 N. adſcito minoris duplo facit quadratum 4 Q. Reſtat vt idem productus adſcito duplo maioris faciat quadratum à latere 6 − 2 N. facit autem 4 Q. + 6 N. − 4. Hoc ergo æquatur 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{4}{5}$ & $\frac{10}{3}$ quorum productus $\frac{40}{9}$ adſcito ſigillatim vtriuſque duplo quadratos facit $\frac{64}{9}$ & $\frac{1000}{9}$. quorum latera $\frac{8}{3}$. & $\frac{10}{3}$. quorum ſumma $\frac{18}{3}$ ſeu 6.

Rurſus. Quærantur duo numeri vt productus eorum multiplicatione adſcito primi duplo, tum ſecundi triplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur primus 1 N. ſecundus 4 N. − 2. ſic enim productus 4 Q. − 2 N. adſcito primi duplo facit quadratum 4 Q. Reſtat vt idem productus aſcito ſecundi triplo faciat quadratum à latere 6 − 2 N. facit autem 4 Q. + 10 N. − 6. Hoc ergo æquatur 4 Q. − 24. N. + 36. & fit 1 N. $\frac{24}{17}$ ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{24}{17}$ & $\frac{50}{17}$ quorum productus $\frac{1200}{289}$ adſcito primi duplo & ſecundi triplo, quadratos facit $\frac{2176}{289}$ & $\frac{3600}{289}$ quorum latera $\frac{48}{17}$ & $\frac{60}{17}$ quorum ſumma $\frac{102}{17}$ ſeu 6. Hinc etiam Canon elici poteſt, quod exercitationis gratia tibi faciendum relinquo.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῆ τετράγωνον. τῷ δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ὑπιτετάχθω δὴ τὸν ϛ̄. ἢ ἐπεὶ ἑαυτῶν ὧν ὁ μείζων τῶ ἐλάττονός ἐστι τετραπλασίων, ἡ μονὰς μία, ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τῶ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν μείζονα ϛ̄ Δ̄ μ̄ ᾱ. τὸν δὲ ἐλάττονα ϛ̄ ἑνός. ἢ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει, τῶ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον δυνάμεις Δ̄ οὗ ἡ πλευρὰ ϛ̄ β̄. λοιπὸν ἐστι ϵ̄ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψει τῶ μείζονος ποιεῖν τετράγωνον, καὶ τῷ τετραγώνων πλευρὰς συνάγειν τὰς ὑποταχθείσας μονάδας ε̄. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τῶ μείζονος γίνεται δυνάμεις δ̄ λείψει ϛ̄ γ̄ μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων ε̄ λείψει ϛ̄ β̄. ἢ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κε̄ ῑϛ̄. ἔσται ὁ ἐλάττων κε̄ ῑϛ̄. ὁ δὲ μείζων ρκᾱ ῑϛ̄ ϵ̄ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione detracto alterutro quadratum faciat. At quadratorum latera coniuncta faciant datum numerum. Faciant itaque 5. & quoniam ſi duo ſint numeri, quorum maior ſit minoris quadruplum auctum vnitate, productus eorum multiplicatione, detracto minore facit quadratum. Pono maiorem 4 N. + 1. minorem verò 1 N. & productus eorum multiplicatione detracto minore facit quadratum 4 Q. cuius latus 2 N. Supereſt vt idem productus detracto maiore faciat quadratum, & vt quadratorum latera coniuncta conficiant imperatas vnitates 5. ſed productus ex multiplicatione illorum dempto maiore, facit 4 Q. − 3 N. − 1. hoc ergo æquatur quadrato à latere 5 − 2 N. & fit 1 N. $\frac{26}{17}$. Erit igitur minor $\frac{26}{17}$. maior $\frac{121}{17}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN

IN QVAESTIONEM XXVIII.

LEMMA, quo vtitur Diophantus sic vniuersaliter proponendum est.

Datis duobus numeris quorum maior vnitate multatus, ad minorem sit in ratione quadrati ad quadratum, productus ex datorum mutuo ductu, detracto minore quadratum relinquit.

A.....BC.
D 2.

Sit maior A C. & D minor, & à maiori auferendo vnitatem B C. superst A B qui ad D sit in ratione quadrati ad quadratum, dico productum ex D in A C detracto ipso D relinquere quadratum. Etenim productus ex D in A C [1] æquatur productis ex D in A B & in B C. At productus ex D in vnitatem B C æquatur ipsi D. Igitur productus ex D in A C detracto D relinquit productum ex D in A B. Sed productus ex D in A B quadratus est, [2] cùm A B & D ponantur plani similes. Ergo constat propositum.

1. *secundi.*

Hinc etiam patet positiones infinitis modis variari posse. Nam posito minore 1 N. maior poni poterit non solùm 4 N. + 1. vt fecit Diophantus, sed etiam 9 N. + 1 vel 16 N. + 1 &c. & si minor ponatur 3 N. ponetur maior 12 N. + 1. vel 27 N. + 1 &c. Rursus si ponatur minor 4 N. ponetur maior 9 N. + 1. vel 16 N. + 1. vel 25 N. + 1 &c. Ex ipsa quoque operatione formabitur huiusmodi Canon.

2. *noni.*

Quadratum quemlibet vnitate multatum auferà duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum; per residuum diuide quadratum summæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæsitorum, quem si ducas in quadratum initio sumptum, productus vnitate auctus, erit maior.

Sit data summa laterum 5. & sumpto quadrato 9. auferab eo vnitatem supereſt 8. quem auferà 30. duplo producti ex 5. in 3. supereſt 22. per quem diuide quadratum ipsius 5. vnitate auctum puta 26. fiet $\frac{13}{11}$ minor quæsitorum, quo ducto in quadratum 9. fit $\frac{117}{11}$ cui addendo vnitatem fit maior quæsitorum $\frac{128}{11}$ & satisfaciunt proposito.

Possumus etiam ita instituere positiones, vt productus detracto maiore numero relinquat quadratum, tali præmisso lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minor vnitate multatus, ad maiorem sit in ratione quadrati ad quadratum, productus eorum multiplicatione, detracto maiore quadratum relinquit.

Quod demonstratur eodem prorsus modo quo præcedens demonstratum est. Hoc autem præmisso. Ponatur maior 4 N. minor 1 N. + 1. Sic enim productus, nimirum 4 Q. + 4 N. detracto maiore quadratum relinquit 4 Q. cuius latus 2 N. Supereſt igitur, vt idem quadratus detracto minore quadratum relinquat à latere 5 − 2 N. relinquit autem 4 Q. + 3 N. − 1 hoc ergo æquatur quadrato 25. − 20 N. + 4 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{23}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{104}{23}$ & $\frac{42}{23}$. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum summæ laterum, vnitate auctum, orietur minor quæsitorum vnitate multatus, quem sic multatum ducito in quadratum initio sumptum, fiet maior quæsitorum.

Potest & vniuersalius proponi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detracto quolibet alterutrius multiplice, quadratum relinquat, & quadratorum latera iuncta, datum conficiant numerum.

Et soluetur eodem prorsus artificio, auxilio lemmatum traditorum, quæ & ipsa in vnum contracta proponentur vniuersalius, hoc pacto.

Datis duobus Numeris quorum vnus quotlibet vnitatibus superat numerum, qui ad alterum rationem habet quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione, detracto alterius multiplice, secundum vnitates quibus alter abundat, quadratum relinquit.

Quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione detracto primi duplo, & secundi triplo, quadratum relinquat, & laterum summa esto 5. Ponatur primus 1 N. secundus 1 N. + 2. sic enim productus 1 Q. + 2 N. detracto primi duplo relinquit quadratum 1 Q. cuius latus 1 N. Restat igitur vt idem productus detracto secundi triplo faciat quadratum, cuius latus sit 5 − 1 N. facit autem 1 Q. − 1 N. − 6. Hoc ergo æquatur 1 Q. − 10 N. + 25. & fit 1 N. $\frac{31}{9}$. suntque quæsiti numeri $\frac{31}{9}$ & $\frac{42}{9}$.

Cæterùm hîc desiderari videtur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detractus à quolibet ipsorum, quadratum relinquat.

Ponatur minor 1 N. maior quilibet Numerorum numerus qui ad minorem rationem habeat quadrati ad quadratum, puta 4 N. erit productus 4 Q. qui detractus à quolibet ipsorum, relinquet 1 N. − 4 Q. & 4 N. − 4 Q. æquales quadrati, & quia Numerorum numeri sunt plani similes, ducatur denominator rationis eorum, in minorem vt Numeri æquentur, fient ergo 4 N. − 16 Q. & 4 N. − 4 Q. æquandi quadratis, horum interuallum est 12 Q. quare sumendi sunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiant 12 Q. & horum summæ semissis quadratus æquabitur maiori, vel interualli semissis quadratus æquabitur minori, sunto hi 2 N. & 6 N. erit summæ semissis quadratus 16 Q. æqualis 4 N. − 4 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{5}$. Sunt ergo numeri $\frac{1}{5}$ & $\frac{4}{5}$. horum productus $\frac{4}{25}$ detractus ab ipsis numeris relinquit quadratos quæsitos $\frac{1}{25}$ & $\frac{16}{25}$. Quod si cui forte modus iste vtendi duplicata æqualitate obscurior videbitur, legat quæ adnotauimus ad quadragesimam tertiam quarti, vbi fusius à nobis explicatur.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἐαν ὧν τάξω ἕνα τῶν τετραγώνων δυνάμεως μιᾶς, τὸν δὲ ἕτερον μονάδα, ἔσται, ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος, δύναμις α̅. δεῖσει ἄρα τέτον προσλαβόντα ἑκάτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ ζητῆσαι τὶς τετράγανθ προσλαβὼν μονάδα ποιεῖ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ τετράγωνος ὃν θέλω εἶ ὑπ' αὐτῶν, δύναμις μία ἐαν ἄρα δεῖ προσλάβῃ μονάδα μίαν. γίνεται δύναμις μία, μονὰς μία, τέτον δεήσει ἴσον εἶ τετραγωνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς, ς̄ᵉ α̅. λείψει μ̄ᵒ β̅. δεῖ ἴσος δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̅. δ̄ ἔσαι ὁ μὲν ἑνὶα ις̄, ὁ δὲ ις̄ ις̄ ἢ συμβαίνει τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλάβόντα τ̄ μονάδα ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει ἄρα ἢ τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν ϟ ις̄ ὑποκείσω νῦν ἐν δυνάμει, τουτέστι δωάμεις ϟ ις̄ μονάδες ϟ ις̄. καὶ πάντα ἐκκαιδεκάκις. δωάμεις ἄρα θ̄. μονάδες θ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ γ̄ λείψει μ̄ᵒ δ̄. αὐτὸς ἄρα τετράγωνος ἔσαι δωάμεων θ̄ μ̄ᵒ ις̄ λείψει ς̄ς̄ κδ̄. ὁ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ̄ ϰδ̄ ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος τκδ̄. π̄ο̄ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μϟ π̄ο̄ς̄. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

Invenire duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione adscito alterutro faciat quadratum. Si ergo posuero vnum quadratorum 1 Q. alterum vero 1. erit productus eorum multiplicatione quadratus 1 Q. Oportet igitur hunc adscito vtroque facere quadratum. Quamobrem res eo deducta est vt quæramus qui quadratus adiecta vnitate faciat quadratum. Ponatur quadratus quem volo esse productum multiplicationis 1 Q. si ergo is adsumat vnitatem, fit 1 Q. + 1. hunc oportet æquari quadrato. Formo quadratum à latere 1 N. − 2. hic æqualis erit 1 Q. + 1. & fit 1. N. $\frac{3}{4}$. est ergo alter $\frac{9}{16}$. alter $\frac{16}{16}$. & accidit productum multiplicatione illorum adsumpta vnitate fieri quadratum. Oportet ergo eundem productum adsumpto altero fieri quadratum. Et quandoquidem productus ille est $\frac{9}{16}$. Ponatur nunc in quadrato, nimirum $\frac{9}{16}$ Q. + $\frac{9}{16}$. & omnia sedecies. Igitur 9 Q. + 9. æquantur quadrato. Formo quadratum à latere 3 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 9 Q. + 16 − 24 N. & fit 1 N. $\frac{7}{24}$. Erit ergo primus $\frac{336}{576}$. secundus $\frac{49}{576}$. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XXIX.

Obscvrè loquitur Diophantus, nec tamen à Scholiasta vel à Xilandro satis explicatur. Itaque nos huic quæstioni sic lucem afferemus.

Posito altero quadratorum 1 Q. ponitur alter ad libitum, puta 1 quorum producto, si ipsi sigillatim addantur, fient tum 2 Q. tum 1 Q. + 1. æquandi quadratis, quæ duplicata æqualitas inexplicabilis est. Quamobrem posito primo 1 Q. secundus non est ad libitum ponendus, sed vt saltem vni propositi parti satisfiat per ipsas positiones, talis deligendus est secundus vt ductus in 1 Q. & producto addendo 1 Q. fiat quadratus. Quia verò primus est 1 Q. & vnitas non immutat numerum quem multiplicat, patet eò nos reduci, vt inueniamus quadratum, cui addendo 1. fiat quadratus. Id ergo fiet per aliam operationem, hoc pacto. Statuatur quæsitus quadratus 1 Q. is adscita vnitate fiet 1

1 Q. + 1 æquandus quadrato, cuius latus modo in superioribus quæstionibus sæpe vsitato fingetur ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus superet 1. Fingit illud Diophantus 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. & quæsitus quadratus $\frac{9}{16}$. Itaque ad propositam quæstionem redeuntes ponamus primum 1 Q. secundum $\frac{9}{16}$. Sic enim productus $\frac{9}{16}$ Q. adsumpto primo facit quadratum $\frac{25}{16}$ Q. Restat igitur vt idem productus adsumpto secundo quadratum faciat, facit autem $\frac{9}{16}$ Q. + $\frac{9}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Sed ad vitandas fractiones, omnia per eundem quadratum 16. multiplicantur, & fit 9 Q. + 9 æquandus quadrato. Nec immutatur per hanc multiplicationem æqualitatis ratio, quia enim quadrato per quadratum multiplicato seu diuiso, semper fit quadratus, patet si 9 Q. + 9. æquetur quadrato, & eius partem decimam sextam, quadratum fore, & è conuerso. Huius igitur latus fingamus à 3 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 9. puta à 3 N. −4. fiet 1 N. $\frac{7}{24}$ & solutio est manifesta. Hinc formatur Canon.

Cape duos quadratos quadratum simul conficientes, altero per alterum diuiso, fiet alter quæsitorum. Tum diuisum quadratum aufer à tertio alio quouis quadrato, residui quadratus diuisus per quadruplum producti ex tertio eodem quadrato in quadratum initiò diuisum, alterum exhibebit.

Verbi gratia. Cape quadratos 16. & 9. fiet alter quæsitorum $\frac{16}{9}$. Tum aufer 16. à quouis alio quadrato 36. restat 20. cuius quadratum 400. diuide per quadruplum producti ex 16. in 36. nimirum per 2304. fiet alter quæsitorum $\frac{25}{144}$.

Diuersitas autem tum operationis, tum solutionis è triplici capite oriri potest.

Primò enim vtriusque numeri positione eadem manente, primo scilicet posito 1 Q. & secundo $\frac{9}{16}$ vltimi numeri quadrato æquandi, nimirum ipsius 9 Q. + 9. latus diuersimodè fingi potest, videlicet 3 N. −4. vel 3 N. − 6. & sic in infinitum.

Secundo. Quamuis primus maneat 1 Q. potest secundus aliter atque aliter poni cùm inueniri possint infiniti quadrati diuersi ab ipso $\frac{9}{16}$ qui adsumpta vnitate quadratum faciant, quales sunt $\frac{16}{9}$ $\frac{25}{144}$ &c.

Denique primus quoque numerus diuersimodè poni potest, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 4 Q. 9 Q. 16 Q. &c. Sed tunc pro secundo sumendus erit quadratus aliquis numerus, quo ducto in primum & producto addendo ipsum primum, quadratus fiat. Vnde prius soluenda erit huiusmodi quæstio.

Dato quadrato, alium inuenire, vt productus horum multiplicatione adsciscens datum quadratum, faciat quadratum.

Datus esto 4. Quæsitus quadratus ponatur 1 Q. horum productus est 4. Q. qui adscito 4. facit 4 Q. + 4. quadrato æquandum, cuius latus esto 2 N. −3. fiet 1 N $\frac{5}{12}$. & est quæsitus quadratus $\frac{25}{144}$. quo ducto in 4. & producto addendo 4. fit quadratus $\frac{169}{36}$ à latere $\frac{13}{6}$. Hinc, si libet, facilem elicies Canonem.

Datum quadratum aufer à quolibet quadrato, & per quadruplum producti horum quadratorum diuide residui illius quadratum, vel è conuerso. Vtroque modo orietur quæsitus quadratus.

Vt in hypothesi aufer 4. à 9. & residui 5. quadratum 25. diuide per quadruplum producti ex 4. in 9. nimirum per 144. fiet quæsitus quadratus $\frac{25}{144}$. vel diuide 144. per 25. fiet etiam quæsitus quadratus $\frac{144}{25}$. Nam hîc semper duplex contingit solutio.

Hac præmissa quæstione soluetur Diophantæum problema, hoc pacto. Ponatur primus 4 Q. secundus $\frac{25}{144}$ sic enim satisfit vni parti postulati. Restat vt productus horum multiplicatione, nimirum $\frac{100}{144}$. adscito secundo faciat quadratum, facit autem $\frac{100}{144}$. Q. + $\frac{25}{144}$. Hoc ergo æquatur quadrato, & omnia ducendo in 144. tum diuidendo per 25. fiunt 4 Q. + 1. æquales quadrato, cuius latus esto 2 N − 3. & fiet 1 N. $\frac{3}{5}$. erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{9}{25}$ & $\frac{25}{144}$.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione dempto alterutro faciat quadratum. Et si posuero primum 1 Q. alterum 1. erit productus eorum multiplicatione 1 Q. Oportet ergo illum dempta vnitate fieri quadratum, est autem 1 Q. quadratus. Eò itaque redacti sumus, vt quæramus quis quadratus dempta vnitate remaneat quadratus. Est autem huiusmodi

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρῳ ποιῇ τετράγωνον. ϗ ἐὰν τάξω τὸ μὲν πρῶτον δύναμιν μίαν, τὸν δὲ ἕτερον μονάδα μίαν. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν δύναμις μία. δεήσει ἄρα αὐτῶν λείψει μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον, ϗ ἔστιν ἡ δύναμις τετράγωνος. ἀπῆκται ἄρα εἰς τὸ ζητῆσαι τίς τετράγωνος λείψει μονάδος μιᾶς. ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὴ τετράγωνος ὁ κε ις. ὅστις γὰρ λείψει τ δ μονάδος ις ις. ποιεῖ τε-

τράγωνον τὸν Ϛ ιϛ'. τάσσω οὖν τὸν μὲν δύναμιν μίαν, τὸν δὲ κε ιϛ̄. ϗ ὑπ' αὐτῆς λείψει δωσάμεως μιᾶς ποιεῖ τετράγωνον. δεῖ οὖ ἄρα ὁ τὸν ὑπ' αὐτῆς λείψει μ̄ κε ιϛ̄ ἴσην ἔχῃ τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῆς λείψει μ̄ κε ιϛ̄. γίνεται δ̄ κε ιϛ̄ λείψει μ̄ κε ιϛ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πάντα ἐκπεδεκάκις. ϗ πλάσω τὸν τετράγωνον. ἀπὸ ς̄ ᾱ λείψει μ̄ δ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσαι δύναμις ᾱ μονάδες ιϛ̄ λείψει ϟϛ̄ η̄. ἴσος δ̄ κε λείψει μ̄ κε. ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ̄ ᾱ ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος σπϚ ξδ̄. ὁ δὲ δεύτερος ρ̄ ξδ̄. καὶ ποιᾶ τὰ τῆ προβλήματος.

quadratus $\frac{25}{16}$. Hic enim demptis $\frac{16}{16}$ relinquit quadratum $\frac{9}{16}$. Pono igitur alterum 1 Q. alterum $\frac{25}{16}$. & productus multiplicationis dempto 1 Q. relinquit quadratum. Supereſt vt idem productus demptis $\frac{25}{16}$ ſit æqualis quadrato. Sed productus demptis $\frac{25}{16}$ fit $\frac{25}{16}$ Q. $-\frac{25}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per ſedecim multiplicentur, tum diuidantur per 25. fit 1 Q. $-$ 1. æquandus quadrato. Formo quadratum ab 1 N. $-$ 4. Ipſe igitur eſt 1 Q. $+$ 16. $-$ 8 N. æqualis 1 Q. $-$ 1. & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. Erit ergo primus $\frac{289}{64}$. ſecundus $\frac{100}{64}$. & ſatisfaciunt poſtulatis.

IN QVAESTIONEM XXX.

EXTREMA verba huius propoſitionis, in Græco monſtrosè deprauata ſunt, vt ex ipſa æquatione manifeſtum fit, qua numeri 25 Q. $+$ 25. latus fingitur 1 N. $-$ 4. vnde contingit 1 Q. $+$ 16 $-$ 8 N. æquari 25 Q. $+$ 25. & in complexam æquationem deuenitur cùm tandem 41. maneat æqualis 24 Q. $+$ 8 N. & fit ſolutio irrationalis. Quare neſcio quomodo ſibi perſuadere potuerit Scholiaſtes hanc eſſe mentem Diophanti. Nam quod ipſe ait valorem Quadrati eſſe 1. atque adeo 24 Q. idem eſſe atque 24. ſunt meræ nugæ, & pueriliùs etiam nugatur Xilander, cùm mirificam appellat rationem hanc inueniendæ ſimplicis æquationis. Si enim 1 Q. eſt 1. nonne etiam 1 N. debuit eſſe 1 non autem $\frac{17}{8}$. Si verò modus iſte quo vtitur Scholiaſtes admitendus eſt, nonne licet etiam ponere latus quadrati 1 N. $-$ 2. & æquare 1 Q. $-$ 4 N. $+$ 4. numero 25 Q. $-$ 25? Sed hac ratione tandem 29. æquatur 24 Q. $+$ 4 N. Quod ſi, vt ſomniat Scholiaſtes 1 Q. eſt 1. & 24. Q. ſunt 24. fiet valor Numeri $\frac{5}{4}$ eritque alter quæſitorum quadratorum $\frac{25}{16}$ alter rurſus $\frac{14}{16}$ qui nequaquam ſatisfaciunt poſtulatis, & ſic aliis infinitis exemplis pronum eſt oſtendere futilem eſſe hanc operandi rationem. Nec mihi obiiciat aliquis, valorem Numeri à Scholiaſte inuentum nempe $\frac{17}{8}$ ſatisfacere propoſito; nam ex falſo verum inferri poteſt, & ex vno aut altero exemplo non ritè colligitur regula generalis. Falſitatis etiam manifeſtè arguitur hæc æquatio, ex eo quod per valorem numeri reſoluendo hypoſtaſes 1 Q. $-$ 8 N. $+$ 16. non reperitur æqualis 25 Q. $-$ 25. Nam 1. Q. $-$ 8 N. $+$ 16. fit $\frac{225}{64}$. At 25 Q. $-$ 25 fit $\frac{5625}{64}$. Valeat ergo ridiculum Scholiaſtæ commentum, quo non calceus ad pedem, ſed pes ad calceum accomodatur.

Porrò tribus modis corrigi poteſt textus Diophanti. Primo numeri 25 Q. $-$ 25. ponendo latus non 1 N $-$ 4. Sed 5 N. $-$ 1 vnde fiet 1 N. $\frac{13}{5}$ eruntque quæſiti quadrati $\frac{169}{25}$ & $\frac{25}{16}$ Qua ratione numeri ſolutionis omnes mutandi erunt. Secundò concipiendo Diophantum, numerum $\frac{25}{16}$ Q. $-\frac{25}{16}$ priùs multiplicare per 16. vnde fit 25 Q. $-$ 25. & hunc deinde diuidere per $\frac{25}{16}$ vnde fit 16 Q. $-$ 16. æquandus quadrato, cuius latus fingitur non 1 N. $-$ 4. Sed 4 N. $-$ 1 & fit 1 N. $\frac{17}{8}$ & ſolutionis numeri non mutantur. Denique, quod maximè mihi arridet, & mea in verſione ſequutus ſum, dici poteſt Diophantum non ſolùm multiplicare per 16. numerum $\frac{25}{16}$ Q. $-$ $\frac{25}{16}$ vnde fit 25 Q. $-$ 25. Sed hunc præterea diuidere per 25. vnde fit tandem 1 Q. $-$ 1. æquandus quadrato, quod familiare Diophanto eſt, vt in minimis numeris facilior ſit operatio; & vt iam monuimus quadratus per quadratum multiplicatus & diuiſus, quadratus manet. Tum numeri 1 Q. $+$ 1 latus fingit 1 N. $-$ 4. & omnia optimè cohærent, & ſolutionis numeri omnes congruunt. Non auſus ſum tamen in textu Græco tantam inducere mutationem, ſed ſatis habui verba deprauata aſteriſcis includere, quæ ſi quis velit ex noſtra verſione corrigere, id ita commodè fiet. Πάντα ἐκπαδεκάκις, ϗ πλάσω τὸ τ κε. γίνεται δ̄ ᾱ. λείψει μονάδος ᾱ ἴση τετραγώνῳ, πλάσω τὸν τετράγωνον ν ἀπὸ ς̄ ᾱ λείψει μ̄ δ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσαι δύναμις ᾱ. μονάδες ιϛ̄ λείψει ϟϛ̄ η̄. ἴσος δ̄ ᾱ. λείψει μονάδος ᾱ. ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ̄.

Variari autem poteſt operatio & ſolutio, totidem modis, quot ad præcedentem explicauimus, & pari ratione dato quadrato, inuenietur alius, vt productus eorum mutuo ductu multatus dato quadrato, relinquat quadratum. Et tandem ex operatione Diophanti elicietur huiuſmodi Canon.

Cape quadratum ex duobus quadratis compoſitum, cui adiice alium quemuis quadratum, ſumma quadratum diuide per quadruplum producti quadratorum ſimul additorum; orietur alter quæſitorum, alterum habebis ſi diuidas quadratum initio ſumptum per vtrumlibet eorum ex quibus componitur.

Verbi gratia cape 25. compoſitum ex 9. & 16. cui adde quadratum 1. fit 26. cuius quadratum 676. diuide per 100. qui fit ex 1 in 25. quater, fiet alter quæſitorum $\frac{169}{25}$. Alter verò eſt $\frac{25}{9}$ vel $\frac{5}{3}$. Nam hic ſemper duplex contingit ſolutio.

Cæterùm hîc deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos quadratos, vt vterque multatus producto multiplicationis eorum quadratum relinquat.

Ponatur alter 1 Q. alter quadratus aliquis, qui ab vnitate detractus relinquat quadratum, puta $\frac{9}{25}$. ſic enim productus $\frac{9}{25}$ Q. detractus ab 1 Q. relinquit quadratum $\frac{16}{25}$ Q. Reſtat vt idem productus detractus à $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{9}{25}$ relinquat quadratum. Relinquit autem $\frac{19}{25} - \frac{9}{25}$ Q. Hoc ergo æquatur quadrato Omnia per 25. multiplicentur fit $9 - 9$ Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus $3 - 4$ N. fit 1 N. $\frac{24}{25}$. Eſt ergo primus $\frac{576}{25}$. ſecundus $\frac{9}{25}$. & ſoluunt quæſtionem. Hinc fit iſte Canon.

Cape duos quadratos quadratum conficientes, horum alterum diuide per eorum ſummam, fiet alter quæſitorum. Eundem quadratum diuiſum adde cuilibet tertio quadrato, & per aggregati quadratum diuide quadruplum producti ex mutuo ductu quadratorum ſimul additorum, fiet alter quæſitorum.

Verbi gratia cape 9. & 16. & alterum 9. diuide per ſummam 25. fiet alter quæſitorum $\frac{9}{25}$. Tum eidem 9. adde alium quadratum 4. fiet 13. per huius quadratum 169. diuide quod fit ex 4. in 9. quater, nimirum 144. fiet alter quæſitorum $\frac{144}{169}$.

QVÆSTIO XXXI.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ſumma illorum ſiue addita, ſiue detracta quadratum faciat. Iam cùm duorum quorumlibet numerorum quadrati ſimul iuncti, ſiue detracto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciant, exponamus duos numeros 2. & 3 & patet quod ſumma quadratorum ab ipſis addito duplo producti multiplicationis facit quadratum 25. Et rurſus ab eadem ſumma quadratorum detracto eodem duplo producti multiplicationis relinquitur quadratus 1. Pono ergo productum ab iis 13 Q. Ipſorum alterum 1 N. alterum 13 N. & fit ex eorum multiplicatione 13 Q. Atqui 13 Q. ſiue additis ſiue detractis 12 Q. faciunt quadratum. Oportet ergo 12 Q. æquari ſummæ amborum. Sed amborum ſumma eſt 14 N. Igitur 12. Q. æquantur 14 N. & fit 1 N. $\frac{14}{12}$. ſeu $\frac{7}{6}$. erat itaque primus 1 N. erit ergo $\frac{7}{6}$. Ad ſecundus qui erat 13 N. erit iam $\frac{91}{6}$. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐὰν τε προσλάβῃ σωαμφότερον, ἐάν τε λείπῃ ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ παντῶν δύο ἀριθμῶν οἱ ἀπ' αὐτῶν σωτεθέντες, ἐάν τε προσλάβωσι τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς τὸν β καὶ τὸν γ̄ ὧν δῆλον ὡς ἡ σώθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μετὰ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν σωάγουσα ποιεῖ τετράγωνον μονάδας κε̄. καὶ πάλιν ἀπὸ τῆς σωθέσεως τὸ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεμένου τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν καταλείπεται τετράγωνος ἡ μονάς. τάσσω οὖν τὸ ὑπ' αὐτῶν δύναμεις ιγ̄ τετάχθω οὖν ὁ μὲν ς̄ ἑνός. ὁ δὲ ἀριθμὸς ιγ̄. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις ιγ̄. δυνάμεις ἄρα ιγ̄ ἐάν τις προσλάβωσι δυνάμεις ιβ̄. ἐάν τις λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. δεήσει ἄρα δύναμεις ιβ̄ ἴσας εἶναι σωαμφοτέρῳ. ἀλλὰ σωαμφότερός ἐστιν ς̄ς̄ ιδ̄ δυνάμεις ἄρα ιβ̄. ἴσαι εἰσὶν ς̄ς̄ οἷς ιδ̄. καὶ γίνεται ἀριθμὸς ιδ̄ ις̄. τουτέστι ζ̄ ϛ̄. ἔστιν οὖν ὁ μὲν πρῶτος ς̄ ἑνός. ἔσται ζ̄ ϛ̄. ὁ δὲ δεύτερος ς̄ς̄ ιγ̄. ἔσται ϛα ϛ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod aſſumit Diophantus, nil aliud continet quàm quod oſtenſum eſt quarta ſecundi Euclidis, & quarta ſecundi poriſmatum. Nam altera illarum propoſitionum demonſtratur duplum producti additum ſummæ quadratorum, efficere quadratum ſummæ numerorum; altera verò concluditur duplum producti derractum à ſumma quadratorum, relinquere quadratum interualli numerorum. Cæterùm tota operationis & ſolutionis varietas pendet à duplici capite. Primò enim loco 2. & 3. ſumi poſſunt alij duo quilibet numeri, & aggregatum quadratorum ab ipſis ſtatui pro producto multiplicationis; & duplum producti, pro ſumma ipſorum numerorum. Vt

si sumas 2. & 4. Pones productum multiplicationis 20. Q. summam numerorum 16 Q. Secundo, manente eadem primâ positione, ipsi numeri variè poni possunt, vt in hypothesi Diophanti posito producto 13 Q. & summa 12 Q. Ipsi numeri poni possunt duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 13 Q. author ad vitandas fractiones posuit 1 N. 13. N. sed poni possent 2 N. & 6 $\frac{1}{2}$ N. vel 3. N. & 4 $\frac{1}{3}$ N. & sic in infinitum. At posito producto 20 Q. poni poterunt ipsi numeri 2 N. & 10 N. vel 4 N. & 5 N. vel duo quilibet alij numeri quorum mutuo ductu fiant 20 Q. Canon quoque hinc facilè formabitur, sed parum in eo erit compendij simili quoque artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa eorum, producto multiplicationis siue addito, siue dempto quadratum faciat.

Ponatur summa 13 Q. productum 12 Q. ipsi vero numeri 1 N. & 12 N. fiet ergo summa 13 N. æqualis 13 Q. & fit 1 N. 1. suntque quæsiti numeri 1 & 12.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμὰς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἑαυτοῦ προσλάβῃ συναμφότερον, ἐαν' τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ δεῖ ἐαν' ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ᾖ διπλασίων, καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν δὶς τετράγωνός ᾖ, ϗ, οἱ ἀπ' αὐτῶν συντεθέντες ἑαυτὸν λείπωσι τὸν δὶς ἀπ' αὐτῶν. ἑαυτὸν προσλάβωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτίθεμαι τὸν δ. ϗ τὸν β. καὶ δῆλον ὡς ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον τὸν ις. ϗ ἡ συνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν κ. ἑαυτὸν προσλάβῃ τὸν ις ἑαυτὸν λείπῃ ποιεῖ τετράγωνον τόν τε λς ϗ τὸν δ. τετάχθωσαν δὴ εἰ δυνάμει. ϗ ἔστω ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις κ. ὁ δὲ συναμφοτέρου δυνάμεις ις. ἔστω ᾗ ὁ μὲν, ϛϛ β, ὁ ᾗ ϛϛ ι. συναμφοτέρου ᾗ ϛϛ ιβ. ἀλλὰ ϗ δυνάμεις ις. δυνάμεις ἄρα ις. ἴσαι ϛϛ ιβ ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸν. ιβ. ποτέσι γ. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ϛ. ᾗ δεύτερος λ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros æquales quadrato, vt productus eorum multiplicatione siue addita, siue dempta amborum summa quadratum faciat. Quoniam si sint duo numeri in dupla ratione, & duplum producti multiplicationis eorum, quadratus est, & summa quadratorum ab ipsis, siue addito, siue detracto duplo producti quadratum facit, exponamus 4. & 2. & patet quod duplum producti eorum facit quadratum 16. & summa quadratorum ab ipsis puta 20. siue addito 16. siue dempto facit quadratos 36. & 4. Ponantur ergo in quadrato, & esto productum multiplicationis 20 Q. summa verò numerorum 16. Q. sit autem alter 2 N. alter 10 N. ergo vterque simul 12 N. sed & 16. Q. Proinde 16 Q. æquantur 12 N. & fit 1 N. $\frac{12}{16}$. hoc est $\frac{3}{4}$. eritque primus $\frac{6}{4}$. secundus $\frac{30}{4}$. & soluunt quæstionem.

IN QVÆSTIONEM XXXII.

LEMMA hîc assumptum idem ferè est cum illo quod in præcedente explicatum est, cui tamen superaddit, expositos numeros debere esse in ratione dupla, vt duplum producti eorum sit quadratus numerus, cuius rei ratio euidens est, quia ducere numerum aliquem bis in suum duplum, idem est atque ducere eundem numerum in suum quadruplum; At numeri in ratione quadrupla sunt plani similes. [1] Quare patet ex eorum mutuo ductu fieri quadratum. Variari autem potest operatio & solutio totidem modis, quot & præcedentis, & easdem ob causas vt manifestum est.

1. noni.

Cæterùm etiam aliter operari possumus, hac arte. Sumantur duo numeri qui sint latera circa rectum trianguli rectanguli, seu quorum quadrati simul quadratum conficiant, quod fiet per tertiam tertij porismatum, sintque hi 3. & 4. Eritque summa quadratorum 25. duplum producti 24. Et statuantur in Quadratis, ponaturque productum 25 Q. summa numerorum 24 Q. Ipsi verò numeri 1 N. & 25 N. vel alij duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 25 Q. erit ergo summa 26 N. æqualis 24 Q. & fit 1 N. $\frac{24}{26}$. suntque quæsiti numeri $\frac{24}{24}$ & $\frac{625}{624}$.

Hîc etiam desiderari videtur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, æquales quadrato, vt summa eorum, producto multiplicationis siue addito siue dempto, quadratum faciat.

Ponatur ſumma numerorum 25 Q. productum 24 Q. ipſi verò numeri ſtatuatur duo quilibet, quorum mutuo ductu fiant 24 Q. puta 4 N. & 6 N. fiet ſumma 10 N. æqualis 25. Q. & fit 1 N. $\frac{2}{5}$. ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{2}{5}$. & $\frac{12}{5}$.

Cæterùm huc quoque pertinere videtur talis quæſtio.

Inuenire quadratum cui ſiue addatur, ſiue adimatur ſuum latus, fiat quadratus.

Ponatur quæſitus quadratus 25 Q. latus illius 24 Q. igitur 24 Q. æquantur 5 N. & fit 1 N. $\frac{5}{24}$. Eſt ergo quæſitus quadratus $\frac{625}{576}$.

Eodem artificio reperietur quadratus, cui addendo & adimendo ſuum latus quoties quis iuſſerit, fiat quadratus. Vt ſi quæratur quadratus, cui addendo & adimendo quater ſuum latus, fiat quadratus. Ponatur quæſitus quadratus 25 Q. Tum ipſius 24. ſumpto quadrante, ſtatuatur latus 6 Q. Nam eius quadruplum 24 Q. additum vel ademptum ipſi 25 Q. quadratum facit. Igitur 6 Q. æquantur 5 N. fitque 1 N. $\frac{5}{6}$. Eſt ergo quæſitus quadratus $\frac{625}{36}$.

QVÆSTIO XXXIII.

INVENIRE tres numeros, vt cuiuſuis illorum quadratus adſcito proximè ſubſequente numero, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. & quoniam ſi numerus numeri duplus fuerit, & adhuc vnitate maior, quadratus minoris adſcito maiore facit quadratum, ponatur ſecundus primi duplus & vnitate maior, erit itaque 2 N. + 1. Rurſumque tertius huius duplus & vnitate maior, erit vtique 4 N. + 3. & accidit quadratum primi adſcito ſecundo fieri quadratum 1 Q. + 2. N. + & ſimiliter ſecundi quadratum adſumpto tertio facere quadratum 4 Q. + 8 N. + 4. Oportet ergo & tertij quadratum adiecto primo facere quadratum. Sed tertij quadratus adiecto primo facit 16 Q. + 25 N. + 9. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 4 N. − 4. Ipſe igitur erit 16 Q. + 16. − 32 N. & fit 1 N. $\frac{7}{57}$. Erit ergo primus $\frac{7}{57}$. ſecundus $\frac{71}{57}$. tertius $\frac{199}{57}$. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶ τετράγωνος μετὰ λαβὼν τὴ ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ϛ̅ α̅. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ᾖ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος μετὰ λαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται διπλοῦν ϛ̅ β̅. μονάδος μιᾶς. Ὁμοίως ἐπὶ ὁ τρίτος τοῦ δευτέρου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται ϛ̅ δ̅. μ̊ γ̅. Ὁ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον μετὰ λαβόντα τὸν δεύτερον, γίνεσθαι τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς ϛ̅ β̅ μονάδος μιᾶς. καὶ ὁμοίως τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου μετὰ λαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον δ̅ῦ δ̅ ϛ̅ ϛ̅ καὶ μ̊ δ̅. δεήσει ἄρα Ὁ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον μετὰ λαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ δ̅ῦ ι̅ϛ̅ ϛ̅ϛ̅ις κε̅ μ̊ ϡ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσαι τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ϛ̅ϛ̅ δ̅ λείψει μ̊ δ̅. αὐτὸς ἄρα ἔσται δυνάμεις ι̅ϛ̅. μονάδες ι̅ϛ̅ λείψει ϛ̅ϛ̅ λβ̅ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ ιϛ̅. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ζ ιϛ̅ϛ̅. ὁ δὲ δεύτερος οα̅ ιϛ̅ϛ̅. ὁ δὲ τρίτος ρϟϑ̅. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

LEMMA Diophanti prorſus idem eſt cum decima octaua propoſitione primi poriſmatum, vt euidens eſt. Operatio & ſolutio dupliciter variari poteſt. Primò enim ipſi numeri poni poſſunt ad libitum, dum ſequens contineat ſemper duplum præcedentis vnitate auctum, ita primo poſito 2 N. ponetur ſecundus 4 N. + 1. tertius 8 N. + 3. & ſic in infinitum. vel etiam primo poſito 1 N. + 1. erit ſecundus 2 N. + 3. tertius 4 N. + 7. &c. Deinde vltimi numeri quadrato æquandi latus diuerſimodè fingi poteſt, vt in hypotheſi Diophanti, numeri 16 Q. + 25 N. + 9. latus fingi poteſt 4 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus ſuperet 9. vt 4 N. − 4. 4 N. − 5. 4 N. − 6. &c. Immo in eadem hypotheſi quia numerus vnitatum 9. quadratus eſt, poſſet idem latus fingi 3 − quotlibet Numeris, quorum quadratus ſuperet 16 puta 3 − 5 N. 3 − 6 N. &c.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τῇ ἐξῆς ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ διπλασίων ὢν μονάδα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τὸν μείζονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ϛ ἑνὸς μ̊ α̃. τὸν δὲ δεύτερον ὁμοίως ϛ̃ β̃. μ̊ α̃. τὸν δὲ τρίτον ϛ̃ δ̃ μ̊ α̃. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον ϛ τῷ δευτέρῳ ποιεῖν τετράγωνον. ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου λείψει τὸν τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου λείψει τὸν πρώτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου τεσσάρων λείψει τὸν πρώτου, ποιεῖ δυνάμεις ιϛ̃ ϛ̃ους ζ̃. ταῦτα ἴσα τεσσαρσὶ πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ϛ̃ ε̃. δυνάμεις ἄρα κε̃ ἴσαι δυνάμεσι ιϛ̃ ἀριθμοῖς ζ̃. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ̃ θ̃. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιϛ̃ θ̃ᵒᵗ. ὁ δὲ δεύτερος κγ̃ θ̃ᵒᵗ. ὁ δὲ τρίτος λζ̃ θ̃ᵒᵗ. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt cuiuſuis quadratus detracto proximè ſequente numero, faciat quadratum. Quandoquidem ſi numerus numeri duplo vnitate minor ſit, quadratus minoris dempto quadrato maioris, facit quadratum: ſtatuo primum 1 N. + 1. ſecundum 2 N. + 1. Tertium ſimiliter 4 N. + 1. & accidit quadratum primi dempto ſecundo facere quadratum, & adhuc quadratum ſecundi dempto tertio facere quadratum. Reſtat vt & tertij quadratus dempto primo quadratum faciat. Sed tertij quadratus dempto primo facit 16 Q. + 7 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 5 N. Proinde 25 Q. æquantur 16 Q. + 7 N. & fit 1 N. $\frac{7}{9}$. Erit igitur primus $\frac{16}{9}$. ſecundus $\frac{23}{9}$. tertius $\frac{32}{9}$. & conſtat propoſitum.

IN QVÆSTIONEM XXXIV.

LEMMA quod aſſumit Diophantus nil aliud dicit, quàm quod oſtenſum eſt propoſitione decima nona primi poriſmatum. Operatio & ſolutio totidem modis variari poteſt, quot & præcedentis, vt diutius immorandum non ſit in re manifeſta.

QVÆSTIO XXXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν προσλαβὼν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, καὶ λάβωμεν καθ' ὃν μετρῆται, καὶ ὑπὸ τοῦ μείζονος τοῦ μετροῦντος, καὶ καθ' ὃν μετρεῖ, ἀφέλωμεν τὸν ἐλάττονα, ὁ ὑπὸ τῆς ἡμίσεως τοῦ λοιποῦ τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἐξ ἀρχῆς ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ὑπὸ δυνάμεών τινων ἐχουσῶν μετροῦντας τρεῖς. ἔστω δὲ ιβ̃. μετρεῖ γὰρ αὐτὸν μονὰς ἃ κγ̃ τὸν ιβ̃ καὶ μονάδες β̃ κγ̃ τὸν ϛ̃. καὶ μονάδες γ̃. κγ̃ τὸν δ̃. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὸν μετροῦντα ὑπὸ τοῦ καθ' ὃν μετρεῖ, καὶ τοῦ λοιποῦ λάβω τὰ ἥμισυ. τάσσω τοὺς τρεῖς, τὸν μὲν πρῶτον μ̊ ε καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον μ̊ β̃ τὸν δὲ τρίτον μ̊ τὸ ἥμισυ, καὶ δῆλον ὡς ὑπὸ ἑκάστου τούτων τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιβ̃. ποιεῖ

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque quadratus adſcita ſumma omnium faciat quadratum. Quandoquidem ſi numerus numerum metiatur, & ſumamus eum per quem metitur; & duorum (metientis ſcilicet, & eius per quem metitur) minorem de maiore auferamus, reſidui ſemiſſis quadratus adſumpto propoſito initio ad metiendum numero, quadratum facit. Pono ſummam quidem trium aliquem quadratorum numerum, qui habeat tres ipſum metientes. Eſto itaque 12. Nam ipſum metitur vnitas per 12. & 2. per 6. & 3. per 4. & ſi detraxero metientem ab eo per quem metitur, & reſiduorum ſemiſſes ſumpſero; Ponam tres numeros primum quidem 5 $\frac{1}{2}$. ſecundum verò 2. tertium autem $\frac{1}{2}$. & patet horum vniuſcuiuſque quadratum

dratum adscito 12. facere quadratum, nimirum $12\frac{1}{4}$ & 16. & 42. $\frac{1}{4}$. Statuo igitur illos in numero primum $5\frac{1}{2}$ N. secundum 2 N. tertium $\frac{1}{2}$ N. Oportet autem trium summam æqualem esse 12 Q. sed trium summa est 8 N. Proinde 8 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. $\frac{8}{12}$ seu $\frac{4}{6}$. Erit ergo primus $\frac{22}{6}$ secundus $\frac{8}{6}$. tertius $\frac{2}{6}$ & constat propositum.

τετράγωνον. ὧν μὲν ιβ̄ ϗ ᾱ δ̄. ὧν δὲ ις̄ ὧν δὲ μβ̄. ᾱ δ̄. Τάσσω οὖν αὐτὼς ἐν ἀριθμῷ τὸ μὲν πρῶτον ς̄ ε̄ ☾ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον ς̄ β̄. τὸν δὲ τρίτον ς̄ ἡμίσεως. δεῖ δὴ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν τειῶν ἴσον εἶναι δυνάμεσι ιβ̄. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τειῶν ἀριθμοὶ εἰσὶν η̄. ἀριθμοὶ ἄρα η̄ ἴσοι δυνάμεσι ιβ̄. ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς η̄ ις̄ ἤτοι δ̄ ς̄. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ιβ̄ ς̄. ὁ δὲ δεύτερος η̄ ς̄. ὁ δὲ τρίτος β̄ ς̄. ϗ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXV.

LEMMA Diophanti coincidit prorsus cum quinta secundi Euclidis, vel cum secunda secundi porismatum. Solutionis varietas à duplici pendet capite. Primò enim summa numerorum poni potest non solùm 12 Q. sed & quilibet alius quadratorum numerus. Deinde posita eadem summa 12 Q. ipsi numeri diuersimodè poni possunt, prout sumentur semisses interuallorum duorum quorumlibet numerorum, quorum mutuo ductu fiat 12. Nam quod metientes sumendos esse ait Diophantus, id facit facilitatis gratia, ad vitandas fractionum molestias. Cæterùm quinta secundi cui innititur hæc operatio, abstrahit à numeris integris, & à fractis, vt liquet ex ipsius demonstratione.

Hîc si placet formabis huiusmodi Canonem.

Sume quemlibet numerum, tum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, interuallorum semisses simul additos diuide per sumptum numerum, quotientem ducito sigillatim in eosdem semisses, fient quæsiti numeri.

Verbi gratia sume 48. qui fit tum ex 2. in 24 tum ex 4. in 12. tum ex 6 in 8. interuallorum semisses sunt 11. 4. 1. quorum summa 16. qua diuisa per 48. fit $\frac{1}{3}$ quo ducto sigillatim in ipsos 11. 4. 1. fiunt quæsiti numeri $\frac{11}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque quadratus, multatus summa omnium, faciat quadratum. Pono similiter aliquem numerum qui tres ipsum metientes habeat. Esto rursus 12. additoque metiente ad eum per quem metitur, & semisse summæ capto, statuo tres numeros, primum $6\frac{1}{2}$ N. secundum 4 N. tertium $3\frac{1}{2}$ N. & contingit horum vniuscuiusque quadratum demptis 12 Q. facere quadratum. Superest vt trium summa sit æqualis 12 Q. sed tres simul iuncti faciunt 14 N. Igitur 14 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. $\frac{7}{6}$. Erit ergo primus $\frac{45}{6}$ $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{28}{6}$. tertius $\frac{24}{6}$ $\frac{1}{2}$. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λοιπὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν τειῶν ποιῇ τετράγωνον. τάσσω ὁμοίως ἀριθμόν τινα ὃς μετροῦντας ἔχει τρεῖς. ἔστω πάλιν τὸν ιβ̄. ϗ προσθεὶς τὸν μετροῦντα τῷ καθ' ὃν μετρεῖ, ☾ ἥμισυ λαβών, τάσσω τοὺς ζητοῦντας ἀριθμούς, τὸν μὲν ς̄ ϗ ἥμισυ. τὸν δὲ ἀριθμῶν δ̄. τὸν δὲ ς̄ γ̄ ϗ ἥμισυ. καὶ συμβαίνει τὸ ἀπὸ ἑκάστου τετράγωνον λοιπὸν εἶναι δυνάμεις ιβ̄ ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ τοὺς ζητοῦντας εἶναι ἴσους δυνάμεσι ιβ̄. ἀλλ' οἱ ζητοῦντες συντεθέντες ποιοῦσιν ς̄ις̄ ιδ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ιδ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ιβ̄. ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ̄ ς̄. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ ε̄ ☾ ἥμισυ ὁ δὲ δεύτερος κη̄ ς̄. ὁ δὲ τρίτος κδ̄ ς̄ ϗ ἥμισυ. ϗ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

LEMMA hîc assumptum iisdem inititur fundamentis, quibus & lemma præcedentis, vt manifestum est. solutio quoque totidem modis variari potest. Et ex ipsa operatione formabitur huiusmodi Canon.

Sume quemlibet numerum, tum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, aggregatorum semisses simul additos diuide per sumptum numerum, quotientem ducito sigillatim in eosdem semisses, fient quæsiti numeri.

Verbi gratia, sume 48. qui fit tum ex 2. in 24. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum semisses sunt 13. 8. 7. quorum summa 28. qua diuisa per 48. fit $\frac{7}{12}$ quo ducto sigillatim in ipsos 13. 8. 7. fiunt quæsiti numeri $\frac{91}{12}$. $\frac{56}{12}$. $\frac{49}{12}$.

Cæterùm Diophantus more Græcorum vtendo fractionibus fractionum. Primum quidem exhibuit $\frac{45}{6}$. $\frac{1}{2}$. id est $\frac{45}{6}$. & dimidium $\frac{1}{6}$. hoc est $\frac{91}{12}$. Tertium verò $\frac{24}{6}$ $\frac{1}{2}$. id est $\frac{24}{6}$. & dimidium $\frac{1}{6}$. seu $\frac{49}{12}$.

Patet autem eodem prorsus artificio, & hanc & præcedentem ad quotlibet numeros extendi posse, quod vnico exemplo docuisse sufficiet. Quæruntur quatuor numeri, vt vniuscuiusque quadratus multatus summa omnium, quadratus remaneat. Vtendo Canone allato, sumatur 48. qui fit ex 2. in 24. tum ex 3. in 16. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum semisses sunt 13. 9. $\frac{1}{2}$. 8. 7. quorum summa 37. $\frac{1}{2}$. qua diuisa per 48. fit $\frac{25}{32}$. quo ducto sigillatim in ipsos 13. 9. $\frac{1}{2}$. 8 & 7. & omnibus ad eandem reductis denominationem, fiunt quæsiti numeri $\frac{650}{64}$. $\frac{475}{64}$. $\frac{400}{64}$. $\frac{350}{64}$.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER TERTIVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque eorum quadratus à ſumma trium numerorum detractus, faciat quadratum. Expone duos quadratos, alterum ab 1 N. alterum à 2 N. & fit ſumma quadratorum ab ipſis 5 Q. Pono ergo ſummam trium numerorum 5 Q. & quæſitorum primum 1 N. ſecundum verò 2 N. Ita duabus propoſiti partibus eſt ſatisfactum. Et quoniam habemus 5. qui diuiditur in duos quadratos, nimirum 1. & 4. diuidatur idem rurſus, vt ſupra demonſtratum eſt, in alios duos, quadratos, videlicet in $\frac{4}{25}$. & $\frac{121}{25}$. Pono igitur tertium latus vnius horum, puta $\frac{2}{5}$ N. & enim illius quadratus à ſumma omnium de tractus facit quadratum $\frac{121}{25}$. Q. ſupereſt vt tres ſimul æquentur 5 Q. ſed tres ſimul efficiunt $3\frac{2}{5}$ N. Igitur 1 N. fit $\frac{85}{125}$. Erit ergo primus $\frac{85}{125}$. ſecundus $\frac{170}{125}$. tertius $\frac{34}{125}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ληφθεὶς ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. ἐκτίθου δύο τετραγώνους, τὸν μὲν ἀπὸ ς^ου ἑνὸς. τὸν δὲ ἀπὸ ςς β̄. καὶ γίνονται οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι δ^υ ε̄. τάσσω τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν δ^ν ε̄. καὶ τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν, τὸν μὲν πρῶτον ς^ν ἕνα, τὸν δὲ δεύτερον ςς β̄. καὶ ἔστι δύο τῶν ἐπιταγμάτων λελυμένα. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν τὸν ε̄. διαιρούμενον εἰς δύο τετραγώνους τήν τε μονάδα καὶ τὴν τετράδα, ἔστω μετὰ τὸ διελεῖν αὐτὸν ὡς προδέδεικται εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους εἰς τε δ̄^κε^ν. καὶ ρκᾱ^κε^ν. τάσσω νῦν τὸν τρίτον τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τούτων. ἔστω β^ε^ν ἀριθμοῦ καὶ μένει πάλιν ὁ ἀπ' αὐτοῦ ληφθεὶς ἀπὸ συναμφοτέρου ποιῶν τετράγωνον τὸν ρκᾱ^κε^ν. δεήσει τοὺς τρεῖς λοιπὸν ἴσους εἶναι δυνάμεσι ε̄. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσιν ςς γ̄. καὶ β̄^ε^ν. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς πε̄^ρκε^ν. ὁ δὲ δεύτερος ρο̄^ρκε^ν. ὁ δὲ τρίτος λδ̄^ρκε^ν. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

In III. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis eſt. Numerus ex duobus quadratis compoſitus, puta 5. rurſus diuiditur in alios duos quadratos per decimam ſecund. Vnde patet hanc quæſtionem ad quotlibet numeros extendi poſſe. Etenim quærantur quatuor Numeri, vt cuiuſlibet eorum quadratus à ſumma numerorum demptus, relinquat quadratum. Ponatur ſumma 5 Q. Primus verò 1 N. ſecundus 2 N. Diuiſoque 5. rurſus in duos alios quadratos, quorum latera $\frac{2}{5}$ & $\frac{11}{5}$ ponatur tertius $\frac{2}{5}$ N. Quartus $\frac{11}{5}$ N. erit ſumma omnium $5\frac{3}{5}$ N. æqualis 5 Q. & fit 1 N. $\frac{28}{25}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{140}{125}$. $\frac{280}{125}$. $\frac{56}{125}$. $\frac{308}{125}$. Diuerſitas porrò operationis & ſolutionis è duplici capite oritur. Primò enim ſumma numerorum poni poteſt, quilibet quadratorum numerus ex duobus quadratis compoſitus, puta 10 Q. 13 Q. 17 Q. &c. Deinde manente eadem ſumma numerorum

puta 5 Q. possunt ipsi numeri poni diuersimodè, prout 5. diuidetur in alios atque alios quadratos. Hinc etiam elicietur Canon vniuersalissimus.

Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compositum, quem rursus diuide toties in duos alios quadratos, donec habeas tot quadratorum latera, quot petuntur numeri. Horum laterum summam diuide per numerum initio sumptum, quotientem ducito sigillatim in ipsa latera, fient quæsiti numeri.

Vt si petantur 4. numeri. Sume 65. quem diuide bis in duos quadratos, erunt horum latera 1. 8. 4. 7. quorum summa 20. qua diuisa per 65. fit $\frac{4}{13}$. quo ducto sigillatim in supradicta latera, fiunt quæsiti numeri $\frac{4}{13}$ $\frac{32}{13}$ $\frac{16}{13}$ $\frac{16}{13}$.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνον προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν ∆Ῡ α̅. τάσσω τῶν μὲν πρώτων ∆Ῡ τρισσ̄. τὸν δὲ δεύτερον ∆Ῡ η̅. τὸν δὲ τρίτον ∆Ῡ ιε̅. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστιν ἡ δύναμις μία προσλαβοῦσα ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. ὧν μὲν ∆Ῡ ∆Η̄. ὧν δὲ ∆Ῡ ΣΤ̄. ὧν δὲ ∆Ῡ ις̄. καὶ δεήσει τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι τῇ πλευρᾷ ἀπὸ τῶν τριῶν, τουτέστι ἑνός. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι ∆Η̄ κς̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α̅ κς̄ ι̅. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ̅ κς̄ ι̅ ὁ δὲ δεύτερος η̅ κς̄ ι̅. ὁ δὲ τρίτος ιε̅ κς̄ ι̅. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt quadratus summæ ipsorum, quouis ipsorum adiuncto quadratum faciat. Ponatur quadratus summæ trium numerorum 1 Q. Tunc statuam primum 3 Q. secundum 8 Q. tertium 15 Q. vt quadratus summæ trium, nimirum 1 Q. adscito quolibet ipsorum faciat quadratum, hunc quidem 4 Q. illum verò 9. Q. illum denique 16 Q. Oportet autem & tres coniunctos æquari lateri quadrati summæ omnium, hoc est 1 N. sed tres coniuncti efficiunt 26 Q. fit igitur 1 N. $\frac{1}{26}$ erit ergo primus $\frac{9}{676}$ secundus $\frac{64}{676}$ tertius $\frac{225}{676}$. & soluunt quæstionem.

IN QVÆSTIONEM II.

HIC etiam duplici de causa variari potest & operatio & solutio. Primò enim quadratus summæ numerorum statui potest quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c. Deinde quadrato summæ manente eodem, ipsi numeri ponentur diuersimodè, prout quadratus summæ auferetur à diuersis quadratis, & residua ponentur pro quæsitis numeris. Sit posito quadrato summæ 1 Q. poni possunt ipsi numeri, non solùm vt fecit Diophantus 3 Q. 8. Q. 15 Q. sed etiam 24 Q. 35 Q. 48. Q. & sic in infinitum. Vnde patet eadem arte quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Et hinc quoque formatur Canon vniuersalis.

Sume quemlibet quadratum, quem aufer à totidem quadratis, quot petuntur numeri, per summam residuorum diuide latus sumpti ab initio quadrati, quotientis quadratum ducito sigillatim in ipsa eadem residua, fient quæsiti numeri.

QVÆSTIO III.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν μ̅ ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ςς̄ ∆Ῡ. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος ∆Η̄ ις̄. ὃς λείψας δυνάμεις ζ̅. καὶ δυνάμεις ιβ̅. καὶ δυνάμεις ιε̅ ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δυνάμεις ζ̅ τὸν δὲ δεύτερον δυνάμεις ιβ̅. τὸν δὲ τρίτον ∆Ῡ ιε̅. λοιπὸν δεῖ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι τῇ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ὑπόκειται ςς̄ ∆Ῡ. οἱ δὲ τρεῖς εἰσι ∆Ῡ λδ̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β̅ ιζ̅. ἡ δὲ δύναμις

INVENIRE tres numeros, vt eorum summæ quadratus, quouis ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur summa trium 4 N. erit illius quadratus 16 Q. qui detractis tum 7 Q. tum 12 Q. tum 15 Q. facit quadratum. Statuo ergo primum 7 Q. secundum 12 Q. tertium 15 Q. Reliquum est compositum ex tribus æquari summæ illorum. Sed summa trium posita est 4 N. Compositus autem ex tribus est 34 Q. Proinde fit 1 N. $\frac{34}{4}$. Quadratus $\frac{1156}{16}$. erit ergo primus $\frac{28}{1156}$ se-

cundus $\frac{48}{289}$. tertius $\frac{60}{289}$. & ſoluunt quæſtionem.

Δ^{σπῦ}. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος κη^{σπγ}. ὁ δὲ δεύτερος μη^{σπθ}. ὁ δὲ τρίτος ξ^{σπθ}. καὶ ποιῶσι τὸ προβλημα.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE tres numeros, vt quadratus compoſiti ex tribus, detractus à quolibet ipſorum faciat quadratum. Ponatur, compoſitus ex tribus 1 N. Quadratus autem illius 1 Q. & ſunto tres numeri; hic quidem 2 Q. ille verò 5 Q. tertius 10. Q. Nam horum quilibet detracto quadrato compoſiti ex tribus, hoc eſt 1 Q. facit quadratum. Et quia quadratus compoſiti ex tribus, latus habet, patet hoc eſſe compoſitum ex tribus. Summa igitur trium eſt 1 N. ſed eſt quoque 17 Q. Fit igitur 1 N. $\frac{1}{17}$. quadratus $\frac{1}{289}$. eritque primus $\frac{3}{289}$. ſecundus $\frac{5}{289}$. tertius $\frac{10}{289}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμὸς ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ς^{ς} ἑνός. ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ τετράγωνος δ^{υ} α. καὶ ἔστωσαν οἱ τρεῖς ὧν μὲν δ^{υ} β. ὧν δὲ δ^{υ} ε. ὧν δὲ δ^{υ} ι. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν λείπας τὸ ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστι τὴν δ^{υ} α. ποιῶν τετράγωνον, καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τῶν τειῶν πλευρὰν, ἔχει, δίλον. ὅτι ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τειῶν. ἡ ἄρα συνθεσις τῶν τειῶν ἐστιν ς^{ς} ἑνὸς, ἀλλ' καὶ δυνάμεων ιζ^{ς}. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α^{ι} ιζ^{ς} ἡ δὲ δύναμις α^{σπθ}. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος β^{σπθ}. ὁ δὲ δεύτερος ε^{σπθ}. ὁ δὲ τρίτος ι^{σπθ}. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONES III. ET IV.

NVLLA in his difficultas. Eadem ferè hîc dici poſſunt, quæ ad duas præcedentes ſunt adnotata, & Canones eadem facilitate formabuntur. Cæterùm his quatuor quæſtionibus idem agit Diophantus in tribus numeris, quod fecit in duobus, libro ſecundo quæſtionibus 23. 24. 25. 26. vnde etiam colligere licet huiuſmodi quæſtiones ad quotlibet numeros eadem arte extendi.

QVÆSTIO V.

INVENIRE tres numeros, quadrato æquales, quorum bini reliquum ſuperent quadrato numero. Ponantur tres ſimul æquales quadrato ab 1 N. + 1. hoc eſt 1 Q. + 2 N. + 1. Quorum primus & ſecundus ſuperent tertium vnitate. Erit ergo tertius $\frac{1}{2}$ Q. + 1 N. ſic enim primus & ſecundus ſuperabunt illum vnitate. Rurſus ſecundus & tertius ſuperent primum quadrato, nimirum 1 Q. erit ſimiliter primus 1 N. + $\frac{1}{2}$. Reliquum ergo habemus ſecundum $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$. ſupereſt vt primus & tertius ſuperent ſecundum quadrato numero. Sed quo primus & tertius ſuperant ſecundum ſunt 2 N. Hoc ergo æquatur quadrato, puta 16. & fit 1 N. 8. erit igitur primus 8 $\frac{1}{2}$. ſecundus 32 $\frac{1}{2}$. tertius 40 & ſatisfaciunt propoſito.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμὸς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως συν' δύο λαμβανόμενοι, τῶ λοιπῶ ὑπερέχωσι τετραγώνῳ. Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ ἀπὸ ς^{ς} α μ^{ο} α. τουτέστι δ^{υ} α ς^{ς} β μ^{ο} α. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τῶ τρίτου ὑπερέχετωσαν μ^{ο} α. ὁ ἄρα τρίτος ἔσαι δ^{υ} ἡμίσεος ς^{ς} α. ἵνα καὶ ὁ δεύτερος ὑπερέχωσι τῶ τρίτου τῇ μ^{ο}. πάλιν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τῶ πρώτου ὑπερέχωσι τετραγώνῳ. ὑπερεχέτωσαν δ^{υ} α. ἔσαι ὁμοίως ὁ πρῶτος ς^{ς} α μ^{ο} ἡμίσεος. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν δεύτερον ἔχομεν δυνάμεως ἡμίσεος μ^{ο} ἡμίσεος. λοιπὸν δεῖ τὸν πρῶτον μῆ τῶ τρίτου ὑπερέχειν τῶ δευτέρῳ τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ πρῶτος μῆ τῶ τρίτου τῶ μὲν δευτέρῳ ὑπερέχει ς^{ς} β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, τουτέστι μ^{ο} ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^{ο} η. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ^{ο} η καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ο} λβ καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ τρίτος μ^{ο} μ. καὶ ποιῶσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM V.

QVOD supponit hîc Diophantus, tale est.

Datis tribus numeris, si interuallum quo duo ex illis superant tertium auferatur à summa trium numerorum, remanet duplum tertij.

Hoc ipsum verò iam demonstratum est ad decimam octauam primi. Dupliciter autem variari possunt tam operatio quàm solutio. Primo enim quadratus qui ponitur pro summa trium numerorum fingi potest non solùm à latere 1 N. + 1. sed à quotcunque Numeris + quotcunque vnitatibus. Deinde interuallum primi & tertij supra secundum, quod in hypothesi Diophantæa reperitur 2 N. potest æquari cuilibet vnitatum numero quadrato, vt manifestum est.

QVAESTIO VI.

Αλλως.

ΖΗΤΩ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους, ἴσους τετραγώνῳ. ἐὰν δὲ συνθῶ β̄ τετραγώνους οἷον τὸν δ̄ καὶ τὸν θ̄. καὶ ζητήσω τὶς τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιγ̄. ποιεῖ τετράγωνον. εὑρήσω τὸν λϛ̄. καὶ ἔσονται οἱ τρεῖς τετράγωνοι ἴσοι ἑνὶ τετραγώνῳ. λοιπὸν ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως σὺν δύο τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι δοθέντι ἀριθμῷ, ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου, μ̄ δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου, τοῦ πρώτου, μ̄ θ̄ ὁ δὲ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου μονάδες λϛ̄. τοῦτο δὲ προδέδεικται καὶ ἐστὶ ὁ μὲν πρῶτος μ̄ κ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ϛ̄ καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ τρίτος μονάδων κβ̄ καὶ ἡμίσεος. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Aliter.

QVÆRO primùm tres numeros quadratos æquales quadrato. Si autem duos quadratos composuero, vt 4. & 9. & quæsiuero quis quadratus adscito 13. faciat quadratum, inueniam 36. & erunt tres quadrati æquales vni quadrato. Restat vt quæramus tres numeros, vt bini iuncti reliquum superent dato numero, primus scilicet & secundus, tertium superent vnitatibus 4. secundus & tertius primum excedant vnitatibus 9. tertius & primus secundo superaddant vnitates 36. Hoc autem supra demonstratum est. Et est primus 20. secundus $6\frac{1}{2}$. tertius $22\frac{1}{2}$. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM VI.

DVO supponit Diophantus. Primum reperiri posse tres quadratos, quadratum simul conficientes, quod quidem facilè fit auxilio vndecimæ secundi. Nam sumptis duobus quibuslibet quadratis puta 4. & 9. quorum summa 13. Iam quæro per vndecimam secundi duos quadratos quorum interuallum sit 13. & horum minor 36. est tertius quæsitus. Secundò supponit author tres excessus binorum suprà reliquum, æquari summæ ipsorum numerorum, quod iam à nobis est demonstratum ad decimam octauam primi. Porrò tum ex hac operatione, tum ex Canone decimæ octauæ primi eruitur huiusmodi Canon.

Sume tres quadratos quadratum conficientes, ab eorum summa aufer sigillatim vnumquemque ipsorum, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

Sed & non vulgari artificio quæstio extendetur ad quatuor numeros, & sic proponetur.

Inuenire quatuor numeros quadrato æquales, quorum terni reliquum superent quadrato numero.

Ponatur summa numerorum quilibet numerus quadratus, puta 4. Quia ergo vt ostensum est ad vigesimam primi, summa excessuum dupla est summæ numerorum, erit excessuum summa 8. Restat ergo vt 8. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 4. Id autem facilè fiet si 4. diuidatur bis in duos quadratos per octauam secundi, eruntque hi $\frac{36}{25}$ $\frac{64}{25}$ $\frac{100}{169}$ $\frac{576}{169}$. Itaque applicando hîc Canonem vigesimæ primi, hoc est à semisse excessuum qui est 4. auferendo singulos excessus, & residuorum capiendo semisses, fient quæsiti numeri $\frac{32}{25}$ $\frac{18}{25}$ $\frac{59}{169}$ $\frac{288}{169}$. sic licebit quæstionem ad quotlibet numeros extendere, sed aliquando vtendum erit artificio quo duodecima quinti vtitur Diophantus. Vt si quærantur quinque numeri quadrato æquales, quorum quaterni reliquum superent quadrato numero. Quare quæstionis huius explicationem reiicimus in decimam septimam quinti, vbi commodius afferetur.

QVÆSTIO VII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt bini iuncti faciant quadratum. Statuantur tres simul æquales quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. & esto primus cum secundo 1 Q. relinquetur ergo tertius 2 N. + 1. Esto autem secundus cum tertio 1 Q. + 1 − 2 N. à latere 1 N. − 1. Et quia tres simul sunt 1 Q. + 2 N. + 1. relinquetur vtique primus 4 N. sed primus cum secundo positus est 1 Q. erit igitur secundus 1 Q. − 4 N. Oportet itaque & primum tertio iunctum, nempe 6 N. + 1. æquari quadrato. Sit ergo is 121. & fit 1 N. 20. erit igitur primus 80. secundus 320. tertius 41. & soluunt quæstionem.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ἵνα συνὰ δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ δῡ α̅, ςᾶ β̅ μο̄ α̅ καὶ ἔστω, ὁ πρῶτος μῖ τῷ δευτέρῳ, δῡ α̅. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ςᾶ β̅ μο̄ α̅. ἔστω ὁ ἁ. ὁ δεύτερος μῖ τῷ τρίτου, δῡ α̅ μο̄ α̅ γ̅ ςᾶ β̅. ἀπὸ πλευρᾶς ς̅ α̅ λείπει μο̄ α̅. καὶ εἰσὶν οἱ ἓξ εἰς δῡ α̅ ςᾶ β̅ μο̄ α̅. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςᾶ δ̅. ἀλλὰ καὶ συνὰ τῷ δευτέρῳ τέτακται δῡ α̅. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται δῡ α̅ λείπει ςᾶ δ̅. δεῖ οὖν ἄρα καὶ τὸ πρῶτον μῖ τῷ τρίτου συναμφότερον ςᾶ ε̅ μο̄ α̅. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ἔστω ἴσος μο̄ ρκα̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μο̄ κ̅. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μο̄ π̅. ὁ δὲ δεύτερος μο̄ τκ̅. ὁ δὲ τρίτος μο̄ μα̅. καὶ ποιοῦσι τὸ ὑπόταγμα.

QVÆSTIO VIII.

Aliter.

PONANTVR tres simul 1 Q. + 2 N. + 1. & sint primus & secundus 1 Q. relinquitur ergo tertius 2 N. + 1. Esto rursus secundus cum tertio 1 Q. + 1. − 2 N. horum ergo tertius cùm sit 2 N. + 1. relinquitur secundus 1 Q. − 4 N. est autem & primus cum secundo 1 Q. quorum secundus est 1 Q. − 4 N Relinquitur ergo primus 4 N. & tres coniuncti faciunt imperatum quadratum 1 Q. + 2. N. + 1. & primus cum secundo, itemque secundus cum tertio faciunt quadratum. Oportet itaque & tertium cum primo iunctum, nimirum 6 N. + 1. æquari quadrato. Esto quadrato 36. & fit 1 N. $\frac{35}{6}$. Erit ergo primus $\frac{140}{6}$. hoc est $\frac{840}{36}$. secundus $\frac{385}{36}$. tertius $\frac{456}{36}$. & soluunt quæstionem.

Αλλως.

ΤΕΤΑΧΘΩΣΑΝ οἱ τρεῖς δῡ α̅ ςᾶ β̅ μο̄ α̅. καὶ ἔστω ὁ πρῶτος μῖ δευτέρῳ δῡ α̅. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ςᾶ β̅ μο̄ α̅. ἔστω ἁ μῖ ὁ δεύτερος μῖ τῷ τρίτου δῡ α̅ μο̄ α̅ λείπει ςᾶ β̅. ὧν ὁ τρίτος ςᾶ β̅ μο̄ α̅. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δῡ α̅ λείπει ςᾶ δ̅. δεῖ ἁ μῖ ὁ πρῶτος μῖ τῷ δευτέρῳ δῡ α̅. ὧν ὁ δεύτερος δῡ α̅ λείπει ςᾶ δ̅. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςᾶ δ̅. καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ὑποταχθέντα τετράγωνον δῡ α̅ ςᾶ β̅ μο̄ α̅. καὶ ὁ πρῶτος μῖ τῷ δευτέρῳ, καὶ ὁ δεύτερος μῖ τῷ τρίτου ποιοῦσι τετράγωνον. δεῖ ἄρα καὶ τὸν τρίτον μῖ τὸν πρώτου συναγόμενον ςᾶ ε̅ μο̄ α̅. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. ἔστω μο̄ λε̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λε̅ ιε̅. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρμ̅ ε̅. τουτέστι ωμ̅ λε̅. ὁ δὲ δεύτερος τπε̅ λε̅. ὁ δὲ τρίτος υνε̅ λε̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVÆSTIONES VII. ET VIII.

INTER has duas propositiones nulla omnino vel perexigua est differentia; eadem fermè est operatio aliter atque aliter explicata. Diuersitas in eo consistit, quod in septima inuenta prius tertij numeri hypostasi, inuenit deinde hypostasim primi, vnde elicit hypostasim secundi. At in octaua inuento prius tertio, inde elicit secundum, atque inde primum. Eodem tamen recidit vtraque operatio, vt manifestum est. Itaque vt omnia explicentur dilucidè, & varietas omnis tum operationis tum solutionis perfectè comprehendatur.

Aduerte primò, vt benè monet Xilander, pro quadrato quem tres numeri simul constituunt statui posse quemlibet quadratum, cuius latus constet ex quolibet Numerorum numero + quot-

libet vnitatibus. Posuit Diophantus latus illius 1 N. + 1. sed poni poterat 1 N. + 2. vel 1 N. + 3. &c. vel etiam 2 N. + 1. 2 N. + 2. 2 N. + 3. &c.

Aduerte secundò pro summa secundi & tertij statui posse quadratum quemlibet minorem quadrato, qui positus est pro summa trium numerorum. Sic Diophantus posita summa trium 1 Q. Q. + 2 N. + 1. posuit summam secundi & tertij 1 Q. − 2 N. + 1. sed si ponatur summa trium 1 Q. + 4 N. + 4. poni poterit summa secundi & tertij 1 Q. + 2 N. + 1. vel etiam 1 Q. − 2 N. + 1. vel 1 Q. − 4 N. + 4. & sic in infinitum.

Aduerte tertiò summam primi & tertij quæ quadrato æquanda manet, æquari debere tali quadrato, vt inde auferendo vnitates quæ continentur in eadem summa, & diuidendo residuum per numerum Numerorum eiusdem summæ, prodeat quotiens maior numero Numerorum, qui reperiuntur cum signo defectus in hypostasi secundi numeri. vt in hypotesi Diophantæa, vbi summa primi & tertij 6 N. + 1. est æquanda quadrato, quia hypostasis secundi est 1 Q. − 4 N. Oportet inuenire quadratum qui vnitate multatus, & diuisus per 6. det quotientem maiorem quàm 4. Id autem vt arte certa consequamur. Ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. vnde ablata vnitate, fiet 1 Q. − 1. quo diuiso per 6 fiet $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{1}{6}$. maior quàm 4. & supplendo defectum, fiet $\frac{1}{6}$ Q. maior quàm 4 $\frac{1}{6}$ & omnia per 6. multiplicando fiet 1 Q. maior quàm 25. Quamobrem æquabimus 6 N. + 1. cuilibet quadrato maiori quàm 25. In prima operatione Diophantus æquauit 6 N. + 1. quadrato 121. In secunda verò, quadrato 36. Eodemque artificio reperietur terminus suprà quem consistere debet talis quadratus, si primæ positiones aliter instituantur.

Porro ex operatione Diophanti elicio satis artificiosum Canonem.

Cape duos quadratos quorum ratio sit maior quàm 25. ad 1. horum interualli bessit continet primum quæsitorum; Quem si auferas à quadrato quotientis qui fit diuidendo idem interuallum per sextuplum minoris lateris, orietur secundus. Denique si eiusdem interualli trienti addas minorem quadratum, fiet tertius.

Verbi gratia cape quadratos 121. & 1. horum interuallum est 120. cuius $\frac{2}{3}$ sunt 80. primus numerus. Tum diuide 120. per 6. sextuplum minoris lateris fiet 20. cuius quadratus 400. vnde auferendo 80. fit 320. secundus numerus. Denique trienti ipsius 120. qui est 40. adde minorem quadratum 1. fiet 41. tertius numerus. sunt ergo tres quæsiti numeri 80. 320. 41.

QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον ξεῖς ἀριθμὸς, τετραγώνους, ἵνα ὦσιν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὧν τὸ ἥμισυ τῆς συνθέτεως τῶν τριῶν μείζον ᾖ ἑνὶ ἑκάστῳ. τετάχθω οὖν ὁ μὲν πρῶτος δυνάμεις ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος δ̄ ᾱ ς̄ β̄ μ̄ ᾱ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ ς̄ β̄ μ̄ ᾱ. ἐὰν δὲ τῷ τετάρτῳ τὰς ς̄ β̄ μ̄ ᾱ. γίνεται ὁ τρίτος δ̄ ᾱ ς̄ δ̄ μ̄ β̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ ᾱ. λείπει μ̄ η̄. γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ ᾱ μ̄ ξδ̄. λείπει ς̄ ις̄. ἴσος δ̄ ᾱ ς̄ δ̄ μ̄ β̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ξβ̄ η̄. τουτέστι λᾱ ῑ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος πξᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ᾱχπᾱ. ὁ δὲ τρίτος ϛυᾱ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα τὸ ζητούμενον. τουτέστι ξεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὧν ἐστὶ τῶν τριῶν τὸ ἥμισυ μείζον ἑνὸς αὐτῶν. νῦν ἔρχομαι ὅτι τὸ προβεβλημένον, τουτέστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμὸς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶν οἱ τετράγωνοι

INVENIRE tres numeros in æquali interuallo, vt bini iuncti quadratum efficiant. Quæro primùm tres quadratos numeros æqualibus interuallis distantes, quorum summæ semissis maior sit quouis ipsorum. Ponatur igitur primus 1 Q. secundus autem 1 Q. + 2 N. + 1. & est ipsorum interuallum 2 N. + 1. si autem addidero secundo 2 N. + 1. fiet tertius 1 Q. + 4 N. + 2. Hæc æquantur quadrato à latere 1 N. − 8. fitque quadratus 1 Q. + 64 − 16 N. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{62}{20}$. hoc est $\frac{31}{10}$. Erit ergo primus 961. secundus 1681. tertius denique 2401. & satisfaciunt proposito, sunt enim tres quadrati æquali interuallo distantes, & semissis summæ illorum, quouis ipsorum est maior. Venio nunc ad id quod quæritur, scilicet quo pacto tres numeri inueniantur eodem interuallo se superantes, quorum bini coniuncti quadratum faciant. Primùm quæro tres quadratos in æquali interuallo, vti iam demonstratum est, & sunt huiusmodi quadrati.

Primus

Primus 961. ſecundus 1681. tertius 2401. inueniendum iam eſt quomodo primus & ſecundus facere poſſint 961. ſecundus & tertius 2401. nam ob interualli æqualitatem inuertitur ordo, tertius & primus 1681. Statuatur trium ſumma 1 N. Cùm ergo tres ſimul ſint 1 N. ſi inde detraxero ſummam primi & ſecundi nimirum 961. habebo tertium 1 N. — 961. & rurſus ſi ab 1 N. abſtulero ſummam ſecundi & tertij, nempe 1401. habebo primum 1 N. — 2401. ſi autem ab 1 N. dempſero ſummam tertij & primi, nimirum 1681. habebo ſecundum 1 N. — 1681. Reſtat vt tres ſimul iuncti æquales ſint 1 N. & fit 1. N. 25 21. ½ & factum eſt quod imperabatur.

ὁ πρῶτος πξᾶ. ὁ δεύτερος αχπα, ὁ τρίτος ϛυᾶ. νῦν δεῖ διρεῖν ὅπως ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιῶσι μ̄ πξᾶ. ὁ δὲ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ϛυα. ὑπέλαχται γὰρ διὰ τὸ ἴσων ὑπεροχήν. ὁ ἄρα τρίτος, καὶ ὁ πρῶτος μ̄. αχπᾶ. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ς̄ ἑνός, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσιν ς̄ ἑνός, ἐὰν ἄρα ἀφέλω τὰς τῶ πρώτου καὶ δευτέρου μ̄ πξᾶ. ἕξω τὸν τρίτον ς̄ ᾶ φ μ̄ πξα. καὶ πάλιν ἐὰν ς̄ ἑνὸς, ἀφέλω τὰς τῶ δευτέρου καὶ τρίτου μονάδας βυᾶ. ἕξω τὸν πρῶτον ς̄ ᾱ λείψει μ̄, βυᾶ. ἐὰν δὲ ς̄ ἑνὸς ἀφέλω τὰς τῶ τρίτου καὶ τ̄ πρώτου μονάδας αχπᾶ. ἕξω τὸν δεύτερον ς̄ ᾱ, λείψει μ̄ αχπᾶ. λοιπὸν ὅτι τὰς ζ̄ εἰς συντεθέντας ἴσους ἑξ̄ ἀριθμῷ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς βφκᾶ καὶ ἥμισυ. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM IX.

HIc multa obſeruanda ſunt quæ minimè attigit Xilander, ſine quibus operatio Diophanti nequit perfectè intelligi.

Primò, quærit tres quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quorum ſummæ ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum, quia vult vt quæſiti numeri bini & bini conſtituant huiuſmodi quadratos. Id autem fieri non poteſt, niſi trium quadratorum ſummæ ſemiſſis quolibet ipſorum ſit maior, vt demonſtratum eſt ad decimam ſextam primi, ad quam tandem reducitur hæc quæſtio, vt liquet ex vltima operatione quæ prorſus eadem eſt cum operatione decimæ ſextæ primi. vnde etiam vti poſſes Canone ibidem tradito.

Secundò, ſumit huiuſmodi quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quia inde ſequitur ipſos tres numeros quæſitos, qui bini hos quadratos conſtituunt, diſtare etiam inter ſe interuallis æqualibus, vt poſtulat quæſtio. Quod pendet à tali propoſitione.

Si fuerint tres numeri, qui bini conſtituant ſummas æqualibus interuallis diſtantes, & ipſi numeri æqualibus diſtabunt interuallis, & è conuerſo.

A 2. B 5. C 8. D 7. E 10. F 13. Sint tres A B C. quorum A B ſimul faciant D. At A C ſimul componant E, & B C. ſimul conſtituant F. ſintque D E F. æqualibus diſtantes interuallis. Dico & ipſos A B C. æqualibus interuallis diſtare, imò iiſdem prorſus quibus diſtant ipſi D E F. Etenim quia idem A. additus vtrique B & C. facit D & E. erit idem interuallum inter D & E. quod eſt inter B & C. (nam idem numerus duobus inæqualibus additus, ſummas facit eodem interuallo inæquales.) Similiter quia idem C. additus vtrique A & B. componit ipſos E & F. erit eandem ob cauſam, idem interuallum ipſorum E F. quod eſt ipſorum A B. Quare conſtat propoſitum. vnde etiam innoteſcit inuerſio illa ordinis de qua loquitur Diophantus, nam primus & ſecundus conſtituunt D. At ſecundus & tertius faciunt F. Ac demum tertius & primus componunt E. Quare & ipſe in quadratis inuentis ordinem inuertit, vult enim primum quadratum eſſe ſummam primi & ſecundi numeri. At tertium quadratum eſſe ſummam ſecundi & tertij numeri. Ac demum ſecundum quadratum eſſe ſummam tertij & primi numeri.

Tertiò numeri quadrato æquandi 1 Q. + 4 N. + 2. latus fingit Diophantus 1 N. — 8. tali arte vt reſoluendo hypoſtaſes per valorem Numeri, fiant quadrati quæſiti quales poſtulantur, nimirum vt quilibet ipſorum, minor ſit ſemiſſe ſummæ eorumdem. Id autem quomodo certa ſcientia conſequi poſſimus non ſtatim apparet. Et Xilander quidem experiendo didicit latus fictitium eſſe non poſſe 1 N. — 6. Sed non docuit modum inueniendi terminum ſupra quem conſiſtere debet vnitatum numerus in dicto latere ponendus cum defectu, quem ſanè ſi eſſe 8. exiſtimauit, allucinatus eſt, cùm optimè fingi poſſit latus illud 1 N. — 7. vt mox patebit. Itaque vt rem à fundamentis aperiamus. Quia ſi ſint tres numeri quorum quilibet minor ſit ſemiſſe ſummæ illorum, hoc idem eſt, atque ſi duo quilibet ex ipſis maiores ſint reliquo vt manifeſtum eſt. At duo quilibet maiores erunt reliquo, ſi duo minores ſimul ſuperent maximum. Eo redacti ſumus vt inueniamus tres quadratos in medietate Arithmetica, vt medius & minimus ſimul excedant maximum. eſt autem minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. Horum ergo ſumma 2 Q. +

2 N. + 1. debet esse maior maximo qui est 1 Q. + 4 N. + 2 & auferendo vtrinque similia, remanet 1 Q. maior quàm 2 N. + 1. qua æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm R. 2 + 1. seu quàm 2 1/2. Quamobrem in fingendo latere quadrati 1 Q. + 4 N + 2. curandum est vt valor numeri non sit minor quàm 2 1/2. Atqui valor Numeri fiet à quodam quadrato, multato binario, & diuiso per duplum sui lateris quaternario auctum. Inueniendus ergo est huiusmodi quadratus. Ponatur is 1 Q. Igitur 1/4 Q. + 1/4 non minor esse debet quàm 2 1/2. & omnia ducendo in 2 N. + 4. fit 1 Q. + 2 non minor quàm 5 N. + 10. & tandem 1 Q. non minor quàm 5 N. + 12. Quare æquabimus 1 Q. numero paulo maiori quàm 5 N. + 12. puta 5 N. + 14. & fiet 1 N. 7. Itaque in latere fictitio ponentur vnitates non minores quàm 7. Quod si fingatur latus illud 1 N. + 7. fiet quadratus 1 Q. + 14 N. + 49. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. 47/10. sunt ergo quæsiti quadrati 2209. 4225. 6241.

Hinc ad soluendum hoc lemma elicitur huiusmodi Canon.

Sume quemuis numerum non minorem quàm 7. & eius quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris quaternario auctum, quotientis quadratus est minimus quæsitorum. Cui si addas duplum sui lateris vnitate auctum, fiet secundus, & huic si addas idem interuallum, fiet tertius.

Semel autem inuentis tribus huiusmodi quadratus, reperientur alij infiniti idem præstantes, si iam inuenti per eundem aliquem quadratum multiplicentur vel diuidantur, nam fient quadrati æqualibus quoque interuallis distantes, vt iam monuimus ad vigesimam secundi, quæ causa est cur Diophantus omisso communi denominatore, solis vtatur numeratoribus. Denique hoc lemmate expedito, soluetur iam ipsa quæstio per Canonem decimam-sextam primi, vt euidens est. sic inuentis quadratis 2209. 4225. 6241. horum summam cape fiet 12675. cuius semissis 6337 1/2. vnde auferendo sigillatim eosdem quadratos, remanent ordine inuerso quæsiti numeri 4128 1/2. 2112 1/2. & 96 1/2.

QVÆSTIO X.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινὸς δοθέτος προσευρεῖν ἑτέρους ξεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τ δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔπι δ' ἡ οἱ τρεῖς συντεθέντες προσλαβόντες τ δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς μ̊ τειῶν, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ δύο τ πρώτων δωνάμεως α̃ ς̃ δ̃ μ̊ α̃. ἵνα μ̃ τ τειῶν μονάδων ποιῇ τετράγωνον. οἱ δ' ἐξῆς δύο δ̃ α̃ ς̃ ε̃ μ̊ ε̃. οἱ δὲ τρεῖς δ̃ α̃ ς̃ η̃ μ̊ ιγ̃. ἵνα ἡ ἔτοι μ̃ μ̊ τειῶν ποιῶσι τετράγωνον, ἡ ἐπεὶ οἱ ξεῖς εἰσι δ̃ α̃ ς̃ η̃ μ̊ ιδ̃. ὧν οἱ πρῶτοι δύο δ̃ α̃ ς̃ δ̃ μ̊ α̃. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ὅζι ς̃ δ̃ μ̊ ιβ̃. πάλιν ἐπεὶ τρεῖς εἰσι δ̃ α̃. ς̃ η̃. μ̊ ιγ̃. ὧν ὁ δεύτερος & τρίτος δ̃ α̃ ς̃ ε̃ μ̊ ε̃. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ὅζι ς̃ β̃ μ̊ ζ̃. ἀλλὰ καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός εἰσι δωνάμεως α̃ ς̃ δ̃ μ̊ α̃. ἡ λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δ̃ α̃ ς̃ β̃ λείψει μ̊ ε̃ λοιπόν ὅζι ἡ τὸν πρῶτον μ̃ τὸ τρίτου προσλαβόντα μ̊ ξεῖς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ πρῶτος μ̃ τὸ ξίτου προσλαβὼν μ̊ γ̃. γίνονται ς̃ ε̃ μ̊ κβ̃. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λγ̃ ὁ δ' δεύτερος μ̊ ρπθ̃. ὁ δὲ τρίτος μ̊ ξδ̃. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex binis quibuslibet adsumpto dato numero faciat quadratum; sed & summa trium dato numero adiecto faciat quadratum. Esto datus numerus 3. Compositus autem ex duobus primis sit 1 Q. + 4 N. + 1. vt adscito 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 6 N. + 6. Tres autem simul 1 Q. + 8 N. + 13. vt & hi adsumpto 3. faciant quadratum. Et quoniam trium summa est 1 Q. + 8 N. + 13. quorum primi duo sunt 1 Q. + 4 N. + 1. Relinquitur vtique tertius 4 N. + 12. Rursus quoniam tres simul sunt 1 Q. + 8 N. + 13. quorum secundus & tertius sunt 1. Q. + 6. N. + 6. relinquitur vtique primus 2 N. + 7. sed & primus & secundus sunt 1 Q. + 4 N. + 1 relinquitur ergo secundus 1 Q. + 2 N — 6. Superest vt primus & tertius adscito 3. faciant quadratum. Sed primus & tertius adscito 3. faciunt 6 N. + 22. Hæc ergo æquantur quadrato. Esto is 100 fit 1 N. 13. Erit igitur primus 33. secundus 189. tertius 64. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM X.

QVÆ monet Xilander de positionum varietate, verissima sunt. Sed allucinatur cùm ait numerum 6 N. + 22. æquari posse cuilibet quadrato maiori quàm 22. Nam oportet talem quadratum deligi à quo auferendo 22. & residuum per 6. diuidendo fiat quotiens cuius quadratus auctus duplo sui lateris superet 6. aliter habere non posset secundus numerus qui positus est 1 Q. + 2 N. − 6. Ita si ponas 6 N. + 22 æquari quadrato 25. secundus numerus inuenietur minor nihilo. Quamobrem sumendus est quadratus 36. vel quilibet alius maior quàm 36. vt certa ratione facilè concludi potest. Etenim quia 1 Q. + 2 N. debent excedere 6. hac æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm ℞ 7 − 1. seu non minor quàm 1 $\frac{3}{4}$. fit autem valor numeri, vt dictum est à quodam quadrato auferendo 22. & residuum diuidendo per 6. quare quæratur huiusmodi quadratus, & esto 1 Q. Igitur $\frac{1}{6}$ Q. + $\frac{22}{6}$. non minor esse debet quàm 1 $\frac{3}{4}$. & tandem 1 Q. reperitur non minor quàm 32 $\frac{1}{4}$. qualis est 36. & alius quilibet suprà 36.

OBSERVATIO D. P. F.

QVomodo inueniendi sint 4 numeri vt compositus ex binis quibuslibet adsumpto dato numero conficiat quadratum inuenimus ad propositionem 3. libri 5.

QVAESTIO XI.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex duobus quibuslibet dempto dato numero faciat quadratum, sed & trium summa detracto dato numero faciat quadratum. Esto rursus datus numerus 3. Ponatur compositus ex duobus primis 1 Q. + 3. vt detracto 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 2 N. + 4. Trium verò summa 1 Q. + 4 N. + 7. vt & hi dempto 3. faciant quadratum. Et quoniam summa trium est 1 Q. + 4 N. + 7. quorum primus & secundus faciunt 1. Q. + 3. relinquitur tertius 4 N. + 4. Rursus quia secundus & tertius sunt 1 Q. + 2 N. + 4. quorum tertius est 4 N. + 4. relinquitur secundus 1 Q. − 2 N. sunt autem primus & secundus 1 Q. + 3. quorum secundus est 1 Q. − 2 N. relinquitur ergo primus 2 N. + 3 Oportet itaque tertium & primum detracto 3. facere quadratum. Sed tertius cum primo, detracto 3. facit 6 N. + 4. Hæc igitur æquantur quadrato. Esto is 64. & fit 1 N. 10. Ad positiones. Erit primus 23. secundus 80. tertius 44. & satisfaciunt quæstioni.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινος δοθέντος προσδυρεῖν ἑτέρους ξεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν τ τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔπ ᾗ ἡ οἱ τρεῖς συμπεθέντες ἡ τ τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω πάλιν ὁ μὴ δοθεὶς μ̊ γ̄. ὁ ᾗ συγκείμενος ἐκ τῶν δύο πρώτων δ̄ᵘ ᾱ μ̊ γ̄. ἵνα λείψας τὰς τρεῖς μονάδας ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ δύο ἑξῆς δ̄ᵘ ᾱ ς̄ς̄ β̄ μ̊ δ̄. οἱ δὲ τρεῖς δ̄ᵘ ᾱ ς̄ς̄ δ̄. μ̊ ζ̄ ἵνα ☾ ἔτι λείψει μ̊ γ̄. ποιῶσι τετράγωνον. ἡ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι δ̄ᵘ ᾱ ἀριθμῶν δ̄ μονάδων ζ̄. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος δ̄ᵘ ᾱ μ̊ γ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτός ἐστιν ς̄ς̄ δ̄ μ̊ δ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτός εἰσι δ̄ᵘ ᾱ ς̄ς̄ β̄ μ̊ δ̄. ὧν ὁ τρίτός ἐστι ς̄ς̄ δ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δ̄ᵘ ᾱ λείψει ς̄ς̄ β̄. ἔστι ᾗ ἡ ὁ πρῶτος, ἡ ὁ δεύτερος δ̄ᵘ ᾱ μ̊ γ̄. ὢν ὁ δεύτερός ἐστι δ̄ᵘ ᾱ τ ς̄ς̄ β̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ς̄ς̄ β̄ μ̊ γ̄. δεήσῃ ἄρα ἡ τὸ τρίτον μὴ τῷ πρώτου λείψει μ̊ γ̄. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ τρίτος μὴ τῷ πρώτου λείψει μ̊ γ̄ ἔστιν ς̄ς̄ ε̄ μ̊ δ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἔστω τῷ ξδ̄. ☾ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̊ ῑ̊ ὃν ἐπὶ τὰς ὑποσάσεις. ἔσται ὁ μὴ πρῶτος μ̊ κγ̄. ὁ ᾗ δεύτερος μ̊ π̄. ὁ ᾗ τρίτος μ̊ μδ̄. ☾ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

IN QVAESTIONEM XI.

HIC quoque lapsus est Xilander cùm putauit numerum 6 N. + 4. æquari potuisse quadrato 16 sic enim secundus qui positus erat 1 Q. − 2 N. Inuenitur æqualis nihilo. Quare determinandum est de huiusmodi quadrato, hac arte. Vt 1 Q. sit maior quàm 2 N. oportet vtique 1 N. maiorem esse quàm 2. Itaque quia æquando quadrato 6 N. + 4. fit valor Numeri à quodam quadrato auferendo 4. & residuum per 6. diuidendo: Eò redacti sumus vt inueniamus quadratum qui multatus quaternario, & per 6. diuisus det quotientem maiorem quàm 2. Esto is 1 Q. Igitur $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{4}{6}$. maior est quàm 2. & tandem 1 Q. reperitur maior quàm 16. Quamobrem numerus 6 N. + 4. æquandus erit quadrato cuilibet maior quàm 16.

OBSERVATIO D. P. F.

Quæ notauimus ad tertiam libri 5. docebunt quomodo inueniendi sint 4. numeri, quorum bini quilibet sumpti dempto dato numero conficiant quadratum.

QVÆSTIO XII.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ δύο ὁποιωνοῦν πολυπλαθὲν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ὑπετάχθω δὴ τὸν ιβ̄. ἐπεὶ οὖν ζητοῦμεν τὸν ἀπὸ πρώτου ἐπὶ δευτέρου πολυπλαθέντα τὸν ιβ̄ ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀφ' ὅτου τετραγώνου ἀφέλω τὸν ιβ̄ ἔξω τὸν ἀπὸ πρώτου, ἐπὶ δευτέρου. ἔστω δὴ ὁ τετράγωνος μ̊ κε̄. ἐὰν ἀφ' ὅτου τούτου ἀφέλω τὸν ιβ̄. λοιπὸν ἔξω τὸν ἀπὸ πρώτου, ἐπὶ δευτέρου μ̊ ιγ̄. ἔστω οὖν ὁ μὲν πρῶτος μ̊ ιγ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̊ ᾱ. καὶ τετάχθωσαν ἐν ἀριθμοῖς. ὥστε τὸν ὑπ' αὐτοῦ ποιεῖν μ̊ ιγ̄. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ϛ̄ ιγ̄. ὁ δὲ δεύτερος α̣. ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ ἑτέρου τετραγώνου ἀφέλω μ̊ ιβ̄. ἔξω τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου. ἔστω ἀπὸ τοῦ ιε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ ἀπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἔσται μ̊ δ̄. τετάχθω πάλιν ἐν ἀριθμοῖς ὥστε ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτοῦ μ̊ δ̄. ὧν ὁ δεύτερος ὄντι α̣. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ὄντι α̣. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ϛ̄ δ̄. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μ̄ μ̊ ιβ̄ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἔστι δ̄ νβ̄. δεήσει ἄρα δ̄ νβ̄ μ̄ μ̊ ιβ̄ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ εἰ εἶχον τὸ πλῆθος τῶν ιγ̄ μ̄ τοῦ πρώτου τετράγωνον, οὐχερὲς ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' ἐπεὶ ὁ τοῦ, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος, καὶ ἑπ ἑκάτερος μ̄ μ̊ ιβ̄ ποιῇ τετράγωνον, ἐὰν ᾖ αντὶ ἀριθμοῦ δύο τοὺς τετραγώνους, ἔσται ὁ ὑπ' αὐτοῦ τετράγωνος. γέγονεν οὖν δύο εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος μ̄ μονάδων ιβ̄ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥάδιον, καὶ οὐχερὲς ὡς ἔφαμεν ποιεῖν τῶν ἴσωσιν, καὶ ἔστι ὁ μὲν δ̄. ὁ δὲ α̣ δ̄ ἑκάτερος γὰρ τούτων μ̄ μονάδων ιβ̄ ποιεῖ τετράγωνον. τούτων εὑρεθέντων ἔρχομαι ὅπου τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμὸν δ̄. τὸν δὲ δεύτερον α̣. τὸν δὲ τρίτον ϛ̄ ᾱ δ̄. καὶ λοιπόν ὄντι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου, μ̄ μ̊ ιβ̄ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἔστι δ̄ ᾱ. δ̄ ἄρα ᾱ μ̄ μ̊

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, is adscito dato numero faciat quadratum. Datus esto 12. Quoniam igitur postulatur vt productus ex primo in secundum adscito 12. faciat quadratum, si ab aliquo quadrato dempsero 12. habebo productum ex primo in secundum. Esto itaque quadratus 25. Si ergo ab eo detraxero 12. reliquum habebo productum ex primo in secundum, nempe 13. Esto igitur primus 13. secundus autem 1. & statuantur in numeris, ita tamen vt productum multiplicationis eorum sit 13. & sit primus 13 N. at secundus $\frac{1}{13}$. Itaque si ab altero quadrato detraxero 12. habebo productum ex secundo in tertium. Esto à quadrato 16. relinquitur ergo productus ex secundo in tertium 4. statuantur rursus in numeris, ita vt productum multiplicationis eorum sit 4. Cùm ergo secundus sit $\frac{1}{13}$. erit vtique tertius 4 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium addito 12 fieri quadratum. Sed productus ex primo in tertium est 52 Q. Proinde 52 Q. + 12. æquantur quadrato. Et si 13. numerus pro primo positus quadratus fuisset, facilis esset æquatio. Quod cùm non sit, eo res deducta est vt duo numeri sint inueniendi, vt productum multiplicationis eorum sit quadratus, & præterea vterque cum 12. faciat quadratum. Sed & si loco numerorum quadratos inueniam, ij sua multiplicatione quadratum producent. Oportet ergo inuenire duos quadratos quorum vterque adscito 12. faciat quadratum. Hoc autem facile est, & æquationem expediet, & est alter 4. alter $\frac{1}{4}$. vterque enim addito 12. facit quadratum. His repertis redeo ad id quod initio actum erat, & pono primum 4 N. secundum $\frac{1}{13}$. tertium $\frac{1}{4}$ N. Restat vt productus ex primo in tertium

adiuncto 12. faciat quadratum. Sed productus ex primo in tertium est 1 Q. Proinde 1 Q. + 12. æquatur quadrato Formo quadratum à latere 1 N. + 3 nempe 1 Q. + 6 N + 9. & fit 1 N. $\frac{3}{6}$. & constat propositum.

ιβ. ἴση ἐστὶ τετραγώνῳ. πλάσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ α̅ μ̊ γ̅. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ̄ α̅ ς̄ς̄ᵒⁱ ϛ̄ μ̊ ϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̅ ϛ̄. καὶ μένει τὸ ὑπαγόμενον.

IN QVAESTIONEM XII.

HÆc quæstio cum sequente est de earum numero quas pro deploratis reliquit Xilander, in quam cùm multa infeliciter commentus sit, textum tamen Diophanti leuiter admodum deprauatum restituere non potuit. Sanè tota deprauatio in eo est, quod fractionem Numericam $\frac{1}{1N}$. imperitus librarius ambiguè semper expressit, nam primo loco sic eam exhibet ς̄ᵒ κϑ̄. deinde passim ς̄. cùm tamen aliarum fractionum more potiùs fuisset sic exprimenda α^{ς}. Hinc erroris ansam accipiens Xilander, vertit vbique 1 N. loco $\frac{1}{1N}$. vnde in difficultates inextricabiles seipsum coniecit.

Porrò dupliciter variari possunt positiones & solutio, nam loco ipsorum 4. & $\frac{1}{4}$. infiniti alij quadrati inueniri per vndecimam secundi, qui adscito 12. quadratum faciant. Deinde numeri quadrato æquandi 1 Q. + 12. latus diuersimodè fingi potest, videlicet ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit maior quàm 12. Diophantus æquauit quadrato à latere 1 N. + 3. vnde fit 1 N. $\frac{3}{5}$. suntque quæsiti numeri 2. $2\frac{1}{25}$.

Placet etiam in artis specimen aliam tradere analysim, Diophantæa vtique non deteriorem, quàm excogitaueram priusquam mihi contigisset Græcum videre Codicem. Sit datus numerus 20. quæratur quadratus qui adsumpto 20. faciat quadratum, is erit 16. Iam ergo statuantur. Primus & secundus duo quilibet Numeri, quorum mutuo ductu fiat 16. Et sit primus 8. secundus 2. nam euidens est sic vni parti propositi satisfieri. Tum verò statuatur pro tertio certus quadratorum numerus, qui ductus in secundum 2. faciat quadratum, puta 2 Q. vel 8 Q. vel 18 Q. &c. & adiiciatur ei defectus tot vnitatum, vt hæ multiplicatæ per eundem secundum numerum 2. faciant datum numerum 20. Hunc vnitatum numerum reperies diuidendo 20. per 2 vnde fit 10. Quamobrem ponetur tertius 2 Q. — 10. sic enim eo ductu in secundum 2 fit 4 Q. — 20. cui addendo datum numerum 20. fit quadratus 4 Q. Superest vt productus primi in tertium adsumpto 20. faciat quadratum, facit autem 16 Q. — 60. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto eius latus 4 N. — 2. fiet 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 8. 2. 22. & satisfaciunt proposito.

Hac ratione operando poni possunt primus & secundus duo quilibet numeri, quorum mutuo ductu fiat quadratus qui adsumpto dato numero quadratum faciat. Vnde iam duplex oritur variatio, tum quia huiusmodi diuersi quadrati infiniti reperientur per vndecimam secundi tum quia eodem sumpto quadrato sumentur alij atque alij duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Præterea in hypostasi tertij poni potest quilibet quadratorum numerus, qui ad vnitates secundi rationem habeat quadrati ad quadratum, vt in nostra hypothesi, poni poterat tertius non solùm 2. Q. — 10. sed etiam 8 Q. — 10. 32 Q. — 10. &c. Denique vltimi quadrati latus puta ipsius 16 Q. — 60. diuersimodè fingi potest, nimirum à 4 N. — quotlibet vnitatibus. Vnde sanè infinita solutionum diuersarum suppetit sylua.

Canones ex his operationibus elici possent, sed non adeò expediti. Quare præstat duos alios elegantissimos afferre, qui ex quibusdam propositionibus libri secundi porismatum manifestè deducuntur. Primus itaque Canon esto.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque residuum diuide per interuallum laterum eorundem quadratorum, duo quotientes vnà cum prædicto laterum interuallo quæsitos exhibebunt numeros.

Verbi gratia datus numerus esto 12. aufer eum à quadratis 36. & 64. remanent 24. & 52. quæ si diuidas per 2. interuallum laterum, fient quotientes 12 & 26. sunt ergo quæsiti numeri 12. 26. 2. Huius Canonis demonstratio facilis est. Nam ex ipsa constructione manifestum est, ducto 2. in ipsos 12. & 26. & productis 24. & 52. addito eodem 12. fieri quadratos 36. & 64. Rursus productum ex 12. in 26. adsumpto 12. facere quadratum, demonstratum est vndecima secundi porismatum. Quamobrem ex omni parte patet propositum. Secundus autem Canon est.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque residuum sigillatim diuide per interuallum laterum; duo quotientes, vnà cum duplo summæ ipsorum, multato supradicto interuallo, quæsitos exhibent numeros.

Itaque duo primi numeri per hunc canonem reperti, sunt iidem cum duobus primis per superiorem Canonem inuentis, sed tertius diuersus est. Ita dato eodem 12. & sumptis iisdem quadratis 36. & 64. fient vt prius primus & secundus 12. & 26. sed erit tertius duplum summæ illorum multatum binario, nimirum 74. Huius Canonis demonstratio integra continetur propositione decima tertia

ſecundi poriſmatum. Cæterùm vtriuſque Canonis ſimul auxilio licebit propoſitionem extendere ad quatuor numeros, & pulcherrimum problema à nemine hactenus tentatum enodare, nimirum.

Inuenire quatuor numeros, vt qui producitur ex binorum mutuo ductu adſcito dato numero fiat quadratus. Datus eſto 3.

Finge duos quadratos ab 1 N. + tot vnitatibus quarum, quadrati ſuperent 3. ita vt interuallum earundem vnitatum ſit quadratus numerus. Verbi gratia finge latera quadratorum 1 N. + 2 & 1 N. + 6. quorum interuallum eſt quadratus 4. erunt quadrati 1 Q. + 4 N. + 4. & 1 Q. + 12 N. + 36. à quibus aufer ſigillatim datum numerum 3 & reſidua diuide ſigillatim per interuallum laterum 4. Et ſtatue primum quæſitorum $\frac{1}{4}$ Q. + 1 N. + $\frac{3}{4}$. Secundum $\frac{1}{4}$ Q. + 3 N. + $8\frac{1}{4}$. Tertium duplum ſummæ vtriuſque multatum interuallo 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 13. ſic enim productus ex binorum multiplicatione adſcito 3. quadratus fit per ſecundum Canonem. Ponatur denique quartus ipſum interuallum laterum 4. ſic enim primus ſecundus, & quartus ſi bini inter ſe ducantur, & producto addatur 3. fit quadratus per primum Canonem. Supereſt igitur vt producto ex tertio in quartum addendo 3. fiat quadratus. Fit autem 4. Q. + 32. N. + 55. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo eius latus abs 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 55. ſitque illud 2 N. − 10. fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Ad hypoſtaſes. Erunt quæſiti numeri $\frac{249}{256}$. $\frac{2617}{256}$. $\frac{1177}{64}$ & 4. qui ſatisfaciunt propoſito. Nam ex primo in tres reliquos qui producuntur, ſigillatim adſumpto 3. faciunt quadratos $\frac{848241}{65536}$. $\frac{3427225}{16384}$. $\frac{441}{64}$. quorum latera $\frac{921}{256}$. $\frac{1385}{128}$. $\frac{21}{8}$. At ex ſecundo in tertium & quartum producti, adſcito 3. faciunt quadratos $\frac{31293761}{16384}$ & $\frac{2809}{64}$ quorum latera $\frac{1769}{128}$ & $\frac{53}{8}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur. adſcito 3. quadratum facit $\frac{1225}{16}$ cuius latus $\frac{35}{4}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter quilibet quadratus numerus maior dato numero 3. puta 4. & fingatur alter ab 1 N. + latere prioris quadrati, nimirum ab 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N + 4. Tum ab vtroque quadrato auferatur 3. & reſidua diuidantur per interuallum laterum quod eſt 1 N. & ſtatuatur primus quæſitorum $\frac{1}{1N}$. ſecundus 1 N. + 4 + $\frac{4}{1N}$. Tertius horum ſummæ duplum multatum interuallo laterum 1 N. nimirum 1 N. + 8. + $\frac{8}{1N}$. Quartus autem ipſum interuallum laterum, nimirum 1 N. Conſtat itaque ex vtroque Canone omnibus poſtulati partibus ſatisfieri, ſi productus ex tertio in quartum adſcito 3. faciat quadratum. Facit autem 1 Q. + 8 N. + 7 hoc ergo æquatur quadrato. Eſto latus eius 1 N. − 23. & fit 1 N. $\frac{29}{3}$. Ad hypoſtaſes. Erunt quæſiti numeri $\frac{3}{29}$. $\frac{3594}{261}$. $\frac{4719}{261}$. $\frac{29}{3}$. qui ſatisfaciunt poſtulatis. Etenim ex primo in reliquos tres qui producuntur, adſumpto 3. quadrato faciunt $\frac{3721}{841}$. $\frac{4096}{841}$. 4. quorum latera $\frac{61}{29}$. $\frac{64}{29}$. 2. At ex ſecundo in tertium & quartum producti, adſcito 3. faciunt quadratos $\frac{1907161}{7569}$. & $\frac{1225}{9}$. quorum latera $\frac{1381}{87}$. & $\frac{35}{3}$. Denique productus ex tertio in quartum, adſumpto 3. quadratum facit $\frac{1600}{9}$. cuius latus $\frac{40}{3}$.

Vtraque operatio elegans eſt, & multam recipit varietatem, vt curioſo lectori conſiderandum relinquo. Videtur ipſe Diophantus in hoc problemate hæſiſſe, vt apparet ex vigeſima prima quarti. Qua quærit quatuor Numeros, vt productus ex binorum mutuo ductu adſcita vnitate quadratum faciat. Nam eius operatio cuilibet numero applicari nequit, ſed ſolis quadratis, vt ibi docebimus.

QVÆSTIO XIII.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁπιωνοῦν τ ἀδέν͂α ποιῇ τετράγωνον. ὑπετάχθω δὴ τοῦ ι. ἐπεὶ ζητῶμεν τ ὑπὸ πρώτου & δευτέρα λείψει μ̊ ι. ποιεῖν τετράγωνον ἐαν ἀρα τινὶ τετραγώνῳ προσθῶ μ̊ ι. ἕξω τὸν ὑπ' αὐτ͂ών. ἕστω τῷ δ. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ πρώτου & δευτέρα μ̊ ιδ'. ἕστω πρῶτος μ̊ ιδ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μ̊ ά. & τετάχθωσαν πάλιν ἐν ἀριθμοῖς, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτ͂ων ποιεῖν μ̊ ιδ. ἢ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ϛ̄ ιδ. ὁ δὲ δεύτερος α̊. πάλιν ἐαν ἑτέρῳ τετραγώνῳ προσθῶ μ̊ ι. ἕξω τὸν ὑπὸ τ δευτέρα & τρίτου. ἕστω τῷ θ. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ δευτέρα & τρίτου μ̊ ιθ. ὧν ὁ δεύτερος ὄζι ὁ α̊. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ϛ̄ ιθ. διὸ

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, multatus dato numero faciat quadratum. Sit datus 10. Quando volumus productum ex primo in ſecundum demptо 10. facere quadratum, ſi alicui quadrato adiecero 10. habebo illum productum. Eſto quadrato 4. erit ergo productus ex primo in ſecundum 14. ſit primus 14. ſecundus igitur erit 1. Statuantur rurſus in numeris, ita tamen vt productus multiplicationis faciat 14. & eſto primus 14. N. ſecundus $\frac{1}{1N}$. Rurſus ſi alteri quadrato adiecero 10. habebo productum ex ſecundo in tertium. Adiiciatur quadrato 9. erit ergo productus ex ſecundo in ter-

tium 19. proinde cùm secundus sit $\frac{1}{1N}$. relinquitur tertius 19 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium dempto 10. facere quadratum. Facit autem 266. Q.—10. hæc ergo æquantur quadrato. Quare ob ea quæ in præcedenti dicta sunt, eò deuentum est vt inueniendi sint duo quadrati, quorum vterque dempto 10. faciat quadratum. Hoc autem facilè fit, inuenies enim si quæras quis quadratus dempto 10. faciat quadratum, & quoniam si cui numero additur 1. & summæ dimidium in se ducitur, & à sic facto quadrato numerus initio sumptus detrahitur, relinquitur rursum quadratus. Addo 1. ad 10. & summæ semissem nimirum $5\frac{1}{2}$. duco in se, & à producto $30\frac{1}{4}$ aufero 10. & habeo quadratum 20. $\frac{1}{4}$ à latere $4\frac{1}{2}$. Pono igitur primum $30\frac{1}{4}$. tertium autem 1 Q. Oportet ergo vt & ab 1 Q. dempto 10. remaneat quadratus. Quare 1 Q.—10. æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1 N.—2. nimirum 1 Q.+4.—4 N. & fit 1 N. $3\frac{1}{2}$. Tertius igitur qui positus erat 1 Q. erit $12\frac{1}{4}$. est autem & primus $30\frac{1}{4}$. nam vterque dempto 10. remanet quadratus. Venio ad id quod initio quærebatur. Et statuo primum 30. $\frac{1}{4}$ N. secundum $\frac{1}{1N}$. tertium $12\frac{1}{4}$ N. Superest itaque vt productus ex primo in tertium dempto 10. faciat quadratum. Atqui productus ille est $370\frac{1}{2}\frac{1}{10}$ Q. Hic ergo dempto 10. æquatur quadrato, & vt quadrati integri sint, multiplicemus eos per 16. ergo 5929. Q.—160. æquantur quadrato à latere 77 N.—2. qui est 5929 Q.+4—308 N. & fit 1 N. $\frac{312}{77}$. Statueram primum $30\frac{1}{4}$ N. erit igitur $\frac{9348}{77}\frac{1}{4}$. secundum $\frac{1}{1N}$. erit igitur $\frac{77}{4\,1}$. tertium 12. $\frac{1}{4}$ N. is erit $\frac{5082}{77}\frac{1}{4}$. & constat propositum.

ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ τρίτου ϛ πρώτου ϒ μ° ι. ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δ^υ σξς ϒ μ° ι. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὰ ἐν τῷ πρὸ τούτε εἰρημένα, ἁπλᾶταί μοι εἰς τὸ δύρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος λείψει μ° ι. ποιῇ τετράγωνον. τῦτο δὲ ῥάδιον. δύρήσεις γὰρ ἐὰν ζητήσῃς ἀν τις τετράγωνος λείψει μ° ι. ποιῇ τετράγωνον. ϛ ἐπεὶ ἐαν τινι ἀριθμῷ προστεθῇ μονὰς, καὶ τῷ γνομένῳ τὸ ἥμισυ τετραγωνίσωμεν, καὶ ἀπὸ τε γνομένε ἀφέλωμεν τὸν ἐξ ἀρχῆς, ὁ λοιπὸς πάλιν τετράγωνος ἔσται. προστίθημι ταῖς μ° ᾱ. καὶ τῷ γνομένῳ τὸ ἥμισυ τουτέστι τὰ ε̄ καὶ ἥμισυ. τετραγωνίσας ἀπὸ τῷ γνομένων μ° λ̄. ᾱ δ^ν. ἀφελῶν τὰς μ° ι ἔξω τετράγωνον μ° κ̄. ᾱ δ^ν. ἀπὸ πλευρᾶς δ^ν καὶ ἥμισυ. τάσσω οὖν τὸ μὲν πρῶτον λ̄. ᾱ δ^ν. τὸν δὲ τρίτον δ^υ ᾱ. δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ δ^υ ᾱ ἀφαιρεθεισῶν μ° ι. τὸ λοιπὸν γίνεσθαι τετράγωνον. δ^υ ἄρα ᾱ λείψει μ° ι ἴσῃ ὅτι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς^ῑ ᾱ λείψει μ° β̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ^υ ᾱ μ° δ̄ λείψει ςᾶς δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° γ̄ καὶ ἥμισυ. ἐπεὶ ἔταξα τὸ τρίτον δ^υ ᾱ. ἔσται ιβ̄. ᾱ δ^ν. ὅτι ϗ καὶ ὁ πρῶτος λ̄. ᾱ δ^ν. οἵ τινες λείψει μ° ι. ποιῶσι τετραγώνους. ἔρχομαι ὅπη τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον, ϛ τάσσω τὸ πρῶτον ςᾶς λ̄. ᾱ δ^ν. τὸ δὲ δεύτερον α^ν. τὸν δὲ τρίτον ςᾶς ιβ̄. ᾱ δ^ν. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου λείψει μ° ι, γίνεσθαι τετράγωνον, ὁ ϗ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ὅτι δ^υ τ̄ο̄. ᾱ ι^ν. ᾱ ι^ν. δεῖ ἄρα λείψει μ° ι ἴσός ὅτι τετραγώνῳ, καὶ ἵνα ὅλαι δυνάμεις ὦσι ποιῶ αὐτὰς ἑκκαιδεκάκις, δ^υ ἄρα ἑπτακ ϒ μ° ρξ̄. ἴσαι τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ςᾶς οζ̄ λείψει μ° β̄. τουτέστι δυνάμεις ἑπτακ μ° δ̄ λείψει ςᾶς τ̄η̄. ϛ γίνεται ὁ ϛ̄ μ° μᾱ οζ̄. ἔταξα τὸ πρῶτον ςᾶς λ̄. ᾱ δ^ν. ἔσαι ασμᾱ οζ̄. ᾱ δ^ν. τὸν ϗ δεύτερον α^ν ἔσαι οζ μᾱ^ν. τὸν ϗ τρίτον ςᾶς ιβ̄. ᾱ δ^ν. ἔσαι φβ̄ ο̄ζ̄. ᾱ δ^ν. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XIII.

EADEM ferè dici possunt de hac quæstione quæ de præcedente dicta sunt. Operatio & solutio totidem modis potest variari. Nam infiniti quadrati reperientur per vndecimam secundi, qui multati numero 10. quadratum relinquant. Et vltimi quadrati 5929. Q.—160. latus diuersimodè fingi potest, nimirum à 77 N.—quotlibet vnitatibus. Cæterùm Diophantus compendium quærens ad vndecimam secundi, hoc vtitur lemmate.

Si dato numero addatur vnitas, & à summæ semissis quadrato auferatur datus numerus, relinquitur quadratus.

A..... D.... B. C

Sit datus numerus A B. cui addatur vnitas B C. & totius A C semissis esto A D. dico quadratum ipsius A D multatum numero A B. relinquere quadratum. 5. secundi. Etenim quadratus A D æqualis est producto ex A B in B C vnà cum quadrato ipsius D B. Sed productus ex A B in B C æquatur ipsi A B, quia B C est vnitas. Igitur A B & quadratus ex D B simul æquantur quadrato ex A D. Quare si à quadrato ex A D auferatur A B. relinquetur quadratus ex D B. Quod erat ostendendum.

Licet etiam per nostram analysim soluere quæstionem hac arte. Datus esto 20. Quæratur quadratus à quo auferendo 20. supersit quadratus, puta 36. & statuantur pro primo & secundo quæsitorum numerorum, duo quilibet quorum mutuo ductu fiat 36. sit ergo primus 9. secundus 4. Tum ponatur tertius quilibet quadratorum numerus, qui ductus in secundum 4. quadratum faciat, puta 1 Q. eique adiiciantur tot vnitates vt ductæ in eundem secundum 4. faciant datum numerum 20. Et esto totus tertius 1 Q. + 5. sic enim duabus propositi partibus satisfit. Restat vt productus ex primo in tertium detracto 20. faciat quadratum, facit autem 9 Q. + 25. hoc ergo æquatur quadrato, esto latus illius 3 N. + 1. fiet 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 9. 4. 21. & constat. Sed & geminum Canonem eliciemus ex libro secundo porismatum. Quorum primus est.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque summam diuide sigillatim per interuallum laterum, duo quotientes vnà cum eodem interuallo, quæsitos exhibent numeros.

Vt si datus sit 10. adde 10. quadratis 16. & 36. fiunt summæ 26. & 46. quas si diuidas per 2. interuallum laterum, fiunt 13. & 23. duo ex quæsitis numeris, quorum tertius est ipsum interuallum laterum 2. Canonis huius demonstratio in promptu est. Nam constat per constructionem ducto 2. in ipsos 13. & 23. fieri 26. & 46. à quibus auferendo datum numerum 10. remanent quadrati 16. & 36. At productum ex 13. in 23. detracto 10. esse quadratum, ostensum est duodecima secundi porismatum. Secundus Canon erit.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque summam diuide per interuallum laterum: duo quotientes vnà cum duplo summæ illorum multato eodem interuallo quæsitos exhibent numeros.

Itaque sumptis eisdem quadratis, duo primi numeri coincident cum duobus primis per præcedentem Canonem inuentis. Tertius autem diuersus erit. Nam sumptis vt prius quadratis 16. & 36. fient duo primi vt suprà 13. & 23. At tertius erit 70. Huius autem Canonis demonstratio habetur decima quarta secundi porismatum. Porrò vtriusque Canonis ope soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire quatuor numeros, vt productus ex binorum mutua multiplicatione detracto quouis dato numero, quadratus maneat.

Datus esto 10.

Finge duos quadratos, alterum ab 1 N. + aliquo quadrato numero, puta ab 1 N. + 4. erunt quadrati 1 Q. & 1 Q. + 8 N. + 16. His adde sigillatim datum numerum 10. & summas diuide per interuallum laterum 4. Erit ergo primus quæsitorum $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{5}{2}$. Secundus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{13}{2}$ + 2 N. Tertius horum summæ duplum multatum eodem interuallo 4. nimirum 1 Q. + 14 + 4 N. Quartus denique erit idem interuallum, videlicet 4. Sic enim ex vtroque Canone constat quinque propositi partibus abundè satisfieri. Restat vt productus ex tertio in quartum detracto 10. relinquatur quadratus. Relinquitur autem 4 Q. + 46 + 16 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto eius latus 2 N. + 6. fiet 1 N. $\frac{3}{4}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri $\frac{185}{64}$. $\frac{601}{64}$. $\frac{329}{16}$. 4. qui satisfaciunt postulatis. Nam ex primo in reliquos tres qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{70225}{4096}$. $\frac{10625}{1024}$. $\frac{25}{16}$. quorum latera $\frac{265}{64}$. $\frac{225}{32}$. $\frac{5}{4}$. At producti ex secundo in tertium & quartum, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{187489}{1024}$ & $\frac{441}{16}$ quorum latera $\frac{433}{32}$ & $\frac{21}{4}$. Denique productus ex tertio in quartum, detracto 10. quadratum facit $\frac{289}{4}$ cuius latus $\frac{17}{2}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter, quilibet quadratus, puta 1. Alter verò fingatur ab 1 N. + latere prioris, nimirum ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. Tum vtrique quadrato addatur datus numerus 10. & summæ diuidantur sigillatim per interuallum laterum 1 N. Et statuatur primus quæsitorum $\frac{11}{1N}$. Secundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. Tertius horum summæ duplum multatum interuallo laterum. videlicet 1 N. + 4 + $\frac{44}{1N}$. Quartus denique ipsum interuallum laterum, puta 1 N. Itaque patet ex vtroque Canone quinque postulati partibus esse satisfactum. Restat ergo vt productus ex tertio in quartum detracto 10. maneat quadratus. Manet autem 1 Q. + 4 N. + 34. Hoc ergo æquatur quadrato. Sit eius latus 1 N. − 8. fit 1 N. $\frac{42}{1}$. Ad positiones. Sunt quæsiti numeri. $\frac{22}{3}$. $\frac{65}{6}$. $\frac{209}{6}$. $\frac{3}{2}$. qui soluunt quæstionem. Etenim ex in primo in tres reliquos qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{625}{9}$. $\frac{2209}{9}$. 1. quorum latera $\frac{25}{3}$. $\frac{47}{3}$. 1. At producti ex secundo in tertium & quartum, detracto 10. manent quadrati $\frac{133225}{36}$ & $\frac{25}{4}$. quorum latera $\frac{115}{6}$. & $\frac{5}{2}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur, detracto 10. relinquit quadratum $\frac{169}{4}$ cuius latus $\frac{13}{2}$.

Quomodo autem reperiendi sint tres numeri, vt productus ex binorum multiplicatione detractus à dato numero, relinquat quadratum, nondum in vniuersum assequi licuit, sed soluo quæstionem huiusmodi, cum datus numerus vel quadratus est, vel ex duobus quadratis compositus.

Sit

Sit enim datus 20. ſumatur vnus quadratorum, ex quibus 20. componitur, puta 16. & ſtatuantur primus & ſecundus quæſitorum, duo quilibet numeri quorum mutuo ductu fiat 16. puta 8. & 2. tertius verò ponatur talis vnitatum numerus, qui ductus in ſecundum 2. faciat datum numerum 20. eſt is numerus 10. cui addatur defectus tot Quadratorum, vt ſecundo 2. in eos ducto fiat quadratus. Statuatur ergo tertius 10 — 2 Q. ſic enim duabus propoſiti partibus ſatisfit. Reſtat vt productus ex primo in tertium detractus à 20. relinquat quadratum. Sed relinquit 16 Q. — 60. Hoc ergo æquatur quadrato cuius latus fingetur à 4 N. — tot vnitatibus, vt per valorem Numeri reſoluendo hypoſtaſes fiat 1 Q. minor quàm 5. quia ſcilicet tertius poſitus eſt 10. — 2 Q. Itaque cùm quadratus debeat eſſe minor quàm 5. oportet valorem numeri minorem eſſe quàm $2\frac{1}{4}$. fiet autem valor Numeri à quodam quadrato adſumente 60. & diuiſo per octuplum ſui lateris. Quærendus ergo eſt quadratus qui adſumens 60. & diuiſus per octuplum ſui lateris, det quotientem minorem quàm $2\frac{1}{4}$. ſit is 1 Q. Igitur $\frac{1\,Q. + 60.}{8\,N.}$ minor eſt quàm $2\frac{1}{4}$ & omnia ducendo in 8 N. fit 1 Q. + 60 minor quàm 18 N. Quare æquemus 18 N. numero paulò maiori quàm 1 Q. + 60. puta numero 1 Q. + 65. fiet 1 N. 5. vel 13. Proinde oportet latus quadrati fingere 4 N. — tot vnitatibus, quæ non deficiant à 5. nec excedant 13. fingatur 4 N. — 5. fiet 1 N. $\frac{17}{8}$. ſunt igitur tres quæſiti 8. 2. $\frac{33}{64}$. & conſtat.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adiecto reliquo quadratum faciat. Quando quærimus productum ex primo in ſecundum addito tertio facere quadratum, ſi expoſito aliquo quadrato, partem illius aliquam ſtatuamus pro tertio, reſiduum autem pro producto multiplicationis primi & ſecundi vnum poſtulatorum præſtabimus. Formetur quadratus ab 1. N. + 3. erit vtique 1 Q. + 6 N. + 9. eſto itaque tertius 9. relinquitur ergo productus ex primo in ſecundum 1 Q. + 6 N. Ponatur primus 1 N. erit igitur ſecundus 1 N. + 6. Oportet ergo & productum ex ſecundo in tertium adſumpto primo, hoc eſt 10 N. + 54. æquari quadrato, & præterea productum ex tertio in primum adſumpto ſecundo, nempe 10 N. + 6. æquari quadrato, & fit duplicata æqualitas. Eſt autem ipſorum interuallum 48. Quamobrem oportet inuenire duos quadratos quorum interuallum ſit 48. Quod facile eſt, & infinitis modis fieri poteſt; eſtque minor 16. maior 64. vtri horum æquationem accommodemus, reperiemus quantus ſit 1 N. ſi enim dicamus 64. æquari maiori, puta 10 N. + 54. inuenitur 1 N. 1. Rurſus ſi dicamus minorem 16. æquari 10 N. + 6. fit etiam 1 N. 1. Ad poſitiones. Erit primus 1. ſecundus 7. tertius 9. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ δύο ὁποιωνοῦν πολυπλασίων τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐπὶ ζητοῦμεν τὸ ἀπὸ πρώτου καὶ δευτέρου πολυπλασίονα τὸν λοιπὸν ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσί τινα τετράγωνοι, μέρος μέν τι αὐτῶν τάξωμεν τὸν τρίτον, τὸν δὲ λοιπὸν τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, λύσωμεν ἐν τοῖς ὑποδείγμασιν. πεπλάσθω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ̄ ᾱ ς̄ ς̄ μ̄ δ̄. ἔστω δὲ ὁ τρίτος μ̄ δ̄, λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου δ̄ ᾱ ς̄ ς̄. πεπλάσθω ὁ πρῶτος ς̄ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσαι ς̄ ᾱ μ̄ ς̄. δεήσει ἄρα τὸ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου πολυπλασίονα τὸν πρώτου τουτέστι ς̄ς̄ ῑ μ̄ νδ̄ ἴσον ἑξάκις τετραγώνῳ, καὶ ἐπὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου πολυπλασίονα τὸν δευτέρου τουτέστι ς̄ς̄ ῑ μ̄ ς̄ ἴσον πάλιν γίνεσθαι τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μ̄ μη̄. δεήσει ἄρα εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ μ̄ μη̄. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἀπειραχῶς γίνεται. καὶ ἔστι ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ ις̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ξδ̄. καὶ πρὸς ὁποῖον αὖ αὐτῶν ποιήσωμαι τὸν ἰσότητα, εὑρήσω τὸν ὑποτάσσοντα τὸ ς̄ ἐάν τε γὰρ φήσωμεν τὰς τοῦ μείζονος μ̄ ξδ̄ ἴσας ἓξ ς̄ ῑ. μ̄ νδ̄. σωλήγεται ὁ ς̄ μ̄ ᾱ. ἐάν τε πάλιν φήσωμεν τὰς τοῦ ἐλάσσονος μ̄ ις̄ ἴσας ἓξ ς̄ ῑ. μ̄ ς̄ συνάγεται ὁ ς̄ μ̄ ᾱ. ὅπερ ταῖς ὑποτάσσουσι. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ᾱ· ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ζ̄. ἔστι δὲ καὶ ὁ τρίτος μ̄ δ̄, ὃ ποιῆσαι τὸ ὑπιταγμα.

IN QVÆSTIONE XIV.

BENÈ monet Xilander hîc duplicem contingere posse variationem. Primò enim Quadratus qui ponitur fieri ex producto primi in secundum, adscito tertio fingi potest à certis numeris + quotlibet vnitatibus, finxit Diophantus ab 1 N. + 3. sed fingere potuisset ab 1 N. + 2. vel 1 N. + 4. vel etiam 2 N. + 3. 2 N. + 4. &c. Deinde duplicata æqualitas infinitis modò resolui poterat, sumendo scilicet duos quoslibet quadratos, quorum interuallum sit 48. adhibita tamen cautione quam tradimus ad duodecimam secundi, vt videlicet maiores sint sumpti quadrati numeris 54. & 6. Verùm quod præcipuum est, non attigit Xilander, quomodo nimirum positiones primi & secundi ita instituat Diophantus, vt tandem in vtroque numero quadrato æquando reperiatur idem Numerorum numerus, puta 10 N. Hoc enim si non curasset, inexplicabilis fuisset æquatio. Cùm enim vnitates 54. & 6. nec æquales sint, nec quadrati numeri, oportuit numerum Numerorum vtrobique eundem reperiri. Itaque cùm productus ex primo in secundum positus sit 1 Q. + 6 N. ex infinitis numeris quorum mutuo ductu gigni poterat 1 Q. + 6 N. tales deligendi fuerunt, vt in eorum vtroque idem esset numerorum Numerus, quales sumpsit Diophantus 1 N. & 1 N. + 6. nec alij proposito satisfacientes sumi potuissent, quia vt dictum est, oportet ducendo eundem tertium 9. in vtrumlibet ipsorum, & producto addendo reliquum, fieri vtrobique eundem Numerorum numerum, quod fieri non posset, si Numerorum numeri primi & secundi non essent æquales.

QVÆSTIO XV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ πρῶτος ς^{ος} ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ς^{ος} ᾱ μ^{ος} δ̄. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν ἔσται δ^{οι} ᾱ. ςς δ̄. δεήσει ἄρα τὸν λείψαντα τὸ τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν οὖν τὸ τρίτον τάξω ςς δ̄. λύσωμεν ἐν τοῖς ὑπαγομένοις. λοιπὸν δὴ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου γ̄ τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ ἐπὶ τὸ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου γ̄ τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου λείψας τὸ πρῶτον ἔστι δ^{οι} δ̄ ςς ιε̄ ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου λείψας τὸ δεύτερον ἔστι δ^{οι} δ̄ ςς ιε̄ ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου λείψας τὸ δεύτερον ἔστι δ^{οι} δ̄ λείψει ς^{οις} ἑνὸς μ^{ῳ} δ̄ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται πάλιν διπλῆ ἡ ἴσωσις. τῆς γὰρ ὑπαροχῆς αὐτῶν τυγχανούσης ςς ιε̄ μ^{ος} δ̄. ζητῶ δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ποιῇ ςς^{ας} ιε̄ μ^{ος} δ̄. εἰσὶ δὲ μ^{οι} δ̄. καὶ ςς^{ων} δ̄ μ^{ος} ᾱ. πάλιν ἐὰν ἡ τῶν συνθέσεως τούτων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ὂν ᾖ τῷ μείζονι. ἡ δὲ ὑπαροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς κε ^{ᾱ}. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος κε ^{ᾱ}. ὁ δὲ δεύτερος ρε ^{ᾱ}. ὁ δὲ τρίτος ρ̄ ^{ᾱ}. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione dempto reliquo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 1 N. + 4. Productus ipsorum multiplicatione erit 1 Q. + 4 N. Oportet igitur hunc dempto tertio facere quadratum, si ergo ponamus tertium 4 N. satisfactum erit vni postulatorum. Superest itaque vt & productus ex secundo in tertium dempto primo faciat quadratum, & præterea productus ex tertio in primum dempto secundo faciat quadratum. Sed productus ex secundo in tertium dempto primo est 4 Q. + 15 N. æqualis quadrato. At productus ex tertio in primum dempto secundo est 4 Q — 1 N. — 4. æqualis quadrato. Et occurrit rursus duplicata æqualitas. Cùm itaque interuallum ipsorum sit 16 N. + 4. Quæro duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. sunt autem 4. & 4 N. + 1. Rursus ergo vel summæ semissis quadratus æquatur maiori, vel interualli semissis quadratus æquatur minori; & fit 1 N. $\frac{25}{20}$. Erit igitur primus $\frac{25}{20}$. secundus $\frac{105}{20}$. tertius $\frac{100}{20}$. & constat propositũ.

IN QVAESTIONEM XV.

NON temerè, vt malè arbitratur Xilander, secundum numerum posuit Diophantus 1 N. + 4. Nam necesse est vnitates secundi numeri, quadratum esse numerum, puta 4. vel 9. vel 16. &c. Cuius rei ratio ex ipsamet operatione subtilius considerata, statim innotescit. Tertius enim numerus semper æqualem Numerorum multitudinem continet, vnitatibus in secundo 1 N. + 4.

vel 1 N. + 9. &c. erit tertius 4 N. vel 9 N. &c. Quamobrem rursus ex ductu tertij tam in primum quàm in secundum, in quorum vtroque est 1 N. fient totidem quadrati, vt vides in hypothesi Diophanti, fieri 4 Q. & si secundus positus esset 1 N. + 9. fierent 9 Q. Si autem in numeris quadrato æquandis 4 Q. + 15 N. & 4 Q. − 1 N. − 4. numerus quadratorum 4. non esset quadratus, explicari non posset duplicata æqualitas. Nam si, vt fecit Xilander, ponatur secundus 1 N. + 10. atque adeo tertius 1 N. fient tandem quadrato æquandi 10 Q. + 99 N. & 10 Q. − 1 N. − 10. Quæcunque autem fingas quadratorum latera nunquam produces 10. Q. (cùm nullus sit numerus qui in se ductus efficiat 10. vnde necesse erit in æquationem complexam deueniri, & duas species, vni æquales remanere, ac proinde solutionem vt plurimum contingere irrationalem.

Præterea etiam ritè facta positione secundi numeri, statuendo scilicet in eo vnitatum numerum quadratum, aduerte, posse te adhuc in easdem cautes impingere, nisi magna cum cautione seligas duos numeros, quorum mutuo ductu fiat interuallum numerorum quadrato æquandorum. Etenim in Diophantæa hypothesi, vbi interuallum est 16 N. + 4. licet id ex infinitorum numerorum mutuo ductu produci possit, nulli tamen idonei sunt quæstioni soluendæ præter 4 N. + 1. & 4. si enim Verbi gratia, sumas 2 N. + $\frac{1}{2}$ & 8. horum summæ semissis quadratus, puta 1 Q. + $8\frac{1}{2}$ N. + $\frac{289}{16}$ æquabitur 4 Q. + 15 N. vnde fiet solutio irrationalis. Itaque tales seligendi sunt numeri mutuo ductu producentes propositum interuallum, vt in eorum summa contineatur duplum lateris Quadratorum, qui in numeris quadrato æquandis reperiuntur. Vt in eadem hypothesi, vbi quadratorum numerus est 4 Q. cuius latus 2 N. cuius duplum 4 N. Oportet tales deligi numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. vt eorum summa contineantur 4 N. Quia verò patet primùm illorum necessario constare debere ex Numeris & vnitatibus, secundum autem ex solis vnitatibus, sequitur in primo necesse esse constitui 4 N. atque adeo vt ex secundo in primum fiant 16 N. oportet secundum esse 4. Vt autem præter 16 N. fiant etiam 4. (cùm totum interuallum sit 16 N. + 4) necesse est primum esse 4 N. + 1. secundum 4. Quoniam autem eodem artificio sæpè in sequentibus vtendum erit, vt res tyronum memoriæ firmius inhæreat, age alio eam exemplo illustremus. Posito primo numerorum quæsitorum 1 N. sit secundus 1 N. + 9. tertius 9 N. ducto ergo tertio in primum, & inde ablato secundo remanet 9. Q − 1 N. − 9. æquandus quadrato. Rursus ducto tertio in secundum, & inde ablato primo remanet 9 Q. + 80 N. æquandus quoque quadrato. Horum interuallum est 81 N. + 9. Quare sunt inueniendi duo numeri, quorum mutuo ductu id fiat cum cautione suprà explicata. Itaque cùm quadratorum numerus sit 9. Q. cuius latus 3 N. cuius duplum 6 N. Oportet in primo quæsitorum statui 6. N. Quamobrem vt ex secundo in primum fiam 81 N. necesse est secundum est $13\frac{1}{2}$. Rursus autem vt fiat alia pars interualli, puta 9. euidens est primum debere esse 6 N. + $\frac{3}{2}$. secundum $13\frac{1}{2}$. Reliquam operationem absolue, si vacat.

Cæterùm moneo totam solutionum diuersitatem, oriri ex illo quadrato qui ponitur in secundo numero. Nam eodem ibidem posito quadrato, licet primus ponatur 2 N. vel 3 N. vel 4 N. &c. eadem tamen semper continget solutio. Quod vno aut altero exemplo fiet manifestum. Ponatur primus 2 N. secundus 2 N. + 4. tertius 8 N. productus ex secundo in tertium abiecto primo fit 16 Q. + 30 N. æquandus quadrato. Et rursus productus ex primo in tertium adiecto secundo fit 16 Q. − 2 N. − 4. æquandus etiam quadrato. Horum interuallum est 32 N. + 4. qui fit ex 8 N. + 1 in 4. hi enim soli apti sunt proposito ob causas suprà traditas. Horum summæ semissis quadratus est 16 Q. + 20 N. + $\frac{25}{4}$ æqualis 16 Q. + 30 N. & fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{5}{4}$. $\frac{21}{4}$. 5. iidem quos inuenerat Diophantus. Rursus pone primum 3 N. secundum 3. N. + 4. Tertium 12 N. fient tandem æquandi quadrato 36 Q. + 45 N & 36. Q. − 3 N. + 4. quorum interuallum 48. N. + 4. quod fit ex 12 N. + 1 in 4. horum summæ semissis quadratus est 36 Q. + 30 N. + $\frac{25}{4}$ qui æquatur 36 Q. + 45 N. & fit 1 N. $\frac{5}{12}$ suntque quæsiti numeri, vt prius $\frac{5}{4}$. $\frac{21}{4}$. 5.

Denique animaduersione dignum est, qualiscunque numerus Numerorum statuatur pro primo. Dum idem statuatur pro secundo + aliquot vnitatibus quadratis, & tertius ponatur productus ex primo in vnitates secundi, semper contingere in numeris quadrato æquandis, numerum quadratorum esse quadratum, vt in Diophanti exemplo 4 Q. in proximè allatis 16 Q & 36 Q. quod ex necessitate fieri, sic demonstrabitur. Esto A numerus Numerorum primi. Et A + B vnitatibus quadratis esto secundus. Et tertius esto D. productus ex A in B. Itaque vt patet ex operationis processu, ex D in A fiet quadratorum numerus qui reperitur in numeris quadrato æquandis, sit is E. Hunc dico esse quadratum. Nam sumptis tribus numeris A. B. A. idem E fiet siue A ducatur in B. & productus D in A. siue A ducatur in A. & quadratus ipsius A in B. Quare cùm & B sit quadratus, patet E productum ex quadrato in quadratum, & ipsum esse quadratum. Quod erat demonstrandum. Sed de his satis.

A 3 N.
A 3 N. + B 4.
D 12 N. E 36 Q.

3. 1. *porism.*

QVÆSTIO XVI.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸ ἀπὸ λοιποῦ τετράγωνον, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ς̄ δ̄ μ̄ δ̄. ὁ δὲ τρίτος μονάδος ᾱ. ἵνα ᾖ λελυμένα δύο τῶν ὑποδεδγμάτων. λοιπὸν ὅτι ἡ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβοῦσα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖ δ̄ῑ̄ ς̄ς̄ λγ̄ μ̄ῑ̄. ταῦτα ἵνα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ δ̄ γ̄ μ̄ ε̄. τουτέστι δ̄ῑ̄ μ̄ κ̄ε̄ λείψει ς̄ς̄ μ̄. ἡ γίνεται ὁ ς̄ ϟ̄ ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϟ̄. ὁ δὲ δεύτερος τκη̄. ὁ δὲ τρίτος οϑ̄. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adsumpto reliqui quadrato, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 4 N. + 4. tertius autem 1. vt duabus propositi partibus satisfiat. Superest vt productus ex tertio in primum adsumens quadratum secundi faciat quadratum. Sed productus ex tertio in primum adsumens secundi quadratum facit 16 Q. + 33 N. + 16. Hæc igitur æquanda quadrato, nempe à latere 4 N. — 5. qui est 16 Q. + 25 — 40. N. & fit 1 N. $\frac{9}{73}$. Erit igitur primus $\frac{9}{73}$. secundus $\frac{328}{73}$. tertius $\frac{73}{73}$. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XVI.

FALLITVR hîc etiam Xilander existimans positiones pro arbitrio variari posse, nulla adhibita cautione, hoc enim manifestæ falsitatis arguitur ipso exemplo quo suam nititur comprobare sententiam, ait enim licuisse ponere primum 1 N. secundum 1 N. + 2. tertium 1. Quod nequaquam verum est, nam productus quidem ex primo in secundum adscito quadrato tertij, facit quadratum 1 Q. + 2 N. + 1. At productus ex secundo in tertium adscito quadrato primi facit 1 Q. + 1 N + 2. qui quadratus non est, cùm tamen per ipsas positiones duabus propositi partibus satisfieri velit Diophantus. Itaque tali artificio ipsas positiones instituemus. Statuatur pro secundo quilibet numerus Numerorum + quotlibet vnitatibus. Et ponatur primus quadrans Numerorum, tertius quadrans vnitatum secundi. Sic Diophantus posito secundo 4 N. + 4. posuit primum 1 N. secundum 1. Quod si ponas secundum 4 N. + 8. erit primus 1 N. tertius 2. Et si ponas secundum 8 N. + 12. Erit primus 2 N. Tertius 3. & sic de alijs. Hoc autem ne quis absque fundamento dictum putet, sic demonstratur.

E 4 N. F 6.
C 2 N. A 8 N. + B 12. D 3.
G 16 Q. + H 24 N. + K 9.
L 4 Q. + M 24 N. + P 36.

Sit secundus certus Numerorum numerus A + vnitatibus B. & sit C primus, quadrans ipsius A. sitque D. tertius quadrans ipsius B. & quia C A sunt plani similes, sit medius eorum proportionalis E duplus scilicet ad C. sub duplus ad A. Similitérque sit F medius proportionalis inter B D, duplus scilicet ad D, sub duplus ad B. Tum ducatur C in A + B. & fiat G + H certus scilicet quadratorum numerus + certo numero Numerorum, hisque adiiciatur K quadratus ipsius D. Dico totum G H K esse quadratum. [1] Quod vt probetur, oportet ostendere ipsos G K esse quadratos, & ex eorum lateribus bis inuicem ductis produci H. Et quidem ipse K quadratus est ipsius D. ex constructione. [2] At G. cùm fiat ex mutuo ductu planorum similium C A. quadratus est medij proportionalis E. Restat ergo probandum ipsum H. produci ex E in D bis. Itaque quoniam est A ad C, vt B ad D. [3] qui sub extremis A D continetur, æqualis ei qui sub mediis C B. At ex C in B fit H. per constructionem. Igitur ex A in D fit idem H. Quarè cùm A sit duplus ipsius E. fiet idem H ex E in D bis. Quod erat probandum. Similiter si D ducatur in A + B. vnde fiat M + P. certus scilicet numerus Numerorum + certis vnitatibus, hisque adiiciatur L quadratus ipsius C dico totum L M. P quadratum esse. Quod iisdem probatur argumentis. Nam L. ex constructione quadratus est ipsius C. At P. qui fit ex mutuo ductu planorum similium B D. quadratus est medij proportionalis F. Denique vt ostensum est M, qui producitur ex A in D, producetur etiam ex C in B. hoc est ex C in F bis. Igitur ex omni parte constat propositum.

4. secundi.

1. noni.

16 septimi.

Ex dictis patet duplici de causa diuersas contingere posse solutiones. Primò prout diuersimodè instituentur positiones cum tradita cautione. Secundò prout producti ex primo in tertium adsumentis quadratum secundi latus diuersimodè fingetur, vt iam sæpe in simili, fieri posse docuimus.

Cæterùm huius quæstionis ope, licebit & sequentes absoluere.

QVAESTIO PRIMA.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, quorum bini mutuo ductu quem producunt, is adscito reliqui quadrato, quadratus fiat.

Esto datus 10.

Sumantur tres numeri per superiorem quæstionem inuenti, & statuantur in Numeris. Erunt ergo quæsiti 9 N. 73 N. 328 N. & productus ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato, quadratum facit. Restat vt eorum summa sit 10. Quamobrem 410 N. æquantur 10. & fit 1 N. $\frac{1}{41}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{9}{41}$ $\frac{73}{41}$ $\frac{328}{41}$ seu 8.

QVÆSTIO SECVNDA.

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato quadratos faciant, & quadratorum latera datum constituant numerum.

Datus esto 25. Statuantur rursus pro quæsitis, numeri per decimam sextam inuenti, nimirum 9 N. 73 N. 328 N. sic enim producti ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato, quadratos faciunt 108241 Q. 24025. Q. 8281 Q. quorum latera 329 N. 155 N. 91 N. Restat vt horum laterum summa æquetur 25. Quare 575 N. æquantur 25. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{9}{23}$ $\frac{73}{23}$ $\frac{328}{23}$.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adsumpta, eorumdem summa quadratum faciat. Enim vero productus multiplicatione duorum quorumlibet quadratorum proximorum, adscita ipsorum summa quadratum facit. Ponatur itaque primus 4. secundus 9. vt productus eorum multiplicatione quadratus, nempe 36. adscita vtriusque summa faciat quadratum. Restat vt & productus ex secundo in tertium, adscito vtroque: itemque productus ex tertio in primum vtroque adsumpto faciat quadratum. Statuatur tertius 1 N. fitque productus ex secundo in tertium, vtroque adsumpto 10 N + 9. æquandus quadrato. At productus ex tertio in primum adsumens vtrumque fit 5. N. + 4. æqualis quadrato. Hic quoque rursus duplicata æquatio occurrit; estque interuallum 5 N. + 5. Quæro igitur duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 5 N. + 5. & sunt, hic quidem 1 N. + 1. ille verò 5. Atque vt in secundo libro docuimus, vel summæ horum semissis quadratus æquatur maiori: vel interualli semissis quadratus æquatur minori. Et fit 1 N. 28. Erit igitur primus 4. secundus 9. tertius 28. & satisfaciunt postulatis.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν σωαμφότερον ποιῇ τετράγωνον. παντῶν δὲ δύο τετραγώνων κῂ τὸ ἐξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν σωαμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τοίνυν ὁ μὴ πρῶτος μ° δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° θ̄ ἵνα ὁ ὑπ' αὐτοῦ γενόμενος τετράγωνος. μ° λϛ̄. προσλαβὼν σωαμφότερον ποιῇ τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι κῂ τὸν ὑπὸ δευτέρου & τρίτου προσλαβόντα σωαμφότερον, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου & πρώτου προσλαβόντα σωαμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ς̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ὑπὸ δευτέρου κῂ ἕνὸς προσλαβὼν συναμφοτέρους ς̄ ᾱ μ° θ̄ ἴσος τετραγώνῳ. κῂ ἔτι ὁ ὑπὸ τρίτου κῂ πρώτου προσλαβὰν συναμφοτέρους ς̄ ε̄ μ° δ̄ ἴσος τετραγώνῳ κῂ γίνεται πάλιν κῂ ἐνταῦθα διπλῆ ἡ ἴσωσις. καὶ ἔστιν ἡ ὑπαρχὴ ς̄ ε̄ μ° ε̄. ζητῶ οὖν πάλιν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ὅτι ς̄ ε̄. μ° ε̄ καὶ εἰσὶν οὓς μὴ ς̄ ᾱ μ° ᾱ. οὓς δὲ μ° ε̄. κῂ ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ, ἢ τῆς συνθέσεως αὐτοῦ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι, ἢ τῆς ὑπαρχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. κῂ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° κη̄. κῂ ἔστιν ὁ μὴ πρῶτος μ° δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° θ̄. ὁ δὲ τρίτος μονάδες κη̄. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVII.

DEMONSTRANDVM est Porisma quod assumit Diophantus, nimirum.

Productus ex multiplicatione duorum quadratorum, quorum latera vnitate distant, adscita ipsorum quadratorum summa, quadratum facit.

Sunto quadrati A. B. quorum latera C. D. vnitate distent. Et productus ex A in B. esto G. cui addendo summam ipsorum A B. fiat H. Dico H esse quadratum. [1] Quia enim inter quadratos A B. cadit mediùs proportionalis productus ex C in D. [2] patet G esse quadratum producti ex C in D. At verò summa quadratorum A B [3] æquatur duplo producti ex C in D. & quadrato interualli ipsorum C D, hoc est vnitati. Igitur eadem summa quadratorum æquatur duplo lateris quadrati G vnitate aucto. Quamobrem cùm addendo quadrato G duplum sui lateris vnitate auctum fiat H, [4] patet H esse quadratum, cuius latus vnitate superat latus ipsius G. Quod erat demonstrandum.

11. *Octaui.* 20. *septimi.* 4. 2. *porism.* C 2. D 3. A 4. B 9. G 36. H 49.

18. 1 *porism.*

Quod autem attinet ad positiones primi & secundi numeri quos Diophantus vult esse quadratos continenter proximos, puta 4 & 9. allucinatur etiam Xilander cùm putat alios quoslibet numeros potuisse poni per trigesimam primam secundi inuentos. Nam si huiusmodi ponantur qui non sint quadrati, hi quidem vni parti propositi satisfacient, sed duplicata æqualitas ad quam per hanc operationem deuenitur, inexplicabilis erit. Etenim vt patet, numeri pro primo & secundo positi, sunt iidem cum vnitatibus quæ reperiuntur tandem in numeris quadrato æquandis, vt in hypothesi Diophanti, cùm primum & secundum posuisset 4. & 9. Inuenit quadrato æquandos 10 N. + 9. & 5. N. + 4. Quare cùm hîc Numerorum numeri sint inæquales, nec habeant rationem quadrati ad quadratum, necesse est vnitates adiunctas quadratas esse, alioquin resolui non posset æquatio. Cùm enim horum interuallum sit 5 N. + 5. tales deligendi sunt numeri, quorum mutuo ductu id fiat vt in quadrato semissis summæ illorum reperiantur vnitates 9. & in quadrato semissis interualli reperiantur vnitates 4. Vt scilicet vnitatibus in æquatione se mutuò abolentibus vna species vni æqualis remaneat, puta quadrati Numeris. Hoc autem fieri nequit, nisi in semisse summæ sint vnitates 3. latus in ipsius 9. & nisi in semisse interualli sint vnitates 2. latus ipsius 4. Proinde nisi 9. & 4. quadrati sint, rem perfici non posse est manifestum. Hinc facile est videre cur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. sumpserit Diophantus numeros 1 N. + 1 & 5. Nam vt ex dictis constat tales sumendi sunt vt summa vnitatum in ipsis contentarum sit 6. interuallum verò earundem 4. Quare per Canonem primæ primi reperientur vnitates ponendæ in illis numeris esse 1. & 5. Atqui posito altero multiplicatorum 5. euidens est alium esse non posse nisi 1 N. + 1. vt eorum mutuò ductu fiant 5 N. + 5. Posset quidem alter poni 1. alter verò 5 N. + 5. Sed horum summæ & interualli semissis quadrati secundum omnes suas partes maiores sunt propositi ad æquandum quadrato numeris, vnde inuenitur valor Numeri minor nihilo. Quare restat solos 5. & 1 N. + 1. quæstioni soluendæ idoneos reperiri. Attamen ostendemus ad quadragesimam quintam quarti hanc æquationem etiam infinitis modis resolui posse per modum vtendi duplicata æqualitate à nobis inuentum, quem ibi explicabimus. Quod ad Hypostasim tertij numeri spectat, is non solùm poni potest 1 N. sed etiam quilibet Numerorum numerus. Sed si iidem ponantur primus & secundus eadem semper continget solutio vt experiendo deprehendes. Quamobrem omnis solutionis varietas pendet ex primi & secundi positione, quæ infinitis modis fieri potest. Cùm sumi possint alij atque alij quadrati continenter proximi.

OBSERVATIO D. P. F.

Extat huius quæstionis Diophanti problema in libro quinto quæstione quinta, Num vero problema sequens ipse Diophantus sciens prætermisit, an potius in aliquo tredecim librorum constructum erat, nescimus.

Inuenire 3. quadratos vt productus ex binorum multiplicatione adsumptâ eorundem summa quadratum faciat. Huius tamen quæstionis infinitas solutiones dare possumus.

En verbi gratia sequentem solutionem; satisfaciunt nempe problemati tres quadrati sequentes.

$\frac{3504384}{203401}$ 1. quadratus.

$\frac{2019241}{203401}$ 2. quadratus.

4. 3. quadratus.

Imo & vlterius progredi & Diophantæam quæstionem promouere nihil vetat. Sequens enim problema generaliter & infinitis modis construximus.

Inuenire 4 numeros sub quibus binis quod fit planum adscitâ amborum summâ faciat quadratum.

Inueniantur per 5. propositionem lib. 5. tres quadrati vt quem bini faciunt planum adsciscens amborum summam faciat quadratum & sunto illi numeri quadrati;

$\frac{25}{9}$ $\frac{64}{9}$ $\frac{196}{9}$

Sunt ergo tres isti quadrati, tres primi numeri nostræ quæstionis, ponatur quartus 1 N. fient tria producta vna cum summis æqualia.

$\frac{34}{9}$ N + $\frac{25}{9}$ primum.
$\frac{23}{9}$ N + $\frac{64}{9}$ secundum.
$\frac{225}{9}$ N + $\frac{196}{9}$ tertium.

Hæc igitur tria æquanda quadrato, & oritur triplicata æqualitas cuius explicationem dedimus ad quæstionem 24. libri sexti.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adsumens vtriusque summam faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus verò 3. & est productus eorum multiplicatione addito vtroque 4 N. + 3. æquandus quadrato. Esto quadrato 25. & fit 1 N. $5\frac{1}{2}$. ergo primus $5\frac{1}{2}$ erit, secundus 3. & vni postulatorum est satisfactum. Nam productus eorum multiplicatione adsumens vtrumque facit quadratum 25. Oportet igitur vt & productus ex secundo in tertium, itemque productus ex tertio in primum adscito vtroque faciat quadratum. Ponatur tertius 1 N. & fit productus ex secundo in tertium vtroque adscito rursus 4 N. + 3. At productus ex tertio in primum addito vtroque fit $6\frac{1}{2}$ N. + $5\frac{1}{2}$. Horum vterque quadrato æquatur. Sed quia alterius & numerorum & vnitatum multitudo, iis qui sunt in altero est maior, neque eorum inter se ratio est quæ quadrati ad quadratum, inutilis est huiusmodi positio. Eò itaque deuentum est vt quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione vtroque adscito faciat quadratum, & præterea ipsorum vnitate auctorum ratio sit quæ quadrati ad quadratum. Quandoquidem si numerus numeri quadruplum ternario excedat, ipsi vnitate aucti rationem habent ad inuicem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Pono primum 1 N. secundum verò 4 N. + 3. Restat vt productus eorum multiplicatione vtroque addito faciat quadratum. Sed productus eorum multiplicatione vtroque addito est 4 Q. + 8 N. + 3. hic ergo æquatur quadrato. Formo quadratum abs 2 N − 3. & fit quadratus 4 Q. + 9. − 12 N. & fit 1 N. $\frac{6}{10}$ seu $\frac{3}{5}$. erit igitur primus $\frac{3}{10}$. secundus $\frac{12}{10}$ seu $1\frac{1}{5}$. Ita postulatorum vni est satisfactum. Superest vt productus ex secundo in tertium, itemque productus ex tertio in primum addito vtroque

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο οἱωνῶν προσλαβὼν σωαμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ς̄ α̅. ὁ δὲ δεύτερος μ̊ γ̅. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτοὺς μετὰ σωαμφοτέρων ς̄ δ̅ μ̊ γ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἔστω μονάσι κε̅. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̊ ε̅ καὶ ἡμίσεως. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ̊ ε̅ ⊂ ἡμίσεως. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων γ̅. ⊂ λέλυται ἐν τῷ ὑποδείγματι, ὁ γὰρ ὑπ' αὐτοὺς μετὰ σωαμφοτέρων ποιεῖ τὸν κε̅ τετράγωνον. δεήσει δὲ καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου ⊂ πρώτου προσλαβόντα σωαμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ς̄ α̅. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν σωαμφότερος πάλιν ς̄ δ̄ μ̊. γ̅. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου ⊂ πρώτου προσλαβὼν σωαμφοτέρους ς̄ ε̄ καὶ ἡμίσεως μονάδων ε̅ ⊂ ἡμίσεως, ἴσος ἑκάτερος τετραγώνῳ. καὶ δεῖ τὸ πλεονάζειν ἐν τῷ ἑτέρῳ τὸ πλῆθος τοῦ ς̄ καὶ τοῦ μονάδων. καὶ μηδὲ λόγον αὐτοὺς ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἐχολάζει ἡ γεγραμμένη ὑπόστασις. ἀπῆκται δὲ εἰς τὸ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτοὺς μετὰ σωαμφοτέρων ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔτι οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ ᾖ τετραπλασίων, καὶ μονάδων γ̅ μείζων, οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ς̄ α̅. τὸν δὲ δεύτερον ς̄ δ̄ μ̊ γ̅ δεῖ λοιπὸν τὸν ὑπ' αὐτοὺς μετὰ συναμφοτέρων ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτοὺς μετὰ συναμφοτέρων ἐστὶ δ̄ δ̄ ς̄ ἢ μ̊. γ̅ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ β̅. τῆς μ̊ γ̅. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ δ μ̊ ϑ τῆς ς̄ ιβ̅. καὶ γίνεται ὁ ς̊ ς̄ ᾱ. τουτέστι γ̅ ῖ. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος γ̅ ῖ ὁ δὲ δεύτερος μβ̅ ῖ. τουτέστι δ̄. α̅ ῖ καὶ μένει ἐν τῷ ὑποδείγματι. λοιπὸν ὅτι τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ⊂ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου μετὰ σωαμφοτέρων ποιεῖν τετράγωνον. τάσσω τὸν τρίτον ς̄ α̅. ἔστι δὲ καὶ ὁ δεύτερος μ̊ δ̄. α̅ ῖ. γίνεται ὁ ὑπ' αὐτοὺς μετὰ συναμφοτέρων ς̄ ε̄. α̅ ῖ. μ̊

δ̄ α ϛ̄ μ̊ δ̄ ᾱ ϛ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ̊ κε̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ μὲν τρίτος ὄντι ς̄ ᾱ. ὁ δὲ πρῶτος γ̄ ῑ̄. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν μ̄ συναμφοτέρων ςς̄ ιγ̄ ῑ μ̊ γ̄ ῑ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ̊ ρ̄ πιῶ τὸ ςς̄ ε̄. ᾱ ϛ̄. μ̊ δ̄. ᾱ ϛ̄ ὅπου τὸν κε̄. γίνονται ςς̄ ρλ̄ μ̊ ρε̄ ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ὁμοίως τὰ τῶ ς̄ ιγ̄ ῑ̄. μονάδας γ̄ ῑ̄. ὅπου τὸν ρ̄ γίνονται ςς̄ ρλ̄ μονάδες λ̄. ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. ℂ ὅτιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μονάδες οε̄. καὶ ἔστι διπλῆ πάλιν ἰσότης, καὶ συναίρεται ὁ ἀριθμὸς ζ̄ ῑ̄. ἔσαι ὁ μὲν τρίτος ζ̄ ῑ̄. ὧν δὲ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γ̄ ῑ̄. ὁ δὲ δεύτερος μβ̄ ῑ̄. καὶ πιῶσι τὸ ὑπόταγμα.

faciat quadratum. Pono tertium 1 N. Est autem secundus $4\frac{1}{5}$. fit productus eorum multiplicatione addito vtroque $5\frac{1}{5}$ N + $4\frac{1}{5}$ æquandus quadrato. Esto quadrato 25. Rursus quia tertius est 1 N. primus autem $\frac{3}{10}$. erit productus eorum multiplicatione adsumpto vtroque $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. æquandus quadrato, puta 100. Duco $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ in 25. fiunt 130 N. + 105. æquanda quadrato. Similiter duco $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ in 100 fiunt 130 N. + 30. æquanda rursus quadrato. Et est eorum interuallum 75. & duplicata rursus occurrit æquatio, & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. erit igitur tertius $\frac{7}{10}$. erat autem primus $\frac{3}{10}$ secundus $\frac{42}{10}$ & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XVIII.

SVBTILE est hoc problema, & elegans modus vtendi duplicata æqualitate in eo continetur, quem cùm non perceperit Xilander, mirum non est si parum feliciter eum explicauit. Quamuis corruptos solutionis numeros benè restituerit. Nos ergo triplicem Diophanti positionem percurrentes notatu digna quæque percensemus, & obscura dilucidemus.

Prima positione quæruntur duo numeri, vt productus illorum multiplicatione adscita summa eorundem, quadratum faciat, & reperiuntur $5\frac{1}{2}$ & 3. Quamobrem hos statuendo pro primo & secundo, ponitur tertius 1 N. quem ducendo sigillatim in priores duos, & productis addendo summam eorum ex quibus producuntur, fiunt quadrato simul æquandi 4 N. + 3 & $6\frac{1}{2}$ N + $5\frac{1}{2}$. Hæc autem æquatio inexplicabilis est, quia cùm numeri quadrato æquandi componuntur ex Numeris & vnitatibus, oportet vel numeros Numerorum æquales esse, vt contigit propositione decima quarta huius, vbi æquatur quadratis 10 N. + 54. & 10. N. + 6. vel numero Numerorum in æquali existente, oportet vnitates esse quadratas, vt in præcedente quæstione, vbi æquantur quadratis 10 N. + 9 & 5 N. + 4. vel denique (quod hucusque non accidit) cùm vnitates quadratæ non sunt, nec numeri Numerorum æquales, oportet saltem numeros Numerorum inter se rationem habere quadrati quam trademus infrà. Hoc igitur vt consequamur. Videndum est vnde prouenerint Numerorum ad quadratum, ob causam numeri 4 N. & $6\frac{1}{2}$ N. At prouenerunt ex ipsis initio inuentis numeris 3. & $5\frac{1}{2}$ vnitate auctis, cùm ducendo sigillatim in ipsos 1 N. & productis addendo 1 N. fiant 4 N. & $6\frac{1}{2}$ N. Corrigenda ergo est prima positio, & loco ipsorum 3. & $5\frac{1}{2}$ alij duo numeri sunt inueniendi, quorum productus adscita eorundem summa quadratum faciat, ita vt ipsi numeri vnitate aucti rationem inter se habeant quadrati ad quadratum. Id fiet per secundam positionem.

Secunda itaque positione vt inueniantur huiusmodi numeri, & alterum postulatorum per ipsas positiones consequamur, tali vtendum lemmate.

Si fuerint duo numeri quorum maior minoris quadruplum ternario excedat, ipsi numeri vnitate aucti erunt plani similes.

Cuius lemmatis demonstratio facilis est. Sit enim maior A E minor C D. & à maiore auferendo ternarium B E superstit A B quadruplus ad C D. Dico si vtrimque addatur vnitas E F. D G. totos A F. C G. esse planos similes. Cùm enim B F quaternarius sit quadruplus vnitatis D G. Est vt A B ad C D, ita B F ad D G.

A.....B...E.F
C..D.G

12. *septimi.*

Quare & totus A F ad totum C G est in eadem ratione quadrupla; quod erat propositum. Ponitur ergo primus 1 N. secundus 4 N. + 3 vnde restat vt productus eorum multiplicatione adscita eorum summa quadratum faciat, & peracta æquatione fit 1 N. $\frac{3}{10}$. suntque quæsiti numeri $\frac{3}{10}$ & $4\frac{1}{5}$. quibus vtentes tertiam instituemus positionem.

Tertia igitur positione quæsitorum ab initio numerorum ponitur primus $\frac{3}{10}$. Secundus $4\frac{1}{5}$. Tertius 1 N. vnde tandem proueniunt quadrato æquandi $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ & $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$. Vbi quia Numerorum numeri sunt plani similes, sic explicabitur æquatio, sumantur duo quadrati in eadem ratione illorum numerorum, puta 100. & 25. ductoque minore in maiorem, & maiore in minorem fient iam quadrato æquandi 130 N. + 105. & 130 N. + 30. vbi numeri Numerorum sunt æquales, quia datis quatuor numeris proportionalibus, ex primo in quartum idem procreatur numerus, qui

19 *septimi.*

fit

fit ex secundo in tertium. Nec per huiusmodi multiplicationem immutatur æqualitatis ratio, quia quadrato per quemlibet quadratum siue multiplicato, siue diuiso, semper fit quadratus, vnde patet si 130. N. + 105. æquetur quadrato, & illius $\frac{1}{25}$ puta $5\frac{1}{5}$ N. + $4\frac{1}{5}$ fore quadratum. Et si 130. N. + 30. ponatur æquari quadrato, & eius centesimam partem, puta $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ fore quadrato æqualem. Sumpsit autem Diophantus quadratos 25. & 100. potiùs quàm alios quoscunque in eadem ratione, vt vitaret fractiones, alioquin expeditiùs res ageretur ducendo denominatorem rationis, puta 4. in minorem numerum $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ vnde fierent quadrato æquandi $5\frac{1}{5}$ N + $4\frac{1}{5}$ & $5\frac{1}{5}$ N. + $1\frac{1}{5}$. Itaque subtili artificio res deducta est ad primum modum duplicatæ æqualitatis, quo vsus est Diophantus tum duodecima, & decima quarta secundi, tum decima quarta huius. Etenim ipsorum 130 N. + 105. & 130 N. + 30. Interuallum est 75. qui fit, si libet, ex 3. in 25. quorum summæ semissis quadratus 196. æquatur maiori 130 N. + 105. & fit N. $\frac{7}{10}$.

Cæterùm varietas in operatione & in solutione à multis oritur capitibus.

Primò enim inueniri possunt infiniti duo numeri, quorum productus adscita eorum summa quadratum faciat, quique vnitate aucti fiant plani similes. Tum quia, vt benè monet Xilander, quod de quadruplis asserit Diophantus, potest congruenter applicari omnibus aliis numeris seruantibus rationem quadrati ad quadratum; similiter enim si numerus numeri nonuplum superet octonario, addita vtrimque vnitate fient plani similes; & si numerus numeri sedecuplum excedat numero 15 adscita vterque vnitate, fient etiam plani similes, & sic de aliis. Tum quia numeri quadrato æquandi, qualis est in hypothesi Diophanti 4 Q. + 8 N. + 3. latus diuersimodè fingi potest, vt patet. Secundò rursus in secunda eadem positione alia varietas considerari potest. Primus enim non solùm potest poni 1 N. sed & quilibet Numerorum numerus lemmate tamen tradito vtendo congruenter in positione secundi. Vt si ponatur primus 2. N. erit secundus 8 N. + 3. vel 32 N. + 15. &c. si ponatur primus 3 N. erit secundus 12 N. + 3. vel 27 N. + 8 &c.

Tertiò in tertia positione iisdem manentibus primò & secundò potest etiam tertius infinities variari, & poni non solùm 1 N. sed & quilibet Numerorum numerus, sed ad hoc intelligemus ampliari lemma traditum hoc pacto.

Si fuerint duo numeri, quorum maior quadruplum minoris ternario superet, & vterque ducatur in tertium numerum, productisque addatur idem tertius, fient duo plani similes.

Quod ita demonstrabitur.

A.....,B...C
D.. E F 5
G 55. H 10
K 60 L. 15.

Sit A C superans ternario B C ipsum A B quadruplum ipsius D E. & tertius quilibet numerus F ductus in ipsos A C. D E. faciat G H. quibus addendo sigillatim ipsum F fiant K L. dico ipsos K L esse in ratione quadrupla, atque ideò planos similes. Etenim quia G. qui fit ex F. in A C. æquatur productis ex F. in A B. & B C. At productus ex F. in A B. quadruplus est producti ex F. in D E seu ipsius H. (cùm A B. D E. sint in quadrupla ratione) productus autem ex F. in ternarium B C. triplus est ipsius F. patet G. continere quadruplum ipsius H. & triplum ipsius F. quare si eidem G. addatur F. summa K. quadrupla est ipsorum H F. seu ipsius L. Quod demonstrandum erat. Non aliter idem ostendetur de alia qualibet ratione quadrati ad quadratum. Vt si A C. ponatur excedere nonuplum vel sedecuplum ipsius D E. ternario, concludetur & K ipsius L esse nonuplum vel sedecuplum, & sic de alijs. Quare manifestum est iisdem manentibus primò & secundò puta $\frac{3}{10}$. & $4\frac{1}{5}$. Tertium poni posse 1 N. vel 2 N. vel 3 N. &c. 1. secundi.

Denique ipsa duplicata æqualitas infinitis modis resolui potest, prout sumentur alij atque alij numeri, quorum mutuo ductu fiat 75. dummodo horum summæ & interualli semissis quadrati maiores sint ipsis 105. & 30. vt docuimus ad duodecimam secundi.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE tres numeros, ita vt binorum multiplicatione productus dempta amborum summa sit quadratus. Vt in præcedenti ponatur primus 1 N. secundus vnitatum quotuis, & eodem modo in difficultatem inexplicabilem incidemus. Vt ergo multitudinem Numerorum ad multitudinem Numerorum habeamus sub ratione quadrati ad quadratum, eò deuoluitur res vt quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu qui fit dempta ambo-

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας σωαμφότερον ποιῇ τετράγωνον, ὁμοίως πᾶ πρὸ τούτε. τετάχθω ὁ πρῶτος ς᾽ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος μ᾽ ὅστις δὴ ποτε, καὶ ἐλεύσομαι ὡταύτης εἰς ἄπορον. ἵνα δὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ἔχωμεν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ς᾽ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἁπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι δύο ς᾽ς᾽ους, ὅπως ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν γ᾽ σωαμφότερα ποιῇ τετραγώνους. ᾗ ἐπὶ οἱ μονάδι ἐλάσσονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετρά-

γωνος πρὸς τετράγωνον. ☾ ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς ἐὰν ἀριθμῷ τετραπλασίων ᾖ ϖλὴν μονάδας ϛεῖς, οἱ μονάδι αὐτῷ ἐλάσσονες πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ϖρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐπεὶδήπερ ☾ τῆς μ° ᾱ. ἀφ' ἑκατέρᾳ ἀφαιρουμένης γίνεται ἐλάττωσις μ° δ̄ ϗ ᾱ. ☾ δῆλον ὅτι ἀπὸ τετραπλασίων, λόγου τετραπλασίονες ἀφαιρεμένης, καὶ ὁ καταλειπόμενος ἔσται τετραπλασίων, τουτέστι ὡς τετράγωνος ϖρὸς τετράγωνον. τάσσω δὴν τ̀ μὲν ϖρῶτον ϛ̄ ᾱ. μ° ᾱ τ̀ δὲ δεύτερον ϛϛ δ̄ μ° ᾱ. καὶ μένει ὁ ὑπ' αὐτῷ τ̀ σωαμφότερον δ° ὃ λείψει μ° ᾱ ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛϛ β̄ λείψει μ° β. τουτέστι δ° δ̄ μ° δ̄ ϗ ϛϛ η̄. ϗ γίνεται ὁ ϛ° ε̄ ᾱ̃. ἔσται ὁ μὲν ϖρῶτος ιϛ ᾱ̃. ὁ δὲ δεύτερος κη̄ ᾱ̃. ϗ λέλυται ἐν τ̀ ὀπτάγμάτων. ☾ ἐπεὶ ὁ μὲν ϖρῶτος ἔστι ιϛ ᾱ̃. ὁ δ' δεύτερος γ̄ ☾ ἥμισυ. τάσσω τὸν τρίτον ϛ̄ ᾱ. καὶ ὁ ὑπὸ δευτέρᾳ ϗ τρίτῳ σωαγόμενος ϛϛ γ̄ ᾱ ϛ̄. μένει ϛϛ λείψας τ̀ σωαμφότερον ϛ̄ ᾱ μ° γ̄ ᾱ μ° γ̄ ᾱ ϛ̄. μένει ϛϛ β̄. ᾱ ϛ̄ λείψει μ° γ̄. ᾱ ϛ̄. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω μονάσι δ̄. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτῳ ☾ ϖρώτου γίνε) ϛϛ ιϛ ᾱ̃. λείψας σωαμφότερον γίνεται ϛϛ ε̄ ᾱ̃. λείψει μονάδων ιϛ ᾱ̃. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω ις̄. ταῦτα ἐκπαιδεκάκις γίνονται ϛϛ ῑ λείψει μονάδων κϛ̄. ἴσοι τετραγώνῳ ☾ ὁμοίως οἱ ϛϛ β̄. α ϛ̄ λείψει μ° γ̄ ᾱ ϛ̄ τετράκις, γίνονται ϛϛ ῑ λείψει μ° ιδ̄ ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. ϗ ἔστιν αὐτῷ ὑφοχὴ μ° ιβ̄. οὖσα τὸ ὑπὸ μ° β̄ καὶ μ° ϛ̄ σωαμφοτέρων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μ° ις̄ ἴσα τῷ μείζονι. τουτέστιν ϛϛ ῑ λείψει μ° ιδ̄. ☾ γίνεται ϛ° μ°. γ̄. ἔσται ὁ μὲν τρίτος μ° γ̄. τουτέστι κδ̄ ᾱ̃. ἔχομεν δὲ τὸν μὲν ϖρῶτον μ° ιϛ̄ ᾱ̃. τὸν δὲ δεύτερον μονάδων γ̄. ἃ ϛ̄ τουτέστι κη̄ ᾱ̃. καὶ ποιεῖ τὸ ϖροβλημα.

rum ſumma ſit quadratus, & prætereà ipſi vnitate multati rationem habeant quam quadratus ad quadratum. Enim vero ſi numerus alterum quater, dempto ternario continet, ij vnitate multati rationem habent inter ſe quam quadratus ad quadratum; quia ſcilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternarij, inde vnitatis; & patet ſi à quadruplis quadrupla, auferantur, reſidua eſſe quadrupla, atque ideo in ratione quadrati ad quadratum. Pono igitur primum 1 N. + 1. ſecundum 4 N. + 1. & fit productus eorum multiplicatione, dempto vtroque 4 Q. — 1 æqualis quadrato à latere 2 N. — 2. hoc eſt 4 Q. + — 4. — 8 N. & fit 1. N. $\frac{13}{8}$. erit ergo primus $\frac{13}{8}$ ſecundus $\frac{28}{8}$. & ſatisfit vni poſtulatorum. Et quoniam primus eſt $\frac{13}{8}$ ſecundus $3\frac{1}{2}$. pono tertium 1 N. & fit ſecundo in tertium $3\frac{1}{2}$ N. & vtroque detracto, puta 1 N. + $3\frac{1}{2}$ reſtat $2.\frac{1}{2}$ N. — $3\frac{1}{2}$ æquandus quadrato. Eſto quadrato 4. Qui autem fit ex tertio in primum eſt $\frac{13}{8}$ N. & vtroque dempto reſtat $\frac{5}{8}$ N. — $\frac{13}{8}$ æquandus quadrato. Eſto ipſi 16. & per hunc iſtud multiplicetur fit 10 N. — 26. æquandus quadrato. Similiter $2\frac{1}{2}$ N. — $3.\frac{1}{2}$ ducantur in 4. fit 10 N. — 14. æqualis quadrato. Horum interuallum 12. quod fit mutuo ductu ipſorum 2. & 6. quorum ſummæ ſemiſſis in ſe facit 16. æqualem maiori, puta 10 N. — 14. & fit 1 N. 3. Ergo tertius eſt 3. ſeu $\frac{24}{8}$. habebamus autem primum $\frac{13}{8}$. ſecundum $3\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{28}{8}$. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM XIX.

OMNIA quæ ad præcedentem adnotata ſunt, hîc etiam locum habent. Modus vtendi duplicata æqualitate idem eſt, & lemma quod aſſumit Diophantus eadem ratione demonſtratur, ipſiuſque demonſtrationis fundamentum attigit Diophantus his verbis. *Quia ſcilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternarij, inde vnitatis, & patet ſi à quadruplis quadrupla auferantur, reſidua eſſe quadrupla.*

Operationis quoque & ſolutionis varietas totidem modis contingere poteſt, vt diutiùs pigeat immorari in re manifeſta.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῷ ἐάν τε ϖροσλάβῃ σωαμφότερον, ἐάν τι ἑκάτερον ϖοιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ

INVENIRE duos numerus, vt productus eorum multiplicatione ſiue alterutrum, ſiue ſummam ipſorum adſciſcat,

faciat quadratum. Ponatur alter 1 N. alter 4 N. − 1. Quoniam si numerus sit numeri quadruplus dempta vnitate, productus eorum multiplicatione adsumens minorem facit quadratum. Iam duo postulatorum restant implenda, vt scilicet productus eorum multiplicatione adscito secundo, & vtroque simul faciat quadratum. Sed productus adsumens secundum fit 4 Q. + 3 N. − 1. æqualis quadrato. Et idem productus vtroque addito fit 4 Q. + 4 N. − 1. æquandus quadrato. Et est duplicata æqualitas. Horum interuallum 1 N. quod fit ex $\frac{1}{4}$ in 4 N. & fit 1 N. $\frac{65}{224}$. Erit igitur primus $\frac{65}{224}$. secundus $\frac{36}{224}$. & soluunt quæstionem.

μῷ ς$^{\bar{\alpha}}$. ὁ ᾧ ϛς$^{\bar{\delta}}$ γ μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ ᾗ τετραπλασίων ᾖ μονάδα, ὑπ' αὐτῷ ποιεῖ τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ τετράγωνον. ἐξῆς δεῖ καὶ τὰ λοιπὰ δύο ὁπτάγμαθ' ἁβασκιάσαι. ὥστε τ' ὑπ' αὐτῷ ποιοῦν τ δεύτερον, καὶ ἔτι σωαμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῷ ποιῶν τὸν δεύτερον γίνεται δ$^{\bar{υ}}$ δ ϛ$^{\bar{ου}}$ γ̄ λείπει μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$. ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῷ ποιῶν σωαμφότερον γίνεται δ$^{\bar{υ}}$ δ λείπει μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ ἔστι αὐτῷ ὑποχὴ ἀριθμὸς εἷς, καὶ ποιέχεται ὑπὸ μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$ δ$^{\bar{ου}}$. καὶ ἀριθμῷ δ. καὶ σωάγεται ὁ ς^{ὸ} ξ$^{\bar{ε}}$ σκδ$^{\bar{ου}}$. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ξ$^{\bar{ε}}$ σκδ$^{\bar{ου}}$. ὁ δὲ δεύτερος λς$^{\bar{ε}}$ σκδ$^{\bar{ου}}$. καὶ ποιῶσι τὸ προβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

MAGNA est conformitas huius quæstionis cum vigesima-septima secundi. Vbi quæruntur duo numeri, quorum productus adscito alterutro quadratum faciat. Sed hîc præterea postulatur vt idem productus adsumpta amborum summa faciat quadratum. Itaque suas positiones eodem modo instituit Diophantus, & eorundem lemmatum quæ ibi demonstrauimus hîc vsus esse potest.

Porro notandus hîc modus vtendi duplicata æqualitate, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum constat ex solis numeris. Tunc enim necesse est in numeris quadrato æquandis reperiri quadratorum numerum quadratum, vt hîc 4 Q. Numeros autem quorum mutuo ductu fiat interuallum 1 N. accipit Diophantus 4 N. & $\frac{1}{4}$ ob similem causam illius quam attulimus ad decimam quintam huius. Oportuit enim talem sumi numerorum numerum, cuius semissis quadratus efficeret 4 Q. Quare debuit pro altero sumi 4 N. vnde sequitur alterum necessario esse $\frac{1}{4}$ vt eorum mutuo ductu fiat 1 N.

Cæterùm tota diuersitas in primis positionibus consistit, quas diuersimodè fieri posse constat auxilio lemmatum ad vigesimam septimam secundi allatorum.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue alterutro siue vtriusque summa multatus quadratum faciat. Ponatur alter 1 N. + 1. alter 4 N. Quandoquidem si numerus numeri sit quadruplus, demptis quatuor vnitatibus, productus eorum multiplicatione detracto maiore quadratum facit. Restat itaque vt productum multiplicationis siue minore, siue vtriusque summa multatus, faciat quadratum. Sed productum illud dempto minore fit 4 Q. + 3 N. − 1. Et idem productum dempto vtroque fit 4 Q. − 1 N. − 1. Horum vtrumque quadrato æquale est. Interuallum 4 N. Statuo illud mutuo ductu producentes 4 N. & 1. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{4}$. Erit ergo primus 2 $\frac{1}{4}$. secundus 5. & manifesta est demonstratio.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμὸς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτ̃ ἐάν τε λήψῃ ἑκάτερον, ἐάν τε σωαμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ς$^{\bar{α}}$ μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$. ὁ δὲ ϛς$^{\bar{δ}}$. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ ᾗ τετραπλασίων ᾖ μ$^{\bar{ο}}$ δ. ὁ ὑπ' αὐτ̃ λείψας τ μείζονα ποιεῖ τετράγωνον λοιπὸν δ ἢ τ ὑπ' αὐτ̃ γ τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔτι τ ὑπ' αὐτ̃ λείψαντα σωαμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτ̃ λείψας τὸν ἐλάσσονα γίνεται δ$^{\bar{υ}}$ δ ϛς$^{\bar{ου}}$ γ̄ λείπει μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$. ὁ δὲ ὑπ' αὐτ̃ λείψας σωαμφότερον δ$^{\bar{υ}}$ δ λείπει ς$^{\bar{α}}$ $\bar{\alpha}$ μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔστιν αὐτ̃ ὑποχὴ ϛς$^{\bar{ου}}$ δ. τάσσω τὸν μὲν ϛς$^{\bar{δ}}$. τ δὲ μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$. καὶ γίνεται ὁ ς^{ὸ} μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\alpha}$. $\bar{\alpha}$ δ$^{\bar{ου}}$. καὶ ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ$^{\bar{ο}}$ $\bar{\beta}$. $\bar{\alpha}$ δ$^{\bar{ου}}$ ὁ δὲ δεύτερος μ$^{\bar{ο}}$ ε̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερὰ.

IN QVAESTIONEM XXI.

EADEM aut similia dici possunt de hac quæstione, quæ de superiore dicta sunt vide quàm sit conformis vigesimæ octauæ secundi, & quomodo vtrobique eodem vtens lemmate Diohantus, eodem modo suas instituat positiones. Modus vtendi duplicata æqualitate idem est, quo vsus est in præcedente,& easdem ob causas ad conficiendum interuallum 4 N. sumpsit 4 N. & 1.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τῶν συγκειμένων ἐκ τῆς τετράδος τετράγωνον, ἐάν τε προσλάβῃ ἕκαστον, ἐάν τε λήψῃ ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τις δὶς ὑπὸ τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν, ἐάν τε λήψῃ ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. τὸ δ' αὐτό ἐστι τετράγωνον τινα διελεῖν τετράκις εἰς δύο τετραγώνους. ☾ ἐμάθομεν τὸν δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς β τετραγώνους ἀπειραχῶς. νῦν οὖν ἐπιθώμεθα δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν οἷον γ. δ. ε. ε. ιβ. ιγ. καὶ πολλαπλασίασον ἕκαστον τὸν ἐκκειμένων ὑπὸ τὴν ὑποτείνουσαν τὸ ἑτέρου, καὶ ἔσαι τὸ μὲν πρῶτον τρίγωνον λϑ. νβ. ξε. τὸ δεύτερον κε. ξ. ξε. καὶ ἔστιν ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. ἔπι δὲ φυσικῶς ὁ ξε. διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους διχῶς εἴς τε τὸν ις. καὶ τὸν μϑ. ἀλλὰ μὴν ☾ τὸν ξδ. ☾ τὴν μονάδα. τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπεὶ ὁ ξε ἀριθμὸς πρόεχεται ὑπὸ τοῦ ιγ ἢ τοῦ ε. ὧν ἕκαστος διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους. νῦν τῶν ἐκκειμένων τέτε μϑ. καὶ τὸ ις. λαμβάνω τὰς πλευρὰς, εἰσὶ δὲ ζ καὶ δ. ☾ πλάσω τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο τέτε ζ ἢ τοῦ δ. καὶ ἔστι λγ. νς. ξε. ὁμοίως καὶ τὸ ξδ. καὶ τῆς μονάδος αἱ πλευραὶ ἢ καὶ α. καὶ πλάσω πάλιν ἀπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ αἱ πλευραὶ ις. ξγ. ξε. καὶ γίνεται τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. ἐλθὼν οὖν ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῆς τετράδος ις ξε. ἕκαστον δὲ τούτων τῆς τετράδος δυωάμεων τοσούτων, ὅσων ἐστὶ τετράγωνον τὸ ἑνδεκάς. τὸν μὲν πρῶτον δ̄ ϡνς. τὸν δὲ δεύτερον δ̄ γ. τὸν τρίτον δ̄ γχις καὶ ἔτι τὸν τέταρτον δυωάμεις βις. καὶ εἰσὶν οἱ τέσσαρες δ̄ μη. α. βϡξη. ἴσοι ις ξε. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄

INVENIRE quatuor numeros vt compositi ex omnibus quadratis, singulorum tam adiectione quàm detractione faciat quadratum. Quoniam in quolibet triangulo rectangulo quadratus hypotenusæ siue auctus, siue multatus duplo eius quod fit è multiplicatione laterum circa rectum, facit quadratum. Quæro primum quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenusas. Hoc ipsum verò est, quadratum aliquem diuidere quater in duos quadratos. Atqui didiscimus datum quadratum diuidere in duos quadratos infinitis modis. Nunc ergo exponamus duo triangula rectangula in minimis numeris, quales sunt 3. 4. 5. & 5. 12. 13. & multiplicetur vnumquodque ipsorum per hypotenusam alterius, & erit primum triangulum 39. 52. 65. secundum 25. 60. 65. & sunt rectangula æquales habentia hypotenusas. Adhuc autem suapte natura numerus 65. diuiditur bis in duos quadratos, nempe in 16. & 49. Et rursus in 64. & 1. quod ei contingit quia fit ex multiplicatione mutua 5. & 13. quorum vterque in duos diuiditur quadratos. Nunc expositorum 49. & 16. sumo latera, sunt autem 7. & 4. & formo triangulum rectangulum à duobus numeris 7. & 4. & est 33. 56. 65. Similiter ipsorum 64. & 1. latera sunt 8. & 1. à quibus rursus formo triangulum rectangulum, cuius latera sunt 16. 63. 65. & fiunt quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenusas. Refero me igitur ad propositam initio quæstionem, & pono compositum ex quatuor numeris 65 N. Quemlibet verò ipsorum quatuor pono tot quadratorum quot continet vnitates quadruplum areæ. Primum quidem 4056 Q. Secundum autem 3000. Q. Tertium 3696 Q. Quartum denique 2016 Q. & est il-

lorum ſumma 12768 Q. æqualis 65 N. & fit 1 N. $\frac{65}{12768}$. Ad poſitiones. Erit primus 17136600. Secundus 12675000. ſub eiuſdē partis denominatione. Tertius 15615600. ſub eiuſdem partis denominatione. Quartus 8517600. ſub eiuſdem partis denominatione. Eſt autem partis denominator 163021824.

ξε μυι. α̅. μ̅ ϛ̅ϛ̅ξ̅η̅. ὅθεν τας ὑποσάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μῆ ἀψγ. μονάδες ϛχ. ὁ δὲ δεύτερος μῆ. αρξζ̅. μ̅ ε μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος μῆ. αφξα̅. μ̅ ἑχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τέταρτος μῆ. ωτα̅. μ̅ ζχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. τὸ δὲ μέριον μμ. α̅. μῆ. ϛτβ. μ̅ ϕωκδ̅.

IN QVAESTONEM XXII.

PVLCHERRIMVM eſt hoc problema & raræ ſubtilitatis, in quo cùm multum deſudarit Xilander, perfectam tamen eius enodationem afferre non potuit, deſtitutus ſcilicet ope poriſmatum quæ ad hoc requiruntur. Quoniam ergo gloriam rei peroſcuræ explicandæ nobis libenter reliquit, nos eam libentiùs amplectamur. Et vt omnia clariora fiant, ſingula quæque notatu digna ordine proſequamur.

Aduerte itaque primò lemma quod aſſumit Diophantus de triangulis rectangulis idem ferè eſſe licet aliis verbis enunciatum, quod iam vſurpauit trigeſima prima ſecundi, vbi & monuimus, quod hîc repetere non pigebit, illo nil aliud contineri, quàm quod oſtenditur quarta ſecundi Euclidis, & quarta ſecundi poriſmatum. Etenim per quartam ſecundi, conſtat ſummam quadratorum à duobus numeris adſumpto duplo producti laterum efficere quadratum ſummam laterum. At per quartam ſecundi poriſmatum patet duplum producti laterum detractum à ſumma quadratorum, relinquere quadratum interualli laterum. Quare cùm in triangulo rectangulo quadratus hypotenuſæ ſit æqualis quadratis laterum circa rectum, manifeſtum eſt, quod ait Diophantus, quadratum hypotenuſæ ſiue adſumpto, ſiue detracto duplo producti laterum circa rectum, facere vtrimque quadratum. Proinde rectè Diophantus ſummam quatuor quæſitorum numerorum conſtituit hypotenuſam alicuius trianguli rectanguli, vnumquemque verò ipſorum numerorum ponit duplum producti laterum circa rectum, ſeu quadruplum areæ trianguli, vt conſtat ex tertia definitione tertij poriſmatum, ſic enim optimè ſatisfit poſtulatis. Quamobrem vt ipſi numeri diuerſi reperiantur, ſupereſt vt inueniamus quatuor triangula rectangula, quorum eadem ſit hypotenuſa.

Aduerte igitur ſecundò, vt benè monet Diophantus, reperire quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenuſam, nil aliud eſſe quàm quadratum quemlibet diuidere quater in duos quadratos. Quare niſi fractiones in operando vitare voluiſſet, poterat rem abſoluere per octauam ſecundi, qua docuit quadratum quemlibet infinities diuidere in duos quadratos. Vt autem fractiones in operatione vitentur, ſubtili ſanè artificio quadratum inueſtigat author, qui quater diuidatur in duos quadratos integros. Exponit ſcilicet duo triangula rectangula non ſimilia, puta 3. 4. 5. & 5. 12. 13. Tunc vtriuſque latera per alterius hypotenuſam multiplicans, inuenit alia duo triangula, quorum eadem eſt hypotenuſa, nimirum 39. 52. 65. & 25. 60. 65. Nam & hæc eſſe latera trianguli rectanguli patet per primam tertij poriſmatum, cùm fiant lateribus trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicatis. Quod autem dixi exponenda eſſe triangula non ſimilia, id factum eſt, quia ſi triangula ſimilia ſint, non iam alia duo hac ratione formabuntur ab his triangula, ſed vnicum duntaxat. Quod ſic demonſtratur. Sint triangula ſimilia A B C. D E F. & ducta hypotenuſa F in ſingula alterius latera fiat triangulum G. H. K. dico idem triangulum G H K, & non aliud, fieri, ſi hypotenuſa C. ducatur in ſingula latera alterius D E F. Nam primo ex hypotheſi ex C in F fiet K. Deinde [1] quia eſt A ad D vt C ad F. fiet, vtique [2] idem G ex C in D qui fit ex A in F. ſimiliter quia eſt B ad E vt C ad F. fiet rurſus idem H ex C in E qui fit ex B in F. Quare conſtat propoſitum.

A 3. B 4. C 5.
D 6. E 8. F 10.
G 30. H 40. K 50.

defin. 4.
3. poriſm.
1. ſeptimi.

Aduerte tertiò. Vt rurſus inueniatur alia duo triangula, quorum ſit eadem hypotenuſa 65. Diophantum vti poriſmate, quod demonſtrauimus propoſitione ſeptima libri tertij nimirum. Si duo numeri ex duobus quadratis compoſiti inter ſe ducantur, productus componetur bis ex duobus quadratis. Hac de cauſa triangula initio expoſita ita delegit, author, vt cuiuſlibet hypotenuſa componatur ex duobus quadratis, puta 5. ex quadratis 1. & 4. ac 13. ex quadratis 4. & 9. vnde optimè concludit 65. componi bis ex duobus quadratis, nimirum ſemel ex 16. & 49. Atque iterum ex 1. & 64. Hi autem quadrati vt reperiantur oſtendit ſeptima tertij poriſmatum. Sed illius limitationes attendendæ ſunt, quarum prima requirit, vt quilibet expoſitorum numerorum componatur ex duobus quadratis inæqualibus, nam ſi alter ex duobus æqualibus quadratis compoſitus ſit, productus eorum multiplicatione componetur tantùm ſemel ex duobus quadratis, vt ſi ſumantur 5. & 8. quorum 8 componitur ex æqualibus quadratis 4. & 4. erit productus 40. ſemel tantùm ex duobus quadratis compoſitus, puta ex 36. & 4. ſecunda verò limitatio requirit, vt expoſiti numeri componantur ex quadratis minimè pro-

portionalibus, alioquin idem sequitur incommodum, vt si sumantur 5. & 20. compositi ex quadratis proportionalibus 1. 4. 4. 16. erit productus 100. ex duobus quadratis semel duntaxat compositus, videlicet ex 64. & 36. Quæ omnia loco citato demonstrantur.

Aduerte quartò. Inuentis quadratis 16. & 49. itemque 1. & 64. ex quibus 65. componitur ex iis Diophantum formare triangula rectangula duo, quorum eadem est hypotenusa 65. eò quem demonstrauimus modò tertia vel quinta tertij porismatum. Etenim si per tertiam libeat operari à quadratis 16. & 49. fiet triangulum cuius hypotenusa erit summa ipsorum puta 65. basis verò interuallum eorundem puta 33. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis, puta 56. Rursus à quadratis 1. & 64. formabitur triangulum, cuius hypotenusa erit summa ipsorum, puta 65. Basis verò interuallum eorundem, puta 63. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis, puta 16. & sic habebuntur triangula duo quæsita 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Quæ eadem reperientur per quintam tertij porism. Verùm hic notandus est Casus, cùm productus ex mutuo ductu duorum numerorum ex duobus quadratis, compositorum, componitur quidem bis ex duobus quadratis, sed vna compositione componitur ex duobus quadratis æqualibus, vt sumptis 5. & 10. productus 50. componitur quidem semel ex quadratis 1. & 49. inæqualibus. Sed componitur iterum ex æqualibus 25. & 25. Vnde per hanc compositionem inutilis redditur operationi Diophanti, non enim inde concludi potest eius quadratum componi ex duobus quadratis, cùm ipsorum 25 & 25. nullum sit interuallum, quod deberet esse latus vnius quadratorum illorum. Porro id semper accidit, quando tales sumuntur duo numeri ex duobus quadratis compositi, vt quod fit ex interuallo laterum vnius, in interuallum laterum alterius, æquetur duplo producti ex minore latere in minus latus. Quod ita demonstratur.

C 6.
A 3. B 9. M 90.
F 1.
D 1. E 2. N 5.
G 3. H 9. K 6. L 18.

Sint A B latera quadratorum vnius, quorum interuallum C. & sint D E latera quadratorum alterius, quorum interuallum F. & productus ex C. in F æquetur duplo producti ex A in D. Porro compositus ex quadratis ipsorum A B esto M. & productis esse quadratis ipsorum 1 D E esto N. dico productum ex M in N. componi quidem bis ex duobus quadratis, sed vna compositione componi ex duobus æqualibus quadratis. Etenim ducto D in ipsos A B. fiant G H. & ducto E in eosdem A B. fiant K L. Paret ex demonstratis septima tertij porismatum, productum ex M. in N. componi tum ex quadrato summæ amborum G L. & & ex quadrato interualli ipsorum G K. Tum ex quadrato summæ amborum H K. & ex quadrato interualli ipsorum H L. Verùm aio summam ipsorum H K. æquari interuallo ipsorum G L, ac proinde productum ex M in N. hac compositione constare ex duobus quadratis æqualibus. Quia enim L fit ex E in B. seu ex duobus D F. in duos A C. si hinc auferatur productus ex D in A. puta G. patet interuallum ipsorum G L. æquari productis ex A in F, ex C in D, & ex C in F. & loco producti ex C in F. sumendo duplum producti ex A in D illi æqualem ex hypothesi, erit prædictum interuallum æquale duplo producti ex A in D. & productis ex D in C. & ex A in F. Sed eisdem productis patet æqualem esse summam ipsorum H K. Nam H fit ex D in B. seu ex D in A. & ex D in C. At K fit ex A in E. seu ex A in D. & ex A in F. Vnde constat duorum H K. summam æquari duplo producti ex A in D, & productis ex D in C. & ex A in F. Igitur ipsorum H K summa æquatur interuallo ipsorum G L. Quod demonstrandum erat.

Aduerte quintò. Textus Græci lacunas à me esse repletas, tum deficientes numeros restituendo, tum corruptos emendando, & ne fortè hæreas in numeris Græcis, moneo Diophantum maximos numeros in quibus ingens Myriadum multitudo continetur, sic exprimere vt Myriadas à reliquis vnitatibus distinguat perspicuitatis ergo, signum autem Myriadibus apponit $\mu\dot{\upsilon}$ Myriadibus myriandum $\mu\mu$. duplex μ. At reliquis vnitatibus signum consuetum $\mu\bar{o}$. Sic vides numerum 16302 1824. sic ab eo exprimi, $\mu\mu\sigma\bar{\beta}$. ideſt Myrias vna myriadum. $\mu\upsilon$. $\varsigma\tau\bar{\zeta}$ id est Myriades 6302. $\mu\bar{o}$ $\alpha\omega\kappa\delta$. ideſt vnitates 1824. Et sic de aliis.

Aduerte postremò, sine porismate Diophanti æquè benè inueniri posse in integris quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenusam, auxilio decimæ tertij porismatum. Etenim expositis triangulis non similibus 3.4.5. & 5.12.13. si cum Diophanto formes ex his alia duo ducendo vtramque hypotenusam in alterius latera, habebis 39. 52. 65. & 25. 60. 65. Tum si per decimam tertij porism. ex iisdem triangulis prius expositis formes alia duo modo ibi tradito, fient vtique 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Immò ex ibi demonstratis licebit ampliare Porisma Diophanti, & illud extendere non solùm ad numeros ex duobus quadratis compositos, sed etiam ad duos ex duobus planis similibus compositos, & vniuersalissimè proponere.

Si numerus ex duobus planis similibus compositus, ducatur in alium ex duobus planis similibus compositum, qui non sint proportionales iis ex quibus primus componitur; producetur numerus cuius quadratus componetur quater ex duobus quadratis.

A 24. B 45. C 51.
D 9. E 12. F 15.

Sint enim C F ex duobus planis similibus vterque compositus, qui non sint proportionales. Et ex C in F fiat T. dico T quater componi ex duobus quadratis. Etenim quia C componitur ex duobus planis similibus, erit hy-

G 693. K 324. L 756. M 117. N 675. P 360. Q 612. R 459. T 765

potenusa trianguli rectanguli per tertiam tertij porismatum. Sint ergo latera circa rectum A. B. similiter F ostenditur hypotenusa trianguli rectanguli, cuius latera circa rectum D E. Igitur à duobus triangulis A B C D E F. formentur alia duo ducendo hypotenusam vtramque in alterius latera, erunt triangula N P T. Q R T. Rursus formentur alia duo per decimam tertij porismatum, erunt hæc G K T. L M T. Quare constat propositum.

Cæterùm animaduersione quoque dignum est, quæstionem hanc ad quotlibet numeros eadem arte extendi posse, cùm si fractiones quidem minimè vitentur, quilibet quadratus infinitis modis diuidi possit in duos quadratos. Si verò etiam per integros rem absoluere libeat, facilè sit Diophanti artificium imitando quadratum reperire, qui quoties quis jusserit componatur ex duobus quadratis integris, quandoquidem per porisma quod assumit Diophantus, quodque demonstratum est septima tertij porismatum licet numerum inuenire quoties quis jusserit ex duobus quadratis compositum. Nam sicut per illud porisma inuenitur numerus bis compositus ex duobus quadratis, ducendo numerum semel ex duobus quadratis compositum, in alium item semel ex duobus quadratis compositum, ita si numerus bis compositus vt 65. ducatur in alium semel compositum, quales sunt 5 13. 10. 17. productus ter aut quater ex duobus quadratis componetur, ter quidem si 65. ducatur in 5. vel in 13. ex quorum mutuo ductu ipse fit, vel in aliquem illorum multiplicem. Quater autem si secus. Verbi gratia productus ex 5. in 65. puta 325. ter tantum componitur ex duobus quadratis, nempe ex 225. & 100. ex 324. & 1. ex 289. & 36. Quod accidit quia 5. & 65. componuntur ex duobus quadratis. Quare si intelligamus 65. componi ex 49. & 16 necesse est productum ex 5. in 65. puta 325. componi ex duobus quadratis qui sunt 225. & 100. 324. & 1 Rursus verò si capiamus 65. vt compositum ex 64. & 1. necesse est productum ex 5. in 65. puta 325. componi etiam bis ex duobus quadratis, nimirum ex 289. & 36. & ex 225. & 100. Sed quia hi coincidunt cum duobus ob priorem multiplicationem inuentis, constat 325. ter tantùm diuidi in duos quadratos. At si ducas 17. in 65. fiet 1105. quater compositus ex duobus quadratis nimirum ex 576. & 529. quorum latera 24. 23. ex 1024. & 81. quorum latera 32. 9. ex 961. 144. quorum latera 31. & 12. Ac demum ex 1089. & 16. quorum latera 33. & 4.

Quod si velis numerum sexies compositum ex duobus quadratis, sume aliquem ter compositum vt 325. eumque ducito in semel compositum, dum non sit aliquis eorum qui metiuntur 325. vel multiplex eorum, sed sume v. g. 17. quo ducto in 325. fit 5525. sexies compositus ex duobus quadratis, nempe ex 3025. 2500. quorum latera 55. 50. ex 3844. 2681. quorum latera 62. 41. ex 4900. 625. quorum latera 70. 25. ex 5041. 484. quorum latera 71. 22. ex 5329. 196. quorum latera 73. 14. Ac demum ex 5476. 49. quorum latera 74. 7.

Ita si velis numerum octies ex duobus quadratis compositum, duces compositum quater in compositum semel, vel bis compositum in bis compositum, dummodo inter eos nulla sit communicatio, & sic in infinitum. Qua de causa si ducas 5525. sexies compositum, vt ostensum est, in 1073. bis compositum, nimirum ex binis quorum latera 32. & 7. Et rursus ex binis quorum latera 28. 17. fiet 5928325. compositus (quod mirabile est) vicesies & quater ex duobus quadratis, quorum accipe binorum latera.

2110	2426	2417	2390	2362	2191	1985	2118
1215	207	294	465	591	1062	1410	1201
2319	2335	1823	1953	2415	2434	2271	2385
742	690	1614	1454	310	63	878	490
2282	2202	2065	2238	1746	1890	1633	2433
849	1039	1290	959	1697	1635	1806	94

OBSERVATIO D. P. F. AD COMMENTARIVM, præcipuè ad locum illum, Aduerte tertio, &c.

NVmerus primus qui superat vnitate quaternarii multiplicem semel tantùm est hypotenusa trianguli rectanguli, eius quadratus bis, cubus 3. quadratoquadratus 4 &c. in infinitum.

Idem numerus primus & ipsius quadratus componuntur semel ex duobus quadratis: eius cubus & quadratoquadratus, bis: quadratocubus & cubocubus ter &c. in infinitum.

Si numerus primus ex duobus quadratis compositus ducatur in alium primum

etiam ex duobus compositum quadratis, productum componetur bis ex duobus quadratis: si ducatur in quadratum eiusdem primi: productum componetur ter ex duobus quadratis: si ducatur in cubum eiusdem primi productum componetur quater ex duobus quadratis, & sic in infinitum.

Hinc facile est determinare quoties numerus datus sit hypotenusa trianguli rectanguli, sumantur omnes primi quaternarij multiplicem vnitate superantes qui datum numerum metiuntur v. g. 5. 13. 17. Quod si potestates dictorum primorum metiantur datum numerum, Disponantur vna cum reliquis loci laterum v. g. metiantur datum numerum 5. per cubum, 13. per quadratum & 17. per latus simpliciter.

Sumantur exponentes omnium diuisorum Nempe numeri 5. exponens est 3. propter cubum, numeri 13. exponens est 2. propter quadratum & numeri 17. vnitas tantum: ordinentur igitur vt volueris dicti omnes exponentes vt si velis. 3. 2. 1. ducatur primus in secundum bis & producto adjiciendo summam primi & secundi fit 17. ducatur iam 17. in tertium bis & producto adiiciendo summam 17 & tertij fit 52. datus igitur numerus erit hypotenusa 52. triangulorum rectangulorum, nec est dissimilis in quotcunque diuisoribus & ipsorum potestatibus methodus.

Reliqui numeri primi qui quaternarii multiplicem vnitate non superant nihil aut addunt quæstioni aut detrahunt neque ipsorum potestates.

Inuenire numerum qui quoties quis velit sit hypotenusa: quæratur numerus qui sit septies hypotenusa, numerus 7. ductus dupletur fit 14. adiice vnitatem fit 15. sume omnes primos qui mensurant 15. sunt hi 3. & 5. ab vnoquoque demptâ vnitate sume reliqui dimidium, fiunt 1. 2. quærantur tot primi diuersi quot hic sunt numeri nempe duo & secundum exponentes 1 & 2 inter se multiplicentur nempe vnus in quadratum alterius, in hoc casu satisfiet quæstioni modò primi quos sumis superent quaternarium vnitate, ex his constat facilè posse inueniri numerum minimum qui quoties quis velit sit hypotenusa.

Inuenire numerum qui quoties quis velit componatur ex duobus quadratis: sit datus numerus 10. eius duplum 20. cuius omnes partes primæ sumantur. 2. 2. 5. ab vnaquaque tolle vnitatem fiunt 1. 1. 4. sumantur igitur 3. numeri primi, (qui nempe vnitate superant quaternarium,) v. g. 5. 13. 17. & quadratoquadratus vnius propter exponentem 4. ducatur in reliquos duos. Fiet numerus quæsitus. Vt autem dignoscatur quoties datus numerus ex duobus quadratis componitur. Sit datus numerus 325. numeri primi qui eum componunt (nempe quaternarium vnitate superantes) sunt 5. 13. hic semel, ille per quadratum. Exponentes disponantur 2. 1. productus multiplicatione iungatur summæ, fit 5. cui adiunctâ vnitate fit 6. cuius dimidium 3. toties igitur numerus datus componitur ex duobus quadratis, si essent 3. exponentes vt 2. 2. 1. Ita procedendum, productum sub prioribus adiunctum summæ facit 8. ducatur 8. in tertium & iungatur productum summæ fit 17. cui iunge vnitatem fit 18. cuius dimidium dat 9. toties iste secundus numerus componetur ex duobus quadratis; ex his facile potest inueniri minimus numerus qui quoties quis velit componatur ex duobus quadratis. Si vltimus numerus bifariam diuidendus esset impar, tunc demptâ vnitate reliqui dimidium sumi debet.

Sed proponatur si placet sequens quæstio. Inuenire numerum in integris qui adsumpto dato numero conficiat quadratum, & sit hypotenusa quotlibet triangulorum rectangulorum. Hæc quæstio ardua est, proponatur v. g. inueniendus numerus qui sit bis hypotenusa, & adsumpto binario conficiat quadratum. Erit quæsitus numerus 2023. & sunt alij infiniti idem præstantes, vt 3362. &c.

QVAESTIO XXIII.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui dempta vtraque parte diuisi faciat quadratum. Esto datus 10. Ponatur inueniendus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Is siue ei adimas 2 N. + 1. siue 4 N. remanebit quadratus. Statuo igitur primum 2 N. + 1. secundum 4. N. Oportet horum summam æquari dato numero. Sed horum summa est 6 N. + 1. Hoc ergo æquatur 10. & fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus 4. Secundus 6. Quadratus autem $6\frac{1}{4}$.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προστυρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λείψας ἑκάτερον τῷ διπημμόρων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ° ι. τετάχθω ὁ προστιθεισκόμενος τετράγωνος δ^υ ᾱ ς̄ β̄. μ° ᾱ. δεῖ δὴ ἐὰν μὲν λείψει ς̄ς^ις β̄ μ° ᾱ. καταλείπεται τετράγωνος. ἐὰν δὲ ς̄ς^ις δ̄. πάλιν καταλείπει τετράγωνον. τάσσω δὴ τὸν μὲν πρῶτον ς̄ς δ̄. ταῦτα δεῖ σωτεθέντα ποιεῖν τὸ δοθέντα, ἀλλὰ σωτεθέντα ἐστὶ ς̄ς^οι ε̄ μ° ᾱ. ταῦτα ἴσα μ° ῑ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ὸς μ° ᾱ. α^ν. ὅθεν τὰς ὑποσάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ° δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° ε̄ ὁ δὲ τετράγωνος μ° ε̄. ᾱ δ^ν.

IN QVÆSTIONEM XXIII.

MIROR Xilandrum non aduertisse quæstionem hanc eandem esse cùm decima sexta secundi, sicut & sequens non differt à decima quinta eiusdem libri. Operatio quidem est paulò diuersa Sed eodem fermè recidit.

Cæterùm varietas solutionis in eo consistit quod quadrati inueniendi latus potest fingi diuersimodè, nimirum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit minor numero diuidendo, puta in hypothesi Diophanti 1 N. + 1. vel 1 N. + 3. vel 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 10. sic enim totidem diuersæ contingent solutiones quot modis variabitur vnitatum numerus, præterquàm in vno casu, cùm scilicet tales duo sumentur vnitatum numeri, vt vtriusque quadratum auferendo à dato numero, & residua diuidendo per sextuplum sumptorum numerorum, fient quotientes eodem distantes interuallo, quo distant sumpti numeri. Vt si sumantur numeri 1. & 2. in nostra hypothesi; nam ab eodem 10. auferendo quadratos eorum, puta 1. & 4. remanent 9. & 6. quibus diuisis per sextuplum ipsorum numerorum, puta 9. per 6. & 6. per 12. fiunt quotientes $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ quorum interuallum idem est atque ipsorum 1 & 2. Quamobrem siue fingas latus quadrati quæsiti 1 N. + 1. siue 1 N. + 2. eadem continget solutio, cuius symptomatis causam ex ipsa operatione paulò attentiùs considerata facilè deprehendes.

Sed & animaduersione dignum est eodem posito vnitatum numero in latere Quadrati, eandem semper contingere solutionem, quantumlibet varietur Numerorum numerus. Sic in hypothesi Diophanti, siue latus fingatur 1 N. + 1. siue 2. N. + 1 siue 3 N. + 1 &c. semper eadem fiet solutio, erùntque quæsitæ partes 6. & 4. & quadrati latus $2\frac{1}{2}$. Similiter siue quadrati latus ponatur 1 N. + 3. siue 2. N. + 3. siue 3 N. + 3. &c. semper erit eadem solutio, quippe quæsitæ partes inueniuntur $\frac{2}{3}$ & $9\frac{1}{3}$. At quadrati latus $\frac{13}{10}$. Huius quoque symptomatis causam ex ipsamet operatione deprehendes, & ab huiusmodi theoremate.

Si fuerint tres numeri, & à primo detrahatur quadratus secundi, & residuum diuidatur per sextuplum producti ex secundo in tertium, ac quotiens ducatur in tertium, idem semper procreatur numerus quamtumlibet varietur tertius primo & secundo inuariatis.

Hoc verò nil aliud est quàm ex eodem numero per sextuplum eiusdem numeri diuiso eundem semper procreari numerum, vt tibi considerandum relinquo. Porro hinc talem elicio Canonem.

A dato numero aufer quadratum quemlibet, residuum diuide per sextuplum lateris illius, quotiens auctus eodem latere, erit latus quæsiti quadrati: eiusdem verò quotientis quadruplum erit altera quæsitarum partium.

Moneo demum, etiam eodem modo facta positione quæsiti quadrati, ipsarum partium positiones variari posse. Nam posito quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. sicut alteram partium Diophantus posuit 4 N. qua detracta à quadrato posito, remanet quadratus 1 Q. − 2 N. + 1. sic & aliam ponere potuisset 6 N. − 3. vel 8 N. − 8. &c. quibus ab eodem quadrato detractis remanent quadrati 1 Q. − 4 N. + 4. & 1 Q. − 6 N. + 9. Ita si ponas quæsitas partes 4 N. & 6 N. − 3. fiet horum summa 10 N. − 3. æqualis 10. & erit 1 N. $1\frac{3}{10}$. & quæsitæ partes $\frac{26}{5}$ & $\frac{24}{5}$. latus quadrati $\frac{23}{10}$. Qua ratione operan-

do, neceſſe non eſt in quadrato quæſito reperiri plures vnitates quàm in dato numero. Nam ponatur quadratus quæſitus 1 Q. + 8. N. + 16. & ponantur partes quæſitæ 16 N. & 18 N. − 9. nam his ab expoſito quadrato detractis, remanent quadrati 1 Q. − 8 N. + 16. & 1 Q. − 10. N. + 25. Partium ſumma eſt 34 N. − 9. æqualis 10. & fit 1 N. $\frac{19}{34}$. ſunt ergo partes quæſitæ $\frac{304}{34}$ $\frac{136}{34}$. latus verò quadrati $\frac{355}{34}$.

QVÆSTIO XXIV.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς δύο, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον ὃς προσλαβὼν ἕκαστον τῶν διπλασίων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ κ̄. καὶ τετάχθω ὁ τετράγωνος δ̄ α̈. ς̄ β̄. μ̄ α̈. τούτῳ ἂν ἐὰν προσθῶ ς̄ β̄. μ̄ γ̄. ἔστι τετράγωνος. ἀλλὰ μείων καὶ ἐὰν προσθῶ ς̄ δ̄. μ̄ κ̄. τάσσω ἓν τὸν μεῖον πρῶτον ς̄ β̄ μ̄ γ̄. τὸ δὲ δεύτερον ς̄ δ̄. μ̄ κ̄ συναμφοτέρου ἄρα ἔσαι ς̄ ε̄ μ̄ ια̈ ταῦτα ἴσα μ̄ κ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ α̈. α̈. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος τῶν διπλασίων μ̄ ε̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ιδ̄. ὁ δὲ τετράγωνος μ̄ ε̄ α̈. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui vtralibet diuiſi parte aſſumpta faciat quadratum. Eſto datus 20. Ponatur quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Huic ſiue addas 2 N. + 3. ſiue 4 N. + 8. fit quadratus. Statuatur ergo primus 2 N. + 3. Secundus 4 N. + 8. Erit vtriuſque ſumma 6 N. + 11. Hoc æquatur 20. & fit 1 N. 1.^{5} Erit itaque primus 6. Secundus 14. Quadratus autem $6\frac{1}{4}$. & demonſtratio eſt euidens.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EADEM eſt hæc quæſtio cum decima quinta ſecundi, ſed operatio aliquantulum diuerſa. Poſitio quadrati variari poteſt infinitis modis, dummodo partes dati numeri ſic ponantur, vt vnitates in iis contentæ ſimul ſumptæ minores ſint dato numero. Pro partibus etiam dati numeri variæ fieri poſſunt poſitiones, ſed cum eadem cautione. Denique Canon ad decimam quintam traditus, ex huius etiam operatione formari poterat.



DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER QVARTVS.

QVÆSTIO I.

DATVM numerum diuidere in duos cubos, quorum laterum summa data sit. Oporteat numerum 370. diuidere in duos cubos, quorum latera faciant 10. Ponatur prioris cubi latus 1 N. + 5. hoc est dimidium summæ laterum. Relinquitur ergo alterius cubi latus 5 − 1 N. Ipsi autem cubi erunt simul 30 Q. + 250. Hæc æquantur 370. dato scilicet numero, & fit 1 N. 2. Ad positiones. Erit prioris cubi latus 7. secundi 3. Ipsi autem cubi 343. & 27.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους ὧν αἱ πλευραὶ εἰσὶ δοθεῖσαι. ἔστω δὲ τὸν τοῦ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους, ὧν αἱ πλευραὶ μ° ι. τετάχθω ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς^ου ᾱ μ° ε. τουτέστι τὸ ἥμισυ τῶν πλευρῶν. λοιπὸν ἄρα ἡ τοῦ ἑτέρου κύβου πλευρὰ ἔσται μ° ε̄ ↑ ς^ου ᾱ. αὐτοὶ ἔσονται οἱ κύβοι δ^υ λ̄ μ° σν̄. ταῦτα ἴσα μ° τοῦ τουτέστι τῷ δοθέντι, καὶ γίνεται ὁ ς^ο μ° β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ μ° ζ. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ° γ̄. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὁ μὲν πρῶτος τμγ̄. ὁ δὲ δεύτερος κζ.

In IV. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

BINOMIORVM 1 N. + 5. & 5 − 1 N. cubos sumit Xilander modo communi, sumendo scilicet prius eorum quadratos, & eos ducendo in ipsa binomia. Verùm compendiosius erit, huiusmodi binomiorum cubos sumere per vigesimam secundi porismatum. Qua ostensum est cubum totius æquari cubis partium, & productis ter ex quadrato cuiuslibet in alterum, ita si velis cubum ipsius 1 N. + 5. sumes partium cubos, puta 1 C. & 125. Tum duces ter quadratum primæ partis in secundam, fient 15 Q. Denique duces ter quadratum secundæ partis in primam fient 75. N. Quamobrem erit cubus totus 1 C. + 15 Q + 75 N. + 125. Eadem arte inuenies cubum residui 5 − 1 N. nimirum 125 + 15 Q. − 75. N. − 1 C. Vbi animaduersione dignum est in binomij, & in residui cubis duas semper species eodem signo, duas verò contrario affici. Nam partis quæ in vtroque latere afficitur signo + cubus etiam idem signum retinet vt in hypothesi 125. At partis affectæ signo − cubus etiam idem signum habet in cubo residui, puta in 1 C. Productus verò ter ex parte affecta signo + in quadratum alterius, idem retinet signum, puta 15 Q. At productus ter ex parte affecta signo − in quadratum alterius, habet etiam signum − in cubo residui, nimirum 75 N. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

Aufer cubum summæ laterum à quadruplo summæ cuborum, residuum diuide per triplum summæ laterum, orietur quadratus interualli laterum.

Habens itaque summam numerorum, & eorum interuallum, inuenies numeros per primam primi, sed & alium non deteriorem Canonem elicere possumus ex decima nona secundi porismatum. Nimirum.

Aufer summam cuborum à cubo summæ laterum, residuum diuide per triplum summæ laterum, orietur planus sub lateribus.

Habens autem ſummam numerorum, & productum multiplicationis eorundem, inuenies Numeros per trigeſimam primi.

Denique tam ex operatione Diophanti, quàm ex priore Canone colligitur, huic quæſtioni hanc conditionem debere adiici.

Oportet quadruplum ſummæ cuborum, multatum cubo ſummæ laterum, diuiſum per triplum ſummæ laterum, quotientem dare quadratum.

QVÆSTIO II.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ἔτι ἡ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχή. ἔστω ὁ τ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ποιεῖν μ̊ ς̄. τοῦ δ' ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων μ̊ φδ̄. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ς̄ ᾱ μ̊ γ̄ τοῦ δ' ἐλάσσονος ς̄ ᾱ γ̱ μ̊ γ̄. καὶ μοί ἐστι τοῦ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἓξ μ̊ ς̄. λοιπὸν δεῖ τῶν κύβων τοῦ ὑπεροχὴ ἓξ μ̊ φδ̄. ἀλλ' ἡ τῶν κύβων ὑπεροχή ἐστι δ̄ ιᾱ μ̊ νδ̄. ταῦτα ἴσα μ̊ φδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̊ ε̄. ὅτι τὰς ὑποστάσεις. ἡ μὲν τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ἔσται μ̊ η̄. ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος μ̊ β̄. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι ὃς μὲν φιβ̄. ὃς δὲ η̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt illorum interuallum datum faciat numerum, & cuborum quoque ab ipſis ortorum ſit quod preſcribitur interuallum. Eſto interuallum numerorum 6. interuallum verò cuborum 504. Ponatur rurſus maioris cubi latus 1 N. + 3? minoris verò 1 N. − 3. & manet illorum interuallum 6. Supereſt vt cuborum interuallum ſit 504. ſed cuborum interuallum eſt 18 Q. + 54. Hæc ergo æquantur 504. & fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Erit maioris cubi latus 8. minoris verò 2. Ipſi autem cubi 512. & 8. & euidens eſt demonſtratio.

IN QVAESTIONEM II.

HIc ex operatione Diophanti eliciemus huiuſmodi Canonem.

Diuide quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur quadratus ſummæ laterum.

Cùm autem habueris ſummam numerorum & eorum interuallum, inuenies ipſos numeros per primam primi, ſed & alium Canonem non deteriorem eliciemus ex vigeſima prima ſecundi poriſmatum, nimirum.

Diuide interuallum cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur planus ſub lateribus.

Porro cùm habueris interuallum numerorum, & productum eorum multiplicatione, inuenies ipſos numeros per trigeſimam tertiam primi. Colliges etiam tam ex operatione Diophanti quàm ex priore Canone, huiuſmodi conditionem huic quæſtioni præſcribi debere.

Oportet quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, diuiſum per triplum interualli laterum, quotientem dare quadratum.

Quæſtiones etiam aliquot hîc deſiderantur ad hanc materiam pertinentes, quas ſubiicere non grauabor.

QVAESTIO PRIMA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum ſumma æqualis ſit datorum interuallo. Oportet autem duplum minoris cubi non ſuperare maiorem.

Sint dati cubi 8. & 1. quorum interuallum 7. Oportet igitur diuidere 7. in duos cubos. Eſto latus vnius, latus maioris datorum cuborum − 1 N. puta 2. − 1 N. & fingatur alterius latus à certo Numerorum numero − latere minoris cubi, dum talis ſit numerus Numerorum, vt fiat diuidendo quadratum maioris lateris per quadratum minoris. Eſto itaque latus ſecundi cubi 4 N. − 1. Eſt ergo ſumma cuborum 7 + 63 C. − 42 Q. æqualis 7. & fit 1 N. $\frac{2}{3}$. ſuntque latera quæſitorum cuborum $\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{3}$. ipſi cubi $\frac{64}{27}$. $\frac{125}{27}$.

Aliter fingatur latus vnius quæſitorum cuborum 1 N. − latere minoris datorum, puta 1 N. − 1. Alterius verò latus ponatur latus maioris cubi − tot Numeris, quot fiunt diuidendo quadratum minoris lateris per quadratum maioris, ponatur itaque 2 − $\frac{1}{4}$ N. fiet ſumma Cuborum 7 + $\frac{63}{64}$ C. − $\frac{3}{4}$ Q. æqualis 7. & fit 1 N. 2 $\frac{2}{3}$. ſuntque cubi quæſiti qui prius. Hîc moneo in tyronum gratiam

ingeniosè fingi cuborum latera, vt maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos. Idcirco statuitur in vno laterum fictiorum maius datorum laterum cum signo + & in altero latere fictitio ponitur minus datorum laterum cum signo − vt facta additione cuborum, maneant tantùm vnitates 7 quæ aboleantur per æqualem vnitatum numerum, qui est ex alia parte, æquationis. Deinde tales vtrobique ponuntur numeri Numerorum vt in vno cubo totidem inueniantur Numeri cum signo + quot reperiuntur in alio, cum signo −. vt his etiam per additionem se mutuo elidentibus, maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos, cùm quadrati ob signum − adiunctum transeant in aliam æquationis partem.

Ex vtraque autem operatione formatur huiusmodi Canon.

Vtrumque datorum cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per summam cuborum, à maiore quotiente aufer minus latus, & minorem quotientem aufer à maiore latere, relinquentur cuborum quæsitorum latera.

Hinc conditionis adiectæ ratio deduci potest. Nam si maior cubus ad minorem sit in dupla ratione, vel etiam in minore, non posse perfici quod iubet hic Canon, sic demonstratur. Sint cubi A minor, & B duplus illius, quorum latera C D. ductoque A in D ter fiat E. quo diuiso per F summam cuborum A B. sit quotiens G. Ergo per hunc Canonem, vt habeamus latus vnius quæsitorum cuborum, oportet auferre G ab ipso D. Sed hac subtractione nil relinqui sic probatur. Quia B est duplus ipsius A. patet summam ipsorum A B, puta F triplam esse ipsius A. At E est triplum producti ex A in D. Cæterùm idem quotiens G fiet siue E diuidatur per F. siue triens ipsius E per trientem ipsius F. diuidi concipiatur. Sed diuidendo productum ex A in D. per A. fit quotiens D. igitur ipsi D G. sunt æquales, ac proinde auferendo G ab ipso D nil remanet pro latere vnius quæsitorum Cuborum. Quod erat propositum. Multo minus perfici poterit quod iubet Canon, si B ponatur minor duplo ipsius A, tunc enim G maior esse ostendetur quàm D, ac proinde subtractio nullo modo perfici poterit. Si enim B minor est duplo ipsius A. erit & F minor triplo ipsius A. Quare cùm triens ipsius E nempe productus ex A in D. diuidetur per trientem F qui minor erit quàm A quotiens vtique puta G. maior erit ipso D. Nam si productus ex A in D. per A. diuideretur, fieret quotiens D, Quare si idem productus diuidatur per numerum minorem quàm A, fiet vtique quotiens maior quàm D. Quare patet propositum.

A 1. B 2. C 1. D & C. 2.
E & C. 54. F 3. G & C. 2.

Hinc quoque pendet modus inueniendi tres cubos, qui simul additi cubum efficiant, quod fit hac arte.

Sume duos cubos quorum maior superet duplum minoris, & ducito maius latus in summam cuborum, fiet latus cubi summam trium æquantis. Ducito minus latus in summam cuborum. Itemque maius latus in suum cubum multatum duplo minoris cubi. Ac denique minùs latus in duplum maioris cubi multatum minore cubo, fient latera trium quæsitorum cuborum.

Ista pluribus explicare operæ pretium fuit, quoniam hæc quæstio, tanquam porisma est ad decimam nonam quinti, vt suo loco docebimus.

OBSERVATIO D. P. F.

Determinationem operationis iteratione facillimè tollimus & generaliter tum hanc quæstionem tum sequentes quæstiones construimus, quod nec Bachetus nec ipse Vieta expedire potuit. Sint dati cubi 64. & 125. inueniendi alij duo quorum summa æqualis sit datorum interuallo. Ex quæstione tertiâ folio sequenti quærantur duo alij cubi quorum differentia æquet differentiam datorum. Illos Bachetus inuenit & sunt $\frac{1525992}{250047}$ & $\frac{125}{250047}$ isti duo cubi ex constructione habent interuallum æquale interuallo datorum. Sed isti duo cubi inuenti per quæstionis tertiæ operationem possunt iam transferri ad quæstionem primam cum duplum minoris non superet maiorem, datis itaque his duobus cubis quærantur alij duo quorum summa æquetur interuallo datorum, id quidem licet per determinationem huius quæstionis primæ. At interuallum datorum horum cuborum est per quæstionem tertiam æquale interuallo cuborum prius sumptorum 64. & 125. igitur construere nihil vetat duos cubos quorum summa æqualis sit interuallo datorum 64. & 125. quod sanè miraretur ipse Bachetus. Imo si tres istæ quæstiones eant in circulum & iterentur in infinitum, dabuntur duo cubi in infinitum idem præstantes, ex inuentis enim vltimo duobus cubis quorum summa æquet

differentiam datorum, per quæstionis secundæ operationem quæremus duos alios quorum differentia æquet summam vltimorum, hoc est, interuallum priorum & ex hac differentiâ rursum quæremus summam & sic in infinitum.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum differentia æquet summam datorum.

Sint dati 8. & 1. oporteat inuenire duos alios cubos, quorum interuallum sit 9. Ponatur latus vnius 2 + 1 N. alterius verò 4 N. − 1. ob causas in precedente explicatas. Erit igitur Cuborum interuallum 9 + 54 Q. − 63 C. æqualis 9. & fiet 1 N. $\frac{6}{7}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{20}{7}$. & $\frac{17}{7}$. Ipsi cubi $\frac{8000}{343}$. & $\frac{4913}{343}$.

Aliter ponatur latus vnius cubi 1 N. − 1. alterius verò 2 − $\frac{1}{4}$ N. erit interuallum cuborum 9 + 3 $\frac{3}{8}$ Q. − $\frac{63}{64}$ C. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{24}{7}$. suntque cubi qui prius. Ex vtraque operatione elicitur huiusmodi Canon.

Vtrumque datorum Cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per interuallum cuborum, & minori quotienti adde maius latus. Atque à maiore quotiente aufer minus latus, summa & residuum exhibebunt quæsitorum latera cuborum.

Hinc etiam alius colligitur modus inueniendi tres cubos, quorum summa cubum faciat, qui talis est.

Sume duos quosuis numeros, & ducito maiorem in suum cubum auctum duplo minoris cubi, fiet latus cubi æquantis summam trium. Rursus ducito eundem maiorem numerum in interuallum cuborum. Itemque ducito minorem numerum, tum in duplum maioris cubi auctum cubo minore: tum in cuborum interuallum, fient latera trium quæsitorum cuborum.

Cæterùm moneo inuentis semel tribus cubis, siue per hanc, siue per præcedentem quorum summa cubum faciat, si eorum latera sigillatim per quemlibet numerum vel multiplicentur vel diuidantur, fore vt & productorum & quotientum cubi idem præstent. Quod facile est demonstrare 12. octaui. ex eo quod cubi sunt in triplicata ratione laterum, vnde sequitur numerorum proportionalium cubos esse proportionales, & propositum nullo negotio concluditur. Ita cùm per priorem regulam inuenti sunt cubi à lateribus 9. 12. 15. qui æquantur cubo à latere 18. si singula latera diuidantur per 3. fient rursus latera 3. 4. 5. quorum cubi simul æquabuntur cubo ipsius 6.

QVÆSTIO TERTIA.

Datis duobus cubis, inuenire alios duos, quorum differentia æquet datorum differentiam. Oportet autem duplum minoris excedere maiorem.

Sint dati cubi 64. & 125. quorum differentia 61. & quærendi sint alij duo cubi, quorum itidem interuallum sit 61. Ponatur vnius latus 1 N. − latere minoris cubi, puta 1 N. − 4. Et ponatur latus alterius tot Numerorum quot sunt vnitates in quotiente diuisionis quadrati à minore latere per quadratum maioris − latere maioris cubi. Sit ergo huiusmodi latus $\frac{16}{25}$ N. − 5. Cuborum interuallum est $\frac{11529}{15625}$ C. − $\frac{3660}{625}$ Q. + 61. quod æquatur 61. & fit 1 N. $\frac{57187500}{7205625}$ seu in minimis $\frac{500}{63}$ Sunt igitur latera cuborum $\frac{24}{63}$ & $\frac{5}{63}$. Ipsi verò cubi $\frac{15352092}{250047}$ & $\frac{125}{250047}$ quorum interuallum $\frac{15352867}{250047}$ seu 61. vt postulabatur.

Aliter. Ponatur latus vnius cubi 1 N. − 5. Alterius verò $\frac{25}{16}$ N. − 4. & eadem reperietur solutio. Quamobrem ex vtraque operatione hic formatur Canon.

Productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per summam cuborum. A maiore quotiente aufer minus latus, à minore quotiente aufer maius latus, relinquentur latera quæsitorum cuborum.

Porrò inde conditionis adiectæ ratio patet argumentando eodem prorsus modo quo ad primam istarum factum est. Nam similiter ostendetur si maior cubus sit duplus minoris, minorem quotientem æquari maiori lateri, & si maior cubus minoris sit plus quàm duplus demonstrabitur minorem quotientem, minorem esse maiore latere, ac proinde subtractionem huius ab illo fieri non posse.

Hinc etiam colligitur modus inueniendi quatuor cubos, vt bini binis sint æquales. nimirum.

Sume duos numeros, ita vt duplum cubi minoris superet maioris cubum. Deinde ducito minorem numerum tum in duplum cubi maioris multatum cubo minore, tum in summam cuborum, fient latera duorum cuborum quæsitorum. Rursus ducito maiorem numerum, tum in duplum minoris cubi multatum cubo maiore, tum in summam cuborum, fient reliquorum cuborum latera.

Ita si sumas numeros 5. & 4. fient cubi à lateribus 744. 756. æquales cubis à lateribus 945. & 15. Et diuidendo omnia latera per 3. erunt cubi à lateribus 248. & 252. æquales cubis à lateribus 315. & 5.

OBSERVATIO D. P. F.

HVius quæstionis determinationem non esse legitimam simili quâ vsi in primâ quæstione sumus operatione aperiemus.

Imo ex supradictis quæstionem quam Bachetus ignorauit, feliciter construemus, datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos diuidere, idque infinitis modis per operationum continuatam vt supra monuimus, operationem.

Sint duo cubi quibus alij duo æquales inueniendi 8. & 1. primum ex quæstione secunda quærantur duo cubi quorum differentia æquet summam datorum, eruntque $\frac{8000}{343}$ *&* $\frac{4913}{343}$ *Quia duplum minoris excedit maiorem, res deducitur ad tertiam quæstionem quæ demum reducetur ad primam & constabit propositio, si velis secundam solutionem rursus quæstio redibit ad secundam &c.*

Vt autem pateat quæstionis tertiæ determinationem non esse legitimam. datis duobus cubis 8. & 1. inueniendi alij duo quorum differentia æquet differentiam datorum. Sanè Bachetus impossibilem hanc quæstionem pronuntiaret, cubi tamen duo per nostram methodum inuenti sunt sequentes quorum nempe differentia æquatur 7. differentiæ 8. & 1. cubi autem illi duo, sunt $\frac{2024284625}{61284807}$ *&* $\frac{1981385216}{61284807}$ *. latera ipsorum* $\frac{1265}{885}$ *&* $\frac{1256}{885}$ *.*

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt summa cuborum ab ipsis ortorum, & productus eorum multiplicatione, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quadrato summæ cuborum, auferendo quadruplum cubi producti multiplicationis remaneat quadratus.

Esto summa cuborum 72. productus 8. Pone alterum cuborum 36 + 1 N. alterum 36 − 1 N. Quia igitur productus ex mutuo ductu duorum cuborum æquatur cubo plani sub lateribus, si ducas 36 + 1 N. in 36 − 1 N. fiet 1296 − 1 Q. æqualis 512. Ac proinde 1 N. est 28. suntque cubi quæsiti 64. & 8. & ipsa latera 4. & 2. Hinc fit Canon.

A quadrato semissis summæ cuborum aufer cubum producti, residui latus quadratum adde & adime semissis summæ cuborum, habebis cubos quæsitos.

Vel etiam.

A quadrato summæ cuborum aufer quadruplum cubi producti, residui latus quadratum adde & adime summæ cuborum, aggregati & residui semisses quæsitos exhibebunt cubos.

Vnde patet conditionem propositioni adiectam non omnino sufficere, vt solutio contingat rationalis. Sed oportet vt à quadrato summæ cuborum auferendo quadruplum cubi à producto, remaneat quadratus, cujus latus addendo & adimendo summæ cuborum, aggregati & residui semisses sint cubi numeri.

QVÆSTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum cuborum ab ipsis ortorum, & productus eorum multiplicatione datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadrato interualli addendo quadruplum cubi producti, quadratus fiat.

Esto interuallum cuborum 56. productus 8 Ponatur alter cuborum 1 N. + 28. alter 1 N. − 28. Ergo productus eorum multiplicatione 1 Q. − 784. æquatur cubo ipsius 8. puta 512. & fit 1 N. 36. Sunt ergo cubi quæsiti 64. & 8. vt prius. Hinc fit Canon.

Quadrato semissis interualli cuborum adde cubum producti, summæ latus quadratum adde & adime semissis interualli cuborum, fient cubi quæsiti.

Vel etiam.

Quadrato interualli cuborum adde quadruplum cubi producti, summæ latus quadratum adde & adime interuallo cuborum, aggregati & residui semisses sunt cubi quæsiti.

Hic quoque conditio adiecta non sufficit, vt solutio sit omnino rationalis. Sed oportet vt quadrato interualli cuborum, addendo quadruplum cubi producti, fiat quadratus cuius latus addendo & adimendo interuallo cuborum, aggregati & residui semisses sint cubi numeri.

Porrò ex nonnullis harum quæstionum deducuntur Regulæ Algebræ de cubo affecto sub latere, vt abundè docuit Vieta noster libro de Recognitione æquationum.

QVÆSTIO III.

Ἐπὶ τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πλευρὰν πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν μὲν πλευρὰν κύβον, τὸν δὲ τετράγωνον τὸν πλευρὰν τοῦ κύβου. τετάχθω ὁ μὲν τετράγωνος δ͂ α̅. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ς̱ ἑνός, ὁ πολλαπλασιάζομενος ἀριθμὸς ὢν μ̱ κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω ϛ̅ η̅. α̅. ς̅. ὅτι μὲν οὖν τὸ δ͂ α̅. πολλαπλασιάσαντες, εὑρίσκομεν ςς̱ ῆ̅. ὅτι δὲ τὸν ς̅ α̅. πολλαπλασιάσαντες εὑρίσκομεν μ̱ η̅. θέλομεν δὴ τοὺς ςς̱ ῆ̅. κυβικὸν εἶναι πλευρὰν τοῦ μ̱ η̅. μονάδες ἄρα β̅ ἴσαι ςς̱ ῆ̅. ✻ καὶ γίνεται ὁ ς̱ β̅. ὁ δὲ πολλαπλασιάζομενος ς̱ λβ̅ μ̱ λβ̅. ἐὰν δὲ θέλησωμεν μ̱ μὴ ὑπιπτέναι, εὑρήσομεν ςς̱ η̅ ἴσους μ̱ β̅. ✻ καὶ γίνεται ὁ ς̱ α̅ δ͂ ̅. ὅτι τοὺς ὑποκειμένους ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος α̅ ῖ ̅. ἡ δὲ πλευρὰ α̅ δ͂ ̅. ὁ δὲ πολλαπλασιάζομενος ὁ λβ̅. εἰς ὃν ὁ ς̱ ἔσται α̅ δ͂ ̅. τὸ δὲ ἀριθμητὸν ὅτι μ̱ δ͂ι̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN quadratum numerum, & in latus eius eundem multiplicare numerum, & facere ex latere quidem, cubum; ex quadrato autem, latus cubi. Ponatur quadratus 1 Q. Erit igitur latus illius 1 N. Qui in hos ducendus est, sit vnitatum cubicarum quotcunque per 1 N. diuisarum, esto $\frac{8}{1N}$. Hunc igitur ducentes in 1 Q. inueniemus 8. N. adducentes in 1 N. inueniemus 8. volumus itaque 8 N. esse latus cubicum de 8. Proinde 2. æquantur 8 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Erit quidem quadratus $\frac{1}{16}$. eius latus $\frac{1}{4}$. Qui in illos ducetur erit 32. Si enim 1 N. est $\frac{1}{4}$. vtique $\frac{1}{1N}$. est 4. & demonstratio euidens.

IN QVÆSTIONEM III.

QVÆSTIONIS huius tractationem non percepit Xilander, eò quod signum Numeri malè hîc insutum putauit, non videns numerum qui ducendus est in quadratum, & in eius latus non esse simpliciter vnitates 8. sed $\frac{8}{1N}$. Allucinatus autem est Xilander, & hîc & vbicunque ferè fractiones Numericas adhibuit Diophantus, quia (vt iam monuimus ad duodecimam tertij) huiusmodi fractiones in textu Græco passim ambiguè exprimuntur, vt ex hoc quoque loco colligere est. Nam legitur in manu exarato codice, ὁ πολλαπλασιάζομενος ψ α̅. ς̱ τῶν κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ ψ ψ η̅. quæ more nostro emendauimus sic, ὁ πολλαπλασιάζομενος ἀριθμὸς μ̱ κυβικῶν ὅσων δήποτε. ἔστω δὲ η̅ ς̅. Benè autem vidit idem Xilander, vt adulterina expungenda esse verba illa. καὶ γίνεται ὁ ς̱ β̅. ὁ δὲ πολλαπλασιάζομενος ς̱. λβ̅. μ̱ λβ̅. ἐὰν δὲ θελήσωμεν μ̱ μὴ ὑπιπτέναι, εὑρήσομεν ςς̱ μ̱ β̅. quæ idcirco asteriscis inclusimus. Cæterùm emendato textu, vt fecimus in nostra versione, operatio Diophanti facilis est & perspicua. Vnde huiusmodi Canon elicitur.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per suum cubum, orietur latus quæsiti quadrati. Numerus autem in vtrumque ducendus, est quadratocubus sumpti initio numeri.

Hîc etiam desiderari videtur huiusmodi quæstio.

In quadratum numerum & in latus eius, multiplicare eundem numerum, & facere ex quadrato cubum, ex latere latus eiusdem cubi.

Statuatur quadratus 1 Q. erit latus eius 1 N. Qui autem in hos ducitur, esto quilibet Numerorum numerus cubicus, puta 8 N. Eum si in 1 Q. ducas fient 8 C. si in 1 N. fient 8 Q. Debent ergo 8 Q. esse latus cubicum cubi 8 C. id autem est 2 N. Igitur 2 N. æquantur 8 Q. & fit 1. N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Quadratus est $\frac{1}{16}$. latus eius $\frac{1}{4}$. Is qui in vtrumque ducitur 2. Hinc formatur huiusmodi Canon.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per suum cubum, orietur latus quadrati quæsiti. Numerus autem in vtrumque ducendus, est sumptus initio Numerus.

Simili artificio soluemus quæstiones sequentes.

QVÆSTIO PRIMA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex cubo quadrato quadratum, ex latere latus quadrato quadrati.

Sit cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus in vtrumque ducendus sit vnitatum quotlibet, puta 2. Igitur 2 N. erunt latus quadrato quadraticum de 2 C. ac proinde 16 QQ. æquabuntur 2 C. & fiet 1 N. $\frac{1}{8}$. eruntque quæsiti numeri $\frac{1}{512}$. $\frac{1}{64}$. 2.

Et

Et sic inuenietur numerus qui ductus in quadrato quadratum, & in latus eius faciat ex quadrato quadrato quadratocubum, & ex latere latus quadratocubi. Ac demum inuenietur numerus qui ductus in quadratocubum & in latus eius, faciat ex quadratocubo cubocubum, & ex latere latus cubocubi. Vnde fit Canon vniuersalis.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per gradum ipsius, similem ei qui postulatur fieri, orietur latus quæsitæ potestatis. Numerus autem in vtrumque ducendus, erit sumptus numerus.

QVÆSTIO SECVNDA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex latere quadratoquadratum, ex cubo latus quadratoquadrati.

Esto cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus autem in vtrumque ducendus sit fractio Numerica vnitatum quadratocubocubicarum, puta $\frac{256}{1\,N}$. fient ergo ex multiplicatione 256. Q. & 256. & ille huius esse debet latus quadratoquadraticum, quare 256. Q. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{64}$ quæsitum latus, igitur cubus est $\frac{1}{512}$ Numerus in vtrumque ducendus 2048. sic quoque inuenietur Numerus qui ductus in quadratoquadratum & in latus eius, faciat ex latere quadratocubum, & ex quadratoquadrato latus quadratocubi. Ac denique reperietur numerus qui ductus in quadratocubum, & in latus eius, faciat ex latere cubocubum, & ex quadratocubo latus cubocubi.

QVÆSTIO IV.

QVadrato & lateri eius eundem adiicere numerum, & eadem facere. Esto quadratus 1 Q. ergo latus erit 1 N. Addendus autem esto tot quadratorum, vt additus ad 1 Q. faciat quadratum, esto 3 Q. Is adiectus ad 1 Q. facit quadratum 4 Q. Additus autem ad 1 N. facit 3. Q. + 1 N. Hæc æquantur lateri quadrati 4 Q. hoc est 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad hypostases. Erit quadratus $\frac{1}{9}$. latus eius $\frac{1}{3}$ Addendus $\frac{3}{9}$.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΩ Ϛ πλθρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, Ϛ ποιεῖν τὰ αὐτὰ, ἔστω ὁ μὲν τετράγωνος δ^{υ} ᾱ. ἡ ἄρα πλθρὰ ἔσται ς^{ε} α. ὁ δὲ προστιθέμενος ἔστω δωάμεων τοσούτων, ἵνα μὴ δ^{υ} ᾱ. ποιῇ τετράγωνον, ἔστω δ^{υ} γ̄. αὗται προστεθεῖσαι τῇ μὲν δ^{υ} ᾱ. ποιοῦσι τετράγωνον τὸν δ^{υ} δ̄. τῷ δὲ ς^{ον} ᾱ. ποιοῦσι δ^{υ} γ̄. ς^{ι} ᾱ. ταῦτα ἴσα τῇ τοῦ τετραγώνου πλθρᾷ τοῦτ' ἔστι δ^{υ} δ̄. τουτέστι ςς^{οστοι} δυσὶ. Ϛ γίνεται ὁ ς^{ος} ᾱ γ̄. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος ᾱ ϛ̄. ἡ δὲ πλθρὰ ᾱ γ̄. ὁ δὲ προστιθέμενος γ̄ ^{ς}.

IN QVAESTIONEM IV.

HIc ποιεῖν τὰ αὐτὰ nil aliud est quàm quadrato & lateri eius talem addere numerum, vt hac additione fiant rursus quadratus & latus eius. Cætera sunt perspicua, & ex operatione formatur huiusmodi Canon.

Duorum quorumlibet numerorum interuallum diuide per interuallum quadratorum, quotientem ducito in minorem numerum, fiet latus quæsiti quadrati. Eiusdem quotientis quadratum ducito in quadratorum interuallum, fiet addendus numerus.

QVÆSTIO V.

QVadrato & lateri addere eundem numerum & eadem facere ordine inuerso. Esto quadratus 1 Q. latus ergo erit 1 N. Addendus autem vt ex latere quadratum faciat, esto aliquot quadratorum quadrato numero, cum defectu Numerorum qui sunt in latere prioris quadrati; esto itaque 4 Q. — 1 N. & si adiiciatur quadrato fit 5 Q. — 1 N. Hæc æquantur 2 N. lateri scilicet facti quadrati ex priori additione, & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad

ΤΕΤΡΑΓΩΝΩ Ϛ πλθρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ τετράγωνος δ^{υ} ᾱ. ἡ ἄρα πλθρὰ ἔσται ς^{ε} α. ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα ἡ πλθρὰ ποιῇ τετράγωνον. δωάμεων τετραγωνικῶν γ̄ ἀριθμῷ τῷ τετραγώνου ἡ πλθρᾶς. ἔστω δὴ δ^{υ} δ̄ γ̄ ς^{ε} ᾱ. Ϛ ἐὰν προστεθῇ τῷ τετραγώνῳ, γίνεται δ^{υ} ὲ γ̄ ςς^{ε} ᾱ. ταῦτα ἴσα ςς^{αῖς} δυσὶ τῇ πλθρᾷ τοῦ τετραγώνου τοῦ γενομένου ἐκ τῆς προσθέσεως. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄ ^{ς}. ὅθεν

τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος θ̄ κε̄. ἡ δὲ πλευρὰ γ̄ ε̄. ὁ δὲ προστιθέμενος κᾱ κε̄.

positiones. Erit quadratus $\frac{9}{25}$. latus autem $\frac{3}{5}$. Addendus $\frac{21}{25}$.

IN QVAESTIONEM V.

TA ἐναλλὰξ idem est quod reciprocè, seu inuerso ordine, vult enim vt quadrato & lateri addendo eundem numerum, fiat ex latere quadratus, ex quadrato latus quadrati. Operatio euidens est, & ex ea elicitur iste Canon.

Sume quadratum aliquem, & per eum vnitate auctum, diuide latus eius vnitate auctum, orietur latus quæsiti quadrati. At quæsitum quadratum ducito in quadratum initio sumptum, & à producto aufer latus quæsiti quadrati, residuum erit addendus numerus.

QVÆSTIO VI.

ΚΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβου ᾱ. ὁ δὲ τετράγωνος δυνάμεων ὅσων δή ποτε τετραγωνικῶν. ἔστω δὲ δῦ θ̄. καὶ ἐπεὶ θέλομεν τετράγωνόν τινα μετὰ δῦ θ̄. ποιεῖν τετράγωνον. ἐκτίθομαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπό ἐστι μῦ θ̄. ἔστω ἡ μῦ ᾱ καὶ μῦ θ̄. ἐὰν ἀφέλω ἀπὸ τῶν μῦ θ̄. τὴν μονάδα, καὶ τῶν λοιπῶν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιάσω, ἕξω μῦ ις̄. ἐστὶ προσλαβὼν τὸν θ̄ ποιεῖ τετράγωνον, τάσσω οὖν τὸ προστιθέμενον τετράγωνον δῦ ις̄. κἂν μὲν ταῖς δῦ θ̄ προστεθῇ, γίνεται τετράγωνος. ἐὰν δὲ τῷ κύβῳ ᾱ. γίνεται κύβος ᾱ. δῦ ις̄ ταῦτα ἴσα κύβῳ. ἔστω τοῖς κύβοις η̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̄ ζ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κύβος δϛ̄ τμγ̄. ὁ δὲ τετράγωνος βτδ̄ μθ̄ ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος δϛ̄ μθ̄.

CVBO & quadrato adiicere eundem quadratum, & eadem facere. Esto cubus 1 C. Quadratus autem quotcunque quadratorum numero quadrato. Esto itaque 9 Q. Et quia volumus aliquem quadratum adiectis 9 Q facere quadratum, exponamus duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9. puta 9. & 1. Si ergo aufero 1 de 9. & residui semissem in se duco habeo 16. qui adsumpto 9. facit quadratum. Pono igitur addendum quadratum 16 Q. Et sane si addatur ad 9 Q. facit quadratum. si autem adiiciatur ad 1 C. fit 1 C. + 16. Q. Hæc cubo æquantur. Esto 8 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{4096}{343}$. Quadratus $\frac{2304}{49}$. Addendus autem ipsis quadratus $\frac{4096}{49}$.

IN QVAESTIONEM VI.

MODVS quo hîc inuenit Diophantus quadratum qui ad 9. additus quadratum efficiat, idem est prorsus cum Canone vltimo ad vndecimam secundi tradito. Cæterùm positiones quadrupliciter variari possunt.

Primò enim cubus quæsitus statui potest quilibet cuborum numerus cubicus, puta 1 C. 8 C. 27. C. &c.

Secundò quadratus quæsitus poni potest quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c.

Tertiò addendus quadratus etiam infinitis modis variari potest, nam verbi gratia in hypothesi Diophanti, per vndecimam secundi infiniti quadrati reperiri poterant, qui ad 9. additi facerent quadratum.

Denique vltima æquatio institui potest cum quolibet cuborum numero cubico maiore quàm cubus initio sumptus v. g. 1 C. + 16 Q. æquari possunt 8 C. 27. C. 64 C. vel cuilibet cuborum numero cubico maiori quàm 1.

QVÆSTIO VII.

ΚΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύερος, ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος ὁ τρίτος καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν προστιθέμενον τε-

CVBO & quadrato addere eundem quadratum, & eadem facere ordine inuerso. Esto cubus, primus. Quadratus, secundus. Addendus autem quadratus, tertius. Et quia volo addendum qua-

dratum, nempe tertium, additũ quadrato, nempe ſecundo, facere cubum: faciat cubum nempe primùm: Ita vt primus ſuperet ſecundum, tertio, nimirum quadrato, cùm tertius quadratus ſit. Iam quoſcunque duos numeros expoſuero, eorum quadrati adiecto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciunt. Debeo ergo expoſitis duobus numeris ponere pro primo ſummam quadratorum (quia primus æqualis eſt duobus quadratis, quæſito, & addendo; qui ſunt ſecundus & tertius) duplum autem producti multiplicationis, pro tertio. Atqui tertius debet eſſe quadratus, quare & duplum producti multiplicationis, quadratum eſſe oportet. Ponatur ergo alter 1 N. alter 2 N. vt duplum producti ſit quadratus. Sumens igitur ſummam quadratorum, ſtatuo primum 5 Q. Tertium verò duplum producti multiplicationis nempe 4 Q. vnde relinquitur ſecundus 1 Q. (quia is vnâ cum tertio æquatur primo) ſupereſt vt primus ſit cubus. Proinde 5 Q. æquantur 1 C. & fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Erit cubus ſeu primus 125. Quadratus ſeu ſecundus 100. & manifeſta eſt demonſtratio.

ξάγωνον ἢ τρίτον, τῷ τετραγώνῳ τῷ δευτέρῳ, ποιεῖν κύβον. ποιείτω κύβον τὸν πρῶτον, ὥστε ὁ πρῶτος ὑπερέχῃ τῷ δευτέρῳ τῷ τρίτῳ, τουτέστι τετραγώνῳ. ὁ γὰρ τρίτος ἐστὶ τετράγωνος. οἵους δὲ ἂν ἐκθῶμαι δύο ἀριθμούς, οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι προσλαβόντες τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιοῦσι τετράγωνον. ὀφείλω οὖν ἐκθέμενος δύο ἀριθμούς, τὸν μὲν ἀπ' αὐτῶν τάσσειν τὸν πρῶτον, ἐπεὶ ὁ πρῶτος τοῖς δυσὶ τετραγώνοις ἴσος ὄντι τῷ ζητουμένῳ καὶ τῷ προσπεφωνημένῳ τῷ τρίτῳ καὶ τῷ δευτέρῳ. ἢ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἢ ζήτου, ὅτι δὲ ὁ ζήτος τετράγωνος. ὥστε καὶ ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἐστι τετράγωνος. τετάχθω ὁ μὲν ς̄ᵃ ᾱ. ὁ δὲ ς̄ς̄ β̄. ἵνα ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. λαβὼν ἓν τὰς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους. τάσσω ἢ πρώτην δ̄ᵘ ε̄. ἢ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἢ τρίτον δ̄ᵘ δ̄. λοιπὸν ἄρα ἔσται τὸν δευτερον εἶδ) δ̄ᵘ ᾱ. μῦ γὰρ τῷ τρίτῳ ἴσός ὅτι τῷ πρώτῳ. λοιπόν ὅτι τὸν πρῶτον ποιεῖν κύβον. δ̄ᵘ ἄρα ε̄ ἴσα κ̄ᵘ ἑνὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄. ὅπερ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κ̄ᵘ ὁ πρῶτος μ̄ᵒ ρκ̄ε̄. ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος κε̄. ὁ δὲ προσπεφωνημένος τετράγωνος ὁ τρίτος μ̄ᵒ ρ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

25. Addendus autem quadratus, ſeu tertius 100. & manifeſta eſt demonſtratio.

IN QVAESTIONEM VII.

MAGNO artificio Diophantus ſuas ita inſtituit poſitiones, vt tandem æquatio procedat inter 5 Q. & 1 C. vnde ſequitur primum numerum reperiri cubum, vt poſtulatur. Itemque ſummam ſecundi & tertij cubum conficere, quia ſcilicet fit æqualis primo. Supereſt igitur videre qua ratione reliquis propoſiti partibus ſatisfiat. Nimirum, quomodo ſecundus & tertius ſit vterque quadratus, & ſimul additi ſint æquales primo. Ac demum tertius ipſe primo additus quadratum conſtituat. Hæc autem omnia neceſſariò euenire operando cum Diophanto, ſic demonſtrabimus.

A 2. B 4. C 20. D 4. E 16.

Sumantur duo quilibet numeri A B. ita vt duplum producti eorum E ſit quadratus numerus. Et ſumma quadratorum ab ipſis A B ſit C. At numerus quo C ſuperat E ſit D. Dico ſi C ponatur primus D ſecundus E tertius ſatisfactum eſſe omnibus propoſitæ quæſtionis partibus, illa excepta qua requiritur primum C eſſe cubum. Primò enim D E ſimul conficiunt C ex conſtructione. Quare ſi C fiat cubus, erit & ſumma ipſorum D E cubus, vt poſtulatur. Secundò E quadratus eſt ex conſtructione, nam ſuppono tales ſumptos eſſe A B, vt duplum producti eorum E ſit quadratus, tales autem numeri qui facilè inueniantur infrà docebo. Tertiò ipſum D eſſe quadratum conſtat ex quarta ſecundi poriſmatum. Nam ex ſumma quadratorum C. auferendo E duplum producti, ſupereſt D quadratus interualli laterum. Denique E additum ipſi C facere quadratum concluditur per quartam ſecundi Euclidis, quam ideo aſſumpſit Diophantus. Nam ſumma quadratorum C & duplum producti E ſimul faciunt quadratum ſummæ laterum. Quamobrem patet ex omni parte propoſitum, & reſtat tantùm, vt C cubo æquetur quod facilè fit ſupponendo ipſos C D E nota Q. inſignitos eſſe, vt ſint 20 Q. 4 Q. 16 Q. Tunc enim 20. Q. æquabuntur cuilibet cuborum numere cubico, puta 1. c. 8. c. &c. Inueniuntur autem facilè duo numeri qui bis inuicem ducti quadratum faciant, ſi ſumpto ſemiſſe cuiuſlibet quadrati, quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Ita Diophantus ſumpto 2. ſemiſſe quadrati 4. inuenit numeros 1 & 2. quorum mutuo ductu fit 2. Et nos in ſuperiore diagrammate ſumpto 8. ſemiſſe quadrati 16. inuenimus numeros 2. & 4. quorum mutuo ductu fit 8. Poteramus etiam ſumere 1. & 8. & alios infinitos mutuo ductu producentes 8.

QVÆSTIO VIII.

ΕΣΤΩ κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος. ὁ δὲ προσπεθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸ προσπεθέμενον τετράγωνον ποιῆσαι τῷ δευτέρῳ τουτέστι τετραγώνῳ ποιεῖν κύβον, ποιείτω τὸ πρῶτον. ἐπεὶ δὲ πάλιν θέλω τὸν πρῶτον συντεθέντα τῷ τρίτῳ ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ δύρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἡ συνθεσις μιᾷ ἑνὸς αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. διὰ τοῦτο δὲ καὶ οἱ δύο τετράγωνοι, ὅτε προσπεθέμενος τῷ δευτέρῳ, ⁊ ὁ δεύτερος ποιῶσι κύβον, τουτέστι τὸ πρῶτον. τετάχθωσαν οἱ δύο τετράγωνοι, ὁ μὲν πρῶτος δῡ α̅. ὁ δὲ δευτερος μ̊ δ̅. ⁊ ἡ συνθεσις αὐτῶν μιᾶ ἑνὸς αὐτῶν γίνεται δ̅ β̅ μ̊ δ̅. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ β̅ γ̅ μ̊ β̅. γίνεται ὁ τετράγωνος δῡ δ̅ μ̊ δ̅ λείψει ς̄ς̄ ι̅ς̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ̅. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔστω ὁ μὲν α̅. ὁ δὲ ις̄. νῦν τάσσω τὸ μὲν προσπεθέμενον αὐτοῖς τετράγωνον δῡ ις̄. τὸν δὲ δεύτερον δῡ α̅. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται δῡ κ̅. θέλομεν γὰρ συναμφοτέρῳ εἶναι αὐτὸν ἴσον. λοιπὸν δεῖ δῡ κ̅ ἴσας εἶναι κῡ ἑνὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̊ κ̅. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος η̅. ὁ δὲ δεύτερος αχ̄ ὁ δὲ προσπεθέμενος σῡ. τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται.

ESTO cubus, primus: Quadratus, secundus: at adiiciendus quadratus, tertius. Quia igitur volo quadratum adiiciendum, additum secundo, hoc est quadrato facere cubum, faciat primum. Rursus itaque quia volo primum additum tertio, facere quadratum, id mihi oneris incumbit, vt inueniam duos quadratos, quorum summa cum altero ipsorum coniuncta quadratum exhibeat, & præterea duo quadrati addendus scilicet secundo, & ipse secundus simul faciant cubum, videlicet primum. Ponantur duo quadrati, primus quidem 1 Q. secundus 4. & summa ipsorum cum altero juncta facit 2 Q. + 4. æqualem quadrato à latere 2 N − 2. fitque quadratus 4 Q. + 4 − 8 N. & fit 1 N. 4. Ad positiones. Erit alter 4. alter 16. Nunc ergo statuo quadratum addendum 16 Q. secundum autem 4 Q. Primus ergo erit 20. Q. quia volumus eum ambobus æqualem esse. Superest vt 20 Q. æquentur 1 C. & fit 1 N. 20. Ad positiones. Erit primus 8000. secundus 1600. tertius addendus 6400. & infinitis modis soluitur quæstio.

IN QVAESTIONEM VIII.

EADEM est hæc quæstio cum præcedente. Sed operatio paulò diuersa lemma quod assumit Diophantus ad inueniendum duos quadratos, quorum summa adscito altero ipsorum quadratum faciat, poterat reduci ad vndecimam secundi, si propositum fuisset hoc modo. Inuenire duos quadratos, quorum interuallum sit duplum alicuius quadrati. Hoc enim idem esse manifestum est: Quia cùm summæ quadratorum addetur alter, hoc aggregatum continebit additum bis, & alterum semel. Porrò ex operatione formatur huiusmodi Canon.

Sume duos quadratos quorum summa cum altero ipsorum quadratum faciat. Horum summa cubus est primus quæsitorum. Eiusdem summæ quadratus ductus in sumptos quadratos, dat reliquos numeros.

QVÆSTIO IX.

ΚΥΒΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ προστιθέμενος ς̄ α̅. ἡ δὲ τοῦ κύβου πλευρὰ ς̄ς̄ ὁπόταν δήποτε. ἔστω ς̄ς̄ ω̅. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κῡ η̅. ἐὰν οὖν ἄρα ς̄ α̅ προστεθῇ ς̄ς̄ β̅. γίνονται ς̄ς̄ γ̅. ἐὰν δὲ τοῖς κῡ η̅. γίνεται κῡ η̅. ς̄ α̅. ταῦτα ἴσα κῡ κζ̅. ἀφῃρήσθωσαν οἱ κῡ η̅. λοιπὸν ἄρα κῡ ιθ̅. ἴσοι ς̄ ἑνὶ. πάντα δὲ δι̅ ς̄ δῡ ἄρα ιθ̅. ἴσαι μ̊ α̅. καὶ ἔστι ἡ μία μονὰς τετράγωνος. εἰ δὲ ⁊ τὸ πλῆθος τῆς ιθ̅ δῡ ἦ τε-

CVBO & lateri eius eundem addere numerum, & eadem facere. Sit addendus numerus 1 N. latus verò cubi Numerorum quotlibet. Esto 2 N. Ergo cubus est 8 C. Iam si 1 N. addatur ad 2 N. fiunt 3 N. si ad 8 C. fit 8. C. + 1 N. hæc æquantur 27 C. Auferantur vtrinque 8 C. relinquuntur 19 C. æquales 1 N. Omnia per numerum diuidantur 19 Q. æquantur 1. & est vnitas quadratus & si 19. nu-

merus quadratorum quadratus esset, explicari æquatio posset. Sed 19 Q. proueniunt ab excessu quo 27 C. superant 8 C. & 27. C. est cubus à latere 3 N. At 8 C. est cubus a latere 2 N. Proinde 19 Q. facti sunt ex excessu quo cubus à 3 N. superat cubum à 2 N. Atqui 2 N. habentur ex positione, & 3 N. fiunt vnitate addita ad ipsos positionis numeros. Eò ergo res rediit, vt inueniantur duo numeri vnitate differentes, vt interuallum cuborum ab ipsis, sit quadratus numerus. Esto alter 1 N. alter 1 N. + 1. & interuallum cuborum est 3 Q. + 3 N. + 1. Hæc æquantur quadrato à latere 1 — 2 N. & fit 1 N. 7. Ad positiones. Erit alter 7. alter 8. Iam redeo ad postulata ab initio, & pono adiiciendum numerum 1 N. latus autem cubi 7 N. Igitur cubus erit 343 C. & si 1 N. vtrique adiiciatur, facit hunc quidem 8 N. illum verò 343 C. + 1 N. Volumus ergo hunc esse cubum, cujus latus sit 8 N. Quare 512 C. æquantur 343 C. + 1 N. & 1 N. $\frac{1}{169}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{343}{2197}$. latus autem $\frac{7}{13}$. Adiiciendus $\frac{1}{13}$.

τράγωνος λέλυτο ἂν ἡ ἰσότης. ἀλλ' αἱ ϟ ιϑ̄. ἐκ τῆς ὑφοχῆς εἰσιν ἧς ὑφέχουσι κ̄ κζ̄. κ̄ κ̄. κ̄ οἱ μὲν κ̄ κζ̄. ἀπὸ ς̄ γ̄. κύβος εἰσίν. οἱ δὲ κ̄ η̄ ἀπὸ ς̄ β̄. κ̄ ὁσι. ὥστε τὰ ιϑ̄ γέγονεν ἐκ τῆς ὑφοχῆς ἧς ὑφέχει ὁ ἀπὸ ς̄ γ̄ κύβος, τῶ ἀπὸ ς̄ β̄ κύβε. ἀλλ' οἱ μὲν ς̄ β̄. τῆς ὑποθέσεως εἰσίν, οἱ δὲ τρεῖς, ἀεὶ μονάδι μείζονες τῶ τυχόντος πλήθους τῆ τεθέντων ς̄. ἁπλῆκται οὖν μὶ εἰς τὸ δίρειν β̄ ἀειθμὸς μονάδι ᾱ ἀλλήλων ὑφέχοντας, ἵνα ἡ ὑφοχὴ τ ἀπ' αὐτῆ κύβων ποιῆ τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν ς̄ ᾱ. ὁ δὲ ς̄ ᾱ. ⊂ ἡ ὑφοχὴ τῆ ἀπ' αὐτῆ κύβων ὁσι δ̄ γ̄. ς̄ ζ̄. μ̄ ᾱ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μ̄ ᾱ. λείψει ς̄ β̄. κ̄ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ζ̄. ἐπὶ τοὺς ὑποσάσς. ἔσαι ὁ μῆ ζ̄. ὁ ἢ η̄. ἔρχομαι ἔν ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς. κ̄ τάσσω τὸν μῆ προστιθέμενον ς̄ ᾱ. τῶ δὲ τῶ κύβου πλευρὰν ς̄ ζ̄. ὁ ἄρα κύβος ἔσαι κ̄ τμγ̄. κ̄ ὁ ς̄ ᾱ. προστεθὲν ἑκατέρῳ αὐτῶν ποιεῖ, ὃν μῆ ς̄ η̄. ἐν ᾗ κ̄ τμγ̄. ς̄ ᾱ. θέλομεν δὲ ταῦτα εἶναι κύβον πλευρὰν ἔχοντα ς̄ κ̄. κ̄ ἄρα φιβ̄. ἵπι κ̄ τιγ̄. ἀειθμῷ ᾱ. ⊂ γίνεται ὁ ς̄ ᾱ γ̄. ὅτι τοὺς ὑποσάσς. ἔσαι ὁ μῆ κ̄ τιγ̄. ιϛ̄ ϡ ζ̄. ἡ δὲ πλευρὰ ζ̄. ιγ̄ ὁ ᾗ προστιθέμενος ᾱ ιγ̄.

IN QVAESTIONEM IX.

VERBA Diophanti perspicua sunt, & ad erudiendum aptissima. Cùm enim in prima operatione positionibus ad libitum factis, ad æquationem inexplicabilem deueniatur, vbi 19 Q. æquantur 1. & solutio est irrationalis, repetitis analyseos vestigiis considerat vnde 19. prouenerit, fit quippe ex interuallo cuborum 8. & 27. vnde rectè infert quærendos esse duos cubos quadrato distantes, ita vt & cuborum latera vnitate distent. Quod tamen lemma poterat etiam vniuersalius proponi, nimirum sic.

Duos cubos inuenire quorum interuallum sit quadratus Numerus, & quorum latera distent etiam quadrato numero.

Sit vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 4. vt laterum interuallum sit quadratus numerus, erit cuborum interuallum 64 + 12 Q. + 48 N. quod æquatur quadrato. Fingatur eius latus 6 N — 8. fiet 1 N. 6. Erunt ergo cuborum latera 6. & 10. Ipsi cubi 216. & 1000. quorum interuallum 784. quadratus à latere 28. Huius autem lemmatis ope licebit etiam variare positionem numeri adiiciendi, nam poni poterit quilibet Numerorum numerus quadratus. Verbi gratia ponatur 4 N. Quærendi ergo erunt duo cubi, vt laterum interuallum sit 4. & cuborum interuallum sit quadratus numerus. Hi sunt per allatum lemma 6. & 10. Quare ponetur quæsiti cubi latus 6 N. ipse cubus 216 C. & vtrique adiiciendo 4 N. fient 10. N. & 216. C. + 4 N. quorum hic cubus esse debet, ille vero latus huius cubi. Igitur 216 C. + 4 N. æquantur 1000. C. & tandem 4 N. æquantur 784 C. & fit 1 N. $\frac{1}{14}$. Est igitur cubi quæsiti latus $\frac{3}{7}$ ipse cubus $\frac{27}{343}$. Adiiciendus verò numerus $\frac{3}{7}$ quo vtrique addito fiunt $\frac{5}{7}$ & $\frac{125}{343}$ Cubus scilicet & latus eius.

Cæterùm licebit etiam soluere huiusmodi quæstiones ad hanc materiam pertinentes.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi quadrato distent numero.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera Cuborum 1 N. & 2 N. erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadrato. Esto is quilibet numerus Quadratorum quadratus, puta 49 Q.

fiet 1 N. 7. Sunt igitur latera cuborum 7. & 14. & ſatisfaciunt propoſito.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi diſtent numero quadrato-quadrato.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera cuborum 1 N. & 2 N. Erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadratoquadrato. Eſto is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus, puta 1 QQ. fit 1 N. 7. & ſunt latera cuborum vt prius 7. & 14.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos cubos quadrato diſtantes, quorum latera diſtent cubo numero.

Sit vnius cubi latus 1 N. alterius verò 1 N. + quolibet cubocubo puta 1 N. + 64. erit cuborum interuallum 262144 + 12288 N. + 192 Q. æquale quadrato, fingatur eius latus 512. − 14 N. fiet quadratus 262144 − 14336 N. + 196 Q. & fiet 1 N. 6656. Sunt igitur cuborum latera 6656. & 6720. quorum interuallum eſt cubus 64. Sunt autem cubi 294876348416 & 303464448000. quorum interuallum 8588099584. quadratus eſt à latere 92672.

Eodem artificio inuenientur duo cubi quadrato diſtantes, quorum latera diſtent cubocubo, erunt enim iidem proximè inuenti. Similiter inuenientur duo cubi quadrato diſtantes, quorum latera diſtent quadratoquadrato, ſi ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + quolibet quadratoquadrato, puta 1 N. + 16. Ac demum inuenientur duo cubi quadrato diſtantes, quorum latera diſtent quadratocubo, ſi ponatur vnius latus 1 N. Alterius verò 1 N. + quolibet numero quadrato ſimul & quadratocubo, puta 1 N. + 1024.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Interuallum autem laterum ſit datus numerus.

Eſto interuallum laterum 3. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 1 N. + 3. erit cuborum interuallum 27. + 27 N. + 9 Q. quod cùm ad 3. debeat habere rationem quadrati ad quadratum, diuiſo eo per 3. fiet 9 + 9 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus 3 − 2 N. fiet 1 N. 21. Sunt ergo cuborum latera 21 & 24. & ſatisfit propoſito.

Huius vltimæ quæſtionis auxilio vniuerſalius adhuc quàm per lemmata ſuprà tradita ſoluetur Diophantæum problema. Licebit enim adiiciendum numerum ponere quemlibet Numerorum numerum, puta 3 N. ſed tunc quærendi erunt duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum ſit vt quadratus ad quadratum. Interuallum autem laterum ſit 3. & reperientur qui ſuprà. Quare ponetur latus cubi 21 N. ipſe cubus 9261 C. quibus ſi addas ſigillatim 3 N. fient 24 N. & 9261 C. + 3 N. quorum ille iſtius latus cubicum eſſe debet. Quare 13824 C. æquantur 9261 C. + 3 N. & tandem 4563. C. æquantur 3 N. & fit 1 N. $\frac{1}{39}$. Eſt igitur latus cubi $\frac{7}{13}$ vt apud Diophantum, & adiiciendus numerus $\frac{1}{13}$. Et hîc aduertè inuentis ſemel duobus cubis, quorum interuallum ad laterum interuallum ſit vt quadratus ad quadratum, ſi ſumantur duo alij quicunque numeri in eadem cum lateribus ratione, interuallum quoque cuborum ab ipſis ortorum fore ad ipſorum numerorum interuallum vt quadratus ad quadratum. Ita quoniam 1000. & 216. interuallum 784. ad laterum 10. & 6. interuallum 4. eſt vt quadratus ad quadratum, ſi loco ipſorum 6. & 10. ſumas 3. & 5. cuborum quoque 27. & 125. interuallum 98. ad laterum interuallum 2. eſt vt quadratus 49 ad quadratum 1. cuius rei demonſtratio ex iis quæ ad ſequentem oſtendemus, liquidò conſtabit.

QVAESTIO X.

ΚΥΒΩ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ς̅ καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ η̅ κ̅υ̅. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ςς̅ β̅. τετάχθω δὲ ὁ προστιθέμενος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε λειψάντων τὴν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰν ἔστω δὴ κ̅υ̅ κζ̅. λείψει ςς̅ β̅. καὶ ἐὰν μὲν τοῖς ςς̅οῖς β̅ προστεθῶσι, ποιοῦσι κ̅υ̅ κζ̅. καὶ ἔστιν ὁ κύβος ἀπὸ

CVBO & lateri eundem addere numerum, & eadem facere ordine inuerſo. Eſto cubus cuborum cubicorum quotlibet verbi gratia 8 C. Igitur latus erit 2 N. Ponatur autem adiiciendus, alius cuborum numerus cubicus, minus latere prioris cubi, eſto itaque 27 C. − 2 N. & ſi addatur ad 2 N. fiunt 27 C. qui eſt

bus à latere 3 N. si autem addatur ad 8 C. fiunt 35. C. — 2 N. volumus autem hæc esse latus cubicum factorum 27 C. hoc est 3 N. Proinde 35 C. — 2 N. æquantur 3 N. & fiunt 5 N. æquales 35 C. & si omnia per numerum diuidantur 35 Q. æquantur 5. & non contingit solutio rationalis, propterea quod species ad speciem non habet rationem quam quadratus ad quadratum. Sed 35 Q. est summa duorum cuborum, ipsius 27. & ipsius 8. vnitates verò 5. est summa laterum ipsorum. Res itaque eò deducta est, vt inueniendi sint duo cubi, quorum summa ad summam laterum ipsorum rationem habeat quam quadratus ad quadratum. Sunto latera illorum coniuncta vnitatum quòtlibet, verbi gratia 2. & ponatur prioris cubi latus 1 N. Igitur alterius latus erit 2 — 1 N. & cubi illorum iuncti faciunt 6 Q. + 8 — 12 N. volumus ergo hæc ad laterum summam, hoc est ad 2. habere rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Atqui 2. duplum est quadrati. Quare & 6 Q. + 8 — 12 N. duplum oportet esse quadrati. Semissis igitur, nempe 3 Q. + 4 — 6 N. æquatur quadrato. Esto quadrato à latere 2 — 4 N. & fit 1 N. $\frac{10}{13}$. Ad positiones. Erit alterũ latus $\frac{10}{13}$ alterum $\frac{16}{13}$. Tollo decimas tertias, & semisses ipsorum capio, fiunt cuborum latera 5. & 8. Venio ad propositum ab initio, & pono cubi latus 5 N. cubus ergo est 125 C. Addendum verò statuo cubum à latere 8 N. minus latere prioris cubi, nimirum 512 C. — 5 N. & additus quidem ad 5. N. facit cubum, additus verò ad 125 C. facit 637 C. — 5 N. Volumus ergo hæc esse latus cubicum de 512 C. Quare 8 N. æquantur 637 C. — 5 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{125}{343}$. latus verò $\frac{5}{7}$. At numerus adiiciendus $\frac{267}{343}$.

πλοὺρᾶς ϛς̃ γ̄. ἐαὶ ὦ͂ τοῖς κ̄ῡ η̄. ποιῆσι κ̄ῡ λε̄. λείψει ϛς̃ β̄. θέλομεν δὴ ταῦτα ϖλοὺρὰν εἶναι κυβικὼν τῆ͂ γενομένων κ̄ῡ κζ̄. τουτέστι ϛς̃ᵉˢ γ̄. κ̄ῡ ἄρα λε̄ λείψει ϛς̃ β̄. ἴσται ϛς̃ᵒⁱˢ γ̄. καὶ γίνονται ϛς̃ᵒⁱ ε̄. ἴσοι κ̄ῡ λε̄. ⁊ ϖάντα ϖλευρὰ ζ̄. δ̄ῡ ἄρα λε̄. ἴσαι μ̄ᵒ ε̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̃ᵒ σὺ ῥητὸς τῶ͂ μὲν τὸ εἶδος ϖρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ϖρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλ' αἱ μῶ͂ δ̄ῡ λε̄. συνθετοί εἰσι δύο κύβων τέτε κζ̄. καὶ τὸ η̄. αἱ ὦ͂ μ̄ᵒ ε̄. ὧν τῆς συνθέτεως τῆ͂ ϖλευρῶν αὐτῆ͂. ἀπῆκται ἓν μοι εἰς τὸ δύρεῖν δύο κύβους οἳ συντεθέντες ϖρὸς τὰς ϖλευρὰς αὐτῆ͂ συντεθείσας λόγον ἕξουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ϖρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἔσωσαν αἱ ϖλευραὶ αὐτῆ͂ συντεθεῖσαι μονάδες ὅσαι δ̄ήποτε, ἔσωσαν ὦ͂ β̄. ⁊ τετάχθω ἡ μὲν τὸ ϖρώτου κύβε ϖλευρὰ ϛ̃ᵃ ᾱ. ἡ ἄρα τὸ ἑτέρε ἔσαι μ̄ᵒ ϛ̃ λείψει ἀριθμῶ͂ ᾱ. καὶ οἱ αὐτῆ͂ κύβοι συντεθέντες ποιῆσι δυνάμεις ϛ̃ μ̄ᵒ η̄ λείψει ϛς̃ ιβ̄. θέλομεν ἓν ταῦτα ϖρὸς τὰς ϖλευρὰς αὐτῆ͂ συντεθείσας, τουτέστι ϖρὸς μονάδας β̄ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ϖρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ εἰσὶ δύο μονάδες διπλάσιαι τετραγώνε. ὥστε καὶ δ̄ῡ ϛ̃ μ̄ᵒ η̄ λείψει ϛς̃ ιβ̄. διπλάσιαι εἰσὶ τετραγώνε. τὸ ἄρα ἥμισυ αὐτῆ͂ ἴσον τετραγώνῳ. τουτέστι δ̄ῡ γ̄ μ̄ᵒ δ̄ λείψει ϛς̃ ϛ̃. ἴσαι γίνονται τῶ͂ ἀϖὸ μ̄ᵒ β̄ ϖ̣ ϛς̃ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̃ᵒ ῑ ϛ̄. ὅθεν τὰς ὑϖοτάσεις. ἔσαι ἡ μῶ͂ ῑ ϛ̄. ἡ δὲ ις̄ ϛ̄. αἷρε τὰ τεσσαρεσκαίδεκα, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆ͂ λαμβάνω, γίνονται τῶ͂ κύβων αἱ ϖλευραὶ, ἡ μῶ͂ ε̄. ἡ δὲ η̄. ἐρχόμεν ἤδη ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς, ⁊ τάσσω τὴν τὸ κύβε ϖλευρὰν ϛς̃ ε̄. ὁ ἄρα κύβος ἔσαι κ̄ῡ ρκε̄. ὁ δὲ ϖροσπεθέμενος κύβος ἀϖὸ τῶ͂ η̄ ϛς̃ λείψει τῆς ϖλευρᾶς τὸ ϖρώτου κύβου. τουτέστι κ̄ῡ φιβ̄ λείψει ϛς̃ ε̄. καὶ ϖροσεθεὶς ἀριθμῆς ε̄ ϖοιεῖ κύβον. τοῖς δὲ κ̄ῡ ρκε̄. ϖοιεῖ κ̄ῡ χλζ̄ λείψει ϛς̃ ε̄. θέλομεν ἓν ταῦτα εἶ) ϖλευρὰν κ̄ῡ φιβ̄. ἀριθμοὶ ἄρα η̄ ἴσοί εἰσι κ̄ῡ χλζ̄ ϖ̣ ϛς̃ ε̄. ⁊ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ᾱ ξ̄. ὅθεν τὰς ὑϖοτάσεις. ἔσαι ὁ μῶ͂ κύβος ρκε̄ ᵗᵐᵞ. ἡ δὲ ϖλευρὰ ε̄ ξ̄. ὁ δὲ ϖροσπεθέμενος ἀριθμὸς σξζ̄ ᵗᵐᵞ.

IN QVAESTIONEM X.

IPso initio Græca deprauatissima erant. Nam legebatur, κύβεν ⁊ ϖλευρὰν ϖροσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, pro quo reposui, κύβῳ ⁊ ϖλευρᾷ, &c. Deinde legebatur, ἔστω ὁ μῶ͂ κύβος μονάδων κυβικῶν ὅσων δ̄ήποτε, ἔστω δὲ η̄. pro quo reposui, κύβων κυβικῶν ὅσων δ̄ήποτε, ἔστω δὲ κ̄ῡ ñ. Præterea deerant multa, quæ omnino flagitante sententia fuerunt adiicienda, quæ omnia more nostro virgulis inclusimus. Denique denominatores passim omissi erant quos restituimus.

Porrò manifestum est quæstionem pendere à lemmate quod assumit Diophantus, quo scilicet

quærit duos Cubos, quorum ſumma ad ſummam laterum ſit vt quadratus ad quadratum. Quod quia ſequenti quoque quæſtioni inſeruit, & multa ſunt notatu digna in eius enodatione, pluribus à nobis explicabitur.

Aduerte igitur primò laterum ſummam poni potuiſſe non ſolùm 2. vt fecit Diophantus, ſed & quemlibet vnitatum numerum, puta 3. 4. 5. &c.

Aduerte ſecundò ſummam cuborum 6 Q. + 8 − 12 N. diuidi per laterum ſummam 2. & quotientem 3 Q. + 4 − 6 N. æquari quadrato. Quia ſumma cuborum & ſumma laterum debent eſſe plani ſimiles. At ex duorum planorum ſimilium mutua multiplicatione vel diuiſione quadratum fieri manifeſtum eſt.

Aduerte tertiò non potuiſſe fingi latus ipſius 3 Q. + 4 − 6 N. niſi vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus fuiſſet; vt in ſimili iam ſæpe docuimus. Quare videndum quomodo vnitatum numerus 4. inueniatur quadratus, ne caſu non arte certa id fieri putetur. Proueniunt autem vnitates 4. ex cubo 8. diuiſo per ſuum latus 2. Quamobrem cùm quolibet cubo per latus ſuum diuiſo, oriatur quadratus ab eodem latere, patet vtique propoſitum.

Aduerte quartò cautè admodum formandum eſſe latus ſupradicti numeri 3 Q. + 4 − 6 N. Etenim cùm alterum laterum poſitum ſit 2 − 1 N. patet valorem Numeri debere eſſe minorem quàm 2. fit autem valor Numeri, à quodam quadrato ſubtrahendo ternarium, & per reſiduum diuidendo quadruplum lateris multatum ſenario. Quare ſi ponatur huiuſmodi quadratus 1 Q. patet $\frac{4 N. 1 6}{1 Q. 1 3}$ debere eſſe minus quàm 2. At proinde 4 N. − 6. minus ſunt quàm 2. Q. − 6. & tandem 4 N. minore, eſſe debent quàm 2 Q. At ſi æquarentur fieret 1 N. 2. Igitur patet quæſiti quadrati latus maius eſſe debere quàm 2. Quare ipſius 3 Q. + 4 − 6 N. latus fingendum erit à 2 − quotlibet numeris, quorum multitudo ſit maior quàm 2. ſic Diophantus finxit hoc latus 2 − 4 N. & fingi poſſet 2 − 5 N. 2. − 6 N. &c.

Præterea cauendum eſt ne cuborum latera æqualia reperiantur, atque adeo ne ipſi cubi ſint æquales, quamuis enim ſi hoc accidat, lemma propoſitum nihilominus ſoluatur, quia quilibet cubus ad ſuum latus rationem habet quadrati ad quadratum, cùm inter eos cadat medius proportionalis quadratus ab eodem latere, ac proinde duplum cubi ad duplum lateris ſit in eadem ratione, attamen per huiuſmodi æquales cubos quæſtio propoſita nequit commodè explicari, quoniam reſoluendo hypoſtaſes numerus additius inuenitur nihilum. Quamobrem non temerè additum eſt in textu. *Ponatur adiiciendus alius cuborum numerus*, &c. Etenim ponatur verbi gratia cubus quæſitus 8 C. cuius latus 2 N. & ponatur addendus numerus 8 C. − 2 N. patet tandem æquationem procedere inter 16 C. & 4 N. ſeu inter 16 Q. & 4 vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$ per quem reſoluendo hypoſtaſes fit cubus quæſitus 1. latus 1. Addendus verò numerus fit 1 − 1. id eſt nihil. Idemque ſemper eueniet, ſi in additio numero ponatur idem cuborum numerus qui ponitur pro cubo quæſito, vt facilè eſt demonſtrare, quia hypoſtaſis additij numeri eſt ſemper in hoc caſu numerus ille cuborum cubicus, minus ſuo latere. Quare cùm ita operando cubus ſemper inueniatur 1. ac proinde latus 1. neceſſe eſt additicium numerum eſſe 1 − 1. Ne igitur in hoc abſurdum deueniamus, cauendum eſt in lemmatis ſolutione ne quæſiti cubis æquales reperiantur, hoc eſt ne valor Numeri ſit æqualis ſemiſſi ſummæ laterum, vt in hypotheſi Diophanti vbi ſumma laterum ponitur 2. cauendum eſt ne valor Numeri ſit 1. fit autem valor Numeri, vt iam oſtenſum eſt $\frac{4 N. 1 6}{1 Q. 1 3}$ hoc ergo non debet æquari vnitati, ſed ſi ponatur æquari vnitati, fient 4 N. − 6. æquales 1 Q. − 3. & tandem 4 N. æquabuntur 1 Q. + 3. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. 3. Quamobrem ad vtramque cautionem ſimul reſpiciendo fingendum eſt latus quadrati 3 Q. + 4 − 6 N. à 2. − tot Numeris qui excedant 2. dum non ſint 3.

Aduerte poſtremò cur Diophantus inuentis cuborum lateribus $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ adiiciat denominatorem, & ſumat ſemiſſes Numeratorum, eam non eſſe cauſam quam affert Xilander, hæc enim ex parte nil aliud eſt quàm manifeſta petitio principij; ex parte verò neſcio quid ad rem prorſus impertinens. Nam quod loco ipſorum $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ ſumantur ſemiſſes eorum, nempe $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ eam dicit eſſe cauſam quod oporteat eorum cubos æquari quadrato, quod ſanè non facit ad rem, non enim quæruntur duo Numeri, quorum cubi ſimul æquentur quadrato, ſed quorum cubi ſimul ad ipſorum numerorum ſummam ſint in ratione quadrati ad quadratum. Deinde quòd adiecto communi denominatore, ſumantur numeratores 5. & 8. eam reddit rationem quod denominator communis eſt, vt ſi de cubis numeratorum conſtet eos ad ipſorum numeratorum ſummam habere rationem quadrati ad quadratum, abundè ſit rei ſatisfactum. Hoc verò eſt petere principium, cùm hoc vnum ſit quod controuertitur, non enim oſtendit cubos numeratorum ad laterum ſummam eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Atqui certum eſt cubos ipſorum $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ ad vnitatem quæ eſt ſumma ipſorum, longe diuerſam rationem habere, ea quam habent cubi numerorum 5. & 8. ad ſummam ipſorum 13. quamuis ſit vtrobique ratio quadrati ad quadratum. Huius ergo rei cauſam adæquatam afferemus tale demonſtrantes Theorema.

Si fuerint duo numeri, quorum cubi ſimul ad ſummam numerorum rationem habeant

beant

beant quadrati ad quadratum, si sumantur alij duo numeri in eadem ratione, circa illos, ipsorumque cubos idem eueniet.

C 125. A 5. D 512. B 8. R 2 F 637. G 91. E 13. S 4. L 1000. H 10. T 8. M 4096. K 16. P 5096. Q 364. N 16.

Sint duo numeri A B. quorum cubi C D. & ipsorum C D summa esto F. ipsorum A B. summa esto E sintque F E plani similes, sumanturque H K in ratione ipsorum A B. & sint eorum cubi L M. quorum summa P. ipsorum verò H K summa esto N. Dico ipsos quoque P N. esse planos similes, sumatur R denominator rationis ipsorum H K. ad ipsos A B. ita vt ducto R in ipsos A B. fiant H K. & sit S quadratus ipsius R. & T. eiusdem cubus. Patet ergo ex cubo T in cubos C D. fieri etiam cubos L M. At quia ex R in A B. fiunt H K. ex eodem R in E summam ipsorum A B. fiet vtique N. summa ipsorum H K. Eademque de causa ex T in F. fiet P. Itaque quoniam F E ponuntur plani similes, [1] cadet inter eos vnus medius proportionalis, esto is G. quo ducto in S fiat Q. Igitur quia F G E sunt continuè proportionales, & ipsi quoque R S T. continuè proportionales sunt, & ex primo R. in primum F. fit P. At ex secundo S in secundum G fit Q. Ac demum ex tertio T in tertium E fit N, [2] erunt & ipsi P Q N. continuè proportionales. Quare cùm inter ipsos P. N. cadat vnius medius proportionalis Q. [3] sunt ipsi P N. plani similes. Quod demonstrandum erat.

18. octaui.

24. 1. porism.

20. octaui.

Hinc patet cur loco ipsorum $\frac{10}{13}$ & $\frac{16}{13}$ sumantur 5. & 8. quia scilicet hi sunt in eadem ratione cum illis, quia fiunt ducendo vtrumque in 13. tum productos 10. & 16. diuidendo per 2. Hinc etiam constat demonstratio eius quod diximus ad quartam earum quas attulimus ad præcedentem, nimirum. *Si fuerint duo numeri quorum interuallum ad interuallum cuborum ab ipsis ortorum sit in ratione quadrati ad quadratum, idem eueniet aliis quibuscunque numeris in eadem ratione sumptis.* Nam eadem ratione ostendetur ex R in interuallum ipsorum A B fieri interuallum ipsorum H K. & ex T in interuallum cuborum C D. produci interuallum cuborum L M. & rursus ex S in medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum C D. & interuallum laterum A B procreari medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum L M. & interuallum laterum H K. Quamobrem eodem argumento concludetur propositum.

Porro loco lemmatis à Diophanto assumpti, licebat assumere aliud lemma simile illi quo vsus est ad præcedentem, nimirum.

Inuenire duos cubos, quorum summa sit quadratus numerus, & laterum summa sit etiam quadratus numerus.

Ponatur laterum summa 4. vt sit quadratus, & sit alterum 1 N. alterum 4 − 1 N. Erit summa cuborum 64. + 12 Q. − 48 N. æqualis quadrato, cuius latus fingetur 8 − tot Numeris vt fiat valor Numeri minor quàm 4. dum is non sit 2. ob causas suprà explicatas aduertendo quarto. Quare simili artificio determinando numerum hunc Numerorum in latere fictitio ponendum inueniemus eum maiorem esse debere quàm 4. dum non sit 6. Ponatur ergo latus fictitium 8 − 12 N. fiet quadratus 64 + 144 Q. − 192 N. æqualis 64 + 12 Q. − 48 N. & fit 1 N. $\frac{12}{11}$ Sunt igitur cuborum latera $\frac{12}{11}$ $\frac{32}{11}$ quorum summa 4. Ipsi verò cubi $\frac{1728}{1331}$ & $\frac{32768}{1331}$ quorum summa $\frac{34136}{1331}$ quadratus à latere $\frac{56}{11}$. Itaque si libeat his vti cubis ad soluendum problema Diophantæum pones cubum quæsitum $\frac{1728}{1331}$ C. cuius latus $\frac{12}{11}$ N. additicius numerus erit $\frac{32768}{1331}$ C. − $\frac{12}{11}$ N. quem addendo lateri fit cubus $\frac{32768}{1331}$ C. & eum addendo cubo fit $\frac{34136}{121}$ C − $\frac{12}{11}$ N. æqualis $\frac{32}{11}$ N. Quare tandem $\frac{34136}{121}$ Q. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{11}{28}$. Est ergo latus cubi quæsiti $\frac{3}{7}$ ipse cubus $\frac{27}{343}$ Numerus additicius $\frac{355}{343}$ & constat.

Hic etiam possumus afferre nonnullas quæstiones ad instar earum quas ad præcedentem attulimus videlicet.

QVÆSTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi simul quadratum conficiant.

Esto data ratio tripla, sit vnus 1 N. alter 3 N. horum cubi simul conficiunt 28 C. quod æquatur quadrato. Sit is quilibet numerus quadratorum quadratus, puta 196 Q. fit 1 N. 7. Sunt ergo quæsiti numeri 7. & 21. quorum cubi 343. & 9261. quorum summa 9604. quadratus est à latere 98.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi simul quadrato quadratum conficiant.

Esto data ratio dupla, sit alter 1 N. alter 2 N. horum cubi simul conficiunt 9. C. æquales quadratoquadrato. Sit is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus puta 1 Q Q. fit 1

N. 9. Sunt ergo quæsiti numeri 9. & 18. quorum cubi 729. & 5832. quorum summa 6561. quadrato-quadratus est à latere 9.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros cubum simul conficientes, quorum cubi simul quadratum faciant.

Ponatur summa quæsitorum Numerorum numerus cubocubus, puta 64. & sit alter 1 N. alter 64 − 1 N. horum cubi faciunt 262144 + 192 Q. − 12288 N. quod æquatur quadrato, cuius latus debet fingi 512. − tot Numeris, vt valor Numeri reperiatur minor quàm 64. Quare per artificium traditum aduertendo quarto, inuenietur hanc Numerorum multitudinem quæ ponenda est in latere fictitio, maiorem esse debere quàm 16. fingatur ergo huiusmodi latus 512 − 18 N. fiet 1 N. $\frac{512}{11}$. Sunt igitur quæsiti numeri $\frac{512}{11}$ & $\frac{192}{11}$ quorum summa 64. At eorum cubi sunt $\frac{134217728}{1331}$ $\frac{7077888}{1331}$ quorum summa $\frac{141295616}{1331}$ seu in minimis $\frac{128456056}{121}$ quadratus est à latere $\frac{3584}{11}$.

QVÆSTIO XI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο κύβους ἴσους ταῖς ἰδίαις πλευραῖς. ἔστωσαν δὴ αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἐν ἀριθμοῖς. ἡ μὲν ἀριθμῶν $\overline{\beta}$. ἡ δὲ ς̄ $\overline{\gamma}$. οἱ ἄρα κύβοι συντεθέντες ποιήσουσι κ̄ $\overline{\lambda\epsilon}$ ἴσους ταῖς πλευραῖς, τουτέστι ἀριθμοῖς $\overline{\epsilon}$. καὶ πάντα δηλὰ ἀριθμόν. δυνάμεις ἄρα $\overline{\lambda\epsilon}$ ἴσαι μ̄ $\overline{\epsilon}$. κὴ γίνεται ὁ ς̄ ὑ ῥητός. ἀλλ' αἱ δ̄ $\overline{\lambda\epsilon}$ σύνθεσίς εἰσι κύβων δύο, τῶν τε $\overline{\eta}$ ℂ τῶν κ̄ζ̄. οἱ δὴ ς̄ς̄ $\overline{\epsilon}$ συντεθεισῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν. ἀπῆκται ἓν μοι εἰς τὸ δύρεῖν κύβους δύο ὧν συντεθέντες ℂ μερισθέντες εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῶν ποιῶσι τὸν δηλαδὴ τετράγωνον. τοῦτο δὴ πεφανέρωται, ℂ εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ς̄ς̄ $\overline{\eta}$. ἡ δὲ ς̄ς̄ $\overline{\epsilon}$. ἔρχομαι οὖν ὅπῃ τὸ ἐξ ἀρχῆς, ℂ τάσσω τὰς πλευρὰς τῶν κύβων, τὸν μὲν ς̄ς̄ $\overline{\eta}$. τὸν δὴ ς̄ς̄ $\overline{\epsilon}$. κὴ οἱ κύβοι συντεθέντες γίνονται κ̄ χλ̄ζ̄. ταῦτα ἴσα ταῖς πλευραῖς τουτέστι ς̄ς̄ιϛ̄. κὴ γίνεται ὁ ς̄ ᾱ ζ̄. ὅπῃ τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ $\overline{\epsilon}$ ζ̄. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου $\overline{\eta}$ ζ̄ αὐτοὶ δὴ οἱ κύβοι, ὁ μὲν ρκ̄ε̄ τ̄μ̄γ̄. ὁ δὲ φιβ̄ τ̄μ̄γ̄.

INVENIRE duos cubos suis æquales lateribus. Statuantur cuborum latera in numeris, alterum 2 N. alterum 3 N. Ipsi ergo cubi coniuncti facient 35 C. æquales summæ laterum, hoc est 5. N. & omnia per numerum diuidantur. Igitur 35 Q. æquantur 5. Et non fit numerus rationalis. Atqui 35 Q. summa sunt duorum cuborum 8. & 27. & 5. N. est summa laterum ipsorum. Itaque res eò rediit, vt inueniendi sint duo cubi quorum summa per laterum summam diuisa, quotientem faciat quadratum. Hoc autem iam ostensum est, & sunt cuborum latera 8. & 5. Redeo igitur ad propositum ab initio, & pono latera cuborum 8 N. & 5 N. & fit summa cuborum 637 C. summæ laterum æqualis nimirum 13 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad positiones. Erit prioris cubi latus $\frac{8}{7}$. alterius $\frac{8}{7}$. Ipsi verò cubi $\frac{125}{343}$. & $\frac{512}{343}$.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis est & perspicua, & tota innititur lemmati ad præcedentem explicato. Cæterùm eodem ferè artificio soluemus huiusmodi quæstionem.

Inuenire duos cubos, quorum summa ad summam laterum sit in data ratione, dummodo denominator rationis sit quadratus, vel triens quadrati.

OBSERVATIO D. P. F.

FAdem addenda huic determinationi quæ in notis sequentis addidimus, & miror Bachetum non quod methodum generalem, quæ sanè est difficilis, non viderit, sed quod saltem non admonuerit lectores hanc quæ ab ipso traditur, non esse generalem.

Sit primùm data ratio quadrupla, cuius denominator quadratus est. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 2 N. erit summa cuborum 9 C. æqualis quadruplo summæ laterum, puta 12 N. & est solutio irrationalis, quia 9. ad 12. non habet rationem quadrati ad quadratum. Quærendi ergo prius

sunt duo cubi, quorum summa ad quadruplum summæ laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur summa laterum quilibet vnitatum Numerus, puta 6. & sit vnum 1 N. alterum 6 − 1 N. erit summa cuborum 216 + 18 Q. − 108 N. quæ ad quadruplum summæ laterum, nimirum ad 24. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altera summa per alteram diuisa, fiet 9 + $\frac{3}{4}$ Q. − $\frac{15}{4}$ N. æqualis quadrato, & omnia ducendo in 4. fiet 36 + 3 Q. − 18. N. æquandus quadrato. Et per artificium ad præcedentem explicatum inuenies fingendum latus 6 − tot numeris qui superent 2. fingatur 6 − 5 N. fiet 1 N. $\frac{25}{11}$. Sunt ergo cuborum latera $\frac{215}{11}$ & $\frac{45}{11}$. & sumendo minimos in eadem ratione, fient cuborum latera 7 & 15. Redeo igitur ad propositam initio quæstionem, & pono quæsitorum latera cuborum 7 N. & 15 N. fit summa cuborum 3718 C. laterum 22 N. cuius quadruplum 88. N. æquatur 3718 C. & fit 1 N. $\frac{2}{159}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{343}{159}$ & $\frac{3375}{159}$. & satisfaciunt proposito.

Deinde sit data ratio tripla, cuius denominator 3. est triens quadrati 9. erunt vt prius quærendi duo cubi, quorum summa ad triplum summæ laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur latus vnius vt supra 1 N. alterius 6 − 1 N. igitur summa cuborum 18 Q. + 216 − 108. N. ad triplum summæ laterum 18. debet habere rationem quadrati ad quadratum, vnde altera summa per alteram diuisa fit 1 Q. + 12 − 6 N. æqualis quadrato cuius latus fingendum est 1 N. − tot vnitatibus, vt superet 3 $\frac{2}{3}$ latus ipsius 12. ita tamen vt valor Numeri sit minor quàm 6. Quare cùm per artificium ad præcedentem explicatum constet vnitates ponendas in latere fictitio debere esse minores quàm $\frac{2}{3}$. Patet fingendum latus 1 N. tot vnitatibus, vt cadant inter 3 $\frac{2}{3}$ & 9. $\frac{2}{3}$. Fingatur 1 N. − 6. fiet quadratus 1 Q. + 36 − 12 N. æqualis 1 Q. + 12 − 6 N. & fit 1 N. 4. Sunt ergo latera cuborum 4. & 2. vel in minimis 2. & 1. Venio itaque ad initio propositam quæstionem. Et pono latera cuborum 1 N. & 2 N. fiuntque 9 C. æquales 9 N. vnde fit 1 N. 1. & patet cubos 1. & 8. soluere quæstionem. Quod si quadrati 1 Q. + 12. − 6 N. fingas latus 1 N. − 8. fiet 1 N. $\frac{26}{5}$ & latera cuborum quorum summa ad triplum summæ laterum habet rationem quadrati ad quadratum, erunt in minimis 2 & 13. Quibus vtendo pones quæsitorum cuborum latera 2 N. & 13 N. vnde fient tandem 2205 C. æquales 45 N. & fiet 1 N. $\frac{1}{7}$ erunt ergo latera cuborum $\frac{2}{7}$ & $\frac{13}{7}$ quæ soluent quæstionem.

QVÆSTIO XII.

INVENIRE duos cubos quorum interuallum æquale sit interuallo laterum ipsorum. Sunto latera 2 N. & 3. N. & erit interuallum cuborum 19 C. Interuallum autem laterum 1 N. Igitur 1 N. æquatur 19 C. Et non est numerus rationalis, quia species ad speciem non habet rationem quæ est quadrati ad quadratum. Eò itaque sum redactus, vt inueniam duos cubos, vt ipsorum interuallum ad interuallum laterum rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Sunto latera cuborum 1 N. & 1 N. + 1. vt & ipsorum interuallum sit quadratus, nimirum 1. & quoniam vnum latus est 1 N. alterum 1 N. + 1. erit quidem laterum interuallum 1. cuborum vero 3 Q. + 3 N. + 1. Volumus ergo 3 Q. + 3 N. + 1. ad vnitatem, interuallum scilicet laterum, rationem habere quam habet quadratus ad quadratum. Igitur productum eorum multiplicatione oportet esse quadratum. Est autem hoc productum 3 Q. + 3 N. + 1. Hoc æquatur quadrato à latere 1 − 2 N. & fit 1 N. 7. Ad positiones. Sunt cubi 343. & 512. quorum latera 7. &

ΕΤΡΕΙΝ δύο κύβους ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἴση ἔσται τῇ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ὑπεροχῇ. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῆς. ἡ μὲν ϛ̄ ᾱ ἡ δὲ ϛ̄ γ̄. ὁ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ τῆς ἀπ' αὐτῆς κύβων κ̄ ῡ ῑϝ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῆς πλευρᾶς ϛ̄ ᾱ. ϛ̄ ἄρα ᾱ. ἴσος κύβος ῑθ̄. δεῖ γίνεται ὁ ϛ̄ ἐ ῥητὸς τὸν μὴ ἔχειν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἀπῆκται δέ μοι εἰς τὸ δύρεῖν β̄ κύβους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῆς πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τὸν πλευρῶν αὐτῶν λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῆς κύβων, ἡ μὲν ϛ̄ ᾱ. ἡ δὲ ϛ̄ ᾱ μ̄ᵒ ᾱ. ἵνα δεῖ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῆς ᾖ τετράγωνος τουτέστι μ̄ᵒ ᾱ. δεῖ ἐπεὶ ὅτι τῶν μὲν πλευρὰ ϛ̄ ᾱ. τῶν δὲ ϛ̄ ᾱ μ̄ᵒ ᾱ. ἔσται ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῆς πλευρῶν μ̄ᵒ ᾱ. τῶν δὲ κύβων δ̄ᵘ γ̄. ϛ̄ᵒ γ̄. μ̄ᵒ ᾱ. θέλομεν δὴ δ̄ᵘ γ̄. ϛ̄ γ̄. μ̄ᵒ ᾱ. πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. τὸν ἄρα ὑπ' αὐτῆς δεῖ εἶναι τετράγωνον. ἔστι δὲ ὁ ὑπ' αὐτῆς μ̄ γ̄ ϛ̄ γ̄ μ̄ᵒ ᾱ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μ̄ᵒ ᾱ λείψει ϛ̄ β̄. ὁ γίνεται ὁ ϛ̄ μ̄ᵒ ζ̄. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἐστὶ δὲ οἱ κύβοι, ὁ μὲν τῶν. ὁ δὲ φιβ̄ ὧν αἱ πλευραὶ ἡ μὲν ζ̄. ἡ δὲ η̄. ἔρχομαι δεῖ τὸ ὀξ̄ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὰ

πλευρὰς τῶν κύβων, ἡ μὲν ϛϛ ζ. ἡ δὲ ϛϛ η. καὶ ἡ μὲν τούτων ὑπεροχή ἐστιν ϛ^ϛ α. ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχὴ κ^υ ρξθ. κύβοι ἄρα ρξθ ἴσοι ϛ^ϛ α. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ο α^ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ^ιγ. ἡ δὲ η^ιγ.

8. Venio ad id quod initio propositũ erat, & pono latera cuborum 7 N. & 8 N. & est horum interuallum 1 N. At interuallum cuborum ab ipsis ortorum est 169 C. igitur 169. C. æquantur 1 N. & fit 1 N. $\frac{21}{13}$. Ad positiones. Erunt latera cuborum $\frac{27}{13}$ & $\frac{8}{13}$.

OBSERVATIO D. P. F.

VTrum verò inuenire liceat duo quadratoquadrata quorum interuallum æquale sit interuallo laterum ipsorum, de hoc inquiratur & tentetur artificium nostræ methodi, quod haud dubiè succedet.

Quærantur enim duo quadratoquadrata ita vt differentia laterum sit 1. *& differentia quadratoquadratorum sit cubus. Erunt latera per primam operationem* $-\frac{9}{22}$ *&* $\frac{13}{22}$. *Sed quia primus numerus notatur signo — iteretur operatio iuxta nostram methodum & ponatur primum latus* 1 *N* $-\frac{9}{22}$ *secundum erit* 1 *N* $+\frac{13}{22}$ *& incidetur in nouam æquationem quæ in veris numeris quæstioni satisfaciet.*

IN QVAESTIONEM XII.

LEMMA Diophanti est idem penitus cum quarta quæstione earum, quas ad nonam huius attulimus, quamuis vniuersalius operati simus ibi, quàm hîc faciat Diophantus, vult enim interuallum cuborum poni quadratum, cùm nos interuallum cuborum poni posse quemlibet numerum docuerimus. Itaque vide quæ ibi adnotauimus. Cæterùm, sicut ad præcedentem factum est, proponetur etiam hæc quæstio vniuersalius, nimirum sic.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum datam habeat rationem, dummodo denominator rationis sit quadratus vel triens quadrati.

OBSERVATIO D. P. F.

DEterminatio est illegitima, quia non generalis, addendum igitur, vel multiplus per numeros primos qui superant vnitate ternarij multiplices, aut ab ipsis compositos vt 7. 13. 19. 37. &c. vel 21. 91. &c. demonstratio & constructio ex nostra methodo petendæ.

Primùm sit data ratio quadrupla, cuius denominator 4. quadratus est. Hîc etiam eò redigimur, vt inueniamus duos cubos, quorum interuallum ad quadruplum interualli laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N + 2. Erit cuborum interuallum 8. + 12 N. + 6 Q. laterum 2. cuius quadruplum 8. ad cuborum interuallum debet habere rationem quadrati ad quadratum. Proinde illo per hunc diuiso fiet 1 + $\frac{4}{6}$ N. + $\frac{3}{4}$ Q. æquandus quadrato, & omnia per 4. multiplicando, fit 4 + 6 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Esto latus eius 2 − 3 N. fiet 1 N. 3. Sunt ergo cuborum latera 3. & 5. Venio ad propositam quæstionem, & pono quæsitorum cuborum latera 3 N. & 5 N. fit cuborum interuallum 98 C. æquale quadruplo interualli laterum 8 N. vnde fit 1 N. $\frac{2}{7}$ sunt ergo cuborum latera $\frac{6}{7}$ & $\frac{10}{7}$. quæ soluunt quæstionem.

Deinde fit data ratio tripla, cuius denominator 3. est triens quadrati 9. Sunt vt prius quærendi duo cubi; quorum interuallum ad triplum interualli laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 2. erit cuborum interuallum 6 Q. + 12 N. + 8. ad triplum interualli laterum, nimirum ad 6. in ratione quadrati ad quadratum, quare illo per hunc diuiso fiet 1 Q. + 2 N. + $\frac{4}{3}$ æquandus quadrato, & omnia per 9. multiplicando fiet 9 Q. + 18 N. + 12. æquandus quadrato, fingatur eius latus 3 N. − 4. fiet 1 N. $\frac{2}{21}$ Sunt ergo cuborum latera $\frac{2}{21}$ & $\frac{44}{21}$ seu in minimis 1. & 22. Redeo ergo ad propositam initio quæstionem, & pono quæsitorum cuborum latera 1 N. 22 N. cuborum interuallum est 10647 C. quod æquatur triplo interualli laterum, puta 63 N. & fit N. $\frac{1}{13}$ sunt latera cuborum $\frac{1}{13}$ & $\frac{22}{13}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE duos numeros, vt maioris cubus adscito minore numero, sit æqualis cubo minoris adsciscenti maiorem numerum. Esto alter 2 N. alter 3 N. maioris cubus adscito minore numero fit 27 C. + 2 N. At minoris cubus adscito maiore numero facit 8 C. + 3 N. Igitur 8 C. + 3. N. æquantur 27 C. + 2 N. Omnia per numerum diuidantur, fiunt 19 Q. æquales 1 N. & non provenit 1 N. rationalis. At 19 Q. sunt interuallum duorum cuborum. Vnitas verò est laterum differentia. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum ipsorum sit in ratione quadrati ad quadratum. Hoc autem supra demonstratum est, & sunt cuborum latera 7. & 8. Venio ergo ad id quod primò quærebatur, & pono alterum 7 N. alterum 8 N. fiunt 343. C. + 8 N. æquales 512. C. + 7 N. & fit 1. N. $\frac{1}{13}$. Ad positiones. Erit alter $\frac{7}{13}$. alter $\frac{8}{13}$. & demonstratio euidens.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν, ἴσος ᾖ πρὸς ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβῳ προσλαβόντι τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἔστω ὁ μὲν ϛϛ̄ β. ὁ δὲ ϛϛ̄ γ̄. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ κ̄ῡ κζ̄ ϛϛ^{κς} ϛ̄. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ κ̄ῡ η̄ ἀριθμοὺς γ̄. κύβοι ἄρα η̄ ϛϛ^{οι} γ̄ ἴσοι εἰσὶ κ̄ῡ κζ̄. ϛϛ^{οις} β̄. καὶ πάντα τετραγ^{κις}. καὶ γίνονται ϡμ̄ῡ ιθ̄ ἴσαι μ̄ᵒ ᾱ. καὶ ὁ ϛ̄ οὐ ῥητός. ἀλλ' αἱ μὲν ϡμ̄ ιθ̄ εἰσὶ δύο κύβων ὑπεροχή. ἡ δὲ μ̄ᵒ ᾱ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχή. ἀπῆκται δή μοι εἰς τὸ δύρεῖν δύο κύβους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχὴν λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τοῦτο δὲ προεδείχθη. εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ̄. ἡ δὲ η̄· ἔρχομαι δὴ ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω ὧν μὲν ϛϛ̄ η̄. ζ̄. ὧν δὲ ϛϛ̄ η̄. καὶ γίνεται κ̄ῡ τμγ̄ ϛϛ^{οι} η̄. ἴσοι κ̄ῡ φιβ̄ ϛϛ^{οις} ζ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ᾱ. ιν̄. ὅτι τὰς ὑποσάσεις. ἔσται ὁ μὲν ζ̄ ιν̄. ὁ δὲ η̄ ιν̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XIII.

OPERATIO Diophanti nil habet difficultatis. Verùm moneo absque noua operatione posse solui quæstionem hanc auxilio præcedentis, nam numeri quicunque præcedenti satisfacientes, hanc quoque soluunt, quod sic demonstro.

A $\frac{125}{343}$. B $\frac{27}{343}$. C $\frac{5}{7}$. D $\frac{3}{7}$

Sint Numeri satisfacientes præcedenti, nimirum cubi A B. & eorum latera C D. ita vt cuborum A B interuallum sit æquale interuallo laterum C D. Dico per eosdem numeros huic quæstioni satisfieri, nimirum maiorem cubum A adsciscentem minus latus D, æquari minori cubo B. adsciscenti maius latus C. Etenim ob æqualitatem interuallorum est in medietate Arithmetica A ad B. vt C ad D. [4] Quare extremorum A D summa æqualis est summæ mediorum B C. Quod erat propositum. 4. 1. *porism.*

Similiter per præcedentem soluetur adhuc huiusmodi quæstio.

Inuenire duos cubos, vt interuallum maioris cubi & maioris lateris, interuallo minoris cubi, & minoris lateris æquale sit.

Sint enim iidem qui suprà numeri satisfacientes præcedenti, dico interuallum maioris cubi A & maioris lateris C. æquale esse interuallo minoris cubi B. & minoris lateris D. Quia enim est in medietate Arithmetica A ad B vt C ad D. [2] Erit & permutando A ad C vt B ad D. Quod demonstrandum erat. 7. 1. *porism.*

Non aliter per vndecimam huius soluetur quæstio sequens.

Inuenire duos cubos, vt maior eodem interuallo superet latus minoris, quo latus maioris superat minorem cubum.

A $\frac{512}{343}$. B $\frac{8}{7}$. C $\frac{125}{343}$. D $\frac{5}{7}$.

Sit maior cubus A. & eius latus B. sitque minor cubus C. & eius latus D. sitque summa cuborum A C. æqualis summæ laterum B D. vt requirit vndecima. Dico eodem interuallo A superare D. quo B superat C. Quia enim extremorum A C summa summæ mediorum D B æqualis est, [1] est in medietate Arithmetica A ad D vt B ad C. Quod erat ostendendum. 4. 1. *porism.*

QVAESTIO XIV.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν, καὶ συναμφότερος, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν μονὰς μόνος ἀ. πρῶτος τετράγωνον. ἐὰν ἀφέλω μονάδα ἀπὸ τινὸς τετραγώνου ἀφελῶ μονάδα ἀ. ἔξω πλάσω πρὸ τετράγωνον ἀπὸ ἁπλῶν ὁπωστινῶν δήποτε καὶ μονάδων ἀ. καὶ ἔστω ἀπὸ ἀριθμοῦ γ μονάδων ἀ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δυν ϛ ἁπλῶν ϛ μονάδων ἀ. καὶ ἐὰν ἀφέλω τοῦτο μονάδα ἀ πάλιν ὃν πλάσω πρῶτον δυν θ ἁπλῶν ϛ. πάλιν ἐπεὶ θέλομεν τὸν πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον μετὰ μονάδος ἀ ποιεῖν τετράγωνον. ✻ ἀλλὰ συναμφότερος ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος μετὰ μονάδος ἀ καὶ δυν θ. γμη ϛ ϛ. ✻ ὁ δὲ δεύτερος μετὰ μονάδος ἀ ἴσῃ τετραγώνῳ. γένοιτό μοι ζητῆσαι τίς τετράγωνος μετὰ δυν ϛ ἁπλῶν ϛ. ποιεῖ τετράγωνον ἀπὸ δύο ἀριθμῶν; ὧν τὸ ὑπὸ ἡμισείας δωδεκάδος ϛοῦ ϛ. καὶ εἰσὶ ϛοὶ ϛ μονάδες ϛ καὶ ϛὸ ἀ. ὧν ὑπεροχὴ ϛοῦ ἡ μονὰς ϛ. καὶ αὐτῆς τὸ ἥμισυ ϛὸ δ μονάδες γ. ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ γίνεται δωδεκάδες ις ἀριθμοὶ κδ μονάδος θ. ἀφαιρῶ μονάδα ἀ. καὶ τάσσω τὸν δεύτερον δυν ις ἁπλῶν κδ. μονὰς ἡ. ἴσῃ ᾗ ϛ ὁ πρῶτος δυν θ ἁπλῶν ϛ. καὶ ἑκάτερος ϛ συναμφότερος μετὰ μονάδος ἀ ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν ἴσῃ τῷ ὑπεροχῷ αὐτῶν μετὰ μονάδος ἀ ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι ἄρα δυν ζ ἁπλῶν ιη μονάδες θ ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων γ λείψει ἀριθμῷ γ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιη. ὅπερ ἦν δεῖξαι. ὁ μὲν πρῶτος. γκδ. ὁ δὲ δεύτερος εχκδ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt alteruter, & amborum ſumma, ſed & ipſorum interuallum addita vnitate quadratum faciat. Si vnitatem auferam ab aliquo quadrato, habebo primum. Formo quadratum aliquem à numeris quotlibet & vnitate, eſto à 3 N. + 1. ipſe erit 9 Q. + 6 N. + 1. & ſi inde auferam vnitatem, ponam primum 9 Q. + 6 N. Rurſus quia volumus primum & ſecundum ſimul, addita vnitate facere quadratum; ſed & ſecundum adſcita vnitate eſſe quadratum, quærendum mihi obtigit quis quadratus coniunctus cum 9 Q. + 6 N. faciat quadratum. Expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 6 N. & ſunt 9. N. + 6. & 1 N. horum interuallum 8 N. + 6. cuius ſemiſſis 4 N. + 3. quo in ſe ducto fit 16 Q. + 24 N. + 9. Hinc aufero vnitatem, & pono ſecundum 16 Q. + 24 N. + 8. Eſt autem primus 9 Q. + 6 N. & alteruter, & vterque ſimul addita vnitate facit quadratum. Supereſt vt & interuallum ipſorum adſcita vnitate faciat quadratum. Igitur 7 Q. + 18 N. + 9. æquantur quadrato à latere 3 − 3 N. & fit 1 N. 18. Ad poſitiones. Erit primus 3024. ſecundus 5624. & demonſtratio manifeſta.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa aſteriſcis incluſa, ἀλλὰ συναμφότερος ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος μετὰ μονάδος ἀ καὶ δυν ϛ γμη ϛ. ſubreptitia ſunt, & omnino reiicienda. Vt contrà fuerunt adiicienda illa quæ virgulis incluſa vides. Sic emendato textu nulla eſt hîc difficultas. Ad inueniendum quadratum qui additus ad 9 Q. + 6 N. faciat quadratum, non recurrit ad duplicatam æqualitatem Diophantus, vt malè arbitratur Xilander, non enim ſunt hîc duo numeri quadrato æquandi. Sed vtitur Canone vltimo vndecimæ ſecundi, cuius etiam vſus eſt in duplicata æqualitate ad reperiendum duos quadratos dato interuallo differentes. Diuerſitas autem operationis, & ſolutionis à triplici capite oritur. Primò enim primus diuerſimodè poni poteſt, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus + duplo lateri illius. Vt 9 Q. + 6 N. vel 4 Q + 4 N. vel 16 Q. + 8 N. &c. Secundò eodem manente primo, ſecundus variari poteſt in infinitum, quia verbi gratia in hypotheſi Diophanti per vndecimam ſecundi, reperiri poſſunt infiniti quadrati diuerſi, qui cum 9 Q. + 6 N. quadratum faciant, quorum ſinguli multati vnitate ſtatui poterunt pro ſecundo. Denique in fingendo latere quadrati qui numerorum interuallo æquetur, mira contingere poteſt varietas. Nam verbi gratia in hypotheſi Diophanti quadrati 7 Q. + 18 N. + 9. latus fingi poteſt à 3 − quolibet Numerorum numero, cuius quadratus ſuperet 7.

Non eſt etiam diſſimulandum quæſtionem hanc ad quemlibet quadratum extendi, ac proinde vniuerſalius proponi poſſe hoc pacto.

Quærantur duo numeri, quorum ſumma, ipſorum vterque, ſed & interuallum

ipsorum addito dato quadrato, quadratum faciant.

Esto datus quadratus 4.

Si auferam 4. ab aliquo quadrato habebo primum. Formo quadratum à Numeris quotlibet + 2. latere dati quadrati. Esto à 3 N. + 2. ipsi erit 9 Q. + 12 N. + 4. hinc auferendo 4. statuo primum 9 Q. + 12 N. Iam vt habeam secundum, quæram quis quadratus adsumpto 9 Q. + 12 N. faciat quadratum. Expono duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 12 N. hi sunt 9 N. + 12. & 1 N. horum interualli semissis est 4 N. + 6. cuius quadratus 16 Q. + 48 N. + 36. vnde si auferam 4. restabit pro secundo numero 16 Q. + 48 N. + 32. Primus autem est 9. Q. + 12 N. Et hi tribus postulati partibus satisfaciunt, nam & alteruter, & vtriusque summa adsumpto 4. quadratum facit. Restat vt & eorum interuallum adiecto 4. quadratum faciat, facit autem 7 Q. + 36 N. + 36 Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 6 − 3 N. & fit 1 N. 36. sunt igitur quæsiti numeri 12096. & 22496. qui soluunt quæstionem, nam vtrique sigillatim addendo 4. fiunt quadrati 12100, & 22500. quorum latera 110. & 150. At si summæ amborum, & interuallo eorundem addatur rursus 4. fiunt quadrati 34596. & 10404. quorum latera 186 & 102.

QVÆSTIO XV.

INVENIRE tres numeros quadratos, qui coniuncti æquales sint interuallis ipsorum coniunctis. Quoniam differentia maximi & medij, & differentia medij & minimi, & differentia maximi & minimi, simul iunctæ tribus numeris æquantur, at tres differentiæ sunt duplum differentiæ maximi & minimi. Ergo duplũ differentiæ maximi & minimi æquatur tribus numeris. Ponatur minimus quadratus 1. maximus 1 Q. + 2 N. + 1. iam duplum interualli maximi & minimi est 2 Q. + 4 N. Ergo tres quadrati simul sunt 2 Q. + 4 N. quorum duo cùm sint 1 Q. + 2 N. + 2. relinquitur vtique medius 1 Q. + 2 N. − 2 Oportet igitur hæc æquari quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{8}{5}$. Ad positiones. Erit maximus $\frac{196}{25}$. medius $\frac{121}{25}$. minimus 1. & omnia per 25. erit maximus 196. medius 121. minimus 25.

ΕΤΡΕΙΝ ξεὶς ἀριθμὸς τετραγώνους ὁι συντεθέντες ἴσοι ἔσονται ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονου καὶ μέσου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἴση ἐστὶ τοῖς ξισὶν, ἀλλ' αἱ τῶν ξιῶν ὑπεροχαὶ δ̄ις ἐστὶ ἡ τοῦ μείζονου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ, δ̄ις ἄρα ἡ τοῦ μείζονου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τοῖς τρισί. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τετράγωνος μ̄ᵒ ᾱ. ὁ δὲ μέσος δ̄ᵘ ᾱ ς̄ς̄ β̄ μ̄ᵒ ᾱ. καὶ δ̄ις ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δ̄ᵘ β̄ ς̄ς̄ δ̄. εἰσὶ ἄρα οἱ ξεῖς τετράγωνοι δ̄ᵘ β̄ ς̄ς̄ δ̄. ὧν οἱ δύο εἰσὶ δ̄ᵘ ᾱ ς̄ς̄ β̄ μ̄ᵒ β̄. λοιπὸς ἄρα ὁ μέσος ἔσται δ̄ᵘ ᾱ ς̄ς̄ β̄ γ̄ μ̄ᵒ β̄. δεῖ ἄρα ταῦτα ἴσα εἶναι τετραγώνῳ. ἔστω τὸ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ᵒ ᾱ γ̄ μ̄ᵒ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ᵒ μ̄ᵒ ϑ̄ᵉᵛ. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μείζονος ρ̄ϛ̄ ϰ̄ε̄. ὁ δὲ μέσος ϰ̄ε̄. ὁ δὲ ἐλάχιστος μ̄ᵒ ᾱ. καὶ πάντα ϰ̄ε̄. ἔσται ὁ μὲν μείζονος ρ̄ϛ̄. ὁ δὲ μέσος ρ̄ϰ̄ᾱ. ὁ δὲ ἐλάχιστος ϰ̄ε̄.

IN QVAESTIONEM XV.

TEXTV restituto, vt nos fecimus, non magna est hîc difficultas. Aduertendum tamen quod nec attigit Diophantus, nec vidit Xilander in fingendo latere quadrati 1 Q. + 2 N. − 2 aliquam adhibendam esse cautionem. Cùm enim tres inæquales numeri quærantur, oportet vtique medium maiorem esse minimo. At minimus positus est 1. medius 1 Q. + 2 N. − 2. Oportet igitur talem inueniri valorem Numeri, vt per eum resoluendo hypostases 1 Q. + 2 N. − 2. sit plus quàm 1. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. + 2 N. excedere ternarium, & hoc etiam vt contingat, oportet valorem Numeri excedere vnitatem, vt manifestum est. Porrò fit valor Numeri à quodam quadrato binario aucto, & diuiso per duplum sui lateris binario auctum. Quare si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. fiet valor Numeri $\frac{1Q+2}{2N+2}$. Hoc ergo cùm maius esse oporteat vnitate, erit & 1 Q. + 2. maior quàm 2 N. + 2. & tandem 1 Q. maior erit quàm 2. N. vnde constat vnitates in latere fictitio ponendas plures esse debere quàm 2. Ita Diophantus finxit huiusmodi latus 1 N. − 4. Poterat etiam poni 1 N. − 3. vel 1 N. − 5, &c. Sed si ponas 1 N. − 1. vel 1 N. − 2. incides vtique in aliquod absurdum.

Aduertendum præterea minimum quæsitorum, non solùm poni posse 1. sed & alium quemlibet quadratum, puta 8. 9. 25. &c. Sed tunc maximi latus ponetur certus Numerorum numerus +

latere eiuſdem quadrati, qui pro minimo poſitus erit. Et tandem in fingendo latere quadrati qui pro medio ſtatuetur, adhibenda erit eadem cautio, de qua ſupra eſt actum, erit enim neceſſe vt per valorem Numeri reſoluendo hypoſtaſes, medius inueniatur maior minimo.

Denique communi denominatore abiecto, ſolos numeratores retinet Diophantus, quia hi æquè bene ſoluunt quæſtionem. Cuius rei ratio eſt, quod in fractionibus eiuſdem denominationis, tam ſumma quàm interuallum penes ſolos Numeratores conſideratur, vnde ad hoc vt trium fractionum eiuſdem denominationis ſumma æqualis ſit ipſarum interuallis, neceſſe eſt prius Numeratorum ſummam, ipſorum interuallis æquari. Sed & vniuerſaliter veriſſimum eſt. Quamcunque rationem trium Numerorum ſumma habeat ad ipſorum interualla, eandem habere, ſummam trium aliorum in eadem ratione ſumptorum, ad ipſorum interualla, vt facile eſt demonſtrare. Sed hoc tyronibus exercitationis gratia relinquatur.

QVÆSTIO XVI.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως δύο ὁποιωνοῦν συντεθέντες καὶ ὅπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιαθέντες ποιῶσι τὰς δοθέντας ἀριθμούς. ὑπετάχθω δὴ συναμφότερον τὸν πρῶτον, καὶ τὸν δεύτερον ὅπὶ τὸν τρίτον πολλαπλασιαθέντα ποιεῖν μ̊ λε̄. συναμφότερον δὲ τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ὅπὶ τὸν πρῶτον πολλαπλασιαθέντα ποιεῖν μ̊ κζ̄. καὶ ἔτι συναμφότερον τὸν πρῶτον, καὶ τ̄ τρίτον πολλαπλασιαθέντα ὅπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖν μ̊ λβ̄. τετάχθω ὁ τρίτος ς̄ᵉ α̃. λοιπὸν ἄρα ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος λε̄ ς̄ᵍ α̃. ἔστω ὁ πρῶτος ι ς̄ᵒ α̃. ὁ δεύτερ⊖ ἄρα ἔσαι κε̄ ς̄ᵍ α̃. καὶ λοιπὸν ὅτι δύο ὑπετάγμεθα τὸ συναμφότερον τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ὅπὶ τ̄ πρῶτον ποιεῖν μ̊ κζ̄. τό τε συναμφότερον τὸν τρίτον, καὶ τὸν πρῶτον ὅπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖν μ̊ λβ̄ ἀλλ' ὁ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ὅπὶ τὸν πρῶτον ποιεῖ μ̊ ῑ καὶ σν̄ δ̄ῡ. α̃. μονάδες ἄρα ῑ μ̄ καὶ σν̄ δ̄ῡ. α̃ ἵσαι μ̊ κζ̄. ὁ δὲ τρίτος καὶ ὁ πρῶτος ὅπὶ τὸν δεύτερον ποιεῖ μ̊ κε̄ καὶ σν̄ δ̄ῡ. α. μονάδες ἄρα κε μ̄ καὶ σν̄ δ̄ῡ α̃. ἴσαι μ̊ λβ̄. καὶ μ̊ καὶ σν̄ δ̄ῡ. α̃. ἴσαι μ̊ κζ̄. καὶ ὑφῄρεθησαν αἱ μονάδες ταὶς μονάδας μ̊ ε̄. ὡς εἰ καὶ αἱ μ̊ κε̄. καὶ σν̄ δ̄ῡ. α̃. ὑφῃρείχον μ̊ ε̄. ἰῶ δ' ἂν ἴσοι ἡ ὑφοχὴ. ἀλλὰ μ̊ κε̄ ὁπ τῷ δευτέρᾳ εἰσὶν, αἱ δὲ μ̊ ῑ ὁπ τῷ πρώτου εἰσί. θέλομεν οὖν τ̄ ὑφοχὴν αὐτὴν εἶν μ̊ ε̄. αὐτοὶ δ' ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ὀκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ συναμφότερος μ̊ λε̄. γέγονε οὖν μοι τ̄ λε̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρᾳ ὑπερέχῃ μ̊ ε̄. καὶ ὅτι ὁ μὲν ιε̄. ὁ δ' κ̄. τάσσω τ̄ μὲν πρῶτον ιε̄ ς̄ᵐ. α̃. τὸν δὲ δεύτερον κ̄ ς̄ᵐ. α̃. καὶ συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ὅπὶ τ̄ πρῶτον ποιεῖ μ̊ ιε καὶ τ δ̄ῡ. α̃ ἴσας μ̊ κζ̄. συναμφότερος δ' ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἴσας μ̊ λβ̄. καὶ ἐπεὶ μ̊ ιε καὶ τ δ̄ῡ. α̃. ἴσῶσω μ̊ κζ̄. γίνονται ὁ ἀριθμὸς μ̊ ε̄. ὅπὶ ταὶς ὑποτάσεσι. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ̊ γ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̊ δ̄. ὁ δὲ τρίτος μ̊ ε̄.

INVENIRE tres numeros, quorum bini quilibet coniuncti, & in reliquum ducti, faciant datos numeros. Imperetur vt ſumma primi & ſecundi in tertium ducta faciat 35. ſumma ſecundi & tertij in primum ducta faciat 27. At ſumma primi & tertij in ſecundum faciat 32. Ponatur tertius 1 N. Ergo primus & ſecundus ſimul erunt $\frac{35}{1N}$. Eſto primus $\frac{10}{1N}$. ſecundus igitur erit $\frac{25}{1N}$. duo adhuc poſtulata reſtant implenda, nimirum vt ſecundus & tertius ſimul in primum ducti faciant 27. & vt tertius & primus ſimul in ſecundum faciant 32. ſed ſecundus & tertius in primum faciunt $10 + \frac{250}{1Q}$. Proinde $10 + \frac{250}{1Q}$. æquantur 27. At tertius & primus in ſecundum faciunt $25. + \frac{250}{1Q}$. Proinde $25 + \frac{250}{1Q}$. æquantur 32. ſed vt oſtenſum eſt, etiam $10 + \frac{250}{1Q}$. æquantur 27. & exceſſus vnitatum ſuper vnitates eſt 5. vt ſi etiam $25. + \frac{250}{1Q}$. vltrà $10 + \frac{250}{1Q}$. habuiſſent 5. æqualia vtique fuiſſent interualla. Sed 25. vnitates à ſecundo ſunt, & vnitate 10. à primo. Volumus ergo harum interuallum eſſe 5. Ipſi autem primus & ſecundus non ſunt quiuis, ſed coniuncti faciunt 35. vſu venit ergo mihi vt 35. diuidam in duos numeros, quorum differentia ſit 5. & eſt alter 15. alter 20. Pono ergo primum $\frac{15}{1N}$. ſecundum $\frac{20}{1N}$. & ſumma ſecundi & tertij in primum ducta facit $15 + \frac{300}{1Q}$. æqualia 27. At ſumma primi & tertij in ſecundum facit $20 + \frac{300}{1Q}$. æqualia 32. & ſi $15 + \frac{300}{1Q}$ æquem 27. fit 1 N. 5. Ad poſitiones, erit primus 3. ſecundus 4. tertius 5.

ξῖτος ἐπὶ δεύτερον ποιεῖ μ̊ κ̄ καὶ τ δ̄ῡ. α̃.

IN

IN QVAESTIONEM XVI.

TEXTVS alio morbo non laborat, nisi quod fractiones Numericæ & Quadraticæ ambiguè exprimuntur, vt iam semel atque iterum monuimus passim in hoc codice contingere. Sed ex nostra versione omnis tollitur ambiguitas. Operatio artificiosa est, quam etsi totam ita tradat Xilander, veram tamen eius causam, & æquationis resoluendæ rationem non intellexit, ait enim abiici debere vtrimque 300. & comparandos inuicem antecedentes 15. & 20. itemque consequentes 27. & 32. quorum idem interuallum 5. valor Numeri. In quo turpiter errat, si existimat idcirco 5. esse valorem Numeri. Quod fiet manifestum si statuas secundum vel tertium 1 N. quod fieri posse docebimus infrà. Tunc enim simili prorsus logismo inuenies valorem Numeri longè diuersum ab interuallo similium antecedentium & consequentium. Itaque resoluitur æquatio via ordinaria. Comparando verbi gratia 15 Q. + 300. cum 27 Q. auferendo scilicet vtrimque 15 Q. vnde tandem 12 Q. manent æquales 300. & fit 1 Q. 25. ac proinde 1 N. 5. similiter æquando 20 Q. + 300. & 32 Q. auferendo scilicet vtrimque 20 Q. manent vt prius 12 Q. æquales 300. vnde fit rursus idem valor Numeri 5. Cùm autem vtraque æqualitas necessariò inferatur, necesse est vtique eundem vtrobique reperiri valorem Numeri, in quo totum artificium Diophanti consistit. Si enim auferendo 15 Q. à 27 Q. idem supersit quod supereſt auferendo 20 Q. à 32 Q. sumus in vado, nam illud residuum vtrobique æquabitur eidem numero 300. Id autem continget si inter 15. & 20. idem sit interuallum quod inter 27. & 32. Nam datis quatuor Numeris 15. 20. 27. 32. ita vt inter 15. & 20. primum & secundum idem sit interuallum, quod inter 27. & 32. tertium & quartum, erit & permutando idem interuallum, inter 15. & 27. primum & tertium, quod inter 20. & 32. secundum & quartum. Quod est intentum. Hinc patet vera & germana causa totius operationis Diophanti, & cur cogatur diuidere 35. in partes 15. & 20. eodem distantes interuallo, quo distant 27. & 32. 7. 1. *porif.*

Cæterùm, vt jam monui, tripliciter variari potest operatio, quia 1 N. pro quolibet trium quæsitorum numerorum statui potest, quod in tyronum gratiam non pigebit vno exemplo confirmare. Ponatur secundus 1 N. erunt igitur primus & tertius simul $\frac{35}{1N}$. Iam vt inueniantur primus & tertius separati, & duplicata æqualitas ritè procedat, oportet diuidere $\frac{35}{1N}$ in duas partes, seruantes idem interuallum quod est inter 35. & 27. nimirum 8. id fiet per primam primi. Erit ergo primus $\frac{17\frac{1}{2}}{1N}$ tertius $\frac{17\frac{1}{2}}{1N}$. Itaque ducendo primum & secundum simul in tertium fit 20 + $\frac{240}{1Q}$ æqualis 35. Et rursus ducendo secundum & tertium simul in primum, fit 12 + $\frac{240}{1Q}$ æqualis 27. & omnia ducendo in 1 Q. fit hinc quidem 20 Q. + 240. æqualis 35 Q. Inde verò 12 Q. + 240. æqualis 27 Q. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique 1 Q. 16. ac proinde 1 N. 4. sunt igitur quæsiti numeri qui prius 3. 4. 5. Hinc error Xilandri manifestè deprehenditur. Nam si vt ipse argumentatur abiicias vtrimque 240. & comparando antecedentes 20. & 12. itemque consequentes 35. & 27. quorum interuallum idem 8. Inde colligas valorem Numeri esse 8. vides quantum aberres à veritate.

Porrò vt solutio sit rationalis, oportet, vt vno datorum numerorum diuiso in duas partes, quarum idem sit interuallum, quod est inter duos reliquos numeros, planus sub dictis partibus comprehensus habeat rationem quadrati ad quadratum, ad interuallum quo maior dictarum partium superat minorem ex duobus reliquis numeris, vel quo minor pars superatur à maiore duorum reliquorum numerorum.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, ita vt quadratus cujuslibet ipsorum adscito sequente numero faciat quadratum. Ponatur medius, Numerorum quotlibet, ac sit 4 N. & quia volo quadratum primi adscito secundo facere quadratum, eò res redit vt inueniam quis quadratus adiectis 4 N. faciat quadratum. Quæro duos numeros quorum mutuo, ductu fiat 4 N. hi sunt qui eum metiuntur, nimirum 2 N. & 2. & si interualli horum semissem statuo pro primo, erit is 1 N − 1. Iam ergo hoc confectum est vt primi quadratus cum secundo numero fa-

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τ ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μέσος ς̄ ὅσων δ̄ηπότε, ἔστω ς̄ δ̄. ☾ ἐπεὶ θέλω τ ὑπὸ τῶ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τ δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται εἰς τὸ εὑρεῖν τὶς τετράγωνος προσλαβὼν ς̄ δ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ζήτησον ἀριθμοὺς δύο ὧν τὸ ὑπὸ ὅτι ς̄ δ̄. μετρεῖσθω ς̄ β̄ καὶ μ̄ β̄. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑποχῆς αὐτῶν τῶν ἡμίσους τάσσω τ πρῶτον. ἔσται ς̄ α̃ λείψει μ̄ α̃. ☾ λέλυται μοι, ὥστε τ ὑπὸ τῶ πρώτου τ τετράγωνον προσλαβόντα τ δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι τὸν ὑπὸ τῶ δευτέρου τετράγωνον. τουτέστι δ̄ ιε̄

μῦ τῶ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ἐαν̀ ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὰς δ̄ ῡ ις̄ ἔξω τὸν τρίτον. τάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τῆ̄ δ̄ ῡ ις̄. τουτέστι ϛ̄ δ̄ μ̊ ᾱ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δ̄ ῡ ις̄ ἀριθμῶν η̄ μ̊ ᾱ̄. ἐαν̀ ἀφέλω τὰς δ̄ ῡ ις̄. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ϛ̄ η̄ μ̊ ᾱ̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὰς ξ̄εῖς ἴσους εἶ̄ τετραγώνῳ. εἰσὶ δ̀ οἱ ξ̄εῖς ϛ̄ ιγ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἔστω τετράγωνον δ̄ ῡ ρξθ̄. ἡ γίνε δ̄ ς̄ δ̄ ῡ ιγ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσ. ἔσται ὁ πρῶτος δ̄ ῡ ιγ̄ λείψει μ̊ ᾱ̄. ὁ δεύτερος δ̄ ῡ νβ̄. ὁ τρίτος δ̄ ῡ ρδ̄ μ̊ ᾱ̄. ἡ λῆμμά μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τ̄ ὑπερβεβηκότα. λοιπὸν ὅσῳ ἑκ̀ τ̄ ἀπὸ τ̄ τρίτου τετράγωνον, τουτέστι δ̄ ῡ δ̄ ῡ ᾱ̄, ωις̄. δ̄ ῡ ση̄ μ̊ α. μῦ τῶ πρώτου, τουτέστι δ̄ ῡ ιγ̄ γ̄ μ̊ ᾱ̄. ποιεῖν τετράγωνον. ποιεῖ ἢ δ̄ ῡ δ̄ ῡ ᾱ̄, ωις̄ δ̄ ῡ σκᾱ̄. ἴσα τετραγώνῳ παντὶ ὧ̣ῳ δυνάμεις. γίνον ἄρα δ̄ ῡ ᾱ̄, ωις̄ μ̊ σκᾱ̄. ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛ̄ ρδ̄ μ̊ ᾱ̄. ἑκ γίνεται ὁ ς̄ νε̄ νϛ̄. ὅθεν τὰς ὑποστάσ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̊ γ̄, σχᾱ̄ ϛ̄ψ̄ ὁ δὲ δεύτερος ιε̄, ζτ̄ ϛ̄ψ̄ ὁ δὲ τρίτος μ̊ λᾱ̄, ζτδ̄ ϛ̄ψ̄.

ciat quadratum. Reſtat vt ſecundi quadratus, hoc eſt 16 Q. adſcito tertio faciat quadratum. Si ergo ab aliquo quadrato auferam 16 Q. habebo tertium. Formo quadratum à latere ipſius 16 Q. nempe abs 4 N. + 1. is erit 16 Q. + 8. N. + 1. hinc ablatis 16 Q. reliquus eſt tertius 8 N + 1. Rurſus quia volo trium ſummam æquari quadrato, eſt autem trium ſumma 13 N. hoc æquabitur quadrato, eſto itaque quadratis numero quadrato, puta 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad poſitiones erit primus 13 Q. — 1. ſecundus 52 Q. tertius 104 Q. + 1. Ita indefinitè impleta ſunt tria poſtulata. Reſtat vt quadratus tertij, nimirum 10816 QQ. + 208 Q. + 1. adſcito primo numero, hoc eſt 13 Q. — 1. faciat quadratum. Facit autem 10816 QQ. + 221 Q. hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fit 10816 Q. + 221. æquale quadrato à latere 104 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{55}{52}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{36625}{2704}$. ſecundus $\frac{135200}{2704}$. tertius $\frac{317304}{2704}$.

OBSERVATIO D. P. F.

ELegantius fortaſsè ita ſoluetur hæc quæſtio, ponatur primus numerus 1. *N. ſecundus* 2 *N* + 1 *vt cum quadrato primi conficiat quadratum, ponatur tertius quilibet vnitatum & numerorum numerus, eâ conditione vt additus quadrato ſecundi conficiat quadratum, V. G. ſit* 4. *N.* + 3. *ita igitur duabus propoſiti partibus fit ſatis, ſupereſt vt ſumma trium, ſed & quadratus tertij vnâ cum primo conficiat quadratum, ſumma trium eſt* 4 + 7 *N. ſumma verò quadrati tertij & primi eſt.* 9 + 25 *N* + 16 *Q. oriturque duplicata æqualitas cuius ſolutio in promptu ſi vnitates quadratas ad eundem numerum quadratum in vtrouis numero quadrato adæquando reuoces.*

Eademque viâ facillimè extendetur quæſtio ad 4. *numeros & infinitos cauendum enim ſolummodo erit vt ſumma vnitatum quæ in ſingulis numeris ponuntur conficiat quadratum quod quidem facillimum eſt.*

IN QVAESTIONEM XVII.

ARTIFICIOSISSIMÈ Diophantus per duas operationes propoſitum abſoluit problema. Hîc itaque multa ſunt obſeruanda, quæ vel non vidit Xilander, vel parum feliciter adnotauit.

Primo enim medius quæſitorum numerorum poni poterat non ſolùm 4 N. ſed & alius quilibet Numerorum Numerus, vt non obſcurè indicat Diophantus.

Secundò ſumi poſſunt etiam diuerſi numeri, quorum mutuo ductu fiant 4 N. & ſic primi Numeri poſitio variari, cùm inueniri poſſint infiniti quadrati qui adſumptis 4 N. quadratum faciant. Sed hîc aliqua cautio adhibenda eſt. Curandum enim vt ex duobus huiuſmodi Numeris, quorum mutuo ductu fient 4 N. ille qui conſtat ex ſolis vnitatibus abſolutis habeat pro ſemiſſe quadratum numerum. Sic Diophantus ſelegit 2 N. & 2. vbi vides ſemiſſem ipſius 2. eſſe 1 quadratum numerum. Sic etiam ſumi poſſent $\frac{1}{2}$ N. & 8. quia ſemiſſis ipſius 8. eſt quadratus 4. & ſic alij infiniti cum eadem cautione deligi poſſunt. Huius verò rei cauſa ſubtili indiget indagatione. Equidem certum eſt ſemiſ-

sem huiusmodi vnitatum absolutarum semper reperiri in hypostasi primi numeri cum signo vt — in hypothesi Diophanti ponitur primus Numerus 1 N. — 1. Etsi sumpsisses $\frac{1}{2}$ & 8. ad conficiendum 4 N. mutuo ductu, statueretur primus Numerus $\frac{1}{4}$ N. — 4. hoc autem accidit, quia primus Numerus habetur sumendo semissem interualli duorum numerorum quorum mutuo ductu fiunt 4 N. Cæterùm vnitates quæ ponuntur in primo Numero cum signo defectus debere conflare quadratum ex eo colligitur, quod hæ debent æquari illis quæ ponuntur in tertio numero cum signo +. vt sic vnitatibus se mutuò elidentibus cùm tres numeri simul adduntur, eorum summa constet ex solis Numeris, vt in Diophanto fit hujusmodi summa 13 N. Atqui vnitates quæ ponuntur in tertio numero semper quadratas esse manifestum est. Etenim tertius Numerus est pars cuiusdam quadrati, cujus latus constat ex Numeris qui ponuntur pro secundo + quotlibet vnitatibus, sic Diophantus posito secundo 4 N. vt inueniat tertium, fingit quadratum à latere 4 N + 1. qui est 16 Q. + 8 N. + 1. vnde ablatis 16 Q. statuit tertium 8 N. + 1. Quare manifestum est vnitates tertij Numeri semper esse quadratum vnitatum in latere dicti quadrati positarum. Vt ergo illis æquentur vnitates primi numeri, illas opportet conficere quadratum eundem.

Tertiò in prima operatione Diophantus æquare potuit 13 N. cuilibet numero quadratorum quadrato, puta 16 Q. 25 Q. 36 Q. &c. Sumpsit author 169. Q. ad vitandas fractiones. Voluit autem in hac operatione valorem Numeri exhiberi in Quadratis, quia per eam non inquiritur vltimus valor Numeri per quem proposita quæstio soluatur, sed tantùm id agitur vt per eam hypostases trium quæsitorum numerorum ita constituantur, vt per eas tribus propositi partibus indefinitè satisfiat, vt disertis verbis indicat Diophantus. Rectè itaque concludit si 13 N. æquentur 169. Q. sequi 1 N. æquari 13 Q. Quod ex sola proportionum regula perspicuum est. Deinde ad hanc Numeri æstimationem reducendo ante factas positiones, infert primum qui erat 1 N. — 1. fore iam 13 Q. — 1. secundum qui erat 4 N. fore iam 52 Q. Ac demum tertium qui erat 8 N. + 1. fore iam 104 Q. + 1. Quare patet allucinari Xilandrum cùm putat 13 N. æquari 169 QQ. qua æquatione quid ad rem conducens consequi possit non video. Siue enim per regulam trium colligat 1 N. æquari 169 QQ. siue depressis characteribus 13. æquari 169 QC. vnde fit solutio irrationalis, in manifestum absurdum eum incidere necesse est. Adde in Græco rectè reperiri ad 109. adiectam notam Q. non autem QQ. vt veré dici possit corruptum hoc loco Diophantum à Xilandro.

Quartò in vltima æquatione vbi fingitur latus numeri 10816 Q. + 221. qui fit addendo primum numerum ad quadratum tertij, magna etiam cautio est adhibenda. Quia enim primus positus est 13. Q. — 1 oportet talem inueniri valorem Numeri, vt 13 Q. excedant vnitatem. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. maiorem esse quàm $\frac{1}{13}$. quare cùm latus vero maius ipsius $\frac{1}{13}$ sit $\frac{3}{10}$. Oportet valorem Numeri excedere $\frac{3}{10}$. Porro fit valor Numeri auferendo quadratum aliquem à 221. & residuum diuidendo per latus eiusdem quadrati ductum in 208. Quare posito illo quadrato 1 Q. fit valor Numeri $\frac{221}{208}\frac{1}{N}$ qui debet excedere $\frac{3}{10}$. quare 221 — 1 Q. debet excedere $\frac{3}{10}$ N. & tandem 1 Q debet esse maior quàm $\frac{3}{5}$ N. + 221. Qua æquatione per approximationem resoluta fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Quamobrem manifestum est fingendum latus quadrati 104 N. + tot vnitatibus quæ non excedant $\frac{16}{5}$. Vnde si ponas latus illud 104 N. + 4 incides in absurdum, nam fiet 1 N. $\frac{205}{832}$ per quem resoluendo hypostases, primus numerus inuenitur minor nihilo, & sic de aliis.

Denique ne nos ignauiæ arguat Xilander, examen quæstionis subiicere libet. Summa trium numerorum est $\frac{511225}{2704}$ quadratus à latere $\frac{715}{52}$. Quadratus autem primi nempe $\frac{134109764\,1}{73\,11616}$ adscito secundo quadratum facit $\frac{176643684\,1}{73\,11616}$ à latere $\frac{42029}{2704}$. Quadratus porrò secundi, nempe $\frac{24743290000}{73\,11616}$ adscito tertio quadratum facit $\frac{25690280016}{73\,11616}$ à latere $\frac{160004}{2704}$. Denique quadratus tertij, nempe $\frac{10078085\,1600}{73\,11616}$ adsumpto primo quadratum conficit $\frac{10078085\,1600}{73\,11616}$ à latere $\frac{317460}{2704}$.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt cuiusuis ipsorum quadratus dempto qui eum ordine sequitur, faciat quadratum. Ponatur rursus medius 4. N. & quia volo primi quadratum dempto secundo facere quadratum, oportet inuenire quadratum, qui demptis 4 N. faciat quadratum. Quæro primùm duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 4 N. hi sunt qui eum metiuntur 2 N. & 2. Nunc ergo summæ illorum semissem capiens,

ΕΤΡΕΙΝ ζεῖ; ἀριθμὸς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῷ τετράγωνος τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ μέσος ἀριθμὸς δ. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, λείψει τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ δύρεῖν τὶς τετράγωνος λείψας ςς^ους δ ποιεῖ τετράγωνον, καὶ ζητῶ πρότερον ἀριθμοὺς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ δύο ςς^οι δ. μετρᾶσι δὲ ἀριθμοὶ β μ^ο β νῦν τῆς συνθέσεως αὐτῷ λαβὼν τὸ ἥμισυ, τάσσω τὸν πρῶτον ἀριθμοῦ α μ^ο α. καὶ λέλυται

μοι ἓν τῷ ὑπιζαγμάτων. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τῆ δ δυτέρᾳ τετράγωνον, τετέστι δωνάμεις ις̄ λειψάντα τ̀ τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐαν̀ ἄρα ἀπὸ τῆ δυνάμεων ις̄ ἀφέλωμέν τινα τετράγωνον, ἔξωμεν τὸν τρίτον. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ἀριθμῆ δ̄ λείψει μονάδος ᾱ. γίνονται δωνάμεις ις̄ μ̊ ᾱ λείψει ἀριθμῷ η̄. ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ δ̄ ις̄. λοιπὸς ὅτι ὁ τρίτος ς̄ς̄ η̄ λείψει μ̊ ᾱ. καὶ λέλυται ἕτερον ὑπόταγμα. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὰς ϝεῖς, τουτέστι ἀριθμὰς ιγ̄ ἴσους ἓϊ τετραγώνῳ. ἔστω δ̄ ρξϊ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δωνάμεις ιγ̄. ὅπι ταὶς ὑποσάσῃς. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος δ̄ ιγ̄ μ̊ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος δωνάμεις νβ̄. ὁ δὲ τρίτος δι̊ ρδ̄ λείψει μ̊ ᾱ. καὶ πάλιν λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ὑπιζαγμάτων. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸν ἀπὸ τῆ τρίτου τετράγωνον τ̀ τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ἀπὸ τῆ τρίτου τετράγωνος λήψας τὸν πρῶτον ποιεῖ δι̊ δ̄ᵘ ᾱ, ωις τ̀ δ̄ᵘ σκᾱ. ἴσας τετραγώνῳ, καὶ πάντα ὡδᾷ δύναμιν, γίνονται δ̄ᵘ ᾱ, ωις τ̀ μ̊ σκᾱ ἴσῃ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ ρδ̄ τ̀ μ̊ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ριᾱ ρδ̄ᵒ. ὅπι ταὶς ὑποσάσῃς. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ιζ̄. μ̊ ϖπϝ ᾱᵒ, ωιᵒ. ὁ δ̀ δεύτερος ξδ̄. μ̊ χϡβ ᾱᵒ, ωιᵒ. ὁ δ̀ τρίτος ρκζ̄. φξη ᾱᵒ ωιᵒ.

pono primum 1 N. + 1. sic vni postulatorum satisfit. Rursus quoniam volo secundi quadratum, hoc est 16 Q. dempto tertio facere quadratum, si abs 16. Q. auferamus aliquem quadratum, habebimus tertium. Formo quadratum à 4 N. − 1. fit 16 Q. + 1 − 8 N. hunc aufero de 16. Q. relinquitur tertius 8 N. − 1. & alteri postulato satisfactum est. Rursus quia volo trium summam, hoc est 13 N. æquari, quadrato esto 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad positiones. Erit primus quidem 13 Q. + 1. secundus 52 Q. tertius autem 104 Q. − 1. & rursus indefinitè tribus postulatis est satisfactum. Superest vt & tertij quadratus dempto primo faciat quadratum. Sed tertij quadratus dempto primo facit 10816 QQ. − 221 Q. æquale quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fiunt 10816 Q. − 221. æqualia quadrato à latere 104 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{221}{104}$. Erit primus $\frac{170989}{10816}$ secundus $\frac{640692}{10816}$ tertius $\frac{1270563}{10816}$.

OBSERVATIO D. P. F.

EOdem quo in superiori quæstione vsi sumus ratiocinio hanc quoque soluemus & ad quotlibet numeros extendemus.

IN QVAESTIONEM XVIII.

OMNIA quæ ad præcedentem dicta sunt, hîc etiam locum habent, vt non opus sit ea repetere. Eodem errore lapsus est Xilander, cùm notam QQ. temerè inserit loco notæ Q. sed & falsos exhibet numeros solutionis, vt videre est ex comparatione verorum quos in Diophanti contextu reposuimus. Examen quæstionis tale est. Summa trium numerorum fit $\frac{2082249}{10816}$ quadratus à latere $\frac{1443}{104}$. A quadrato primi qui est $\frac{2925738121}{11698856}$ si auferas secundum, supereſt quadratus $\frac{2230751349}{11698856}$ à latere $\frac{149357}{10816}$. A quadrato secundi qui est $\frac{410486238864}{11698856}$ si auferas tertium, supereſt quadratus $\frac{396743775376}{11698856}$ à latere $\frac{629876}{10816}$. Denique à quadrato tertij qui est $\frac{16143430426 24}{11698856}$ si auferas primum, supereſt quadratus $\frac{1612493625600}{11698856}$ à latere $\frac{1269800}{10816}$. Hîc etiam vides in Græco ita exprimi solutionis numeros, vt Myriades à reliquis vnitatibus distinguantur, quod familiare esse Diophanto iam monuimus ad vigesimam secundam tertij.

QVÆSTIO XIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμὰς ὅπως ὁ ἀπὸ τ̀ πρώτου κύβος μετὰ τ̀ δευτέρου ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἀπὸ τῆ δευτέρᾳ τετράγωνος μετὰ τ̀ πρῶτος ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτον ς̄ᵘ ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσαι μονάδες κυβικαὶ η̄ λείψει κ̄ᵘ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀπὸ τῆ πρώτου κύβος μετὰ τ̀ δευτέρου,

INVENIRE duos numeros, vt primi cubus adscito secundo faciat cubum, at secundi quadratus adscito primo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus ergo erit 8 − 1 C. & cubus prioris adsumens secundum fit cubus. Restat vt & quadratus secundi adsumpto primo fa-

ciat quadratum, sed secundi quadratus adsumpto primo facit 1 CC. + 1 N. + 64 − 16 C. hæc æquantur quadrato à latere 1 C. + 8. hoc est 1 CC. + 16 C. + 64. & additis vtrimque communibus defectibus, & auferendo similia à similibus relinquuntur 32 C. æquales 1 N. & omnibus per numerum diuisis 32 Q. æquantur 1. & est 1. quadratus. Quare si 32 Q. esset quadratus, explicari posset æquatio. Sed 32. Q. proueniunt ex duplo 16. C. Ipsi autem 16 C. orti sunt ex duplo producti 8. in 1. C. hoc est ex duplo ipsius 8. Proinde 32 Q. gignuntur ex quadruplo eiusdem 8. Id ergo mihi incumbit, vt inueniam cubum qui quater sumptus faciat quadratum. Esto quæsitus 1 C. hic quater fit 4 C. æquandus quadrato. Esto 16 Q. fit 1 N. 4. Ad positiones erit cubus 64. Pono itaque secundum 64. − 1 C. & supereſt vt quadratus secundi adsumpto primo faciat quadratum. Sed quadratus secundi adsumpto primo facit 1 CC. + 4096. + 1 N. − 128 C. hoc ergo æquatur quadrato à latere 1 C. + 64. hoc est 1 CC. + 4096 + 128 C. & reliquuntur 256 C. æquales 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{16}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1}{16}$. secundus $\frac{262143}{4097}$.

κύβος. λοιπὸν ὅτι ἡ ὑπὸ τῆ δευτέρᾳ τετράγωνον παρασλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τῆ δευτέρᾳ τετράγωνος παρασλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κυβόκυβον ᾱ ς͵ ᾱ μ̊ ξδ̅ λείψει κ̊ ις̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ὑπὸ πλευρᾶς κ̊ ᾱ μ̊ η̅. τουτέστι κ̊ κ̊ ᾱ κ̊ ις̅ μ̊ ξδ̅. ἡ καινὸν παρασπειρόμενον τῶν λειπόντων, καὶ ἀφαιρουμένων τῶν ὁμοίων ὑπὸ τῶν ὁμοίων, λοιποὶ κ̊ λβ̅ ἴσοι ς̅ ᾱ. καὶ παντὸς παραβολὴ ς͵ δ̊ λβ̅ ἴσαι μ̊ ᾱ. καὶ ὅτι ἡ μ̊ τετράγωνος, ἡ δ̊ λβ̅ εἰ ἦσαν τετράγωνος λελυμένη ἂν μοι ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' αἱ δ͵ λβ̅ εἰσὶ δὶς κ̊ ις̅. οἱ δὲ κ̊ ις̅ εἰσὶν ὑπὸ τὸ δὶς μ̊ η̅. ἡ τῆ κ̊ ᾱ. τουτέστι δὶς τὸ μ̊ η̅. ὥστε αἱ λβ̅ δυνάμεις ἐκ τετράκις τὸ η̅ μ̊ γέγονε σωμ̊ μοι εὑρεῖν κύβον ὃς τετράκις γνόμενος ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος κ̊ ᾱ. δεῖ τετράκις γνόμενος ποιεῖ κ̊ δ̅ ἴσους τετραγώνῳ. ἔστω δ̊ ις̅. ἡ γίνεται ὁ ς͵ μ̊ δ̅. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ κύβος μ̊ ξδ̅. τάσσω ἄρα ἢ δεύτερον μ̊ ξδ̅ λείψει κ̊ ᾱ. καὶ λοιπὸν ὅτι τὸν ὑπὸ τῆ δευτέρᾳ τετράγωνον παρασλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τῆ δευτέρου παρασλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κ̊ κ̊ ᾱ μ̊ δ̊ις̅ ς͵ ᾱ γ̅ κ̊ ρκη̅. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ὑπὸ πλευρᾶς κ̊ ᾱ μ̊ ξδ̅. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος κ̊ κ̊ ᾱ μ̊ δ̊ις̅ κ̊ ρκη̅. καὶ γίνονται λοιποὶ κ̊ συς̅ ἴσοι ἀριθμῷ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ᾱ ι̊ς̅. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος ᾱ ι̊ς̅ ὁ δὲ δεύτερος κ̊ς̅. βρμγ̅ δ̊ι̊ς̅.

IN QVAESTIONEM XIX.

TExtvs lacunas repleuimus, vt vides; quo præstito parum, aut nihil supereſt difficultatis in huius quæstionis tractatione. Vnum est quod moneam numeri quadrato æquandi 1 CC. + 4096 + 1 N. − 128 C. latus ingeniosè fingi 1 C. + 64. vt quadrato vtriusque partis fiant 1 CC. + 4096. ac proinde cubocubis & vnitatibus vtrimque sublatis, maneat æquatio inter Cubos & Numeros, vnde fit solutio rationalis, quia prouisum est, vt vtraque Cuborum & Numerorum multitudo sit quadratus Numerus, lemmatis scilicet auxilio, quo reperitur cubus, cuius quadruplum, faciat quadratum. Possumus etiam ex ipsa operatione satis expeditum formare Canonem, hac arte.

Sume $\frac{1}{16}$ cuiuslibet cubocubi, & per illius latus quadratum, diuide vnitatem, quotiens erit primus quæsitorum. Huius cubum aufer ab $\frac{1}{64}$ sumpti cubocubi, relinquetur secundus.

Vt sumpto cubocubo 64. erit illius $\frac{1}{16}$. 4. cujus latus 2. per quod si diuidas 1. fit $\frac{1}{2}$ primus quæsitorum, cuius cubum $\frac{1}{8}$ si auferas ab $\frac{1}{64}$ ipsius 64. videlicet ab 1. relinquetur secundus $\frac{7}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{7}{8}$. Nam primi cubus adsumpto secundo facit cubum 1. At secundi quadratus adsumpto primo, facit quadratum $\frac{81}{64}$.

Quod spectat ad verbum διχαρίνειν, quo in hac & in sequenti quæstione, & alibi etiam vsum esse Diophantum existimat Xilander, pro eo quod est quadruplicare, moneo adulterinam vocem librarij insciti, vel oscitantia in textum Diophanti irrepsisse pro vera & germana τετράκις, quam vbique reposui. Porrò erroris ansam præbuit quod hæc vox vt plurimum expressa erat nota quaternarij δ̊ cum κ superscripto, hoc modò δ̊κ̊, vnde διχαρίνειν sciolus nescio quis efformauit. Sic propositione ista post illa verba, ὥστε αἱ λβ̅ δυνάμεις ἐκ τετράκις τὸ η̅ μ̊, statim sequitur in codice manu exarato, γέγονε σωμ̊ μοι εὑρεῖν κύβον, ὃς δ̊κ̊ γενόμενος ποιεῖ τετράγωνον.

Tum paulò post. δεῖ δ' δεκαπεκτωπλ/ῷ γενόμ/ῳ, &c. Vbi patet idem esse prorsus quod primo positum est τετράκις, deinde δ^κ demum δεκαπεκτωπλ/ῷ. Vigesima etiam propositione sequente eadem dictio ter repetitur, vbi euidens est eam loco τετράκις esse positam. Primo enim legitur, ἀλλὰ δ^ις οἱ ς^οι ὅτι δ^ις τὰς ς^ους. ὁ δεκαπεκτωπλ/ῶ ὑπὸ τ^ῦ ς^ῶ ὅστι. Deinde θέλω ὅτω τὸν δεκαπεκτωπλ/ῶν ὑπ' αὐτ^ῦ, &c. Ac demum, ἀλλὰ μὴν & παντων δύο ἀριθμ^ῶν ὁ δεκαπεκτωπλ/ῶ ὑπ' αὐτ^ῦ, &c. Vbi etiam, ὁ δεκαπεκτωπλ/ῶ ὑπ' αὐτ^ῦ. mutatur statim in τετράκις ὑπ' αὐτ^ῦ. Sequitur enim ἐὰν ὅω τὸν ἀπὸ τ^ῆς ὑπαρχ^ῆς αὐτ^ῦ μονάδα μίαν καταπειάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτ^ῦ, &c. Facessat igitur subreptitia vox, & eius insolentiam cum Xilandro miretur nemo. Equidem me non latet verbum δεκαρίνειν inter ea quibus vtuntur Arithmetici cõnumerari à Polluce lib. 4. cap. 22. sed quo sensu soleat vsurpari non docet Pollux. Ergo sanè nunquam adducar, vt credam sumi pro eo quod est quadruplicare. Quid autem significet doceant eruditi.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μ^ῦ μ^ο ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, & δευτέρου μ^ῦ μ^ο ᾱ ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τιν' μ^ο. ἔξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. πλάσω τετράγωνον ἀπὸ ς^ῦ ὅσων δ^ήποτε, & μ^ο ᾱ. ἕξω ς^ο ᾱ. μ^ο ᾱ. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ὁ τετράγων/ος δ^υ ᾱ. ς^οι β̄. μ^ο. ᾱ· ἐὰν ἀφέλω τιν' μ^ο ᾱ. λοιπὸν δ^υ ᾱ. ς^οι β̄. ἔσαι τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ δεύτερος ς^ᾳ ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσαι ς^ᾳ ᾱ μ^ο β̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τ' ὑπὸ δευτέρου, & τρίτου ποιεῖν τετράγωνον μ^ῦ μ^ο ᾱ. ἐὰν ὁμοίως ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μ^ο ᾱ. ἕξω τὸν ἀπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου. πεπλάσω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ς^ῦ γ̄ μ^ο ᾱ. ἔσαι ὁ τετράγωνος δ^υ δ ς^ᾶ ς. μ^ο ᾱ. ἐὰν ἄρα ἀφέλω μ^ο ᾱ γίνονται δ^υ ϛ ς^οι ς. δεῖ ἄρα τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου ἴσ^ι δ^υ ϛ ς^ᾶ ς. ὧν ὁ δεύτερος ὅστι ς^ᾳ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσαι ς^ᾶ ϛ. μ^ο ς. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μ^ῦ μ^ο ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. ἔστ^ι δ^υ ϛ. ς^οι κδ^α μ^ο ιγ̄. ἴσος τετραγώνῳ. & ἔχω τὰς δυνάμεις τετραγωνικὰς, εἰ ὧν καὶ αἱ μονάδες ἦσαν τετραγωνικαὶ, καὶ τὸ δ^ις ὑπὸ τ^ὰ πλευρὰν τ^ῆς δυνάμεων καὶ τ^ῆς μονάδων ἴσον ἦν τοῖς ἀριθμοῖς, ἦν ἂν ἀόριστος τὰ τρία ὑποτάγματα λελυμένα. ἀλλ' αἱ μονάδες ιγ̄. εἰσὶν ὁπ τ^ῶ ὑπὸ τ^ῆς μ^ο β̄ καὶ μ^ο ς. μ^ῦ μ^ο ᾱ. ἀλλ' αἱ μὴν μ^ο. β̄. ὁπ τ^ῶ δ^ις ὑπὸ ς^ᾳ ᾱ καὶ μ^ο ᾱ. αἱ ὧν μ^ο ς πάλιν ὁπ τ^ῶ δ^ις ὑπὸ ς^ᾶ γ̄. καὶ μ^ο ᾱ. θέλω οὖν δ^ις τὰς ς^ους ὅτι δ^ις τὰς ς^ους μ^ῦ μ^ο ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ δ^ις οἱ ς^οι ὅτι δ^ις τὰς ς^ους. ὁ τετράκις ὑπὸ τ^ῆς ς^ᾶ ὅστι. θέλω οὖν τὸν τετράκις ὑπ' αὐτ^ῦ μ^ῦ μ^ο ᾱ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ μὴν καὶ παντων δύο

INVENIRE tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, adscita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, si ab aliquo quadrato abstulero vnitatem, habebo productum ex primo in secundum. Formo quadratum à numeris quotcunque & vnitate. Esto ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. hinc ablata vnitate, quod superest 1 Q. + 2 N. est productum ex primo in secundum. Esto secundus 1 N. Primus ergo erit 1 N. + 2. Rursus quia volo productum ex secundo in tertium facere quadratum adscita vnitate, si eodem modo ab aliquo quadrato abstulero vnitatem, habebo productum ex secundo in tertium. Formetur quadratus a 3 N. + 1. erit is 9 Q. + 6 N. + 1. vnde ablata vnitate, relinquuntur 9 Q. + 6 N. Oportet ergo productum ex secundo in tertium esse 9 Q. + 6 N. At secundus est 1 N. erit igitur tertius 9 N. + 6. Rursus quia volo productum ex primo in tertium addita vnitate facere quadratum, erit vtique 9 Q. + 24 N. + 13. æqualis quadrato. Et numerus quadratorum est quadratus. Quod si etiam vnitates quadratæ essent, & duplum producti ex latere quadratorum in latus vnitatum æquale esset Numeris, indefinitè iam satisfactum esset tribus postulatis. At vnitates 13. fiunt ducto 2. in 6. & addita vnitate. Porro 2. fit ex 1 N. in 1. bis. At 6. fiunt ex 3 N. in 1. etiam bis. Volo itaque vt bis numeri in bis numeros ducti faciant quadratum adscita vnitate. Sed bis nume-

ri ſin bis numeros eſt quadruplum producti ex numeris in numeros. Volo igitur quadruplum hoc addita vnitate facere quadratum. Enimuero quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti, quadruplum cum quadrato interualli ipſorum facit quadratum. Proinde ſi quadratum interualli conſtituamus vnitatem, quadruplum producti adſcita vnitate faciet quadratum. Atqui ſi quadratorum interuallum ſit 1. erit & laterum interuallum 1. Oportet ergo formare quadratos à numeris deinceps, puta ab 1 N. + 1. & a 2 N. + 1. Quadratus ab 1 N. + 1. fit 1 Q. + 2. N. + 1. Vnde ablata vnitate relinquitur 1 Q. + 2 N. Quare oportet productum ex primo in ſecundum eſſe 1. Q. + 2 N. Ponatur ſecundus 1 N. ergo primus erit 1 N. + 2. Rurſus quia quadratus abs 2 N + 1. eſt 4 Q. + 4 N. + 1. Vnde ſublata vnitate relinquitur 4 Q. + 4 N. oportet productum ex ſecundo in tertium eſſe 4 Q. + 4 N. Sed ſecundus eſt 1. N. Ergo tertius erit 4 N. + 4. Atque ita ſoluta eſt quæſtio indefinitè, vt bini quique mutua multiplicatione producant numerum qui addita vnitate fiat, quadratus. Et fit 1 N. quot quis voluerit vnitatum. Hoc enim eſt indefinitè quærere, cùm ita poſitiones inſtituuntur, vt quamcunque numeri æſtimationem iis accommodes, ſemper poſtulatis ſatisfiat.

ἀριθμῷ ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῷ μ̄ τῷ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῷ τετραγώνου, ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῷ μονάδα μίαν καταπυθάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῶ μ̄ μ° ᾱ ποιεῖ τετράγωνον. εἰ οὖν ὁ ἀπὸ τ̄ ὑπεροχῆς αὐτῷ μ° ᾱ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῷ ὅτι μονὰς μία. λεῖ οὖν ἀπὸ τῷ κ̄ τὸ ἐξῆς ς̄ς̄ πλάσσειν τετραγώνους. ἔστω ἀπὸ ς̄ ᾱ. ☾ ἀπὸ ς̄ς̄ β̄ μ° ᾱ. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἀπὸ ς̄ ᾱ μ° ᾱ. τετράγωνος δ° ᾱ. ς̄ς̄ β̄. μ° ᾱ. ἐὰν ἀφέλω τὴν μονάδα, λοιπὸς γίνεται δύναμις μία, ς̄ς̄ᵒⁱ β̄. δεῖ ἄρα τὸ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου εἶναι δ° ᾱ ς̄ς̄ᵒⁱ β̄. τετάχθω ὁ δευτερος ς̄ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ς̄ ᾱ μ° β̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ ς̄ς̄ β̄ μ° ᾱ τετράγωνός ὅτι δ° δ̄. μ° ᾱ. ἐὰν ὁμοίως ἀφέλω τ̄ μονάδα μίαν λοιπὸς γίνεται δ° δ̄ ς̄ς̄ δ̄. δεῖ δὴ τ̄ ὑπὸ τῶ δευτέρω ☾ τρίτου εἶναι δ° δ̄ ς̄ δ̄. ὧν ὁ δευτερός ὅτιν ς̄ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ς̄ς̄ δ̄. ☾ λέλυται ἐν τῇ ἀπορίσῳ, ὥστε τ̄ ὑπὸ δύο ὁπιωνοῦν μ̄ μ° ᾱ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ὅσου τὶς θέλει. τὸ γὰ ἀορίστως ζητεῖν ὅτιν ἵνα ἡ ὑποόσασις τοιαύτη ᾖ, ἵνα ὅσου τὶς θέλει τὸν ἀριθμὸν εἶναι, ὅπι τὰς ὑποσάσ̄ς ποιήσας σώσῃ τὸ ὑπίταγμα.

OBSERVATIO D. P. F.

PRoponatur inuenire tres numeros vt quem bini producunt mutuâ multiplicatione adſcitâ vnitate faciat quadratum & præterea vnuſquiſque trium adſcitâ vnitate faciat quadratum.

Hujus quæſtionis ſolutionem ſubiungemus & jam confecta eſt. Ita fiat ſolutio indefinita præſentis quæſtionis vt vnitates primi & tertij numeri addita vnitate conficiant quadratos v. g. ſint tres numeri indefinitè primus $\frac{169}{5184}$ *N.* + $\frac{25}{36}$ *Secundus* 1 *N. Tertius* $\frac{7245}{5184}$ *N* + $\frac{85}{36}$ *Patet ſolutionem hanc indefinitam ſatisfacere conditionibus huius quæſtionis ſecundæ.*

Supereſt vt ſinguli ex illis numeris adſcitâ vnitate conficiant quadratos & orietur triplicata æqualitas cuius ſolutio erit in promptu ex noſtrâ methodo cum numerus vnitatum in quolibet ex iſtis numeris vnitate auctis ſit quadratus.

IN QVAESTIONEM XX.

LEMMA quod aſſumit Diophantus, nimirum. Quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti quadruplum cum quadrato interualli ipſorum, facit quadratum, idem eſt prorſus cum quinta ſecundi poriſmatum, per quam conſtat etiam fieri inde quadratum ſummæ ipſorum numerorum. Vnde optimè concludit Diophantus, ſi Numeri vnitate diſtent, quadruplum producti eorum adſcita vnitate facere quadratum. Sed & hinc colligo vniuerſaliùs.

Si quadruplum producti duorum numerorum vnitate diſtantium ducatur in quemlibet quadratum, & producto addatur idem quadratus, fit quadratus.

Hoc enim nil aliud est quàm quadratum summæ duorum numerorum vnitate distantium ducere in alium quadratum. Quamobrem inde produci quadratum necesse est. Ita si sedecuplo producti addas 4. fiet quadratus, hoc enim idem est ac ducere quadratum summæ numerorum in 4. At si trigecuplo sesquplo producti addas 9. fiet etiam quadratus, hoc enim idem est ac ducere quadratum summæ numerorum in 9. & sic de aliis.

Cæterùm si quid obscuritatis est in huius quæstionis tractatione, hoc vnum esse videtur, quòd non statim apparet quomodo positionibus trium numerorum sumptis à quadratis continenter proximis constet productum ex primo in tertium adscita vnitate facere quadratum. Hoc ergo vt perfectè demonstretur, sit primus A + B. tertius C. + D. (nam secundus semper ponitur 1 N.) & methodo à Diophanto tradita sint A & C. Numerorum numeri quadrati continenter proximi. Ipsi verò B D sint vnitatum numeri dupli laterum ipsorum A C. Ductoque A in C. fiat E quadratorum numerus, ductisque A in D. & B in C. fiat summa productorum F Numerorum numerus. Denique ducto B. in D. & producto addendo vnitatem fiant G. vnitates, dico ipsum E + F + G. esse quadratum. Hoc vt probetur, oportet ostendere ipsos E. G. quadratos esse, & ex latere vnius in latus alterius bis produci F. sic enim per quartam secundi totum E F G quadratum esse constabit. Itaque cùm numeri Numerorum A C quadrati sint continenter proximi, sumantur eorum latera H K quæ vnitate distent. Primùm igitur patet ex quadrato A in quadratum C. productum E esse quadratum, cuius latus est productus ex H in K. Secundo, quia B duplus est ad H, & D ad K productus ex B in D. adscita vnitate, puta G. æquatur quadruplo producti ex H. in K. adscita vnitate. Igitur G. quadratus est per lemma supra explicatum, cuius latus est summa ipsorum H K. Denique quia F constat productis ex A in D & ex C in B. seu ex A in K bis, & ex C. in H. bis. At producti ex A in K. & ex C in H. semel æquantur productis ex summa ipsorum H K in planum sub ipsis contentum, ac proinde summa productorum ex A in D. & ex C in B. seu F æquatur duplo producti ex summa ipsorum H K in planum sub ipsis, latus autem ipsius G est summa ipsorum H K, & latus ipsius E est planus sub H K continens, vt ostensum est, patet F produci ex latere ipsius E in latus ipsius G. bis Quamobrem totus E F G quadratus est, cuius latus constat ex lateribus ipsorum E G. Quod erat demonstrandum.

A 4 N. + B 4.	H 2.
C 9 N. + D 6.	K 3.
E 36 Q. + F 60 N. + G 25.	

18. 2. *poris.*

Hinc apparet posito secundo semper 1 N. positiones primi & tertij infinitis modis posse variari, dum sumantur duo numeri Numerorum quadrati, quorum latera vnitate distent, & his addantur vnitates quæ sint duplum lateris cujuslibet. Sic posuit eos Diophantus 1 N. + 2. & 4 N. + 4. Poni etiam poterant 4 N. + 4. & 9 N. + 6. vel adhuc 9 N. + 6. & 16 N. + 8. & sic in infinitum.

Hanc autem quæstionem si libet non soli vnitati applicabis, sed ad quemlibet quadratum extendes eodem prorsus artificio, ampliando lemma Diophanti, vt suprà docuimus. Verbi gratia, quærantur indefinitè tres numeri, vt bini quem producent mutuo ductu is adscito 9. faciat quadratum. Vt habeas productum ex primo in secundum, aufer 9. ab aliquo quadrato, cuius latus sit quotcunque Numerorum + 3. sit latus 1 N. + 3. erit quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Ergo productus ex primo in secundum erit 1 Q. + 6 N. sit secundus 1 N. erit igitur primus 1 N. + 6. Rursus vt habeas tertium, finge quadratum à latere 2 N. + 3. (vt scilicet numerus Numerorum superet vnitate numerum Numerorum lateris prioris quadrati) erit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. vnde auferendo 9. manet productus ex secundo in tertium 4 Q. + 12 N. Quare cùm secundus sit 1 N. erit tertius 4 N. + 12. Igitur tres numeri quæstionem infinitè soluentes sunt 1 N. + 6. 1 N. 4 N. + 12. Porro lemma Diophanti hîc ampliari intelligitur modo supra tradito, nam patet 6. vnitates primi Numeri esse sesquplum numerorum lateris prioris quadrati, & 12. vnitates tertij Numeri esse sesquplum Numerorum posterioris quadrati. Quare cùm productus ex sesquplo vnius numeri in sesquplum alterius, sit æquale trigecuplo sesquplo producti eorundem numerorum, patet hîc supponi, trigecuplum sesquplum producti duorum numerorum vnitate distantium, adscito 9. facere quadratum, quod sanè concluditur per supradictum lemma.

Hæc quidem Diophanti vestigiis insistendo facilè fuit excogitare. Verùm si propositum sit inuenire tres numeros indefinitè, vt bini quem producunt mutuo ductu, is adscito quocunque numero quadratum faciat; iam non licebit Diophantæam analysim imitari. Nec fortè temerarium fuerit asserare huius problematis enodationem ipsum ignorasse Diophantum, quod mirum non est, quandoquidem, vt verissimè cecinit poëta, Non omnia possumus omnes. Nobis tamen ope Canonum ad duodecimam tertij traditorum, rem absoluere pronum erit. Etenim sit propositum quærere indefinitè tres numeros, vt bini quem producunt adscito 6. faciat quadratum. Fingantur duo quadrati à quotlibet numeris Numerorum diuersis + eodem numero vnitatum, cuius quadratus superet 6. puta fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 3. & 2 N. + 3. erunt hi 1 Q. + 6 N. + 9. & 4 Q. + 12 N. + 9. auferatur 6. ab vtroque, & residua diuidantur per interuallum laterum quod est 1 N. fiet ergo primus quæsitorum 1 N. + 6 + $\frac{3}{1N}$. secundus 4 N. + 12 + $\frac{3}{1N}$. tertius 1 N. qui satisfaciunt postulatis ex Canone primo duodecimæ tertij. vel iisdem manentibus primo & secundo,

erit

erit tertius duplum ſummæ illorum multatum laterum interuallo 1 N. puta 9 N. + 36 + $\frac{324}{1N}$. vt conſtat ex ſecundo Canone. Eadem arte per Canones ad decimam tertiam tertij traditos licebit & hanc ſoluere quæſtionem.

Inuenire tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutuo ductu, detracto quouis dato numero quadratum relinquat.

Datus eſto 10.

Fingantur duo quadrati, alter à quotlibet vnitatibus, alter ab 1 N. + latere prioris. Sint igitur latera 1. & 1 N. + 1. erunt quadrati 1. & 1 Q. + 2 N. + 1. Vtrique addatur 10. & ſummæ diuidantur ſigillatim per laterum interuallum 1 N. Eritque primus quæſitorum $\frac{1}{1N}$. ſecundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. tertius horum ſummæ duplum multatum 1 N. puta 1 N. + 4 + 44 − 1 N. vel iiſdem manentibus primo & ſecundo, erit tertius ipſum interuallum laterum, nimirum 1 N.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE quatuor numeros, vt qui fit ex binorum mutua multiplicatione adſcita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in ſecundum cum vnitate facere quadratum, ſi ab aliquo quadrato detraxero vnitatem, habebo productum ex primo in ſecundum. Formo quadratum ab 1 N. + 1. & fit 1 Q. + 2 N. + 1. hinc aufero vnitatem, reſtant 1 Q. + 2 N. pro producto ex primo in ſecundum eſto primus 1 N. ergo ſecundus erit 1 N. + 2. Rurſus quia volo productum ex primo in tertium cum vnitate facere quadratum, formo quadratum abs 2 N. + 1. nimirum à numeris continenter proximis, ob ea quæ ſupra demonſtrata ſunt, & ab illius quadrato, aufero vnitatem, & ſtatuo productum ex primo in tertium 4 Q. + 4 N. Quare cùm primus ſit 1 N. erit vtique tertius 4 N. + 4. Rurſus quia volo productim ex primo in quartum cum vnitate facere quadratum, formo quadratum à numeris continenter proximis, nimirum à 3 N. + 1. & à quadrato ſublata vnitate ſtatuo productum ex primo in quartum 9 Q. + 6 N. Proinde cùm primus ſit 1 N. erit quartus 9 N. + 6. & contingit præterea productum ex tertio in quartum cum vnitate facere quadratum. Cæterùm ex ſecundo in quartum productus addita vnitate facit 9 Q. + 24 N. + 13. Hoc ergo æquandum quadrato, eſto latus 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{7}{16}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{7}{16}$. ſecundus $\frac{53}{16}$. tertius $\frac{68}{16}$. quartus $\frac{105}{16}$.

ΕΤΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρωτλαβῶν μονάδα μίαν, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μιᾶς μονάδος μιᾶς, εἶναι τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μ° ᾱ. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, πλάσω τετράγωνον ἀπὸ ς̄ ἁ μ° ᾱ. καὶ γίνεται αὐτὸς ὁ τετράγωνος δ̄ ᾱ ς̄ς̄ β̄ μ° ᾱ. ἐὰν ἀ. ἕλω τὸν μ° ᾱ. λοιπὸς γίνεται δ̄ μία ς̄ς̄ι β̄. ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ πρῶτος ς̄ ἁ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται ς̄ ᾱ μ° β̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μιᾶς μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσω τετράγωνον ἀπὸ ς̄ς̄ β̄ μ° ᾱ τοῦ κ̄ τὸ ἐξῆς διὰ τὸ προδιωρθῆν, καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ. ἀφελ τὴν μονάδα ᾱ. καὶ πάλιν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου δυωάμεις δ̄ ς̄ς̄ δ̄. ὧν ὁ πρῶτος ὅτι ς̄ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔστιν ς̄ς̄ δ̄ μ° δ̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου μιᾶς μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσω τετράγωνον ἀπὸ τοῦ κ̄ τὸ ἐξῆς ς̄ς̄ γ̄ μ° ᾱ. καὶ λαβὼν τὸν ἀπο, καὶ ἀφελὼν μ° ᾱ. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου δ̄ τοῦ ϛ̄ ς̄ς̄ους̄ ϛ̄. ὧν ὁ πρῶτος ἔστιν ἀριθμὸς ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται ς̄ς̄ θ̄ μ° ϛ̄. καὶ ἔτι συμβαίνει τὸν ὑπὸ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου μιᾶς μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τετάρτου μιᾶς μ° ᾱ. ποιεῖ δυωάμεις θ̄ ς̄ς̄ους̄ κδ̄. μ° ιγ̄ ἴσας τετραγώνῳ τῷ ὑπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ γ̄ λείψει μ° δ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ ᾱ ῑϛ̄. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ᾱ ῑϛ̄. ὁ δὲ δεύτερος λγ̄ ῑϛ̄. ὁ δὲ τρίτος ξη̄ ῑϛ̄. ὁ δὲ τέταρτος ρε̄ ῑϛ̄.

OBSERVATIO D. P. F.

INueniantur tres numeri quilibet vt qui fit binorum mutuâ multiplicatione adſcita vnitate faciat quadratum, v. g. ſint illi numeri 3. 1. 8. quæratur iam quartus eâ

conditione vt qui fit sub tribus inuentis sigillatim in quartum adscita vnitate sit quadratus, ponatur inueniendus esse 1 N. ergo 3 N + 1. item 1 N + 1. item 8 N + 1. æquantur quadrato & oritur triplicata æqualitas cuius solutio inuentioni nostræ debetur. Vide quæ adnotauimus ad quæstionem 24. libri 6.

IN QVAESTIONEM XXI.

NON apparet ex verbis Diophanti quomodo producti ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum adscita vnitate quadratum faciant. Id autem omisit quasi euidens ex lemmate præcedentis quia secundus, tertius & quartus finguntur à quadratis continenter proximis, vnde sequitur ex supra demonstratis productos ex duobus proximis, videlicet ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum addita vnitate facere quadratos. Quamobrem cùm etiam ex constructione manifestum sit productos ex primo in singulos ex aliis addita vnitate facere quadratos, vnum sanè restat curandum, vt scilicet productus ex secundo in quartum adscita vnitate fiat quadratus. Fit autem 9 Q. + 24 N. + 13. hoc ego æquabimus quadrato à latere 3 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 13. vt à 3 N. − 4. cum Diophanto.

Hæc etiam quæstio ad quemlibet quadratum extendi potest, eodem artificio quo præcedens. verbi gratia. Quærantur quatuor numeri, vt bini quem producunt adsumpto 4. quadratus fiat. Posito primo 1 N. fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 2. 2 N. + 2. 3 N. + 2 erunt hi 1 Q. + 4 N. + 4. 4 Q. + 8 N. + 4. 9 Q. + 12 N. + 4. A singulis auferatur 4. & erit productus ex primo in secundū 1 Q. + 4 N. ex primo in tertium 4 Q. + 8 N. ex primo in quartum 9 Q. + 12 N. Quare cùm primus sit 1 N. erit secundus 1 N. + 4 tertius 4 N. + 8. quartus 9 N. + 12 & quidem tam ex constructione, quàm ex demonstratis ad precedentem, constat productos ex primo in singulos ex aliis, itemque productos ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum adsumpto 4. facere quadratos. Superest igitur vt productus ex secundo in quartum adscito 4. faciat quadratum. Sed facit 9. Q. + 48 N + 52. hoc ergo æquatur quadrato sit eius latus 3 N. − 8 fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{5}{8}$. $\frac{33}{8}$. $\frac{97}{8}$. $\frac{205}{8}$. Producti ex primo in reliquos, adscito 4. faciunt quadratos $\frac{289}{64}$. $\frac{81}{16}$. $\frac{361}{64}$ quorum latera $\frac{17}{8}$. $\frac{9}{4}$ $\frac{19}{8}$. Producti ex secundo in tertium & quartum adsumpto 4. faciunt quadratos $\frac{625}{16}$. $\frac{1225}{64}$. quorum latera $\frac{25}{4}$. $\frac{61}{8}$. Denique productus ex tertio in quartum adscito 4. quadratum facit $\frac{1849}{16}$. cuius latus $\frac{43}{4}$.

Cæterùm quomodo in vniuersum solui possit huiusmodi quæstio, vt scilicet productus ex binorum mutuo ductu adscito quocumque dato numero faciat quadratum colligi non potest ex Diophanto, & id eum latuisse audacter asserere ausim, alioquin non in sola vnitate vel in solis quadratis perfecisset, quod in omnibus numeris absoluere poterat. Nos pulcherrimum hoc problema explicauimus ad duodecimam tertij. Et rursus idem perfecimus additione in detractionem mutata ad decimam tertiam eiusdem.

QVÆSTIO XXII.

ΕΤΡΕΙΝ ζεῖς ἀριθμοὺς ἀνάλογον, ὅπως δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ ἢ τετράγωνος. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς̄ α̅. ὁ δὲ μέσος ς̄ α̅. μ̄ δ̅. ἵνα ἡ ὑπεροχὴ ἢ τετράγωνος. ὁ δὲ τρίτος ς̄ α̅. μ̄ ιγ̅. ἵνα καὶ ἡ τούτου πρὸς τὸ μέσον ὑπεροχὴ ἢ τετράγωνος. ἔτι δὲ εἰ τὸ μείζους, καὶ τὸ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ἢ τετράγωνος, ὡς ἀναλελυμένον ἐν τῇ διορίσῳ, δύο ὁποιωνοῦν, ἡ ὑπεροχὴ τετράγωνος. ὁ δὲ μείζους τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει μ̄ ιγ̅. αἱ δὲ μονάδες ιγ̅. συνθεμα. εἰσὶ τετραγώνων τὸ δ̅. καὶ τὸ θ̅. γέγονεν ἐν μοι δοῦναι δύο τετραγώνους. ἵνα ἐνὶ τετραγώνῳ τῷ δὲ ῥᾴδιον ἀπὸ λειγώνου ὀρθογωνίου. ἔστι δὲ ὁ θ̅. καὶ ὁ ιε̅. καὶ τάσσω τὸν μὲν ἐλάχιστον ς̄ α̅. τὸν δὲ μέσον ς̄ α̅ μ̄ θ̅. τὸν δὲ τρίτον ς̄ α̅. μ̄ κε̅. καὶ δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ ἔστι τετράγωνος. λοιπὸν ἔστι αὐτοὺς ἀνάλογον εἶναι. ἐὰν δὲ ζεῖς ἀριθ-

INVENIRE tres numeros proportionales, vt duorum quorumlibet interuallum sit quadratus numerus. Ponatur minor 1 N. Medius 1 N. + 4. vt interuallum sit quadratus. Tertius autem sit 1 N. + 13. vt & huius excessus supra medium sit quadratus. Porrò si maximi & minimi differentia esset quadratus, iam indefinitè satisfactum esset parti quæstionis qua postulatur, vt differentia duorum quorumlibet sit quadratus. At maximus minimum superat vnitatibus 13. & 13. est summa quadratorum 4. & 9. Quærendi igitur sunt duo quadrati æquales quadrato. Quod facilè fit trianguli rectanguli sumptis lateribus, suntque 9. & 16. statuo minimum 1 N. Medium 1 N. + 9 tertium 1. N. + 25. & sic duorum quorumlibet

interuallum quadratus est. Superest vt ipsi sint proportionales. At cùm tres numeri proportionales sunt, qui sub extremis continetur æqualis est quadrato medij, sed contentus sub maximo & minimo, hoc est sub extremis est 1 Q. + 25 N. Quadratus autem medij est 1 Q. + 18 N. + 81. Hæc ergo æquantur inter se, & fit 1 N. $\frac{81}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{81}{7}$. secundus $\frac{144}{7}$. tertius $\frac{25}{7}$.

μὴ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἔσται τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστιν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἐστὶ δῡ α̅ ς̄ κε̅. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ μέσου δῡ α̅ ς̄ ις̄ μ̄ πα̅. ἴσαι δῡ α̅ ς̄ οις̄ κε̅. καὶ γίνεται ὁ ς̄ πα̅ ζ̄ ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος πα̅ ζ̄ ὁ δὲ δεύτερος ρμδ̄ ζ̄. ὁ δὲ τρίτος στς̄ ζ̄.

IN QVAESTIONEM XXII.

TOTA diuersitas solutionum pendet hîc à duobus quadratis qui simul iuncti quadratum efficiant, nam si vtaris iisdem, eadem semper continget solutio, quamuis pro primo quæsitorum numerorum statuas quemlibet Numerorum numerum, sic quamuis statuas quæsitos numeros 3 N. 3 N. + 9. & 3 N. + 25. eandem solutionem inuenies quam reperit Diophantus positis iisdem numeris 1 N. 1 N. + 9. & 1 N. + 25. & sic quantumuis varietur primus, dum in secundo & tertio ponantur iidem quadrati 9. & 25. eadem continget solutio, quod patet experientia, & facile est demonstrare.

Cæterùm est quod moneam ex duobus quadratis qui simul quadratum conficiunt, minorem statuendum in medio numero, non autem maiorem, sic Diophantus medium posuit 1 N. + 9. non 1 N. + 16. Quamuis posito eo 1 N. + 16. tribus quoque postulati partibus satisfiat, cùm binorum interuallum sit quadratus. Sed in æquatione qua medij quadratus æquatur plano sub extremis, inueniuntur tandem 32 N. + 256. æquales 25 N. Quod est impossibile, quia 32 N. sunt plus quàm 25 N. fiunt autem 32 N. ex duplo quadrati 16. qui positus est in medio, at 25 N. est summa quadratorum 16. & 9. Oportet igitur duplum quadrati qui ponitur in medio minus esse summa quadratorum, quare oportet minorem quadratum collocari in medio. Quandoquidem duplum maioris duorum numerorum excedit summam ipsorum, sicut duplum minoris deficit ab eadem summa. Porrò ex ipsâ operatione elicitur Canon facillimus.

Sume duos quadratos quadratum conficientes, per horum interuallum diuide quadratum minoris quadrati, orietur primus quæsitorum. Cui si addas minorem quadratum, fiet secundus. Et huic si addas maiorem quadratum, fiet tertius.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus adscito quolibet ipsorum faciat quadratum. Ponatur solidus sub ipsis contentus 1 Q. + 2 N. & & primus 1. vt solidus ascito primo faciat quadratum. Rursus quia volo solidum sub tribus contentum cum secundo facere quadratum, si ab aliquo quadrato detraxero 1. Q + 2 N. habebo secundum. Formo quadratum ab 1 N. + 3. huius quadratis detractis 1 Q. + 2 N. facit 4 N. + 9. Pono ergo secundum 4 N. + 9. Iam cùm solidus sub tribus contentus sit 1 Q. + 2 N. & ex primo in secundum producatur 4 N. + 9. si diuidamus 1 Q. + 2 N. per 4 N. + 9. habebimus tertium. Verùm hæc diuisio non est possibilis. Vt autem fieri possit curandum est vt se habeat 1 Q. ad 4 N. sicut 2 N. ad 9. & permutatim 1 Q. ad 2 N. sicut 4 N. ad 9.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς μετὰ ἑκάστου αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐπὶ ξιῶν στερεὸς δῡ α̅ ς̄ β̅. ὁ δὲ πρῶτος μ̄ α̅. ἵνα ὁ ἐπὶ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ πρώτου ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἐπὶ τῶν ξιῶν στερεὸν μετὰ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀφ᾽ ἑνὸς τετραγώνου ἀφ᾽ ἑνὸς δύναμιν α̅ ς̄ οὐς̄ β̅. ἕξω τὸν δεύτερον. πλάσσω τετράγωνον ἀπὸ ς̄οῡ α̅ μ̄ γ̅. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος γ̅ δῡ α̅ ς̄ β̅. ποιεῖ ς̄ οὐς̄ δ̄ μ̄ θ̅. τάσσω ἐν τὸν δεύτερον ς̄ δ̄ μ̄ ϑ̅. ἀλλ᾽ ἐπεὶ ὁ ἐπὶ τῶν τριῶν στερεὸς δῡ α̅ ς̄ οἱ β̅. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ς̄ οἱ δ̄ μ̄ θ̅. ἐὰν ἀφ᾽ δῡ α̅ ς̄ οὐς̄ β̅. προσβάλλω προσβ̄ ς̄ δ̄ μ̄ θ̅. ἕξω τὸν τρίτον. ἐδείχθη τὴ ὑπ᾽ προσβολή, ἵνα δὲ λύνηται ἡ προσβολή, δεῖ εἶδέναι ὡς δῡ μία πρὸς ς̄ οὐς̄ δ̄. ἔστω ς̄ οἱ β̅ πρὸς μονάδας θ̅. καὶ ἐναλλάξ. ὡς δῡ μία πρὸς ς̄ οὐς̄ β̅. οὕτως ς̄ οἱ δ̄ πρὸς μ̄ θ̅. ἡ ὑπ᾽

δύναμις μία τῶν ςξ̄ β̄ ἡμισύ ἐστιν τοῦ πλήθει. ὡς εἰ οὖν καὶ ςς^οι δ̄ῑ τοῦ μ^ο θ̄ ἴσους ω̄^ς. ω̄^ς αὖ δυνατὴ ἡ ὑποβολή. ἀλλὰ εἰ ςς^οι δ̄ῑ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσὶν, ἧς ὑπερέχουσιν ςς^οι ε̄ δυσὶν ἀριθμοῖς, ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ ε̄ ἐκ τῶν δ̄ις εἰσὶν, ὑπὸ μ^ο τριῶν ☾ ς^ω ᾱ. τουτέστι δ̄ις τὸν μ^ο τρ. ἀν αἱ ϛ̄ μ^ο θ̄. ὁ ἀπὸ μ^ο τριῶν ἐστὶ τετράγωνος. ἀπῆκται ἓν μοι δεῖν τινα ἀριθμὸν, ὡς τὰς μονάδας τρεῖς, ὅστις δ̄ις γινόμενος, καὶ λείψας δυάδα τὸ ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου. ἔστω ὁ ζητούμενος ς^ω εἷς. οὗτος δ̄ις γινόμενος καὶ λείψας δυάδα, γίνεται ςς^οι β̄. ὁ λείψει μ^ο β̄. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος ἐστι δ^υ ᾱ. θέλομεν ἓν ἀριθμοῖς β̄ λείψει μ^ο β̄. τὸ ἥμισυ ἔσῃ δ^υ ᾱ. δύναμις ἄρα ᾱ ἴσῃ ςς^οις δ̄ λείψει μ^ο δ̄. ἡ γίνεται ὁ ς^ω β̄. νῦν ἔρχομαι ὅπῃ τὸ ἐξ ἀρχῆς, ☾ εἶχον τ' μὲν πρῶτον ἀριθμὸν μ^ο ᾱ. τ' ὃν ἐκ τοῦ τριῶν στερεὸν δ^υ ᾱ ςς^ους β̄. δεῖ ὃν ἡ τ' ἐκ τ' τριῶν στερεὸν προσλαβόντα τ' δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τ' δ^υ ᾱ ςς^ους β̄. ἕξω τ' δεύτερον. πλάσω τ' τετράγωνον ἀπὸ ς^ου ᾱ. καὶ μονάδων τοσούτων, ἵνα αἱ μονάδες δ̄ις γινόμεναι ἡ λείψασαι δυάδα, ἥμισυ ᾖ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, ἡ προσδέδεικται, ☾ ἔστι μ^ο β̄. πλάσω τ' τετράγωνον ἀπὸ ς^ου ᾱ μ^ο β̄ ἔστω ἄρα δ^υ ᾱ ςς δ̄ μ^ο δ̄. ἐὰν ἄρα τ' ἐκ τοῦ τριῶν στερεὸν, τουτέστι δ^υ ᾱ ςς^ους β̄ λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ δεύτερος ςς β̄ μ^ο δ̄. εἰ ὃν ἡ τὸν ὑπὸ τριῶν στερεὸν μερίσω εἰς τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, τουτέστι εἰς ἀριθμοὺς β̄ μ^ο δ̄. ἕξω τὸν ἕτερον, καὶ ἔστιν ὁ μεσισμὸς ς^ου τοῦ ἡμισυ. καὶ λοιπὸν ὅτι τὸν ἐκ τριῶν στερεὸν μὴ τῷ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἐκ τοῦ τριῶν στερεὸς μὴ τῷ τρίτου ὅτι δυνάμεις ᾱ ἀριθμοὶ β̄ καὶ ἥμισυ. ἴσος τετραγώνῳ δυνάμεων δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄ ς̄. ὅπῃ τὰς ὑποκειμένας. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ς ς̄ ὁ δὲ δεύτερος λδ̄ ς̄. ὁ δὲ τρίτος β̄ ς ἡ ἥμισυ.

at 1 Q. semissis est (quantum ad vnitates attinet) de 2 N. vt si 4 N. quoque eodem modo fuissent semissis ex 9. institui posset diuisio. Atqui 4 N. oriuntur ex eo quo 6 N. superant 2 N. Sed 6 N. orti sunt ex duplo eius quod fit ex 3. in 1 N. hoc est ex duplo ternarij. Vnitates autem 9. est quadratus de 3. Cogor igitur inuenire numerum loco ipsius 3. cuius duplum multatum binario sit semissis quadrati ipsius numeri. Esto quæsitus 1 N. Huius duplum binario multatum est 2 N. — 2. quadratus autem eiusdem est 1 Q. Volumus igitur 2 N. —2. esse dimidium de 1 Q. Proinde 1 Q. æquatur 4 N. — 4. & fit 1 N. 2. Reuertor nunc ad primò propositum. Posueram primum 1. solidum autem sub tribus contentum 1 Q. + 2 N. Oportet autem solidum adsumpto secundo facere quadratum. Ergo si ab aliquo quadrato subduxero 1 Q. + 2 N. habebo secundum. Formo quadratum ab 1 N. & tot vnitatibus, vt duplum vnitatum dempto binario fit dimidium quadrati earum, eas autem iam ostensum est esse 2. Formo ergo quadratum ab 1 N. + 2. is est 1 Q. + 4 N. + 4. Aufero hinc solidum sub tribus contentum, nimirum 1 Q. + 2 N. relinquitur secundus 2 N. + 4. Itaque si solidum sub tribus contentum diuido per productum ex primo in secundum, nempe per 2 N. + 4. habeo tertium, nimirum $\frac{1}{2}$ N. Restat vt solidus sub tribus contentus adscito tertio faciat quadratum, sed solidus ille adscito tertio facit 1 Q. + 2 $\frac{1}{2}$ N. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{5}{6}$ Ad positiones. Erit primus $\frac{5}{6}$. secundus $\frac{11}{6}$. tertius $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPERATIO Diophanti subtilis est, sed tamen perspicua. Lemma quo quærit numerum, cuius duplum binario multatum sit semissis quadrati eiusdem numeri, soluitur per tertiam regulam compositarum, nam manent 4 N. æquales 1 Q. + 4. & quia quadratus semissis Numerorum æquatur vnitatibus, sequitur ipsum semissem Numerorum esse valorem Numeri, vt liquet ex ipsius regulæ demonstratione. Verùm alicui non immeritò videri possit casu quodam fieri vt lemmatis huius solutio contingat rationalis, cùm regulæ compositæ si nulla cautio adhibeatur solutionem vt plurimum exhibeant irrationalem. Quamobrem vt hoc scrupulo careamus, aliam placet tradere operationem similem prorsus illi qua in sequenti quæstione vtitur Diophantus. Ponatur primus numerus 1 N. solidus autem sub tribus contentus esto 1 Q. — 1 N. sic enim primo adsumpto fiet quadratus.

Iam si solidus sub tribus contentus per primum diuidatur, quotiens 1 N. — 1 erit productus ex secundo in tertium. Ponatur secundus 1. erit tertius 1 N. — 1. Supereſt vt solidus 1 Q. — 1 N. tam secundo quàm tertio adscito faciat quadratum. At secundo adscito facit 1 Q. + 1 — 1 N. adscito tertio facit 1 Q. — 1. vterque igitur æquatur quadrato. Hîc iam duplicata occurrit æqualitas, quæ resoluenda est modo quem ad decimam quintam tertij explicauimus, quoque rursus vsus est Diophantus vigesima & vigesima prima eiusdem. Horum videlicet interuallum est 2 — 1 N. proinde quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat ita vt tam in semisse summæ ipsorum, quàm interualli, inueniatur 1 N. sunt hi $\frac{1}{2}$ & 4 — 2 N. horum summæ semissis quadratus æquatur 1 Q. + 1 — 1 N. & fit 1 N. $\frac{65}{56}$. tantus est primus, secundus 1. tertius $\frac{9}{56}$. qui soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{585}{3136}$. qui adsumens sigillatim ipsos tres numeros, facit quadratos $\frac{4225}{3136}$. $\frac{3721}{3136}$. $\frac{1089}{3136}$. quorum latera sunt $\frac{65}{56}$. $\frac{61}{56}$. $\frac{33}{56}$.

Quoniam verò siue ita opereris, siue secundum Diophantum, semper vnus quæsitorum ponitur vnitas, placet explicare modum quo perficiatur operatio Diophanti, & reddatur vniuersalior, ita vt primus statuatur quilibet quadratus numerus, & absque lemmate illo quo ad regulas compositas deuenitur, instituantur commodè positiones secundi & tertij. Ponatur ergo primus, quilibet quadratus puta 9. & fingatur quadratus ab 1 N. + 3. is erit 1 Q. + 6 N. + 9. vnde auferendo 9. statuatur 1 Q. + 6 N. pro solido sub tribus numeris contento. Itaque quoniam primus est 9. oportet talem statui secundum, vt eo ducto in 9. per productum diuidi possit solidus 1 Q. + 6 N. vt oriatur ex hac diuisione tertius. Fingatur igitur quadratus ab 1 N. + 6. (tot scilicet vnitatibus quot sunt Numeri in solido, sicut fecit Diophantus, estque hæc regula generalis) erit is 1 Q. + 12 N. + 36. vnde auferendo solidum, restat secundus 6 N. + 36. quo ducto in primum 9. fit 54 N. + 324. per quem si diuidas solidum 1 Q. + 6 N. oritur tertius $\frac{1}{54}$ N. Supereſt igitur vt solidus adsumpto tertio faciat quadratum, facit autem 1 Q. + 6 $\frac{1}{54}$ N. hoc ergo æquatur quadrato. Esto quadrato 2 $\frac{1}{4}$ Q. fiet 1 N. N. $\frac{130}{27}$. Ad positiones. Erit primus 9. secundus $\frac{584}{9}$ tertius $\frac{65}{729}$. qui soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{3416640}{65561}$ qui ad adsumens sigillatim ipsos tres numeros, facit quadratos $\frac{4006689}{65561}$. $\frac{267376}{65561}$. $\frac{342225}{65561}$. quorum latera $\frac{633}{81}$. $\frac{876}{81}$. $\frac{585}{81}$.

Porrò ne quis superſit dubitandi locus, positionibus ita institutis, diuisionem solidi per productum ex primo in secundum semper commodè fieri (in quo totum negotium consistit) sic demonstrabitur.

1 Q. + A 6 N. D 9.
1 Q. + B 12 N. + C. 36.
E 6 N. + C. 36.
F 54 N. + G 324.

Sit solidus 1 Q. + A certo Numerorum numero & semissis numeri A quadratus esto D. primus quæsitorum numerorum. Tum fingatur quadratus ab 1 N. + A. qui sit 1 Q. + B + C. patet ergo numerorum Numerum B. esse duplum ipsius A. & vnitates C. esse quadratum numeri A. Quare cùm auferetur solidus 1 Q. + A. à quadrato 1 Q. + B + C. relinquetur E + C. eritque E. æqualis ipsi A. cùm superſit E. auferendo A. ex B. duplo sui. Cæterùm constat ex modo operandi tradito E. + C. fore hypostasim secundi Numeri. Ducatur ergo primus D. in secundum E + C. & fiat F + G. dico per hoc productum commodè diuidi solidum 1 Q. + A hoc est eandem esse rationem 1 Q. ad F. quæ est A ad G. Nam quoad specierum denominationes spectat patet quadratos ad Numeros se habere vt Numeri ad vnitates. Quare restat vt probetur ipsos numeros à speciebus denominatos eandem quoque seruare rationem, hoc est esse 1 ad F. sicut A ad G. Quia igitur ducto eodem D. in ipsos E C. fiunt F G. erit F. ad G. vt E. ad C. hoc est vt A. ad C. (cùm A E. ostensi sint æquales) sed vt A. ad suum quadratum C. ita & vnitas ad A. Igitur vt 1. ad A. sic & F. ad G. & permutando vt 1. ad F. sic A ad G. Quod erat demonstrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

Non solum absque lemmate Diophanti, sed etiam absque duplicata æqualitate soluetur quæstio. Ponatur solidum sub tribus 1. q. — 2. N. primus numerorum sit vnitas secundus 2. N. Ita namque duabus partibus propositionis satisfit, pro tertio diuidatur solidum sub tribus 1. Q. — 2 N. per rectangulum sub primo & secundo quod est 2 N. orietur ex hac diuisione tertius $\frac{1}{2}$ N — 1 quo addito ad solidum sub tribus fit 1 Q — $\frac{3}{2}$ N. — 1 quod æquari debet quadrato. Oportet autem valorem numeri maiorem esse binario propter positiones iam factas. Æquetur igitur quadrato cuius latus 1 N — aliquo vnitatum numero binario maiori. Omnia constabunt.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus dempto quolibet

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑξ αὐτῶν στερεὸς λείψας ἕκαστον, ποιῇ τετράγωνον.

τετάχθω ὁ πρῶτος ς^{ς} ᾱ. ὁ δὲ ἐπὶ τειῶν στερεὸς δ^{υ} ᾱ ς^{ς} ᾱ. ⟨ λείψας τ̀ πρῶτον ποιεῖ τετράγωνον. ⟨ ἐπεὶ ὁ ἐπὶ τῶν τειῶν στερεὸς δ^{υ} ᾱ ἀριθμὸς ᾱ. ὁ δὲ πρῶτός ἐστι ς^{ς} ᾱ. ὁ ἄρα ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἔσται ς^{ς} ᾱ μ^{ο} ᾱ. ἔστω ὁ δεύτερος μ^{ο} α. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ς^{ς} ᾱ μ^{ο} ᾱ. λοιπὸν ἐστὶ τὸν ἐπὶ τῶν τειῶν στερεὸν λείποντα τ̀ δεύτερον καὶ τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. λιπὸν δὲ ὂν μὲν ποιεῖ δ^{υ} ᾱ ς^{ς} ᾱ γ μ^{ο} α ἴσον τετραγώνῳ. ὂν ὃ δ^{υ} ᾱ γ μ^{ο} ᾱ ἴσον τετραγώνῳ, ⟨ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ λαμβάνω τ̀ ὑποχλὼ ἐστὶ δὲ ς^{ὸ} ᾱ. ἐπτίθεμαι ἀριθμοὺς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ πηλικῶτός ἐστι. πύτων ς^{ὸ} ᾱ. μετρείτω μ^{ο} τὸ ἥμισυ κὴ ς^{ους} β. γενέσει κὴ πλευρὰς δύο τ̀ δωδάμωνος. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὡς οἶδας ἡ ἴσωσις. ⟨ γίνε⟩ ὁ ς^{ὸ} μ^{ο} ιζ ^{ᾶ}. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιζ ^{ᾶ}. ὁ ὃ δεύτερος μ^{ο} α. ὁ ὃ τρίτος μ^{ο} κε ^{ᾶ}.

ipsorum faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. solidus autem 1 Q. + 1 N. & dempto primo facit quadratum. Et quia solidus sub tribus est 1 Q. + 1 N. at primus 1 N. erit productus ex secundo in tertium 1 N. + 1. esto secundus 1. ergo tertius erit 1 N. + 1. Superest vt solidus sub tribus dempto tam secundo quàm tertio faciat quadratum. Dempto verò secundo fiet 1 Q. + 1 N. − 1 æqualem quadrato, at dempto tertio facit 1 Q. − 1. æqualem quadrato. Et exiſtit duplicata æqualitas. Capio interuallum quod est 1 N. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat, ij sunt qui metiuntur 1 N. nimirum $\frac{1}{2}$ & 2 N. quod est duplum lateris quadrati. Est ergo quam noſtri æquatio, & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{17}{8}$. secundus 1. tertius $\frac{25}{8}$.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti facilis est, & vtitur duplicata æqualitate modo quem explicauimus ad decimam quintam tertij. Cæterùm moneo secundum poni posse non tantùm 1. sed & quemlibet vnitatum numerum. Ponatur verbi gratia 2. cùm igitur productus ex secundo in tertium sit 1 N. + 1. erit tertius $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. Solidus autem 1 Q. + 1 N. detracto tam secundo quàm tertio fiet, hinc 1 Q. + 1 N. − 2. inde 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N. − $\frac{1}{2}$. quorum vterque quadrato æquandus est eorum interuallum est $\frac{1}{2}$ N. − 1 $\frac{1}{2}$. quod producunt mutuo ductu 2 N. − 6. & $\frac{1}{4}$. horum summæ semissis quadratus 1 Q. − $\frac{23}{4}$ N. + $\frac{529}{64}$. æqualis est 1 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{73}{4}$. tantus est primus, secundus 2. tertius $\frac{121}{96}$. qui soluunt quæstionem, nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{148333}{2304}$. qui detractis sigillatim ipsis tribus numeris, facit quadratos $\frac{53329}{23004}$. $\frac{42225}{23004}$. $\frac{59029}{23004}$. quorum latera $\frac{73}{48}$. $\frac{65}{48}$. $\frac{77}{48}$.

Sed & quadratorum numerus qui ponitur in solido, pro arbitrio variari potest, dum ponatur quadratus. Etenim sit primus 1 N. solidus 4 Q. + 1 N. erit ergo productus ex secundo in tertium 4 N. + 1. Ponatur secundus quotlibet vnitatum, puta 2. erit igitur tertius 2 N. + $\frac{1}{2}$. supereſt vt solidus 4 Q. + 1 N. adscito, tum secundo, tum tertio faciat quadratum, proinde 4 Q. + 1 N. − 2 & 4 Q. + 1. N. − $\frac{1}{2}$ æquantur quadratis. Horum interuallum est 2 N. − 1 $\frac{1}{2}$ quod producatur ex $\frac{1}{2}$ in 4 N. − 3. Quare horum summæ semissis quadratus 4 Q. − 5 N. + $\frac{25}{16}$. æquatur 4 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{19}{32}$. tantus est primus, secundus 2. tertius $\frac{27}{16}$ qui soluunt quæstionem. nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{513}{256}$ qui singulis detractis quadratos facit $\frac{361}{256}$. $\frac{1}{256}$. $\frac{81}{256}$. quorum latera $\frac{17}{16}$. $\frac{1}{16}$ $\frac{9}{16}$.

Eodem prorsus artificio soluetur quæstio sequens, quæ & hîc desiderari videtur.

Inuenire tres numeros, vt qui sub iis continetur solidus detractus à quolibet ipsorum quadratum relinquat.

Esto primus 1 N. solidus autem 1 N. − 1 Q. vt detractus à primo quadratum relinquat. Iam solido per primum diuiso, fiet 1 − 1 N. productus ex secundo in tertium. Ponatur secundus 1. erit tertius 1 − 1 N. supereſt vt ab vtroque detrahendo solidum 1 N. − 1 Q. supersint quadrati, & remanent 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. + 1 − 2 N. vterque igitur horum æquatur quadrato. Eorum interuallum est 1 N. quod fit ex 2 N. in $\frac{1}{2}$. Quare horum summæ semissis quadratus, puta 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{16}$. æquatur 1. Q. + 1 − 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{5}{8}$. tantus est primus, secundus 1. tertius $\frac{3}{8}$. & soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{15}{64}$ qui à quolibet sigillatim detractus relinquit quadratus $\frac{25}{64}$. $\frac{49}{64}$. $\frac{9}{64}$.

QVAESTIO XXV.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον μετὰ πλευρᾶς. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ ς.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione sit cubus suo multatus

latere. Esto datus 6. Ponatur primus 1 N. relinquitur ergo secundus 6 − 1 N. Superest vt productus eorũ multiplicatione fit cubus suo multatus latere. Est autem hic productus 6 N. − 1 Q. Hunc ergo æquari oportet cubo cui suum desit latus. Formo cubum à numeris quotlibet cum defectu vnitatis, esto à 2 N. − 1. huius cubus latere detracto fit 8 C. + 4 N. − 12 Q. Hæc æquantur 6 N. − 1 Q. & si numeri vtrimque multitudine æquales essent, restarent cubi æquales quadratis, & rationali numero exprimeretur solutio. At 4 N. proficiscuntur ab excessu ex ter 2 N. supra 2 N. & si ter 2 N. amittãt 2 N. fiunt vtique bis 2 N. At verò 6. dantur ex hypothesi. Eò itaque redactus sum vt inueniam loco 2 N. aliquem numerum cuius duplum faciat 6. Est autem 3. huiusmodi numerus. Quærens ergo 6 N. − 1 Q. æquales cubo cui suum latus deest, statuo cubi latus 3 N. − 1. & huius cubus latere ipso multatus facit 27 C. + 6 N. − 27 Q. quod æquatur 6 N. − 1 Q. & fit 1 N. $\frac{26}{27}$. Ad positiones, erit primus $\frac{26}{27}$. At secundus $\frac{136}{27}$.

τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ᾱ λειπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται μ̄ ϛ̄ λείψει ϛ̄ ᾱ. λοιπὸν δὴ ἐφ' τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον ἀπὸ πλευρᾶν. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν ἀριθμῶν ϛ̄ λείψει δ̄ ᾱ. ταῦτα ἴσα κύβῳ ἀπὸ πλευρᾶν. πλάσω κύβου ἀπὸ ϛ̄ ὅσων δή ποτε λείψει μ̄ ᾱ. ἔστω δὲ ἀπὸ ϛ̄ β̄ γ̄ μ̄ ᾱ. ὁ δὲ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κ̄ η̄ ἀριθμοὺς δ̄ γ̄ δ̄ ιβ̄. ταῦτα ἴσα ϛ̄ οις̄ ϛ̄ λείψει δ̄ ᾱ. ἡ εἰ ἦσαν οἱ ϛ̄ οις̄ ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸν ἐγίνετο ἰσωσαι κύβους δυνάμεσι, ὃ ὁ ὐ λω̄ ῥητός. ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ δ̄. ἐκ τῆς ὑφ' ὀχῆς εἰσιν ὑπὲρ ϛ̄ οις̄ δύο. τουτέστι ἐκ τῶν τρὶς τ̄ β̄ ϛ̄. ὃ ἐὰν τρὶς οἱ δύο ἀριθμοὶ λείψωσι ϛ̄ οις̄ β̄. πιθὸν δὴ τοὺς ἀριθμοὺς β̄. οἱ δὲ ϛ̄. τυχόντες εἰσὶ κῦ τῶν ὑποτάσσων. ἀπῆκται ἓν μοι δυεῖν τινα ϛ̄, ὡς τοὺς ἀριθμοὺς β̄. ὃς δὴς γνόμενος ποιεῖ ϛ̄. ὃς δὲ ὁ γ̄. ζητῶ οὖν ϛ̄ οις̄ ϛ̄ γ̄ δ̄ ᾱ. ἴσους κύβῳ ἀπὸ πλευρᾶν. νῦν τὰσσω τῶν τῷ κύβῳ πλευρὰν ἀπὸ ϛ̄ γ̄ γ̄ μ̄ ᾱ. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κ̄ κζ̄ ϛ̄ οις̄ ϛ̄ γ̄ δ̄ κζ̄ ἴσους ϛ̄ οις̄ ϛ̄ γ̄ δ̄ ᾱ. κῦ γίνεται ὁ ϛ̄ κϛ̄ κζ̄. ὅθεν τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κϛ̄ κζ̄. ὁ δὲ δεύτερος ρλϛ̄ κζ̄.

IN QVAESTIONEM XXV.

Artificiose Diophantus vt æquet 6 N. − 1 Q. cubo multato suo latere, fingit cubum à 3 N. − 1. vt in cubo illius contineatur − 1. quod aboleatur detractatione lateris, in quo etiam − 1. positum est. At Numeri aboleantur per Numeros qui sunt ex altera æquationis parte, & sic remaneat æqualitas inter cubos & quadratos. Vt autem in cubo multato suo latere reperiantur 6 N. cùm ex formatione cubi tradita ad primam huius constet numerum Numerorum in cubo contentorum triplum fore numeri Numerorum positorum in latere, quia in latere cum Numeris ponitur vnitas; oportet vtique talem poni in latere numerum Numerorum, à cuius triplo auferendo ipsum numerum, supersit 6. sed à triplo alicuius numeri auferendo ipsum numerum, supereſt duplum eiusdem numeri. Igitur rectè concludit Diophantus ponendum in latere cubi, numerum Numerorum, cuius duplum sit 6. hoc est 3. Itaque nulla hìc solutionum varietas accidit, cùm per hujusmodi operationem vnica duntaxat reperiri possit solutio. Verùm inde formatur Canon satis expeditus.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate multatum diuide per octantem cubi eiusdem, orietur primus quæsitorum. Quare huius subtractione à dato numero, habebis secundum. Porrò productus ex primo in semissem dati numeri vnitate multatus, est latus cubi quæsiti.

Eodem quoque artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros dato interuallo differentes, vt productus eorum multiplicatione sit cubus suo multatus latere.

Sit datum interuallum 6.

Ponatur primus 1 N. secundus 6 + 1 N. erit productus 6 N. + 1 Q. qui æquandus est cubo multato suo latere, qui ob causam supra traditam fingi debet à latere 3 N. − 1. fietque cubus suo latere multatus 27 C. + 6 N. − 27 Q. æqualis 6 N. + 1 Q. & fit 1 N. $\frac{28}{27}$. tantus est primus. Secundus autem $\frac{190}{27}$. & soluunt quæstionem, nam productus eorum multiplicatione $\frac{53320}{729}$. est cubus $\frac{6858}{729}$. multatus suo latere $\frac{10}{9}$. Hinc fit Canon.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate auctum, diuide per octantem cubi eiusdem, orietur primus quæsitorum. Cui addendo datum interuallum, fiet secundus. Porrò productus ex primo in semissem dati numeri vnitate multatus, est latus cubi quæsiti.

QVÆSTIO XXVI.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ποιῇ κύβον, οὗ ἡ πλευρὰ ᾖ ἴση ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ δ̄. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τριῶν στερεὸς κύβος ἐστι, ἔστω κ^υ η̄. οὗ πλευρά ἐστι ς^ς^ο β̄. ἀλλὰ ἡ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου ὑπεροχὴ, καὶ ἡ τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου ὑπεροχὴ, καὶ ἔτι τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου δίς ἐστι ὑπεροχὴ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου. τουτέστι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ τρεῖς ἄνισοι, ἡ τῶν τριῶν ὑπεροχὴ διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἄκρων. ἔχομεν δ' ἐν τῇ ὑποστάσει τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου ς^ς^ο β̄. δεῖ δὲ τοὺς ς^ς^ο β̄ τῶν τριῶν τὴν ὑπεροχὴν εἶναι, ὁ τρίτος ἄρα τοῦ πρώτου ὑπερέχει ς^ο ᾱ. ἔστω ὁ πρῶτος ς^ς β̄. ἢ ὅσων δήποτε, ὁ τρίτος ἔσται ἄρα ς^ς γ̄. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ἔστι κ^υ η̄. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δ^υ ς̄. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται ς^ο ᾱ. ᾱ^γ. καὶ εἰ μὲν ἦν ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου μείζων, ἐλάσσων δὲ τοῦ τρίτου, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ἀλλ' ὁ δεύτερος ἐγένετο ἐκ τοῦ τὴν η̄ μεριστῆναι εἰς τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου. ἀλλ' ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ μονάδι διαφέροντες. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ὅπως ὁ η̄ μεριζόμενος εἰς τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιῇ τινα, ὃς τοῦ μὲν ἐλάσσονος μείζων ᾖ, τοῦ δὲ μείζονος ἐλάσσων τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῦ ᾱ. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς^ο α μ^ο ᾱ. καὶ τὸν η̄ ἐὰν μερίσω εἰς τὸν ὑπ' αὐτῶν, τουτέστιν εἰς δ^υ ᾱ ς^ο ᾱ. εὑρεθήσεται ὁ μέσος μ^ο η̄ μορίου δ^υ ᾱ ς^ο ᾱ. θέλομεν δὲ τοῦτον μείζονα μὲν εἶναι ς^ο ᾱ. ἐλάσσονα δὲ ς^ο ᾱ μ^ο ᾱ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. ὥστε ὁ δεύτερος μὲν μονάδος μιᾶς μείζων ἐστὶ τοῦ πρώτου. ἀλλ' ὁ δεύτερος προσλαβὼν τὴν μονάδα καὶ ἀναλυθεὶς εἰς τὴν δύναμιν ᾱ. γίνεται δ^υ ᾱ ς^ο ᾱ μ^ο η̄. μορίου δ^υ ᾱ. ς^ο ᾱ ὥστε ταῦτα μείζονά ἐστι ς^ο ᾱ μ^ο ᾱ. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ μόριον δ^υ ᾱ ς^ο ᾱ μ^ο η̄. μείζονά εἰσιν κ^υ ᾱ. δ^υ β̄ ς^ο ᾱ καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, γίνονται μ^ο η̄ μείζονες κ^υ ᾱ δ^υ ᾱ. πλάσσω κύβον ὃς ἔχει κύβον ᾱ. δύναμιν ᾱ ἔσται ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου ς^ο ᾱ μ^ο ᾱ^γ. ἀλλ' ἐπεὶ μ^ο η̄ μείζους εἰσὶ κύβῳ ᾱ δ^υ ᾱ. ἐστὶ δὲ ὁ ἀπὸ ς^ο ᾱ μ^ο ᾱ^γ. κύβος μείζων κ^υ ἑνὸς δ^υ ᾱ. ἐὰν ἰσώσω καὶ τὰς πλευρὰς, τουτέστι μ^ο β̄. ἴσαι ς^ο ᾱ μ^ο ᾱ^γ. γίνεται ὁ ς^ο μ^ο ε̄^γ. ἐπὶ τὰς ὑποστά-

DATVM numerum diuidere in tres numeros, è quibus ortus solidus sit cubus latus habens summam interuallorum, quibus bini inter se distant. Esto datus 4. & quia solidus sub tribus contentus est cubus, esto 8 C. cuius latus 2 N. Iam interuallum primi & secundi, & interuallum secundi & tertij, itemque interuallum primi & tertij, duplum faciunt interualli primi & tertij. Hoc est. Si fuerint numeri tres inæquales, trium interualla sunt duplum interualli extremorum. Habemus autem in positione lateris cubi 2 N. Quare oportet 2 N. æquari summæ interuallorum. Proinde interuallum tertij suprà primum est 1 N. Esto primus numerorum quotlibet, puta 2 N. erit ergo tertius 3 N. Et quia solidus ex tribus ortus, est 8 C. at productus ex primo in tertium est 6 Q. erit vtique secundus $1\frac{1}{3}$ N. Hoc loco si secundus tertio minor, maior primo extitisset soluta erat quæstio. Sed secundus prodiit diuiso 8 per productum ex primo in tertium. Primus autem & tertius non sunt temerè sumpti, sed vnitate differentes. Eò itaque deuenimus, vt quærendi sint duo numeri vnitate differentes, vt diuiso 8. per productum multiplicationis eorum, fiat quotiens minore illorum maior, & maiore minor. Ponatur minor 1 N. maior erit 1 N. + 1 & si diuidam 8. per productum multiplicationis eorum quod est 1 Q. + 1 N. fiet medius $\frac{8}{1Q + 1N}$. Volumus autem hunc maiorem quidem esse quàm 1 N. minorem verò quàm 1 N. + 1. Cùm igitur horum interuallum sit 1. erit interuallum primi & secundi vnitate minus, ideoque secundus addita vnitate maior erit primo. Atqui secundus adscita vnitate, & resolutus in minutiam, cuius denominator 1 Q. + 1 N. fit $\frac{1Q + 1N + 8}{1Q + 1N}$. Hoc ergo maius est quàm 1 N. + 1. & omnibus per denominatorem multiplicatis fit 1 Q. + 1 N. + 8. maior quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. Auferantur similia à similibus, relinquitur 8. maior quàm 1 C. + 1 Q. Formo cubum

bum in quo lit 1 C. + 1 Q. erit vtique latus eius 1 N. + $\frac{1}{3}$. & quoniam 8. maius sunt quàm 1 C. + 1 Q. Cubus quoque à latere 1 N. + $\frac{1}{3}$ maior est quàm 1 C. + 1 Q. si æquemus latera, nempe 2. & 1 N. + $\frac{1}{3}$. fiet 1 N. $\frac{5}{3}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{8}{3}$. secundus $\frac{9}{5}$. tertius $\frac{5}{3}$. & omnibus per 15. multiplicatis. Erit primus 40. secundus 27. tertius 25. Communis enim denominator hic abiicitur, & inuenti sunt tres numeri, quorum ex multiplicatione ortus solidus, est cubus latus habens summam interuallorum ipsorum. Pono ergo primum 40 N. secundum 27 N. tertium 25 N. & est solidus sub ipsis contentus cubus cuius latus æquatur interuallis ipsorum simul junctis. Volo autem trium summam æquari dato numero 4. Igitur 92 N. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{40}{23}$. secundus $\frac{27}{23}$. tertius $\frac{25}{23}$.

σφς. ἔσαι ὁ πρῶτος ϊ̄ γ̄ν̄. ὁ δεύτερος ϛ̄ ε̄ν̄. ὁ τρίτος ε̄ γ̄ν̄. ϗ πάντα εἰς πεντεκαίδεκα. ἔσαι ὁ πρῶτος μ̄. ὁ δεύτερος κζ̄. ὁ τρίτος κε̄. κοινὸν γὰρ ἤρθη τὸ ιε̄ μόριον, ϗ πυρηνάρια εἰσὶν ξεῖς ςς᾽ι. ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν τερεὸς ἢ κύβοπλοῦραν ἔχων τὰς ὑποχὰς αὐτῶν σωτηθείσας. τάσσω τοίνυν τὸν μὲν πρῶτον ςξ̄ μ̄. τὸν δὲ δεύτερον ςξ̄ κζ̄. τὸν δὲ τρίτον ςξ̄ κε̄. ϗ ἔστιν ὁ ὁκτὼ τῶν τερεὸς κύβος, ἧ πλοῦρα ἴση ἐστὶ ταῖς ὑποχαῖς αὐτῶν σωτηθείσαις. θέλω δὲ τὰς ξεῖς ἴσους εἶν δοθεῖσι μονάσιν. ἐδόθησαν ϔ μ̄ δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ιβ̄ ἴσοι μ̄ δ̄. ϗ γίνεται ὁ ς᾽ α̅ ν̄γ̄ν̄. δεῖ τὰς ὑποσάσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ν̄γ̄ν̄. ὁ δὲ δεύτερος κζ̄ ν̄γ̄ν̄. ὁ δὲ τρίτος κε̄ ν̄γ̄ν̄.

IN QVAESTIONEM XXVI.

QVÆRENS Diophantus tres numeros quorum summa sit 4. Ita vt solidus sub ipsis contentus sit cubus latus habens summam interuallorum quibus bini inter se distant, seu quod idem est, latus habens duplum interualli maximi & minimi, primùm quærit in vniuersum tres numeros reliquis propositi partibus satisfacientes nulla habita ratione summæ quàm conficiunt, his enim inuentis, puta 40. 27. 25. Iam statuit quæsitos numeros 40 N. 27 N. 25 N. quorum summam 92 N. æqualem faciendo ipsi 4. soluit quæstionem propositam. Itaque totum negotium in eo consistit vt inueniantur tres numeri, vt solidus sub ipsis contentus sit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi. Ponatur solidus ille quilibet cuborum numerus cubicus, puta 8 C. Cùm ergo illius latus sit 2 N. patet hoc esse duplum interualli maximi & minimi, quare ipsum interuallum maximi & minimi erit 1 N. Ponendi ergo sunt maximus & minimus certi numerorum numeri vnitate distantes; sed quia per eorum productum diuidendo 8 C. solidum, debet oriri medius qui minimo maior esse debet, & minor maximo, apparet necessitas assumpti lemmatis, quo quæruntur duo numeri vnitate distantes per quorum productum diuidendo 8. fiat quotiens minore maior, & minor maiore. In huius autem lemmatis enodatione quantum à scopo aberrarit Xilander, qui eius commentarios legerit, facilè intelliget. Nobis non vacat in refellendis inanibus illius coniecturis diutiùs immorari, quibus propositum est Diophantum explicare, non aliorum errata omnia persequi. Ponuntur ergo quæsiti numeri 1 N. & 1 N. + 1. fitque productus eorum multiplicatione 1 Q. + 1 N. per quem diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{1Q.+1N.}$ qui debet esse maior quàm 1 N. minor quàm 1 N. + 1. Hîc si quis asserat Diophantum non satis accuratè rem persequi (nisi quid ex illius verbis exciderit) non falletur, vt puto. Nam vt vtrumque quod instat, ritè procuretur, omnia reducendo ad eandem denominationem patet 8. maiorem esse debere quàm 1 C. + 1 Q. minorem autem quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. & primum quidem sollicitè cauet Diophantus, postremum verò negligit omnino. Atqui si hoc neglecto ad illud tantùm respiciamus, sæpè in absurdum deueniemus. Nam verbi gratia vt 8. sit maior quàm 1 C. + 1 Q. sufficit si æquemus 8. alicui cubo maiori quàm 1 C. + 1 Q. dum is non sit maior quàm 8. At talis est 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1 Huic ergo æquemus 8. & latus lateri comparantes fient 2. æquales 1 N. + 1. & erit 1 N. 1. Quare quæsiti numeri erunt 1. & 2. quod est absurdum, nam per eorum productum 2. si diuidas 8. fiet 4. qui maior est vtroque, cùm deberet esse maior minimo, minor maximo. Non sufficit igitur vt cubus cui æquatur 8. sit maior quàm 1 C. + 1 Q. sed oportet simul vt sit minor quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. Hoc vt arte certa consequamur fingemus cubũ in quo præter 1 C. contineatur 1 Q. & aliquid amplius, quod tamen non æquet 2 Q. Quare cùm latus cubi ponendum sit 1 N. + aliquot vnitatibus, ac proinde quadratorum numerus in cubo contentorum sit triplum illarum vnitatum, patet in latere ponendas tot vnitates, vt earum triplum sit minus quàm 2. sed non minus quàm 1. Quare vtriusque trientem sumentes concludemus, fingendum latus cubi 1 N. +. tot vnitatibus quæ sint minus quàm $\frac{2}{3}$ sed non minus quàm $\frac{1}{3}$. sic Diophantus posuit hujusmodi latus 1 N. + $\frac{1}{3}$ quod æquans lateri ipsius 8. puta 2. inuenit valorem Numeri $\frac{5}{3}$. & si fingas latus 1 N. + $\frac{1}{2}$. hoc æquabitur 2. & fiet

1 N. $\frac{3}{4}$. Erunt ergo quæsiti duo numeri $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{4}$. quorum productus $\frac{15}{4}$ per quem diuidendo 8. fit medius $\frac{32}{15}$. tres enim $\frac{3}{2}$ $\frac{32}{15}$. $\frac{5}{2}$. satisfaciunt proposito, hoc est solidus sub ipsis contentus, est cubus latus habens summam interuallorum quibus bini inter se distant, & omnia reducendo ad integros, fient 45. 64. 75. per quos si velis soluere quæstionem propositam, pones quæsitos Numeros 45 N. 64 N. 75 N. horum summa 184 N. æquatur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{46}$ sunt ergo quæsiti Numeri $\frac{45}{46}$. $\frac{64}{46}$. $\frac{75}{46}$.

Itaque vt compendiosissimè propositum lemma perficiatur, cùm fiat valor Numeri auferendo à binario vnitates positas in latere fictitio cubi, & ostensum sit vnitates illas minores esse debere quàm $\frac{2}{3}$ non minores quàm $\frac{1}{3}$. his autem à binario detractis, supersint $\frac{4}{3}$ & $\frac{5}{3}$. patet valorem Numeri maiorem esse debere quàm $\frac{4}{3}$ non maiorem quàm $\frac{5}{3}$. sic sumi poterunt pro valore Numeri $\frac{5}{4}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{7}{5}$. $\frac{8}{5}$. & alij infiniti. Vnde constat allucinari Xilandrum, cùm asserit valorem numeri esse posse $\frac{5}{4}$. nam is cadit extra limites constitutos, eumque proposito non satisfacere senties experiendo.

Restat videndum cur Diophantus loco ipsorum $\frac{8}{3}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{5}{3}$. sumat ipsos 40. 27. 25. in iisdem rationibus. Quod ne cui scrupulum moueat, demonstrabitur hoc Theoremate.

Si fuerint tres numeri, ita vt solidus sub ipsis contentus, sit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi, & tres alij quicunque in iisdem rationibus idem præstabunt.

F 27000.
D 30. E 15.
A 40. B. 27. C 25.
G 80. H 54. K 50.
L 60. M 30.
P 216000.

Sint tres A B C. & interuallum extremorum esto E. cuius duplum D. At solidus sub ipsis A B C. esto F cubus, cuius latus sit D. & sumantur tres G H K in iisdem rationibus cum ipsis A B C. & sit extremorum interuallum M. cuius duplum L. & solidus sub ipsis G H K esto P. dico P. esse cubum cuius latus est L. Etenim cùm latera A B C. G H K sint proportionalia, erunt solidi F P similes ex definitione. Quare [1] habebunt inter se rationem cubi ad cubum, ac proinde cùm F sit cubus, [2] erit & P cubus. Quoniam verò ex hypothesi est A ad C. vt G ad K. erit diuidendo E ad C. vt M ad K. ac proinde erit D, duplus ipsius E, ad C; sicut L. duplus ipsius M. ad K, & permutando erit D ad L. vt C ad K. Atqui solidi similes F P [3] sunt in triplicata ratione laterum C K. & similiter cubi F P. [4] sunt in triplicata ratione lateris D ad latus ipsius P. Igitur est C ad K. sicut D ad latus cubi P. sed vt C ad K. sic est D ad L. vt ostensum est. Igitur L est latus cubi P. Quod erat demonstrandum.

27 *Octaui.*
25 *Octaui.*
19 *Octaui.*
12 *Octaui.*

Cæterùm eodem artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus sit cubus, latus habens summam interuallorum, quibus bini inter se distant, ipsa autem summa interuallorum sit datus numerus.

Esto summa interuallorum 15. Quærentur vt prius tres numeri, ita vt solidus sub ipsis contentus sit cubus summæ interuallorum, & inuenientur 40. 27. 25. Quare ponentur quæsiti 40 N. 27 N. 25 N. & fit summa interuallorum 30 N. æqualis 15. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt igitur quæsiti numeri $\frac{40}{2}$ $\frac{27}{2}$ $\frac{25}{2}$.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ κύβον. τάσσω τὸν πρῶτον ὁπ κυβικῶν ς̄ς̄. ἔστω δὲ ς̄ς̄ η̄. τὸ δεύτερον δ̄ᵘ α̣ γ̣ μ° α̣. ℭ συμφωνῆ μοι ἐν ὑπάγμα. ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸ πρῶτον ποιεῖ κύβον. λοιπὸν δεῖ τὸ ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν κύβον. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸ δεύτερον ποιεῖ κύβους η̄ δύναμιν α̣ λείψει ς̄ς̄ η̄ μ° α̣ ἴσους κύβῳ. πλάσσω τὸ κύβον ἀπὸ ἀριθμοῦ β̄ λείψει μ° α̣. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιδ̄ ῑγ̄. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ριβ̄ ῑγ̄. ὁ δὲ δεύτερος κζ̄ ρξθ̄.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione vtrolibet adiecto faciat cubum. Pono primum, aliquot numerorum cubicorum, puta 8 N. secundum verò 1 Q. — 1. Ita alteri postulatorum satisfit. Nam productus eorum multiplicatione adscito primo, facit cubum. Restat vt idem productus adscito secundo faciat cubum. Sed productus ille adscito secundo facit 8 C. + 1 Q. — 8 N. — 1. hæc ergo æquantur cubo. Formo cubum à 2 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{14}{13}$. Ad positiones. erit primus $\frac{112}{13}$. secundus $\frac{27}{169}$.

IN QVAESTIONEM XXVII.

NVMERI cubo æquandi 8 C. + 1 Q. — 8 N. — 1. latus ingeniosè fingitur 2 N. — 1. vt cubo vtriusque partis elidantur 8 C. — 1. & remaneat æqualitas inter Numeros & quadratos. Cæterùm positiones diuersis modis institui possunt. Nam primus quæsitorum poni potest quilibet Numerorum numerus siue cubicus, siue non, dum secundus statuatur certus quadratorum numerus —

1. ita tamen vt ex primo in quadratos secundi fiat numerus cubus, ita si ponatur primus 4 N. ponetur secundus 2 Q. — 1. fitque productus 8 C. — 4 N. qui adscito primo cubum facit. Restat ergo vt idem productus adscito secundo cubum faciat, facit autem 8 C. + 2 Q. — 4 N. — 1. Hoc ergo cubo æquatur, cuius latus fingetur 2 N. — 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. erunt ergo quæsiti numeri $\frac{20}{7}$ & $\frac{1}{49}$. qui soluunt quæstionem, nam eorum productus $\frac{20}{343}$ vtroque adscito cubos facit $\frac{1000}{343}$ & $\frac{27}{343}$. Verùm aduerte talem statuendum esse Numerorum numerum pro primo, vt sit maior vel æqualis numero quadratorum qui ponitur in secundo, nam si ponatur minor, æquatio quidem ritè procedet, sed valorem Numeri applicando positionibus, secundus inuenietur nihil, vel minor nihilo. Ita si ponas primum 2 N. secundum 4 Q. — 1. erit productus 8 C. — 2 N. qui adscito primo cubum facit. At idem productus adscito secundo facit 8 C. + 4 Q. — 2 N. — 1. æqualem cubo à latere 2 N. — 1. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Quare secundus inuenitur nihil. At si ponas primum 8 N. secundum 8 Q. — 1. fiet tandem 64 C. + 8 Q. — 8 N. — 1. æqualis cubo à latere 4 N. — 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{14}$ eruntque quæsiti numeri qui suprà $\frac{20}{7}$ & $\frac{1}{49}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, vtrolibet detracto faciat cubum. Vt prius ponatur primus 8 N. secundus autem 1 Q. + 1. & productus eorum multiplicatione, dempto primo fit cubus; sed idem productus dempto secundo facit 8 C. + 8 N. — 1 Q. — 1. Hoc æquatur cubo, & est impossibile. Statuo ergo rursus primum, numerorum cubicorum aliquot addita vnitate, puta, 8 N. + 1. secundum autem 1 Q. & productus eorum multiplicatione dempto secundo fit cubus; sed dempto primo fit 8 C. + 1 Q. — 8 N. — 1. Hæc æquantur cubo à latere 2 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{125}{23}$. secundus $\frac{106}{169}$.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας ἑκάτερον, ποιῇ κύβον. ὁμοίως ὁ πρῶτος τετάχθω κυβικῶν ς̄ η̄. ὁ δὲ δεύτερος δι᾽ ᾱ μ° ᾱ ἢ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτὸν λείψας τὸ πρῶτον, κύβος, ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸ δεύτερον ποιεῖ κ̄ῡ ῑ ς̄ς̄ᵛ̄ ᾱ η̄ γ δι᾽ ᾱ μ° ᾱ. ταῦτα ἴσα κύβῳ. ἢ ἔστιν ἀδύνατον. τάσσω πάλιν τὸ πρῶτον κυβικῶν ς̄ς̄ μ̄ᾱ μ° ᾱ. ἔσω ς̄ς̄ η̄ μ° ᾱ. τὸ δὲ δεύτερον δι᾽ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸ δεύτερον, κύβος, ἀλλὰ λείψας τὸ πρῶτον ποιεῖ κ̄ῡ η̄ δι᾽ ᾱ λείψει ς̄ς̄ η̄ μ° ᾱ. ταῦτα ἴσα κύβῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ β̄ γ μ° ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ιδ̄ ῑᵛ̄. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρκε ῑᵛ̄. ὁ δὲ δεύτερος ρ/ιγ̄ ρξ̄ᵛ̄.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

TEXTVS lacunas malè cùm repleuisset Xilander, non mirum est si Diophanti mentem minimè assequutus est. Attamen satis apparet Diophantum primò voluisse imitari operationem præcedentis quæstionis. Quemadmodum enim posuerat ibi primum 8 N. secundum 1 Q. — 1 vt producto 8 C. — 8 N. addendo primum fieret cubus. Ita hîc ponere voluit primum 8 N. secundum 1 Q. + 1. vt à producto 8 C. + 8 N. detrahendo primùm, cubus supereſſet. Verùm ab eodem producto auferendo secundum relinquebatur 8 C. + 8 N. — 1 Q. — 1. quod est impossibile cubo æquari, nam is cubus non potest fingi nisi à latere 2 N. — 1. vt tollantur cubi & vnitates. Quare hac æquatione tandem 11 Q. + 2 N. remanent æquales nihilo. Idcirco vt hoc incommodum vitetur aliter instituendæ sunt positiones, & primus ponendus est 8 N. + 1. secundus 1 Q. resque optimè succedit.

Cæterùm infinitis alijs modis institui possunt positiones, dum primus ponatur quilibet numerus Numerorum + 1. & secundus quilibet Quadratorum numerus, qui ductus in numerum Numerorum primi, cubum faciat. Ita si ponas primum 4 N. + 1. secundum 2 Q. erit productus 8 C. + 2 Q. qui multatus secundo, cubum relinquit. At multatus primo, manet 8 C. + 2 Q. — 4 N. — 1. qui æquabitur cubo à latere 2 N. — 1. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. Erunt ergo quæsiti numeri $\frac{27}{7}$ & $\frac{50}{49}$ qui soluunt quæstionem, nam productus fit $\frac{1350}{343}$. Vnde auferendo ipsos numeros, remanent cubi $\frac{27}{343}$ & $\frac{1000}{343}$. Sed hîc etiam aduerte talem statuendum Numerorum numerum in primo, vt sit æqualis vel maior numero quadratorum qui ponitur pro secundo. Alioquin si ponatur minor, non poterit à producto detrahi vterque numerus. Ita si ponas primum 8 N. + 1. secundum 8 Q. res bene succedet, nam erit productus 64 C. + 8 Q. qui multatus secundo cubum relinquit, at multatus primo, remanet 64 C. + 8 Q. — 8 N. — 1. æqualis cubo à latere 4 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{5}{14}$. Sunt ergo quæsiti numeri qui suprà $\frac{27}{7}$ & $\frac{50}{49}$. Sed si ponas primum 2 N. + 1. secundum 4 Q. erit productus 8 C. + 4 Q. qui detracto

secundo cubum relinquit, at primo detracto, relinquit 8 C. + 4 Q. − 2 N. − 1. æqualem cubo à latere 2 N. − 1. & fit 1 N. ½. suntque quæsiti numeri 2. & 1. à quorum producto si primum auferas, nihil remanet.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ κύβον. ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ κύβον ποιείτω μ° ξδ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον, ποιεῖ κύβον, ποιείτω μ° η̄. δὶς ἄρα συναμφότερον ποιῶν αὐτῶν τὸν ὑπ' αὐτῶν, ἔσαι μ° νς̄. ὥστε συναμφότερον ἔσαι μ° κη̄. ἀλλὰ καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μὴ συναμφότερα ποιεῖ μ° ξδ̄. λοιπὰς ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν ἔσαι μ° λς̄. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, οἱ συντεθέντες ποιῶσι μ° κη̄. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν ὅζι μ° λς̄. τετάχθω ὁ μείζων ς^ α μ° ιδ̄. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσαι μ° ιδ̄. λείψει ς^ ᾱ. λοιπὸν ὅζι τὸν ὑπ' αὐτῶν τουτέστι μ° ρϟ̄ λείψει δυνάμεως ᾱ. ἰσῶσαι μ° λς̄. καὶ γίνεται δ^ᾶ ἴσοι μ° ρξ̄. καὶ εἰ ἦσαν μονάδες ρξ̄ τετραγωνικαὶ, λελυμένον μοι ἂν τὸ ζητούμενον. ἀλλ' αἱ μ° ρξ̄. ὑπερέχει ὅζι ἡ ὑπερέχουσι μ° ρϟ̄ τὰς λς̄. ἀλλ' αἱ μ° ρϟ̄ ἀπὸ μ° ιδ̄ ὅζι τετράγωνος. ὁ δὲ ιδ̄ ἥμισύ ὅζι τῶν κη̄. ὥστε τὰ ρϟ̄ τὸ ἥμισύ ὅζι τῶν κη̄ ἐφ' ἑαυτό. ἀλλ' ὁ κη̄ ἥμισύ ὅζι τῶν νς̄. ἀλλ' ὁ νς̄ δύο κύβων ὅζι ὑπερεχὴ τῷ ξδ̄ καὶ τῷ η̄. ὁ δὲ λς̄ συναμφοτέραν ὅζι τῶν κύβων τὸ ἥμισυ. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὅπως τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τὸ τέταρτον, ἐφ' ἑαυτὸ γιγόμενον, καὶ λείψας συναμφοτέρων τὸ ἥμισυ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ς^ α μ° α̃. ἡ τοῦ ἐλάσσονος ς^ α γ μ° α. ☾γίνεται☽ οἱ κύβοι ὁ μὲν μείζων κ^ᾱ δ^ᾶ γ ς̄ γ μ° α. ὁ δὲ ἐλάσσων κ^ᾱ ς̄ γ λεῖψις δ^ᾶ γ μ° α. καὶ τῶν τούτων ὑπεροχῆς τὸ τέταρτον δ^ᾶ α. α ς̄ μ° ᾱ ς̄. ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ, γίνονται δυναμοδυνάμεις β. ᾱ δ^ᾶ δ^ᾶ ᾱ. ᾱ ς̄ μ° ᾱ δ^ᾶ. ταῦτα ἐὰν λείψῃ συναμφοτέρων τῶν κύβων τὸ ἥμισυ, ὅπερ ὅζι κ^ᾱ ᾱ ς̄^ᾱ γ. λοιπὸν γίνονται δ^ᾶ δ^ᾶ β. ᾱ δ^ᾶ δ^ᾶ ᾱ. ᾱ ς̄ μ° ᾱ δ^ᾶ γ κ^ᾱ ᾱ ς̄ γ ἴσα τετραγώνῳ. καὶ πάντα τετράκις διὰ τὸ μόριον γίνεται δ^ᾶ δ^ᾶ δ δ^ᾶ ς μ° ᾱ λείψει κ^ᾱ δ ς̄ ιβ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ δυνάμεων τριῶν μ° ᾱ γ ς̄ ς. αὐτὸς ἄρα ἔσαι δ^ᾶ δ^ᾶ δ δ^ᾶ μβ μ° ᾱ λείψει κ^ᾱ λς̄ ς̄ ιβ ἴσων δυναμοδυνάμεσι δ δ^ᾶ ς μ° ᾱ γ κ^ᾱ δ ς̄ ιβ.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, summæ ipsorum siue addita, siue detracta cubum faciat. Quoniam productus eorum multiplicatione adsumens vtrumque facit cubum, faciat 64. Rursus quia idem productus vtroque detracto facit cubum, faciat 8. Itaque duplum summæ numerorum æquatur interuallo horum cuborum 56. Proinde summa numerorum est 28. sed productum multiplicationis cum summa facit 64. relinquitur ergo productum multiplicationis esse 36. Eo itaque locī deducta res est, vt inueniendi sint duo numeri, quorum summa sit 28. productum multiplicationis 36. Ponatur maior 1 N. + 14. Minor ergo erit 14 − 1 N. superest vt productum multiplicationis nimirum 196 − 1 Q. æquetur 36. & fit 1 Q. æqualis 160. & si vnitates 160. essent quadratæ, soluta esset quæstio. Sed 160. est excessus quo 196. superat 36. & 196. est quadratus ipsius 14. qui est semissis de 28. Quare 196 est semissis de 28. in se ductus. Atquī 28. est semissis ipsius 56. atque ideo 14. est quarta pars eiusdem 56. Cæterùm 56. est interuallum duorum cuborum 64. & 8. ipse verò 36. est summæ cuborum semissis. Itaque eo redactus sum vt inueniam duos cubos quorum interualli quadrans in se si ducatur, & ab hoc quadrato auferatur summæ cuborum semissis, fiat quadratus. Sit latus maioris cubi 1 N. + 1. minoris verò 1 N. − 1. & fiunt cubi maior quidem 1 C. + 3. Q. + 3 N. + 1. minor autem 1 C. + 3 N. − 3 Q. − 1. & horum interualli quadrans est 1 ½ Q. + ½ hoc in se ducto fiunt 2 ¼ QQ. + 1 ½ Q. + ¼ hinc si auferatur summæ cuborum semissis, nempè 1 C. + 3 N. relinquitur 2 ¼ QQ. + 1 ½ Q. + ¼ − C. − 3 N. Hoc æquatur quadrato. Sed propter minutias, omnia quadruplicentur, fit 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. hæc quadrato æquantur à latere 3 Q. + 1 − 6 N. Ipse quadra-

tus est 9 QQ. + 42 Q. + 1 − 36 C. − 12 N. qui æquatur 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. Communis addatur defectus, & à similibus auferantur similia, relinquuntur 32 C. æquales 36 Q. & fit 1 N. $\frac{8}{8}$. Ad positiones. Posueram latera cuborum, hoc quidem 1 N. + 1. illud verò 1 N. − 1. Erit ergo alterum $\frac{17}{8}$. alterum $\frac{1}{8}$. Ipsi ergo cubi erunt, primus quidem $\frac{4913}{512}$. secundus autem $\frac{1}{512}$. venio ad id quod initio propositum erat, ac quæro quomodo dentur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione cum vtriusque summa faciat $\frac{4913}{512}$ & idem productus detracta eadem summa faciat $\frac{1}{512}$. Quoniam ergo productum multiplicationis additum summæ facit cubum $\frac{4913}{512}$. & idem productum detracta summa facit cubum $\frac{1}{512}$. horum cuborum interuallum, nempè $\frac{4912}{512}$. est vtique duplum summa. Ipsa igitur summa est $\frac{2456}{512}$. sed productum multiplicationis cum summa facit $\frac{4913}{512}$. & summa inuenta est $\frac{2456}{512}$. erit igitur productum multiplicationis $\frac{2457}{512}$. Quod reliquum est vt conficiatur demonstratum est libro primo, sed explicandæ causa quæstionis denuo ostendamus. Ponatur primus 1 N. cum semisse vnitatum quæ summam exprimunt, hoc est $\frac{1228}{512}$. secundus erit $\frac{1228}{512}$ − 1 N. & est summa illorum $\frac{2456}{512}$. Sed productum multiplicationis est $\frac{1507984}{262144}$. − Q. hoc ergo æquatur $\frac{2456}{512}$ & omnia per denominatorem 262144. multiplicentur, & auferantur similia à similibus fiunt 262144. Q. æquales 250000. & fit 1 N. $\frac{500}{512}$. Ad positiones erit primus $\frac{1728}{512}$. secundus $\frac{728}{512}$. & demonstratio est euidens.

τῇ κοινῇ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ λοιποὶ κυβ λβ ἴσοι δυ λς. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ϝ̄. ὅτι τὰς ὑποστάσεις ἔταξα τὰς τῶν κύβων πλευρὰς τὸ μὲν ς̄ α̃. τὸ δὲ ς̄ α̃ λείψει μ̄ α̃. καὶ ἔσται ἡ μὲν ιζ̃ ᾱ̃. ἡ δὲ α̃ ᾱ̃. αὗται ἄρα αἱ κύβοι ἔσονται ὁ μὲν πρῶτος δπιγ̃ φιϛ̃. ὁ δὲ δεύτερος α̃ φιϛ̃. ἔρχομαι οὖν ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ζητῶ τὸν ὑπ' αὐτῶν μεῖζον σωαμφοτέρου ποιεῖν κύβον τὸν δπιγ̃ φιϛ̃. τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψαν ἔλασσον σωαμφοτέρου ποιεῖν κύβων τὸν α̃ φιϛ̃. ἐπεὶ οὖν ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν μεῖζον σωαμφοτέρου ποιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδες δπιγ φιϛ̃ ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας σωαμφότερον ποιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδος α̃ φιϛ̃. ὁ δὶς ἄρα σωαμφότερός ἐστιν αὐτῶν ἡ ὑποχή, τουτέστι δπιβ φιϛ̃. ὥστε σωαμφοτέρου ἔσται βυνς̄ φιϛ̃. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν μεῖζον σωαμφοτέρου ἐστὶ δπιγ̃ φιϛ̃. ὧν σωαμφοτέρου βυνς̄ φιϛ̃. ἔσται ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν μ̄ βυνζ̃ φιϛ̃ καὶ πεφάνθω ἡ ἀπόδειξις ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ νῦν ὑποδειχθήσεται διὰ τὸ πρόβλημα. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ α̃ καὶ μ̄ τ̄ ἡμισείας, ὧν εἷς σωαμφοτέρου, τουτέστι μ̄ ασκη̄ φιϛ̃. ὁ δὲ δεύτερος ἔσται μονάδων ασκη̄ φιϛ̃ λείψει ς̄ α̃. καὶ ὅτι μὲν σωαμφότερος μ̄ βυνς̄ φιϛ̃. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν ὅτι μ̄ μ̄. ζππδ μορίων κς̄. βρμδ λείψει δυνάμεως α̃. ταῦτα ἴσα μ̄ βυνζ̃ φιϛ̃. καὶ παντὰ ὅτι μόνων τουτέστι κς̄. βρμδ. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, γίνεται δυ κς̄. βρμδ ἴσαι μ̄ μυρ. κε̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ φ̄ φιϛ̃. ὅτι τὰς ὑποστάσεις ἔσται ὁ πρῶτος ᾱ̃ ψκη̄ φιϛ̃. ὁ δὲ δεύτερος ψκη̄ φιϛ̃. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXIX.

HIc duo imprimis supponuntur à Diophanto.

Primùm interuallum cuborum qui fiunt addita & adempta summa numerorum producto multiplicationis ipsorum, esse duplum eiusdem summæ numerorum, quod facilè est demonstrare.

D 28. D 28.
A 8. B 36. C. 64.

Sit enim A cubus minor: C maior, & B productus multiplicatione quæsitorum numerorum, quorum summa D adempta ipsi B relinquat A, & addita eidem B. faciat C. dico interuallum cuborum C A esse duplum ipsius D. & patet, cùm enim interuallum duorum C B sit D. & duorum B A. interuallum sit rursus D. euidens est extremorum C A. interuallum esse duplum ipsius D. Quod erat propositum.

Secundò supponit Diophantus ipsum productum B. semissem esse summæ cuborum A C. quod etiam euidens est, cùm enim tres A B C. sint in medietate arithmetica ex hypothesi, [1] erit medius B. semissis summæ extremorum. Quod erat intentum. Hinc apparet, quod ait Diophantus quærendos esse duos numeros, quorum summa sit D. productum B. Id autem fiet per trigesimam primi, cuius operationem hîc repetit. Cùm autem ex huiusmodi operatione, vel ex Canone inde eruto constet, vt quæstio solui possit oportere à quadrato semissis summæ auferendo productum, relinqui quadratum, sequitur oportere vt à quadrato semissis ipsius D. auferendo B. relinquatur quadratus. Atqui, vt ostensum est, D. est semissis interualli cuborum A C. ac proinde semissis ipsius D. est

[1] 5. 1. *poris.*

quadrans interualli eorundem cuborum ; & rursus , vt ostensum quoque est, B. est semissis summæ cuborum A C. Igitur euidenter colligitur necessitas lemmatis à Diophanto assumpti, quo quæruntur tales duo cubi , vt à quadrato quadrantis interualli eorum auferendo semissem summæ eorundem, relinquatur quadratus. In huius lemmatis explicatione multa occurrunt obseruanda.

Primò aduerte latera cuborum poni 1 N. + 1. & 1 N. − 1. vt cuborum tam summa quàm interuallum ex pauciſſimis constet speciebus. Nam horum laterum cubi prorsus similes sunt , nisi quod quadrati & vnitates deficiunt in cubo residui , cùm adsint in cubo binomij , sicut docuimus ad primam huius , cubi genesim explicantes. Vnde colligendo summam cuborum , cùm quadrati & vnitates ob signa contraria sese mutuò elidant , fit vt summa cuborum constet solùm ex cubis & Numeris , vt in hypothesi fit summa cuborum 2 C. + 6 N. similiter cuborum interuallum ex duabus tantùm componitur speciebus , ex quadratis scilicet , & vnitatibus quia cuborum & Numerorum iidem vtrimque reperiuntur numeri, sic in hypothesi est cuborum interuallum 6 Q. + 2. cuius quadratus est 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$.

Secundò aduerte quadratum huius quadrantis , necessariò esse trinomium constans ex quadrato quadratis , quadratis , & vnitatibus, vt colligere ex genesi quadrati quam tradidit Euclides quarta secundi. fit enim huiusmodi quadratus 2 $\frac{1}{4}$ Q Q. + 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{16}$. Quare cùm ab hoc quadrato auferri debeat semissis summæ cuborum , qui constat , vt iam diximus , ex cubis & Numeris, necesse est hanc subtractionem fieri per signum defectus , cùm in dicto quadrato non reperiantur species eorundem nominum. Itaque fiet huiusmodi subductione qui nomium constans ex quadrato quadratis, quadratis , & vnitatibus , cum defectu cuborum & Numerorum , nimirum 2 $\frac{1}{4}$ Q Q. + 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{16}$ − 1 C. − 3. N. qui æquandus est quadrato , vt soluatur propositum lemma. Sed ad vitandas fractiones , omnia per 4. multiplicantur , & fit 9 Q Q. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. æqualis quadrato.

Tertiò aduerte ita formandum latus propositi quinomij , vt æqualitas consistat inter duas species proximas. Quare tria potissimum sunt præstanda. Primò tollendi sunt quadrato quadrati. Secundò vnitates quoque tollendæ. Tertiò vel Numeri tollendi sunt , vt æqualitas consistat inter cubos & quadratos. vel tollendi sunt cubi , vt æquales maneant quadrati & Numeri. Duo quidem præstabuntur facilè , quia tam quadrato quadratorum quàm vnitatum numerus , quadratus est , puta 9 Q Q. & 1. quare si in latere fictitio ponantur horum quadratorum latera , nimirum 3 Q. & 1. habebitur intentum. Tertium verò , vt perficiatur, adiicienda est in latere fictitio tertia species , qua vel cubi vel Numeri elidantur , vnde duplex æquationis ratio consurgit , quarum primam duntaxat prosequutus est Diophantus , nos vtramque non grauatim explicabimus. Primùm ergo si libeat abolere numeros , curandum nobis erit vt in quadrato fictitio reperiantur − 12 N. Cùm igitur Numeri produci non possint , nisi ex ductu Numerorum in vnitates , patet in latere fictitio numeros ponendos esse ; vt verò eorum multitudo nobis innotescat , cùm latus fictitium debeat esse trionomium constans ex
1. 2. *poris.* quadratis , Numeris , & vnitatibus , erit quadratus illius æqualis quadratis singularum partium,& duplo ductí ex qualibet parte in quamlibet ex aliis , ac proinde Numeri qui erunt in quadrato fictitio , erunt duplum ductí ex vnitatibus in Numeros in latere contentos. Quamobrem cùm vt docuimus , in latere, vnitatum numerus sit 1. vt ex eius ductu in Numeros bis , fiant 12 N. manifestum est in latere ponendos esse 6 N. & quia signi quoque ratio habenda est , & − 12 N. fieri possunt siue ex 6 N. in − 1. bis , siue ex 1. in − 6 N. bis , dubitari potest vtrum latus fictitium ponendum sit 3 Q. + 6 N. − 1. vel 3 Q. + 1 − 6 N. nam vtroque modo , in quadrato reperientur 9 Q Q. + 1 − 12 N. Sed si ponatur latus fictitium 3 Q. + 6 N. − 1. fit totus quadratus 9 Q Q. + 1 − 12 N. + 36 C. + 30 Q. vbi quoniam vterque cuborum & quadratorum Numerus maior est numero cuborum & quadratorum numeri quadrato æquandi ; manent enim 30 Q. + 36 C. æquales 6 Q. − 4 C. id tandem incommodi accidit , vt 24 Q. + 40 C. æquentur nihilo. Igitur fictitium latus poni non potest 3 Q. + 6 N. − 1. Quamobrem restat vt fingatur 3 Q. + 1 − 6 N. vt fecit Diophantus , & æquatio ritè procedit , nam fit 1 N. $\frac{8}{9}$ sunt ergo cuborum latera $\frac{17}{8}$ & $\frac{1}{8}$ ipsi cubi $\frac{4913}{512}$ & $\frac{1}{512}$. Quorum summæ semissis $\frac{2457}{512}$ interualli verò semissis $\frac{2456}{512}$. Quare si inueniamus duos numeros, quorum summa sit $\frac{2456}{512}$. productus verò $\frac{2457}{512}$ soluta erit quæstio. Inuenientur autem per trigesimam primi , & erunt quæsiti numeri in minimis $\frac{27}{8}$ & $\frac{91}{54}$. quorum productus $\frac{2457}{512}$. cui addendo & detrahendo summam ipsorum numerorum , fiunt cubi $\frac{4913}{512}$. & $\frac{1}{512}$ à lateribus $\frac{17}{8}$ & $\frac{1}{8}$.

Aliam viam si libeat amplecti , & curare vt æqualitas consistat inter quadratos & Numeros, abolendo cubos , puta − 4 C. Cùm in latere sint 3 Q. patet ex 3 Q. bis in $\frac{2}{3}$ N. fieri 4 C. vnde constat in latere ponendos $\frac{2}{3}$ N. Sed & signi ratio si habeatur − 4 C. æquè bene fiunt ex 3 Q. in − $\frac{2}{3}$ N. atque ex $\frac{2}{3}$ N. in − 3 Q. Verùm si ponas latus fictitium 3 Q. + 1 − $\frac{2}{3}$ N. fiet quadratus 9 Q Q. + 1 − 4 C. + 6 $\frac{4}{9}$ Q. − $\frac{4}{3}$ N. vnde hoc incommodi accidit , vt tam quadratorum quàm Numerorum numerus, excedat numerum quadratorum & Numerorum , qui sunt ex altera æquationis parte , puta 6 Q. − 12 N. ac proinde tandem $\frac{4}{9}$ Q. + 10 $\frac{2}{3}$ N. æquantur nihilo. Superest igitur vt latus fictitium ponatur 1 + $\frac{2}{3}$ N. − 3 Q. & fit quadratus 9 Q Q. + 1 − 4 C. + $\frac{4}{3}$ N. − 5 $\frac{5}{9}$ Q. qui æquatur 9 Q Q. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12. N. & fit 1 N. $\frac{15}{13}$. Sunt igitur quæsitorum cuborum latera $\frac{28}{13}$ & $\frac{2}{13}$. ipsi cubi $\frac{21952}{2197}$ &

$\frac{8}{2197}$. Per quos si propositam initio quæstionem soluere velimus, cum horum summæ semissis sit $\frac{10989}{2197}$. Quærendi sunt duo numeri quorum summa sit $\frac{10972}{2197}$ productum verò $\frac{10980}{2197}$. Igitur operantes per Canonem trigesimæ primi sumemus quadratum semissis summæ, puta $\frac{3009619 6}{48226809}$ à quo auferemus productum, & relinquetur $\frac{5973136}{48226809}$ cuius latus $\frac{2444}{21 97}$ additum & ademptum semissi summæ $\frac{5486}{2197}$. dabit quæsitos numeros $\frac{7930}{2197}$ & $\frac{3042}{2167}$ seu in minimis $\frac{610}{169}$ $\frac{18}{13}$. Horum productus est $\frac{1098^0}{2197}$. cui si addas & adimas summam numerorum $\frac{10972}{2197}$ fient cubi qui suprà. $\frac{21952}{2197}$ & $\frac{8}{2197}$.

Cæterùm & latera cuborum qui per hoc lemma quæruntur diuersimodè fingi possunt, nimirum alterum poni potest quodlibet binomium constans ex Numeris & vnitatibus, alterum verò eiusdem binomij residuum, vt 2 N. + 2 & 2 N. − 2. vel 3 N. + 2. & 3 N. − 2. Semper enim aliquo modorum quos explicauimus, ad æquationem commodam peruenietur.

QVAESTIO XXX.

INVENIRE tres numeros, vt productus eorum multiplicatione siue addita summa ipsorum, siue detracta cubum faciat. Hac in re scias quod quolibet quadrato diuiso in duas partes, quarum altera sit latus eius, productus harum partium multiplicatione addita summa illarum, cubum facit. Ponatur igitur quadratus 1 Q. & diuidatur in latus suum, & in id quod supereſt, nimirum in 1 N. & 1 Q. − 1 N. & productum multiplicationis eorum, vtroque adscito facit cubum. Supereſt vt idem productum, detracto vtroque faciat cubum. Atqui facit 1 C. − 2 Q. Hæc ergo cubo æquantur qui fit minor quàm 1 C. formo cubum ab $\frac{1}{2}$ N. is est $\frac{1}{8}$ C. & omnia octies fiunt 8 C. − 16 Q. æquales 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{16}{7}$. secundus $\frac{144}{49}$.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐαν' τε προσλάβῃ σωαμφότερον, ἐαν' τε λείψῃ ποιῇ κύβον. ἐν τῷ πενταγώνῳ ἅπας τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεθεὶς εἰς τε τὴν πλευρὰν, καὶ τὸν λοιπὸν, ποιεῖ ὃν ὑπ' αὐτῆ μετὰ σωαμφοτέρων, κύβον. τετάχθω πάντως ὁ τετράγωνος δύναμις $\bar{\alpha}$. καὶ διῃρήσθω εἴκτε τὴν πλευρὰν καὶ τὸν λοιπὸν, ἔσται $\varsigma^{\bar{\alpha}}$. καὶ δυνάμεως $\bar{\alpha}$ λείψει $\varsigma^{\bar{\alpha}}$ $\bar{\alpha}$. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῆ μετὰ σωαμφοτέρων, κύβος. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῆ λείψαντα σωαμφότερον, ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῆ λείψας σωαμφότερον ποιεῖ κύβον $\bar{\alpha}$ λείψει δυνάμεων $\bar{\beta}$. ταῦτα ἴσα κύβῳ ἐλάσσονι τοῦ κύβου $\bar{\alpha}$. πλάσσω κύβον ἀπὸ τοῦ $\varsigma^{\bar{\alpha}}$ $\bar{\alpha}$ $\varsigma^{\bar{\alpha}}$. τουτέστι κυ $\bar{\alpha}$ $\bar{\alpha}$. καὶ πάντα ὀκτάκις. γίνονται κυ η λείψει δυνάμεων $\iota\bar{\varsigma}$ ἴσοι κύβῳ $\bar{\alpha}$. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς $\iota\bar{\varsigma}$ $\bar{\varsigma}$. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος $\iota\bar{\varsigma}$ $\bar{\varsigma}$. ὁ δὲ δεύτερος ρμδ $\bar{\mu\theta}$.

IN QVAESTIONEM XXX.

HÆC quæstio eadem est cum præcedente, sed tractatio eius diuersa, & quidem facilior. Lemma quod assumitur de inueniendis duobus numeris, quorum productus adscita amborum summa cubum faciat, facile est demonstratu. Sit enim quilibet Numerus A cuius quadratus B. vnde auferendo ipsum A supersit C. ductoque A in C. fiat D. dico si ad ipsum D addatur summa ipsorum A C. seu B fieri cubum. Etenim ducendo A in suum quadratum B. fit cubus ipsius A. Sed ducere A in B idem est, ac ducere A sigillatim in ipsos A. C. ex quibus B componitur; productus autem ex A in A est B, & productus ex A in C est D. Igitur summa amborum B D æquatur cubo ipsius A. Quod erat demonstrandum. Reliqua sunt perspicua, nec maiori explicatione indigent.

A 5. B 25.
C 20. D 100.

Cæterùm simili prorsum artificio soluentur & huiusmodi quæstiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue addito siue detracto ipsorum interuallo cubum faciat.

Ponatur alter quæsitorum numerorum 1 N. alter 1 Q. + 1 N. nam productus eorum multiplicatione, puta 1 C. + 1 Q. detracto interuallo ipsorum, cubum facit. Supereſt vt idem productus addito eodem interuallo cubum faciat, facit autem 1 C. + 2 Q. hoc ergo æquatur Cubo. Esto 8 C. & fit 1 N. $\frac{2}{7}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{2}{7}$ & $\frac{18}{49}$ qui soluunt quæstionem. Nam eorum productus est $\frac{36}{343}$. cui addendo & adimendo interuallum numerorum, putà $\frac{28}{343}$. fiunt cubi $\frac{64}{343}$ & $\frac{8}{343}$. Vbi & ani-

maduersione dignum est interuallum numerorum esse semper quadratum, sicut & in priore quæstione summa Numerorum quadratus erat.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt eorum summa siue addito siue detracto producto multiplicationis eorundem, cubum faciat.

Ponatur alter 1 N. alter 1 Q. − 1 N. sic enim summa addito producto cubum facit. Superest vt à summa detrahendo productum, cubus fiat. Fit autem 2 Q. − 1 C. æqualis cubo, sit is quilibet numerus cuborum cubicus minor vnitate, vt fiat valor Numeri vnitate minor, & haberi possit alter numerorum qui positus est 1 Q. − 1 N. sit ergo cubus $\frac{1}{8}$ C. æqualis 2 Q. − 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{9}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{16}{9}$ & $\frac{112}{81}$ qui soluunt quæstionem, nam productus est $\frac{1792}{729}$ summa verò ad eandem denominatorem redacta $\frac{2304}{729}$ cui addendo & adimendo productum, fiunt cubi $\frac{4096}{729}$ & $\frac{512}{729}$ à lateribus $\frac{6}{9}$ & $\frac{8}{9}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum siue addito siue detracto producto cubum faciat.

D − D −
A − B − C −

Vtentes eodem logismo ferè quo vsus est Diophantus quæstione vigesima nona huius. Sint cubi qui fieri debent A C. & productus multiplicatione quæsitorum numerorum esto D. interuallum eorundem B. Igitur ex hypothesi addendo D ad B fiet cubus C. & auferendo eundem D. ab eodem B remanebit cubus A. Quamobrem cuborum A C
5. 1. *poris.* interuallum duplum est ipsius D. At quoniam A B C sunt in medietate arithmetica, [1] B est semissis summæ ipsorum A C. Eò ergo redacti sumus vt inueniamus duos Numeros, quorum productus sit semissis interualli duorum cuborum, & eorundem interuallum sit semissis summæ eorundem cuborum. Atqui, vt constat ex Canone trigesimæ tertiæ primi, dato interuallo duorum numerorum, & producto multiplicationis, si quærantur numeri, vt solutio contingat rationalis, oportet vt quadrato interualli addendo quadruplum producti quadratus fiat. Igitur quærendi sunt duo cubi tales, vt quadrato semissis summæ ipsorum addendo quadruplum semissis interualli, seu duplum interualli eorundem, fiat quadratus. Ponantur ipsorum latera 1 N. + 1 − 1 & 1 N. Erit summa cuborum 6 Q. + 2. cuius semissis 3 Q. + 1. cuius quadratus 9 QQ. + 6 Q. + 1. cui si addatur duplum interualli cuborum, puta 4 C. + 12 N. fiet 9 QQ. + 6 Q. + 1. + 4 C. + 12 N. æqualis quadrato. Huius latus esto 1 + 6 N. − 3 Q. fiet quadratus 9. QQ. + 30 Q. + 1 + 12 N. − 36 C. æqualis 9 QQ. + 6 Q. + 1 + 4 C. + 12 N. vnde fit 1 N. $\frac{3}{5}$. & sunt cuborum lateta $\frac{8}{5}$ & $\frac{2}{5}$. ipsi cubi $\frac{512}{125}$. & $\frac{8}{125}$. semissis summæ horum est $\frac{260}{125}$. semissis interualli $\frac{252}{125}$. Itaque si inueniamus duos numerosquorum interuallnm sit $\frac{260}{125}$ productus verò $\frac{252}{125}$ soluta erit quæstio proposita. Inuenientur autem per trigesimam tertiam primi puta $\frac{14}{5}$ & $\frac{18}{25}$. quorum productus $\frac{252}{125}$. at interuallum $\frac{260}{125}$. cui si addatur & adimatur productus, fiunt cubi $\frac{512}{125}$ & $\frac{8}{125}$.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt producto addendo summam, & ab eodem auferendo interuallum numerorum fiat cubus vtrimque.

Patet ex hypothesi, cuborum qui fieri debent interuallum componi ex summa & ex interuallo quæsitorum numerorum. Quare sint cubi qui fieri debent 1. & 8. Igitur horum interuallum 7. est ag-
23. 1. *poris.* gregatum ex summa & interuallo numerorum. [2] Quare 7. est duplum maioris numeri, & ipse maior numerus est $\frac{7}{2}$. ponatur minor 1 N. erit productus $\frac{7}{2}$ N. cui addendo summam numerorum, puta $\frac{7}{2}$ + 1 N. fit $\frac{7}{2}$ + $\frac{9}{2}$ N. æqualis 8. vel à producto auferendo interuallum numerorum, manet $\frac{2}{2}$ N. − $\frac{4}{2}$ æqualis 1. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique idem valor Numeri 1. Sunt ergo quæsiti Numeri $3\frac{1}{2}$ & 1. Ex hac autem operatione sequitur cubos ad placitum sumi posse qui fiant huiusmodi additione & subtractione.

QVÆSTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros: vt producto addendo interuallum, & ab eodem auferendo summam numerorum, cubus fiat vtrinque.

Sumantur vt prius cubi ad placitum 8. & 64. qui fiant huiusmodi additione & subtractione. Igi-
13. 1. *poris.* tur horum interuallum 56. componetur ex summa, & ex interuallo quæsitorum numerorum. [3] Quare 56. est duplum maioris numeri, ipse maior numerus 28. ponatur minor 1 N. erit productus 28 N. cui si addas interuallum numerorum fit 27 N. + 28. æqualis 64. vel si ab eodem producto auferas summam Numerorum fit 27 N. − 28. æqualis 8. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique 1 N. $\frac{4}{3}$. sunt ergo quæsiti numeri 28. & $\frac{4}{3}$.

QVÆSTIO

QVÆSTIO SEXTA.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ addendo interuallum, & ab eadem auferendo productum, cubus vtrimque fiat.

Sumantur cubi ad placitum dum duplum minoris non ſuperet maiorem, ſumantur ergo 8. & 64. Quia igitur ſummæ quæſitorum numerorum addendo interuallum ipſorum, fit 64. [1] patet 64. eſſe duplum maioris numeri. ergo ipſe maior numerus eſt 32. Ponatur minor 1 N. fiet ſumma 32 + 1 N. à qua auferendo productum 32 N. ſupereſt 32 − 31 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{24}{31}$. Sunt ergo quæſiti numeri 32. & $\frac{24}{31}$. 23. 1. *Poriſ.*

QVÆSTIO SEPTIMA.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ addendo productum, & ab eadem auferendo interuallum, cubus fiat vtrimque.

Sumantur rurſus cubi quicunque 8. & 64. Quia ergo ex ſumma Numerorum auferendo interuallum remanet 8. [2] Patet 8. eſſe duplum minoris numeri. Quare ipſe minor eſt 4. Ponatur maior 1 N. erit productus 4 N. cui addendo ſummam fit 4 + 5 N. æqualis 64. & fit 1 N. 12. ſuntque quæſiti Numeri 4. & 12. 23. 1. *Poriſ.*

QVÆSTIO OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt interuallo addendo ſummam, & ab eodem interuallo auferendo productum, cubus vtrimque conficiatur.

Sumantur duo cubi, quorum maior ſuperet duplum minoris, quales ſunt 8. & 64. Quia igitur interuallo numerorum addendo ſummam, fit 64. erit 64. duplum maioris numeri. Ipſe maior numerus 32. Ponatur minor 1 N. erit interuallum 32 − 1 N. vnde auferendo productum, fiet 32 − 33 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{8}{11}$ ſuntque quæſiti numeri 32. & $\frac{8}{11}$.

QVÆSTIO NONA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis, ſiue addatur ſumma, ſiue interuallum ipſorum, fiat cubus.

Ponantur cubi qui fieri debent 8. & 64. Cùm igitur eidem producto addendo interuallum & ſummam numerorum fiant 8. & 64. patet inter ipſos 8. & 64. eandem eſſe differentiam, quæ eſt inter ſummam & interuallum numerorum, [3] at hæc dupla eſt minoris Numeri. Igitur 56. eſt duplum minoris numeri, & ipſe minor numerus eſt 28. Ponatur maior 1 N. erit productus 28 N. interuallum 1 N. − 28. quo ad productum addito fit 29 N. − 28. æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{36}{29}$ maior numerus. Quod eſt impoſſibile, cum minor ſit 28. Porrò 36. eſt compoſitum ex minore cubo, & ex ſemiſſe interualli cuborum, at 29. eſt ipſe ſemiſſis interualli cuborum vnitate auctus. Igitur inueniendi ſunt duo cubi, vt aggregatum ex minore & ex ſemiſſe interualli ipſorum, diuiſum per eundem ſemiſſem vnitate auctum, det quotientem maiorem ipſo ſemiſſe interualli cuborum; ſeu quod idem eſt, oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex ſemiſſe interualli cuborum, ſuperet productum ex ſemiſſe interualli cuborum in ſeipſum vnitate auctum. At hic productus æquatur quadrato ſemiſſis interualli cuborum aucto ſuo latere. Igitur oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex ſemiſſe interualli cuborum, excedat quadratum ſemiſſis eiuſdem interualli auctum ſuo latere, & auferendo vtrimque eundem ſemiſſem interualli cuborum; Oportet vt minor cubus excedat quadratum ſemiſſis interualli cuborum. Statuatur maior, quilibet cubus, puta 8. & diuidatur 8. in duas partes, quarum maior excedat quadratum ſemiſſis minoris. Quoniam ergo diuiſo 8. in partes æquales 4. & 4. contingit alteram æquari quadrato ſemiſſis alterius, patet ſi altera ponatur maior quàm 4. altera minor, haberi quod quæritur nam maior excedet quadratum ſemiſſis minoris. Proinde poſito maiore cubo 8. talis ponendus eſt minor vt ſit maior quàm 4. Sic enim minor cubus excedet quadratum ſemiſſis interualli cuborum. Hoc vt facilè fiat, reducatur 8. ad fractionem cubicam denominatam à maiore aliquo cubo, puta ad $\frac{216}{27}$. & ad eiuſdem denominationis fractionem reducatur 4. fiet $\frac{128}{27}$. Tum ſumatur cubus aliquis inter 108. & 216. puta 125. cui ſubſcribendo denominatorem eundem, fient quæſiti Cubi $\frac{125}{27}$ & $\frac{216}{27}$ ſeu 8. per quos commodè ſoluetur quæſtio. Nam eorum interuallum eſt $\frac{91}{27}$ cuius ſemiſſis $\frac{91}{54}$ eſt minor quæſitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. erit ſumma 1 N. + $\frac{91}{54}$ productus verò $\frac{91}{54}$ N. cui addendo ſummam fit $\frac{145}{54}$ N. + $\frac{91}{54}$ æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{341}{145}$ maior ſcilicet numerus, minor autem eſt $\frac{91}{54}$. & ſoluunt quæſtionem. 23. 1. *Poriſ.*

Vt autem methodus quam tradidi ad inueniendum duos cubos, quorum minor excedat quadratum ſemiſſis interualli ipſorum, firmius comprehendatur: ſtatuatur rurſus maior cubus 64. qui diuidatur in duas partes, quarum maior ſuperet quadratum ſemiſſis minoris. Erit igitur maior pars 32

+ 1 N. minor 32 − 1 N. huius semissis 16 − $\frac{1}{2}$ N. cuius quadratus 256 + $\frac{1}{4}$ Q. − 16 N. debet esse minor quàm 32 + 1 N. & addendo vtrimque æqualia, tum auferendo similia à similibus, ac demum omnia per 4 multiplicando, fiunt 68 N. maiores quàm 896 + 1 Q. Qua æquatione resoluta fit 1 N. maior, vel certè non minor quàm 18. vnde constat maiorem partem de 64. debere esse 50. vel maiorem quàm 50. Ponatur 50 minor 14. Patet igitur maiore Cubo posito 64. minorem sumendum esse non minorem quàm 50. sic enim eorum interuallum minus erit quàm 14. ac proinde semissis interualli quadratus minor erit minore cubo, vt requiritur. Itaque reducatur 64. ad fractionem cubicam, puta ad $\frac{4096}{64}$ & ad eandem denominationem reducatur 50. fiet $\frac{3200}{64}$ sumatur ergo cubus inter 3200. & 4096. qualis est 3375. Huic igitur eundem denominatorem adscribendo, habebuntur cubi quæsiti $\frac{3375}{64}$ & $\frac{4096}{64}$. seu 64. Per quos rursus, si libet, soluet quæstionem.

QVÆSTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis siue adimatur summa, siue interuallum ipsorum, fiat cubus.

Eodem ferè logismo quo suprà concludemus, reperiendos esse duos cubos, quorum maior superet quadratum semissis interualli ipsorum. Ponatur ergo minor 8 maior 8 + 1 N. Igitur 8 + 1 N. debet esse maior quàm $\frac{1}{4}$ Q. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm 8. Quare posito minore cubo 8. debet maior esse minor quàm 16. reducantur 8. & 16. ad fractionem denominationis cubicæ, puta ad $\frac{64}{8}$ & $\frac{128}{8}$. Quærendus ergo est cubus inter 64. & 128. qualis est 125. eruntque quæsiti cubi 8. & $\frac{125}{8}$ Quorum interuallum $\frac{61}{8}$ cuius semissis $\frac{61}{16}$ est minor quæsitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. fiet summa 1 N. + $\frac{61}{16}$ productus verò $\frac{61}{16}$ N. vnde auferendo summam, manet $\frac{45}{16}$ N. − $\frac{61}{16}$ æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{25}{5}$. Tantus est maior, minor verò $\frac{15}{16}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΤΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμὺς τετραγώνους οἱ σωτηδέντες & πρσλαβόντες τὰς ἰδίας πλευρὰς σωτηδίσας ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ τ ιβ. ἐπεὶ πᾶς τετράγωνος λαβὼν τὴν ἰδίαν πλευρὰν καὶ μονάδος τέταρζον, ποιεῖ τετράγωνον. οὗ ἡ πλευρὰ λείψασα μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ ἀριθμόν τινα, ὅς ἐστι τῶν ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευρά, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἅρα πρσλαβόντες μὴ τὰς ἰδίας πλευρὰς ποιῶσι μονάδας ιβ. πρσλαβόντες ὁ & τέσσαρα τέταρτα ποιῶσι τέσσαρας τετραγώνους, εἰσὶ ὁ καὶ αἱ μονάδες ιβ. μὴ τεσσάρων τετάρτων. ὅ ἐστι μονὰς μία, μονάδες ιγ. τὰς ιγ ἅρα μονάδας διαιρεῖν δεῖ εἰς τέσσαρας τετραγώνους, καὶ ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς ἀφελὼν μονάδος τὸ ἥμισυ, ἔξω τ τεσσάρων τετραγώνων τὰς πλευράς. διαιροῦνται ὁ οἱ ιγ εἰς δύο τετραγώνους, τόν τε δ καὶ τὸν θ. καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων διαιρεῖται εἰς ξδ $^{\text{κε}\tilde{\text{ν}}}$. καὶ λε $^{\text{κε}\tilde{\text{ν}}}$. καὶ ρμδ $^{\text{κε}\tilde{\text{ν}}}$. καὶ πα $^{\text{κε}\tilde{\text{ν}}}$. λαβὼν τούνυν ἑκάσου τῶν πλευρὰν ᾱ $^{\text{ε}\tilde{\text{ν}}}$. ε $^{\text{ε}\tilde{\text{ν}}}$. ιβ $^{\text{ε}\tilde{\text{ν}}}$. θ $^{\text{ε}\tilde{\text{ν}}}$. αἶρε ἀπὸ ἑκάσου τούτων μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ ἔσονται αἱ πλευραὶ τ ζητουμένων τετραγώνων. ια $^{\tilde{\text{ι}}}$. ζ $^{\tilde{\text{ι}}}$. ιθ $^{\tilde{\text{ι}}}$ ιγ $^{\tilde{\text{ι}}}$. αὐτοὶ ἅρα οἱ τετράγωνοι. ὃς μὲν ρκα $^{\text{ρ}\tilde{\text{ν}}}$. ὃς ὁ μθ $^{\text{ρ}\tilde{\text{ν}}}$. ὃς δὲ τξα $^{\text{ρ}\tilde{\text{ν}}}$. ὃς δὲ ςξθ $^{\text{ρ}\tilde{\text{ν}}}$.

INVENIRE quatuor numeros quadratos, quorum summa cum summa laterum coniuncta, numerum imperatum faciat. Sit is 12. Quandoquidem omnis quadratus suo latere & vnitatis quadrante auctus facit quadratum, cuius latus semisse vnitatis multatum, exhibet prioris quadrati latus. At quatuor numeri qui quæruntur, suis lateribus adsumptis faciunt 12. iidem vtique adsumentes quatuor vnitatis quadrantes, facient quatuor quadratos. Atqui vnitates 12. auctæ quatuor quadrantibus vnitatis, hoc est 1. fiunt 13. Oportet igitur diuidere 13. in quatuor quadratos, tunc si à cuiuslibet latere detraxero $\frac{1}{2}$. habebo quæsitorum quatuor quadratorum latera. Diuiditur autem 13. in duos quadratos 4. & 9. & rursus quilibet ipsorum diuiditur in duos quadratos, nempe alter in $\frac{64}{25}$ & $\frac{16}{25}$. alter in $\frac{144}{25}$ & $\frac{81}{25}$. sumens igitur cuiusque latus, nempe $\frac{8}{5}$. $\frac{6}{5}$. $\frac{12}{5}$. $\frac{9}{5}$. aufero ab vnoquoque illorum $\frac{1}{2}$. & sunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{11}{10}$. $\frac{7}{10}$. $\frac{19}{10}$. $\frac{13}{10}$. Ipsi ergo quadrati sunt $\frac{121}{100}$. $\frac{49}{100}$. $\frac{361}{100}$. $\frac{169}{100}$.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod assumit Diophantus, sic breuissimè demonstratur. Esto quilibet numerus A B. & semissis vnitatis B C. sintque ipsorum quadrati D. E. & summa ipsorum A B. D. E sit F. Dico F esse quadratum à cuius latere si auferatur B C. relinquitur A B. [1] Etenim quadratus totius A C æquatur quadratis D. E. & producto bis ex A B in B C. sed quia B C. est semissis vnitatis, hic productus bis æquatur ipsi A B. vt euidens est. Igitur quadratus totius A C. æquatur summæ ipsorum A B. D. E. seu ipsi F. Quare F est quadratus, cuius latus A C. à quo auferendo B C. remanet A B. Quod erat demonstrandum. 4. *secund*

A..... B $\frac{1}{2}$ C.
D 25. E $\frac{1}{4}$. F 30 $\frac{1}{4}$.

Quoniam verò infra docebimus quæstionem hanc vniuersalius proponi posse, nimirum inueniri posse quatuor quadratos, quorum summa adscito quolibet multiplice summæ laterum, datum conficiat numerum, necesse est & hoc lemma vniuersalius concipi, nimirum sic.

Omnis quadratus quolibet multiplice sui lateris auctus, & quadrato semissis multiplicatoris, quadratum exhibet, cuius latus multatum semisse multiplicatoris, fit prioris quadrati latus.

D 6.
A..... B... C.
E 25. F 9. G 64.

Esto quadratus E cuius latus A B. & sit multiplicator D. cuius semissis B C. cuius quadratus F. & summa ipsorum E F. & producti ex A B in D. esto G. Dico G esse quadratum, à cuius latere si auferatur B C. remanet A B. etenim quadratus totius A C. [2] æquatur quadratis partium, nimirum ipsis E. F & producto bis ex A B in B C. seu producto ex A B in D. quamobrem G. est quadratus ipsius A C. vnde patet auferendo B C. relinqui A B. Quod erat demonstrandum. 4. *secundi.*

Cæterùm totum analyseos Diophantææ negotium in eo consistit, vt datus numerus vnitate auctus diuidatur in quatuor quadratos. Quod qui vniuersaliter fieri possit non docuit Diophantus. Equidem si datus numerus vnitate auctus quadratus sit, vel suaptè natura ex duobus quadratis compositus, facilè diuidetur in quatuor, atque etiam in plures quotlibet quadratos per octauam secundi. Sed si harum proprietatum neutra illi accidat, quomodo res absoluenda sit non constat ex Diophanto. Etenim datus numeros esto 13. Tunc numerus 14. diuidendus erit in quatuor quadratos. Sed quo artificio? Nam 14. nec quadratus est, nec ex duobus quadratis compositus. Hæc difficultas non immeritò prima fronte inextricabilis appareat, quamuis rem subtilius consideranti facilè euanescat. Etenim datus numerus vnitate auctus etsi nec quadratus sit, nec ex duobus quadratis compositus, attamen eum ex tribus, vel etiam ex quatuor quadratis suaptè natura componi necesse est. Ita supradictus numerus 14. componitur ex tribus quadratis 1. 4. 9. Quare vno ex illis in duos diuiso per octauam secundi, iam totus numerus in quatuor quadratos diuisus erit. Omnem autem numerum vel quadratum esse, vel ex duobus, aut tribus, aut etiam quatuor quadratis componi satis experiendo deprehendes. Mihi sanè perfectâ id demonstratione assequi nondum licuit quam qui proferet maximas ei habebo gratias, præsertim cùm non solùm in hac quæstione, sed & in nonnullis libri quinti hoc supponere videatur Diophantus. Interim libet id inductione confirmare, ostendendo proprium esse numerorum omnium ab 1. vsque ad 120. vt constat ex sequenti diagrammate.

1. Quadratus
2. ex 1. 1.
3. ex 1. 1. 1.
4. Quadratus.
5. ex 1. 4.
6. ex 1. 4. 1.
7. ex 1. 1. 1. 4.
8. ex 4. 4.
9. Quadratus.
10. ex 1. 9.
11. ex 1. 1. 9.
12. ex 4. 4. 4. vel 1. 1. 1. 9.
13. ex 4. 9.
14. ex 1. 4. 9.
15. ex 1. 1. 4. 9.
16. Quadratus.
17. ex 1. 16.
18. ex 9. 9. vel 1. 1. 16.
19. ex 1. 9. 9. vel 1. 1. 1. 16.
20. ex 4. 16. vel 1. 1. 9. 9.
21. ex 1. 4. 16.
22. ex 4. 9. 9. vel 1. 1. 4. 16.
23. ex 1. 4. 9. 9.
24. ex 4. 4. 16.
25. Quadratus.
26. ex 1. 25. vel 4. 4. 9. 9.
27. ex 1. 1. 25. vel 9. 9. 9.
28. ex 1. 1. 1. 25. vel 1. 9. 9. 9. vel 4. 4. 4. 16.
29. ex 4. 25.
30. ex 1. 4. 25.
31. ex 1. 1. 4. 25. vel 4. 9. 9. 9.
32. ex 16. 16.
33. ex 1. 16. 16.
34. ex 9. 25.
35. ex 1. 9. 25.
36. Quadratus.
37. ex 1. 36.
38. ex 1. 1. 36.
39. ex 1. 1. 1. 36. vel 1. 4. 9. 25.
40. ex 4. 36.
41. ex 16. 25. vel 1. 4. 36.
42. ex 1. 16. 25.

43. ex 9. 9. 25. vel 1. 1. 16. 25.
44. ex 4. 4 36.
45. ex 9. 36. vel 4. 4. 16. 25.
46. ex 1. 9. 36. vel 1. 4. 16. 25.
47. ex 1. 1. 9. 36. vel 4. 9. 9. 25.
48. ex 16. 16. 16. vel 4. 4. 4. 36.
49. Quadratus.
50. ex 1. 49. vel 25. 25.
51. ex 1. 1. 49. vel 1. 25. 25.
52. ex 16. 36.
53. ex 4. 49. vel 1. 16. 36.
54. ex 1. 4. 49.
55. ex 1. 1. 4. 49. vel 1. 9. 9. 36.
56. ex 4. 16. 36.
57. ex 1. 4. 16. 36.
58. ex 9. 49.
59. ex 1. 9. 49. vel 9. 25. 25.
60. ex 1. 1. 9. 49. vel 1. 9. 25. 25. vel 4. 4. 16. 36.
61. ex 25. 36.
62. ex 1. 25. 36.
63. ex 1. 1. 25. 36.
64. Quadratus.
65. ex 1. 64. vel 16. 49.
66. ex 1. 1. 64. vel 1. 16. 49.
67. ex 9. 9. 49.
68. ex 4. 64.
69. ex 1. 4. 64. vel 4. 16. 49.
70. ex 9. 25. 36.
71. ex 1. 9. 25. 36.
72. ex 36. 36. vel 4. 4. 64.
73. ex 9. 64.
74. ex 25. 49.
75. ex 1. 25. 49.
76. ex 4. 36. 36. vel 1. 1. 25. 49.
77. ex 4. 9. 64.
78. ex 4. 25. 49.
79. ex 1. 4. 25. 49. vel 9. 9. 25. 36.
80. ex 16. 64.
81. Quadratus.
82. ex 1. 81.
83. ex 1. 1. 81. vel 9. 25. 49.
84. ex 4. 16. 64.
85. ex 4. 81. vel 1. 36. 49.
86. ex 1. 4. 81. vel 1. 36. 49.
87. ex 1. 1. 4. 81. vel 1. 1. 36. 49.
88. ex 16. 16. 36.
89. ex 25. 64.
90. ex 9. 81.
91. ex 1. 9. 81.
92. ex 1. 1. 9. 81. vel 4. 16. 36. 36. vel 9. 9. 25. 49.
93. ex 4. 25. 64.
94. ex 4. 9. 81. vel 9. 36. 49.
95. ex 1. 4. 9. 81. vel 1. 9. 36. 49.
96. ex 16. 16. 64.
97. ex 16. 81.
98. ex 49. 49. vel 1. 16. 81.
99. ex 1. 49. 49. vel 9. 9. 81.
100. Quadratus.
101. ex 1. 100.
102. ex 1. 1. 100.
103. ex 1. 1. 1. 100. vel 4. 9. 9. 81. vel 4. 25. 25. 49. vel 9. 9. 36. 49.
104. ex 4. 100.
105. ex 1. 4. 100.
106. ex 25. 81.
107. ex 1. 25. 81.
108. ex 36. 36. 36. vel 1. 1. 25. 81.
109. ex 9. 100.
110. ex 1. 9. 100.
111. ex 1. 1. 9. 100.
112. ex 4. 4. 4. 100. vel 4. 36. 36. 36. vel 16. 16. 16. 64.
113. ex 49. 64.
114. ex 1. 49. 64.
115. ex 9. 25. 81.
116. ex 16. 100.
117. ex 36. 81.
118. ex 1. 36. 81.
119. ex 9. 25. 36. 49.
120. ex 4. 16. 100.

Tu, si vacat vlterius experiare licebit. Ego sanè de omnibus numeris vsque ad 325. experimentum sumpsi. Facile autem ad quotlibet quadratos extendetur quæstio, sed si duo tantùm quadrati postulentur, quorum summa cum summa laterum datum conficiat numerum, oportebit dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis. Et si tres quærantur quadrati, oportebit dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis. Si verò plures postulentur quadrati, nulla conditio præscribetur, quia tunc continget quendam numerum diuidendum esse in quatuor aut in plures quadratos, quod semper fieri posse docuimus. Denique eadem arte, & ampliando lemma Diophanti, vt supra fecimus, inuenientur quotlibet quadrati, quorum summa adsumpto quolibet multiplici summæ laterum, datum conficiat numerum. Quoniam autem in his omnibus quæstionibus plerumque accidit aliquem numerum ita diuidendum esse in duos, vel tres vel plures quadratos, vt quilibet eorum excedat certum aliquem numerum, quod ritè perfici nequit, nisi per artificium quo vtitur Diophantus duodecima, decima tertia, & decima quarta quinti, satius erit hujusmodi quæstionum explicationem in eum locum reiicere.

OBSERVATIO D. P. F.

IMo *propositionem pulcherrimam & maxime generalem nos primi deteximus. Nempe omnem numerum vel esse triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compositum esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum*

esse pentagonum, vel ex duobus tribus quatuor aut quinque pentagonis compositum & sic deinceps in infinitum in hexagonis heptagonis & poligonis quibuslibet enuntianda videlicet pro numero angulorum generali & mirabili propositione; eius autem demonstrationem quæ ex multis varijs & abstrusissimis numerorum mysterijs deriuatur hic apponere non licet, opus enim & librum integrum huic operi destinare decreuimus & Arithmeticen hac in parte vltra veteres & notos terminos mirum in modum promouere.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE quatuor quadratos, quorum summa laterum summa detracta faciat præscriptum numerum. Sit is 4. Quia volo primum suo multatum latere, & secundum suo multatum latere, itemque tertium & quartum suis multatos lateribus facere 4. Cæterùm omnis quadratus suo latere multatus, & adsumens vnitatis quadrantem, facit quadratum, cuius latus adscito vnitatis semisse exhibet prioris quadrati latus; quatuor vtique quadrati quæsiti multati suis lateribus, & adsumentes quatuor vnitatis quadrantes, nimirum 1. facient quatuor quadratos. Sed & iidem multati suis lateribus, faciunt vnitates 4. & adsumentes 1. faciunt 5. Hoc ergo mihi incumbit vt diuidam 5. in quatuor quadratos, quorum singulorum lateribus vbi adiecero $\frac{1}{2}$. inuenero latera quæsitorum quadratorum. Diuiditur autem 5. in quadratos $\frac{9}{25}\cdot\frac{16}{25}\cdot\frac{64}{25}\cdot\frac{36}{25}$. Horum sumo latera, nimirum $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{6}{5}$. addo cuilibet illorum $\frac{8}{2}$. & inuenio latera $\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{10}\cdot\frac{21}{10}\cdot\frac{17}{10}$. Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{121}{100}\cdot\frac{169}{100}\cdot\frac{441}{100}\cdot\frac{289}{100}$.

ΕΤΡΕΙΝ τέσσαρας τετραγώνους, οἱ σωτεθέντες ☾ λείψαντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν σωτεθείσας, ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν πρῶτον λείψαντα αὐτὸ τὴν πλευρὰν, καὶ τὸ δεύτερον λείψαντα αὐτὸ τὴν πλευρὰν, καὶ τὸ τρίτον, καὶ τὸν τέταρτον ὁμοίως λείψαντας αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιεῖν μ° Δ. ἀλλὰ μὴν καὶ πᾶς τετράγωνος λείψας τὴν αὐτοῦ πλευρὰν καὶ προσλαβὼν μονάδος τέταρτον ποιεῖ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ προσλαβοῦσα μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ τὸν ἐξ ἀρχῆς τετράγωνον πλευρὰν, ὥστε οἱ τέσσαρες τετράγωνοι λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς καὶ προσλαβόντες μονάδος τέσσαρα τέταρτα, τουτέστι μονάδα μίαν ποιήσουσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλὰ καὶ οἱ τέσσαρες λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιοῦσι μ° Δ. προσλαβόντες ὁ καὶ μονάδα μίαν ποιοῦσι μ° ε. ἀπῆκται οὖν μοι τὸ ε ἐλελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους. ἐκάστῃ τῶν πλευρῶν προσέθηκα μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ δίπλα τὰς τῶν ζητουμένων τετραγώνων πλευράς. διαιρεῖ ὁ ὁ ε. εἰς τέσσαρας τετραγώνους θ^{κε} ☾ ιε^{κε}. καὶ ξδ^{κε}. καὶ λε^{κε}. λαμβάνω τούτων τὰς πλευράς, γίνονται γ^{ε} δ^{ε}. ῑ^{ε}. ς^{ε}. προσθήμι ἑκάστῳ τούτων τὸ ἥμισυ, ☾ δίπλα τὰς πλευράς, ἰα^{ῑ} ιω^{δ} ὁ ιζ^{ῑ}. ἔσονται ὁ ἄρα οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ὁς μϛ ρκα^{ϝ}. ὁς ὁ υμϛ^{ϝ}. ὁς ὁ σωϟ^{ϝ}.

IN QVAESTIONEM XXXII.

LEMMA Diophanti vniuersaliùs etiam proponetur hoc pacto.

Omnis quadratus quolibet multiplice sui lateris multatus, & adsumens quadratum semissis multiplicatoris, quadratum facit, cuius latus adscito semisse multiplicatoris, exhibet latus prioris quadrati. Oportet autem latus prioris quadrati esse maius semisse multiplicatoris.

H 48. D 6.
A..... B... C.
E 25. F 9. G 64.

Esto quadratus G. cuius latus A C. & sit multiplicator D cuius semissis B C. cuius quadratus F. productus autem ex D in A C. sit H. Itaque auferendo H ex G. & residuo addendo F. fiat E. Dico E quadratum esse à latere A B. cui addito B C. fit A C latus prioris quadrati G. Etenim quia productus ex D in A C puta H. æquatur productis ex D in singulos A B. B C. productus autem ex D in suum semissem B C æquatur duplo quadrati F. patet auferre H ex G. idem esse, atque auferre ex G productum ex D in A B & duplum quadrati F. Quare cùm residuo addendo F fiat E patet E fieri si ex G auferatur productus ex D in A B & quadratus F. vnde è conuerso si ipsi E addantur productus ex D in A B & quadratus F. fiet G. sed vt constat ex lemmate præcedentis, si quadrato ex A B addantur idem pro- *1. secundi.*

ductus ex D in A B. & idem quadratus F fiet idem quadratus G. Igitur E est quadratus ipsius AB. Quod demonstrandum erat.

Hæc quæstio quoque ad quotlibet numeros extendetur, vt aliquot exemplis ostendere libet, cùm hîc ad propositiones libri quinti recurrere minimè cogamur. Itaque.

Inueniantur duo numeri, vt summa quadratorum, laterum summa detracta conficiat datum numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis.

Datus esto 6. Igitur ad 6. addendo duos quadrantes vnitatis, patet $6\frac{1}{2}$ diuidendum in duos quadratos, & vtrique lateri addendo $\frac{1}{2}$ fient quæsitorum quadratorum latera. ducantur omnia in 4. fiet 26. diuidendus in duos quadratos. Diuiditur autem in 25. & 1. quorum latera 5 & 1. quorum semissis, puta $\frac{5}{2}$ & $\frac{1}{2}$ sunt latera quadratorum ex quibus $6\frac{1}{2}$ componitur. Addo ergo vnicuique $\frac{1}{2}$. & fiunt latera quæsitorum quadratorum 3. & 1. quæ soluunt quæstionem, nam summa laterum est 4. quadratorum 10. vnde auferendo 4. manet 6. Rursus.

Inueniantur tres quadrati, quorum summa, laterum summa detracta datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis.

Datus esto 8. Igitur ad 8. addendo tres quadrantes vnitatis, fiet $8\frac{3}{4}$ diuidendus in tres quadratos, omnia per 4. fiet 35. diuidendus in tres quadratos. Diuiditur autem in 1. 9. 25. quorum latera 1. 3. 5. quorum semissis $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{5}{2}$. sunt latera quadratorum, ex quibus $8\frac{3}{4}$ componitur. Quare vnicuique addendo $\frac{1}{2}$ fient quæsitorum latera quadratorum 1. 2. 3. Nam summa quadratorum fit 14. vnde auferendo 6. summam laterum, supereſt 8. Rursus.

Inueniantur quinque quadrati, quorum summa, laterum summa detracta, datum faciat numerum.

Datus esto 3. Igitur ad 3. addendo quinque quadrantes vnitatis fiet $4\frac{1}{4}$ diuidendus in quinque quadratos omnia per 4. fiet 17. diuidendus in quinque quadratos. Diuiditur autem in 4. 9. 4. & si duo ex illis in duos diuidantur, totus 17. in quinque diuisus erit, diuidatur ergo 4. in quadratos $\frac{36}{25}$ & $\frac{64}{25}$. & rursus 9. diuidatur in duos quadratos $\frac{81}{25}$. & $\frac{141}{25}$ sic totus 17. diuisus est in quinque quadratos, quorum latera 2. $\frac{6}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{9}{5}$. $\frac{12}{5}$. quorum semisses 1. $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{9}{10}$. $\frac{6}{5}$. sunt latera quadratorum ex quibus componitur $4\frac{1}{4}$. vnde singulis addendo $\frac{1}{2}$. fiunt quæsitorum quadratorum latera $\frac{3}{2}$. $\frac{11}{10}$. $\frac{13}{10}$. $\frac{14}{10}$ $\frac{17}{10}$. & soluunt quæstionem. Item.

Inueniantur quatuor quadrati, quorum summa, detracto sextuplo summæ laterum, datum conficiat numerum. Datus esto 4.

Quoniam, vt constat ex lemmate supra tradito, omnis quadratus multatus sextuplo sui lateris, & adsumens 9. quadratum facit, cuius latus adscito 3. exhibet prioris quadrati latus. Quatuor vtique quadrati multati sextuplo laterum & adsumentes quater 9. nimirum 36. facient quatuor quadratos. Quare cùm quatuor quadrati multati sextuplo laterum faciant 4. patet addito 4. ad 36. fieri 40. diuidendum in quatuor quadratos, quorum lateribus si addatur 3. sigillatim, fient latera quæsitorum quadratorum. Porro 40. diuiditur in duos quadratos 36. & 4. quorum quilibet si diuidatur rursus in duos, puta 4. in $\frac{36}{25}$ & $\frac{64}{25}$. & similiter 36. in $\frac{324}{25}$ & $\frac{576}{25}$. Iam totus 40. in quatuor quadratos diuisus erit, quorum latera $\frac{6}{5}$. $\frac{8}{5}$. $\frac{18}{5}$. $\frac{24}{5}$. quibus addendo sigillatim ternarium, fiunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{21}{5}$. $\frac{23}{5}$. $\frac{33}{5}$ $\frac{39}{5}$. & soluunt quæstionem. Rursus.

Inueniantur quinque quadrati, quorum summa, detracto sextuplo summæ laterum, datum faciat numerum.

Datus esto 10. Igitur ad 10. addendo quintuplum nouenarij, nimirum 45. fiet 55. diuidendus in quinque quadratos, & cujuslibet lateri addendo 3. fient quæsitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 55. in quatuor quadratos 1. 1. 4. 49. Quare vnus illorum puta 1. rursus in duos diuidatur, nimirum in $\frac{9}{25}$ & $\frac{16}{25}$. & sic totus 55. in quinque quadratos diuisus erit, quorum latera $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$. 1. 2. 7. quibus addendo sigillatim 3. fient latera quæsitorum quadratorum $\frac{18}{5}$. $\frac{19}{5}$. 4. 5. 10. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXXIII.

Τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ᾧ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἕνα. τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς. ᾧ μὲν προσθεῖναι μ̊ γ. ᾧ δὲ μ̊ ε. καὶ ποιεῖν τὸ ὑπ' αὐτ

VNITATEM diuidere in duos numeros, & vtrique addere datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Esto diuidenda vnitas in duos numeros, & oporteat

alteri addere 3. alteri 5. & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Ponatur primus 1 N. ergo secundus erit 1 − 1 N. & si primo addantur 3. fit 1 N. + 3. At si secundo addantur 5. fit 6 − 1 N. & productus eorum multiplicatione est 3 N. + 18. − 1 Q. æqualis quadrato. Esto quadrato 4 Q. Communis addatur defectus, fiunt 3 N. + 18. æquales 5 Q. & non est rationalis æquatio. Atqui 5 Q. est quadratus numerus vnitate auctus. Oportet itaque hunc ductum in vnitates 18. & adsumentem quadratum semissis 3 N. nimirum 2 $\frac{1}{4}$. facere quadratum. Eò igitur nunc redactus sum, vt quæram quadratum qui adsumpta vnitate, & per 18. multiplicatus, adscitisque 2 $\frac{1}{4}$ faciat quadratum. Esto quadratus ille 1 Q. Hic vnitate auctus & ductus in 18. adscitisque 2 $\frac{1}{4}$ fit 18 Q. + 20 $\frac{1}{4}$ æqualis quadrato. Omnia quater, fiunt 72 Q. + 81. æqualia quadrato. Formo quadratum à 8 N. + 9. & fit 1 N. 18. Ad positiones. Erit quadratus 324. Redeo ad propositum initio, & 3 N. + 18 − 1 Q. æquo quadrato iam inuento. 324 Q. & fit 1 N. $\frac{78}{325}$ hoc est $\frac{6}{25}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{6}{25}$. secundus $\frac{12}{25}$.

τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^{ος} ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μ^{ος} ᾱ ⏋ ς^{ος} ᾱ. ⸫ ἐὰν μὲν τῷ πρώτῳ προστεθῶσι μ^{οι} γ̄. ἔσται ς^{ος} ᾱ μ^{οι} γ̄. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μ^{οι} ε̄. ἔσται μ^{οι} ς̄ ⏋ ς^{ος} ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτ̄ ςς̄ γ̄ μ^{οι} ιη̄ ⏋ δ^{υ} ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δ^{υ} δ̄. ⸫ κοινὴ προσκείσθω τὰ τοῦ λείψεως, γίνονται ςς^{οι} γ̄ μ^{οι} ιη̄ ἴσοι δ^{υ} ε̄. καὶ ἔστιν ἡ ἴσωσις ῥητή. ἀλλ' αἱ δ^{υ} ε̄. ὅτι τετράγωνος μ^{ος} μ^{οι} ᾱ. λείπει δὲ ταῦτα ὅπερ τὰς ιη̄. μονάδας πολλαπλασιαθέντα, καὶ προσλαβόντα τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισείας τοῦ ξιδν ςς τετράγωνον. τουτέστι β̄. α δ^{ον}. ποιεῖν τετράγωνον. διὰ τοῦτο τοίνυν ἀπῆκται μοι εἰς τὸ ζητῆσαι τετράγωνον ὃς προσλαβὼν μ^{ον} ᾱ. καὶ ὀκτωκαιδεκάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μ^{ον} β̄. α δ^{ον}. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ τετράγωνος δ^{υ} ᾱ. ἔτος μ^{ος} μ^{οι} ᾱ ὀκτωκαιδεκάκις γινόμενος, καὶ προσλαβὼν μ^{ον} β̄. α δ^{ον}. ποιεῖ δ^{υ} ιη̄ μ^{οι} κ̄. α δ^{ον}. ἴσας τετραγώνῳ πάντα τετράκις, γίνονται δ^{υ} οβ̄ μ^{οι} πᾱ ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ πλάσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ςς̄ η μ^{ου} θ̄. γίνεται ὁ ς^{ος} μ^{οι} ιη̄. ὅπερ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ τετράγωνος τκδ̄. ἔρχομαι ὅπερ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἰσῶσαι ςς^{οις} γ̄ μ^{οι} ιη̄ ⏋ δ^{υ} ᾱ ἴσοις τετραγώνῳ. ὧν νῦν τάσσω δ^{υ} τκδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} οη̄ $^{\text{τκε̄}}$. τουτέστιν ς̄ $^{\text{κε̄}}$. ὅπερ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ς̄ $^{\text{κε̄}}$. ὁ δὲ δεύτερος ιθ̄ $^{\text{κε̄}}$.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

Hic Diophantus in solutione lemmatis assumpti ad regulas compositas deuoluitur. Sed subtili sane artificio cauet, ne incidat in numeros surdos, cuius defectu cautionis non arbitratus sum ad huiusmodi regulas deueniendum esse vigesima tertia quæstione libri huius. Quamuis enim in proposito ibi exemplo res bene succedat, & solutio contingat rationalis, attamen non ostendit author quomodo id necessario eueniat si aliquo modo mutetur operatio, quod in hac quæstione eleganter præstitit. Cæterùm quid sibi velit Diophantus, non satis adsequutus est Xilander. Putat enim eò quod 5 Q. æquantur 3 N. + 18. æquationem reducendam esse ad 1 Q. diuidendo scilicet omnia per 5. vnde fit 1 Q. æqualis $\frac{3}{5}$ N. + $\frac{18}{5}$. Quamobrem cùm Diophantus ait quadratum semissis de 3 N. addendum producto ex 5. in 18. censet Xilander sumi debere semissem non de 3. simpliciter, sed de $\frac{3}{5}$. & eius quadratum esse non 2 $\frac{1}{4}$ simpliciter, sed 2. $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{25}$. quæ interpretatio nimis coacta est, & à mente Diophanti prorsus aliena. Tenebras autem effudit Xilandro, ignorantia methodi qua regulas compositas resoluit Diophantus, quam ad trigesimam tertiam primi explicauimus. Nam ad vitandas fractiones, ratò Diophantus æquationem reducit ad 1 Q. Sed ducto numero quadratorum in numerum vnitatum, addit producto quadratum semissis numeri Numerorum, & reliqua perficit, vt loco citato docuimus. Hinc est cur velit 5. numerum quadratorum duci in vnitates 18. & producto 90. addi 2 $\frac{1}{4}$ quadratum semissis numeri numerorum 3. Quoniam verò, vt solutio rationalis sit oportet hac additione fieri quadratum, apparet necessitas lemmatis assumpti. Cùm enim numerus quadrato æquandus sit 3 N. + 18 − 1 Q. patet quærendum esse quadratum, qui vnitate auctus & peri 18. multiplicatus, itaque adsumens 2 $\frac{1}{4}$. faciat quadratum.

In huius quoque lemmatis explicatione insignis occurrit difficultas, cuius tamen ne verbum quidem Xilander. Cùm enim tandem 72. Q. + 81. æquandus sit quadrato, euidens est quadrati latus commodè fingi non posse, nisi vel quadratorum vel vnitatum numerus; quadratus sit. Ostendendum ergo est necessario euenire vt vnitatum numerus, qualis est hîc 81. quadratus sit alioquin casu, non arte certa res succedere videbitur. Atqui 81. est quadruplum ipsius 20. $\frac{1}{4}$. Quare vt 81. quadratus sit oportuit prius 20 $\frac{1}{4}$ quadratum esse. Porro 20. $\frac{1}{4}$ fit ad 18. addendo 2 $\frac{1}{4}$. Videndum igitur vnde pro-

uenerint 18. & 2 $\frac{1}{4}$. factus est autem 18. ex 3. in 6. & 2 $\frac{1}{4}$ est quadratus semissis de 3 N. Fiunt autem 3 N. addendo simul + 6 N. & − 3 N. in multiplicatione 1 N. + 3. per 6 − 1 N. Quare cùm ob signorum contrarietatem additio in subtractionem mutetur, patet 3 N. tandem fieri auferendo 3 N. à 6 N. Quamobrem 18. est productus ex 3. in 6. At 2 $\frac{1}{4}$ est quadratus semissis interualli eorundem 3. & 6.

2.2. *Porisma.* Constat autem producto multiplicationis duorum numerorum addendo quadratum semissis interualli eorundem, fieri quadratum semissis summæ ipsorum. Quare patet propositum; sic vides 20 $\frac{1}{4}$ seu $\frac{81}{4}$ esse quadratum semissis duorum 3. & 6. seu ipsius $\frac{9}{2}$.

Rursus in fingendo latere quadrati 72 Q. + 81. magna cautio adhibenda est, quod non vidit Xilander, nec attigit ipse Diophantus. Etenim si ad hanc æquationem solùm respicias, sufficit si ponas hoc latus 9 + tot Numeris, quorum quadratus sit minor quàm 72. Sed si ponas hoc latus 9 + 6 N. vel 9. + aliquo numero Numerorum minore quàm 6. fiet valor Numeri qui prioribus positionibus nullatenus accommodari poterit, cùm enim eius quadratus æquabitur 3 N. + 18 − 1 Q. fiet 1. N. maior vnitate, quod est absurdum, cùm 1 N. ponatur pars vnitatis. Hoc igitur incommodum vt vitemus, sic ratiocinandum est. Quia 3 N. + 18 − 1 Q. sic quadrato æquandus est, vt fiat 1 N. minor vnitate, in hac autem æquatione debent tandem 3 N. + 18. æquari cuidam quadratorum numero: at si 1 N. ponatur æqualis vnitati, vtique 3 N. + 18. æquabuntur 21 Q. Quo verò minor ponetur valor Numeri, eo maiori numeri quadratorum æquabuntur 3 N. + 18. manifestũ est vt fiat 1 N. minor vnitate oportere vt 3 N. + 18. æquentur numero quadratorum maiori quàm 21. Porro numerus iste quadratorũ fit ex quodam quadrato vnitate aucto, quare sublata vnitate de 21. consequens est quadratum cui æquari debet 3 N. + 18 − 1 Q. maiorem esse quàm 20. Cùm ergo latus proximum ipsius 20. sit 4 $\frac{1}{2}$. manifestũ est, latus quadrati 72 Q. + 8. ita ponendũ esse vt fiat valor Numeri maior quàm 4 $\frac{1}{2}$. fit autem in hac æquatione valor Numeri, auferendo à 72. quendam quadratum, & per residuum diuidendo productum ex 18. in latus eiusdem quadrati. Igitur $\frac{18\ N}{72\ 1\ 1Q}$. maior esse debet quàm 4 $\frac{1}{2}$. & tandem re ad integros redacta 18 N. maiores sunt quàm 324 − 4 $\frac{1}{2}$ Q. & addito defectu, atque etiam facto paralaboliſmo, quia commodé potest fieri, tandem 72. maior esse debet quàm 4 N. + 1 Q. Qua æquatione resoluta cùm fiat 1 N. 6 $\frac{3}{4}$. ferè patet latus fictitium ponendum 9 + tot numeris, qui excedant 6 $\frac{3}{4}$. sic Diophantus posuit 9 + 8 N. Poni quoque poterat 9 + 7 N. vel 9 + aliquot Numeris, qui excedant 6 $\frac{3}{4}$. & quorum quadratus sit minor quàm 72.

Eodem prorsus artificio quæstio hæc ad omnem numerum extendetur. Quod vt exemplo comprobemus. Esto 2. diuidendus in duas partes, vt primæ addendo 3. secundæ 5. & summas inter se multiplicando, fiat quadratus. Esto prima pars 1 N. ergo secunda 2 − 1 N. & si primæ addatur 3. secundæ 5. fiunt 1 N. + 3. & 7 − 1 N. & productus eorum multiplicatione est 4 N. + 21 − 1 Q. æquandus quadrato, videlicet alicui quadratorum Numero quadrato, qui talis sumendus est, vt auctus vnitate, & multiplicatus in 21. itaque adsumens 4. faciat quadratum. Ponatur is 1 Q. Igitur 21 Q. + 25. quadrato æquandus est. Sed curandum vt talis hîc proueniat valor Numeri, vt applicatus priori æquationi, fiat in ea 1 N. minor quàm 2. quia 1 N. ponitur esse pars binarij. Cùm ergo æquando 4 N. + 21 − 1 Q. alicui quadrato, tandem 4 N. + 21. æquentur aliquot quadratis, si autem 1. N. ponatur 2. fiant 4 N. + 21. æquales 7 $\frac{1}{4}$ Q. patet vt fiat 1 N. minor quàm 2. oportere 4 N. + 21. æquari quadratorum numero maiori quàm 7 $\frac{1}{4}$. Et quia ille quadratorum numerus est quadratus vnitate auctus, auferendo vnitatem de 7 $\frac{1}{4}$ sequitur quadratum qui æqualis ponetur 4 N. + 21 − 1 Q. maiorem esse debere quàm 6 $\frac{1}{4}$. atque ideo latus eius maius esse oportet quàm $\frac{5}{2}$. Quamobrem numeri 21 Q. + 25. latus ita fingendum est, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{5}{2}$. Fit autem 1 N. auferendo quadratum quendam de 21. & per residuum diuidendo decuplum lateris illius. Quare $\frac{10\ N}{21\ 1\ 1Q}$ maior esse debet quàm $\frac{5}{2}$. qua æquatione ritè præparata, tandem fiunt 4 N. + 1 Q. maiores quàm 21. vnde constat 1 N. excedere debere 3. Ponatur igitur latus fictitium 5 + 4 N. fiet quadratus 25 + 40 N. + 16 Q. æqualis 21 Q. + 25. & fiet 1 N. 8. quadratus 64. Redeo ad propositum initio, & 4 N. + 21 − 1 Q. æquo quadrato 64 Q. & fit 1 N. $\frac{39}{65}$. Prima pars binarij. Secunda verò est $\frac{91}{65}$ quæ soluunt quæstionem nam primæ addendo 3. secundæ 5. fiunt $\frac{234}{65}$. & $\frac{416}{65}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{97344}{4225}$ quadratus à latere $\frac{312}{65}$.

QVAESTIO XXXIV.

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ᾧ μὲν προσθεῖναι μ^ο γ̄. ᾧ δὲ μ^ο ε̄. καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ε ᾱ. καὶ λεῖψις μ^ο γ̄ ἃς προσλαμβάνει. λοιπὸς

VNITATEM diuidere in duos numeros, & addere vtrique datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Sit vnitas diuidenda in duos numeros, & oporteat alteri addere 3. alteri 5. & ita facere quadratum productum multiplicationis eo-

rum

rum. Ponatur primus 1 N. — 3. quandoquidem 3. debet illi addi, relinquetur ergo secundus 4 — 1 N. & si primo addantur 3 fit 1 N. si autem secundo addantur 5. fit 9 — 1 N. & fit eorum multiplicatione 9 N. — 1 Q. æqualis quadrato. Esto quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{2}{5}$. si ad positiones hoc applicare coner, non possum auferre 3 de 1 N. Oportet igitur numerum maiorem quidem esse quam 3. minorem verò quàm 4. Atqui 1 N. factus est diuiso 9. per 5. Ipse autem 5. est quadratus vnitate auctus. Iam si 9. diuisus per quadratũ aliquem vnitate auctum facit numerum maiorem quàm 3. oportet eum per quem diuiditur minorẽ esse quàm 3. sed his per quem 9. diuiditur est quadratus vnitate auctus. Ergo quadratus vnitate auctus minor est quàm 3. Auferatur vnitas. Igitur quadratus minor est quàm 2. Rursus quia volumus secundum diuisum per quadratũ vnitate auctum, facere numerum minorem quàm 4. oportet eum per quem diuiditur maiorem esse quàm 2 $\frac{1}{4}$. Is autem per quem 9. diuiditur est quadratus vnitate auctus, proinde quadratus vnitate auctus maior est quàm 2 $\frac{1}{4}$. Auferatur vnitas. Ergo quadratus maior est quàm 1 $\frac{1}{4}$. Sed iam ostensus est minor quàm 2. Eo itaque res deducitur, vt inueniam aliquem quadratum maiorem quàm 1 $\frac{1}{4}$ minorem quàm 2. Resoluo hæc in partes quadratas, nempè in sexagesimas quartas, & fiunt 80. & 128. Facilè ergo inuenietur quadratus $\frac{100}{144}$ seu $\frac{25}{36}$. Reuertor ad id quod initio erat propositum. Quærebam 9 N. — 1 Q. æquare quadrato. esto inuento quadrato $\frac{25}{36}$ Q. & fit 1 N. $\frac{144}{41}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{25}{41}$. secundus $\frac{20}{41}$.

ἄρα ὁ δεύτερος ἔσαι μ̊ δ̄ λείψει ς̄ᵉ ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν πρώτῳ προσθῶσι μ̊ γ̄. γίνεται ς̄ᵉ ᾱ. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μ̊ ε̄. γίνεται μ̊ θ̄ λείψει ς̄ᵉ ᾱ. καί ἐστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ςᵍ θ̄ λείψει δ̄ᵘ ᾱ ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δ̄ᵘ δ̄ Γ. καὶ γίνεται ὁ ς̊. θ̄ ᵉ̄. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. καὶ ἡ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ ς̄ᵉ ᾱ. μονάδας γ̄. δεῖ οὖν τὸν ς̄ μείζονα μὲν εἶναι μ̊ Γ. ἐλάσσονα δὲ μ̊ Δ̄. ὁ δὲ ς̊ δύναται ἐπὶ τὸν θ̄ μειωθῆναι εἰς τὸν ε̄. ὃς ἐστι τετράγωνος σὺν μονάδι μιᾷ. εἰ δὲ ὁ θ̄ μειζόμενος εἰς τινα τετράγωνον σὺν μ̊ ᾱ. ἀριθμὸν ποιεῖ μείζονα μ̊ Γ. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ γ̄. εἰς ὃν δὲ ὁ θ̄ μερίζεται τετράγωνός ἐστι σὺν μονάδι, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν μονάδι μιᾷ ἐλάσσων ἔστι τοῦ γ̄. καὶ ἔρρωται ἡ μονάς. ὁ ἄρα τετράγωνος ἐλάσσων ἐστὶ μ̊ β̄. πάλιν θέλομεν τὸν δεύτερον μερίζοντα εἰς τετράγωνον σὺν μονάδι μιᾷ ποιεῖν ἀριθμὸν ἐλάσσονα μ̊ δ̄. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, μείζων ἐστὶ μ̊ β̄. ᾱ δ̄ᵘ. εἰς ὃν δὲ μερίζεται. ὁ δὲ τετράγωνός ἐστι σὺν μονάδι μιᾷ, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν τῇ μονάδι μείζων ἐστὶ μ̊ β̄. ᾱ δ̄ᵘ. καὶ ἔρρωται ἡ μονὰς μία. ὥστε ὁ τετράγωνος μείζων ἐστὶ μονάδος, καὶ ᾱ δ̄ᵘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐλάσσων μ̊ β̄. γέγονε δή μοι δυεῖν πινα τετράγωνον ὅς ἐστι μείζων μ̊ ᾱ. ᾱ δ̄ᵘ. ἐλάσσων δὲ β̄. καὶ ἀναλύω ταῦτα εἰς μόρια τετραγωνικά, εἰς ξδ̄. καὶ γίνονται π̄. καὶ ρκη̄ τοῦτο δὲ ἐστι ῥᾴδιον, καὶ ἔστιν ὁ τετράγωνος ρ̄ ξδ̄ᵘ. τουτέστιν κε ιϛ̄ᵘ ἔρχομαι οὖν ὅπου τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ἐζήτουν ςςᵉ̄ˢ θ̄. λείψει δ̄ᵘ α ἴσα τετραγώνῳ. τουτέστι τῷ δυσμιᾷ, δ̄ᵘ κε ιϛ̄ᵘ. καὶ γίνεται ὁ ς̊ ρυδ̄ μαᵘ. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ πρῶτος κᾱ μαᵘ. ὁ δεύτερος κ̄ μαᵘ.

IN QVAESTIONEM XXXIV.

EADEM est quæstio hæc cum præcedente, sed diuersa operatio, qua videtur Diophantus rem absoluere voluisse absque auxilio regularum compositarum. Nam ita suas instituit positiones, vt tandem fiat 9 N. — 1 Q. quadrato æquandus, quod fit per simplicem æquationem qua quadrati Numeris æquales sunt, & fit valor Numeri diuidendo 9. per aliquem quadratum vnitate auctum. Quoniam verò altera pars vnitatis posita est 1 N. — 3. altera 4 — 1 N. debere esse maiorem quàm 4. Igitur quærendus est quadratus qui vnitate auctus, & diuidens 9. det quotientem minorem quàm 3. maiorem quàm 4. Quare cùm diuidendo 9. tum per 3. tum per 4. fiant 3. & 2. $\frac{1}{4}$ patet quadratum vnitate auctum consistere debere inter 3. & 2 $\frac{1}{4}$. ac proinde auferendo vtrimque vnitatem, quærendus erit quadratus minor quàm 2. maior quàm 1 $\frac{1}{4}$. Tales infiniti reperientur reducendo 2. & 1 $\frac{1}{4}$ ad fractiones quadratas ab eodem aliquo quadrato maiore denominatas, vt fecit Diophantus qui reduxit ad sexagesimas quartas.

Cæterùm & hanc operationem cuilibet numero applicabimus, quod iam antè nos præstitit Vieta noster zetetico 13. lib. 5. Sit diuidendus 3. in duas partes, vt alteri addendo 6. alteri 12. & summas in-

ter se multiplicando, fiat quadratus. Ponatur pars altera 1 N. – 6. altera ergo erit 9. – 1 N. & primæ addendo 6. secundæ 12. fiunt 1 N. & 21. – 1 N. quorum mutuo ductu producitur 21 N. – 1 Q. æquandus quadrato. Sed ex ipsis positionibus apparet quærendum esse quadratum qui vnitate auctus & diuidens 21. det quotientem maiorem quàm 6. minorem quàm 9. Itaque cùm 21. diuisus tum per 6. tum per 9. det quotientes $3\frac{1}{2}$ & $2\frac{1}{3}$. Quadratus vnitate auctus sumendus erit inter $3\frac{1}{2}$ & $2\frac{1}{3}$. & ablata vnitate quærendus quadratus minor quàm $2\frac{1}{2}$. maior quàm $1\frac{1}{3}$. Reducatur vterque ad trigesimas sextas, fient $\frac{90}{36}$ & $\frac{48}{36}$ inter quos sumi possunt quadrati proposito satisfacientes $\frac{49}{36}$. $\frac{64}{36}$. $\frac{81}{36}$. si sumas vltimum seu $\frac{9}{4}$ æquabis $\frac{9}{4}$ Q. & 21 N. – 1 Q. vnde fiet 1 N. $\frac{84}{13}$. Sunt ergo quæsitæ partes ternarij $\frac{6}{13}$. & $\frac{33}{13}$. quæ soluunt quæstionem, nam primæ addendo 6. secundæ 12. fiunt $\frac{84}{4}$ & $\frac{189}{13}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{15876}{1169}$ quadratus à latere $\frac{126}{13}$.

Sed & aliam analysim huic soluendæ quæstioni excogitauimus, Diophantæa vtraque non deteriorem, atque etiam faciliorem. sit 12. numerus diuidendus, & addendi 3. & 5. patet ergo summarum aggregatum fore 10. Quare res eò deducitur vt 10. diuidatur in duos planos similes, quorum alter superest 3. alter excedat 5. Sic enim ab altero auferendo 3. ab altero 5. remanebunt quæsitæ binarij partes. Porrò 10. diuidetur in duos huiusmodi planos similes hac arte. Sumpto minore addendorum 3. comparo illum cum residuo de 10. puta cum 7. & quæro duos quadratos, quorum sit minor ratio quàm 3. ad 7. quales sunt 4 & 9. vel 9. & 16. & alij infiniti. Diuidatur ergo 10. in duos numeros in ratione 4. ad 9. Inuenientur hi per Canonem secundæ primi $\frac{40}{13}$ & $\frac{90}{13}$. Quare si ab altero detraxero 3. ab altero 5. remanebunt quæsitæ binarij partes $\frac{1}{13}$ & $\frac{25}{13}$. Rursus si diuisero 10. in duos numeros seruantes rationem 9. ad 16. erunt hi $\frac{13}{5}$ & $\frac{32}{5}$ & à primo auferendo 3. à secundo 5. remanent quæsitæ binarij partes $\frac{3}{5}$ & $\frac{7}{5}$.

Eadem arte licebit & sequentes quæstiones soluere.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum in duas partes secare, vt ab vtraque auferendo datum numerum, ex residuorum mutuo ductu, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem esse summa detrahendorum numerorum.

Diuidendus sit 12. in duas partes, vt altera auferendo 3. ab altera 5. ex residuorum mutuo ductu, quadratus fiat. Ponatur altera 1 N. + 3. altera ergo erit 9. – 1 N. & à prima auferendo 3. à secunda 5. remanent 1 N. & 4 – 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N – 1 Q. æquandus quadrato. Esto cuilibet quadratorum numero quadrato, puta 9 Q. fiet 1 N. $\frac{5}{9}$ Sunt ergo partes quæsitæ $3\frac{5}{9}$ & $8\frac{5}{9}$. & soluunt quæstionem.

Aliter. Quoniam summa detrahendorum est 8. qua ablata de 12. supereſt 4. oportet diuidere 4. in duos quoscunque planos similes, sic enim alteri addendo 3. alteri 5. fient quæsitæ partes numeri 12.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum secare in duas partes, vt vtramque auferendo à dato numero, ex residuorum mutuo ductu fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum minorem esse summa numerorum, a quibus partes detrahendæ sunt.

Diuidendus sit 4. in duas partes, vt alteram auferendo à 3. alteram à 5. ex residuorum mutuo ductu fiat quadratus. Ponatur altera 3 – 1 N. altera ergo erit 1. + 1 N. & primam auferendo à 3. secundam à 5. remanent 1 N. & 4 – 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N. – 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est, vt vnitate auctus & diuidens 4. det quotientem minorem quàm 3. quia scilicet altera pars posita est 3 – 1 N. At diuidendo 4. per 3. fit $\frac{4}{3}$. patet ergo quadratum vnitate auctum, debere esse maiorem quàm $\frac{4}{3}$ & ablata vnitate, quadratus debet esse maior quàm $\frac{1}{3}$. sit is 9 Q. fiet 1 N. $\frac{5}{9}$. Sunt ergo quæsitæ partes $2\frac{5}{9}$ & $1\frac{5}{9}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum secare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, ab altera datum etiam numerum detrahendo, ex mutuo ductu summæ & residui, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem esse detrahendo.

Sit diuidendus 8. in duas partes, vt alteri addendo 3. ab altera detrahendo 5. ex summa in residuum fiat quadratus. Ponatur altera pars 1 N. – 3. ergo altera erit 11 – 1 N. & primæ addendo 3. à secunda auferendo 5. fiunt 1 N. & 6 – 1 N. Quorum mutuo ductu fit 6 N. – 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est vt vnitate auctus & diuidens 6. det quotientem maiorem quàm 3. Quare cùm diuidendo 6. per 3. fiat 2. patet quadratum vnitate auctum debere esse minorem quàm 2. & detracta vnitate,

sumendus erit quadratus minor quàm 1. Ponatur $\frac{1}{4}$ Q. fiet 1 N. $\frac{24}{5}$. sunt ergo quæsitæ partes $\frac{9}{5}$ & $\frac{35}{5}$.

QVÆSTIO QVARTA

Datum numerum secare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, alteram detrahendo à dato numero, ex summa in residuum fiat quadratus.

Hic duplex casus datur, quia numerus à quo fit detractio nunc minor, nunc maior esse potest numero diuidendo. Primùm ergo fit 8. secandus in duas partes, vt primæ addendo 3. secundam auferendo à 5. fiat quod postulatur. esto secunda $5-1$ N. ergo prima erit $3+1$ N. & secundam auferendo à 5. & addendo 3. primæ fiunt 1 N. & $6+1$ N. quorum mutuo ductu fit 6 N. $+1$ Q æquandus quadrato. qui sic ponendus est, vt multatus vnitate & diuidens 6. det quotientem minorem quàm 5. Quare cùm diuiso 6. per 5. fiat $\frac{6}{5}$. patet quadratum vnitate multatum, debere esse maiorem quàm $\frac{6}{5}$. & addita vnitate, sumendus est quadratus maior quàm $\frac{11}{5}$. esto 9. Q. fiet 1 N. $\frac{3}{4}$. Sunt ergo quæsitæ partes prima $\frac{15}{4}$ secunda $\frac{17}{4}$.

Deinde fit 8. secandus in duas partes, vt primæ addendo 3. secundam auferendo à 20. fiat quod petitur. Ponatur secunda $20-1$ N. ergo prima est 1 N. -12. & secundam auferendo à 20. addendo 3. primæ, fiunt 1 N. & 1 N. -9. quorum mutuo ductu fit 1 Q. -9. N. æquandus quadrato, qui talis ponendus est vt detracto eo ab vnitate, & per residuum diuidendo 9. fiat quotiens minor quàm 20. maior quàm 12. Cùm itaque diuidendo 9. tum per 20. tum per 12. fiant $\frac{9}{20}$ & $\frac{3}{4}$. & vtrumque auferendo ab vnitate, relinquantur $\frac{11}{20}$ & $\frac{1}{4}$. patet sumendum esse quadratum maiorem quàm $\frac{1}{4}$. minorem quàm $\frac{11}{20}$. sumatur $\frac{1}{2}$ Q. fiet ergo 1 N. $\frac{8}{5}$ & erunt quæsitæ partes. Prima $\frac{21}{5}$. secunda $\frac{19}{5}$.

QVÆSTIO XXXV.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt qui fit primo in secundum ducto, siue addito tertio, siue detracto quadratum faciat. Esto datus 6. Ponatur tertius 1 N. secundus vnitatum aliquot quæ sint minus quàm 6. puta 2. Primus ergo erit $4-1$ N. Restant duo postulata, nimirum vt productus ex primo in secundum, tertio siue addito siue detracto faciat quadratum. Et occurrit duplicata æqualitas, nam $8-1$ N. æquantur quadrato, & $8-3$ N. æquantur quadrato. Expediri autem non potest, quia numeri inter se non habent rationem quam habet quadratus ad quadratum. Sed 1 N. vnitate minor est quàm 2. & 3 N. vnitate maior eodem 2. Eò itaque res deducta est, vt inueniam numerum aliquem loco ipsius 2. vt qui eo vnitate maior est ad eum qui vnitate minor est eodem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Esto quæsitus 1 N. erit ergo vnitate maior 1 N. $+1$. At vnitate minor 1 N -1. Volumus igitur hos inter se rationem habere quam habet quadratus ad quadratum, sit vt 4. ad 1. Itaque cùm ducto 4. in 1 N. -1. fiat 4 N. -4. & ducto 1. in 1 N. $+1$. fiat 1 N. $+1$. vt habeant expositi numeri rationem quam habet quadratus ad quadratum. erunt. 4 N. -4.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου ἑαυτὸ μεταλάβῃ τὸν τρίτον. ἑαυτὸ λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ $\bar{5}$. τετάχθω ὁ τρίτος ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\alpha}$. καὶ ὁ δευτερος μ$^{\bar{\omega}}$ ὑπὲρ ὧν τὸ $\bar{5}$. ἔστω μ$^{\bar{\omega}}$ $\bar{\beta}$. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μ$^{\bar{\omega}}$ $\bar{\delta}$ λείψει ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\alpha}$. καὶ λοιπὰ ὅτι δύο ὑπάγματα, τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου ἑαυτὸ μεταλάβῃ τὸν τρίτον, ἑαυτὸ λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσώσις μ$^{\bar{\omega}}$ $\bar{η}$ λείψει ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\alpha}$. ἵσα τετραγώνῳ, καὶ μ$^{\bar{\omega}}$ $\bar{η}$. λείψει ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\gamma}$ ἴσα τετραγώνῳ, καὶ ἀμφότερα ὅτι διὰ τὸ μὴ εἶναι τοὺς ς$^{\bar{\varsigma}}$ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλὰ ὁ ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\alpha}$. μονάδι ἐλάσσων τοῦ $\bar{\beta}$. οἱ δὲ ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\gamma}$ ὁμοίως μείζονες μονάδι τοῦ $\bar{\beta}$. ἀπῆκται εἰς τὸ δεῖν ἀριθμόν τινα, ὡς τὸν $\bar{\beta}$. ἵνα ὁ μονάδι μιᾷ αὐτοῦ μείζων, ἔσται ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\alpha}$ μ$^{\bar{\omega}}$ $\bar{\alpha}$. ὁ δὲ μονάδι αὐτοῦ μείζων, πρὸς τὸν μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἔστω ὁ ζητούμενος ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\alpha}$. καὶ μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσων ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\alpha}$. λείψει μ$^{\bar{\omega}}$ $\bar{\alpha}$. θέλομεν οὖν αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν ἔστω δὲ πρὸς $\bar{\alpha}$. ὥστε ς$^{\bar{\varsigma}}$ εἷς λείψει μ$^{\bar{\omega}}$ $\bar{\alpha}$ τὸν μονάδας δ. γίνονται ςς$^{\bar{\varsigma}}$ δ λείψει μ$^{\bar{\omega}}$ δ. καὶ ς$^{\bar{\varsigma}}$ εἰς μ$^{\bar{\omega}}$ $\bar{\alpha}$ τὸν τῶν μονάδα μίαν γίνεται ς$^{\bar{\varsigma}}$ $\bar{\alpha}$. καὶ εἰσὶν ἕτοι οἱ ἐπεὶ μοι ἀριθμοὶ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

ἀριθμόν. νῦν ϛϛ^οι δ̄. λείψει μ^ο δ̄. ἴσοι ϛ^αις ᾱ μ^ο ᾱ. καὶ γίνε) ὁ ϛ^ος. μ^ο ε̄ γ̄̃. τάσσω ἓν τὸν δεύτερον μ^ο ε̄ γ̄̃. ὁ δὲ τρίτος ἔσται ϛ^α ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσαι μ^ο ιγ̄ γ̄̃. λείψει ϛ^α ᾱ. λοιπὸν δεῖ ἓν τὸ ὑπέταγμα τουτέστι τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου περιλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ λείψαντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου περιλαβὼν τὸν τρίτον ποιεῖ μ^ο ξε θ̄ϛ̄. ϛ. β γ̄. ϛς ἴσα τετραγώνῳ. λείψας δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μ^ο ξε θ̄ϛ̄. λείψει ϛς ῑ̄ γ̄̃. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα εἰς τὰ θ̄. ℂ γίνονται μ^ὰ ξε̄. λείψει ϛς̄ ϛ̄ ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μ^ο ξε̄ ϛ. ϛς̄ κδ̄ ἴσοι τετραγώνῳ. ℂ ἐξισῶ τὰς ϛς^ους τῆς μικρᾶς ἰσότητος ποιήσας τετράκις. ℂ ἔσι μ^ὰ σξ̄ ϛ. ϛς̄ κδ̄ ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μ^ο ξε̄ λείψει ϛς̄ κδ̄ ἴσοι τετραγώνῳ. νῦν τούτων λαμβάνω τὰ ὑπερέχοντα, καὶ ἔσι μ^ὸ ρϛ̄ε̄. καὶ ἐπιτέτμηται δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ὅσι μ^ο ρϛ̄ε̄. καὶ εἰσὶ ιε̄. καὶ ιᾱ. καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ὅσι τῷ ἐλάσσονι τετραγώνῳ. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ος μ^ο ῑ̄ γ̄̃. δεῖ τὰς ὑποσάσεις, ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ε̄ γ̄̃. ὁ δὲ δεύτερος ε̄ γ̄̃. ὁ δὲ τρίτος ῑ̄ γ̄̃. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

æquales 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{5}{3}$. Pono igitur secundum $\frac{5}{3}$ nam tertius est 1 N. ergo primus erit $\frac{13}{3}$ − 1 N. Restat vt postulata perficiantur, videlicet vt productus ex primo in secundum siue adscito tertio, siue dempto faciat quadratum. Sed productus ex primo in secundum adscito tertio facit $\frac{65}{9}$ − $\frac{3}{3}$ N. hoc ergo æquatur quadrato, & idem productus dempto tertio facit $\frac{65}{9}$ − $\frac{8}{3}$ N. hoc etiam æquatur quadrato. Omnia nouies, fiunt 65 − 6 N. æqualia quadrato. & 65 − 24 N. æqualia quadrato. Exæquo numeros æquationis vnius, multiplicans per 4. & est 260 − 24 N. æqualis quadrato, itemque 65 − 24 N. æquatur quadrato. Horum nunc interuallum sumo quod est 195. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 195. ij sunt 15. & 13. Horum interualli semissis in se æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{8}{3}$. Ad positiones. erit primus $\frac{5}{3}$. secundus $\frac{5}{3}$. tertius $\frac{8}{3}$. & demonstratio est euidens.

OBSERVATIO D. P. F.

ITa facilius fiet operatio, datus numerus 6. vtcunque diuidatur v. g. in 5, & 1. productus demptâ vnitate hoc est 4. per 6. datum numerum diuidatur, eueniet $\frac{4}{5}$ Quem si tum à 5. tum ab 1 abstuleris duo residua $\frac{13}{5}$ & $\frac{1}{5}$ erunt duæ priores partes numeri diuidendi 3. igitur erit $\frac{4}{3}$.

IN QVAESTIONEM XXXV.

QVID hîc præstiterim in Diophanto restituendo coniicere est ex versione Xilandri, cùm in codicem emendatiorem non inciderim, sed textus lacunas replere, & passim deprauata emendare certissimis coniecturis coactus sim; vbi legebatur ipso initio καὶ ὁ δεύτερος μ^ο ὑπερ ὧν τὸ ιϛ restitui ὑπερ ὧν τὸ ϛ. vt sit sensus, Ponendum secundum aliquot vnitatum super quas sit 6. ideſt quæ sint minus quàm 6. quod necesse est vt pars inueniatur minor toto.

Cæterùm emendato textu satis perspicua est operatio Diophanti; vtitur duplicata æqualitate eo modo quem explicauimus ad decimam octauam tertij, & nihil amplius hîc addendum, nisi quod limitationes quædam attendendæ sunt, quibus neglectis in absurdum aliquod incidamus necesse est. Primùm ergo cùm quæritur numerus qui vnitate auctus ad seipsum vnitate multatum rationem habeat quadrati ad quadratum, vnde colligitur 1 N. + 1. ad 1 N. − 1. debere esse in ratione quadrati ad quadratum, non temerè sumendi sunt duo quadrati quibus propositi numeri proportionales sint. Etenim 1 N. debet esse secundus Numerus quæsitorum, ac proinde pars totius numeri diuidendi 6. & per consequens minor quàm 6. Quamobrem tales duo quadrati deligendi sunt quorum summa, ad ipsorum interuallum minorem rationem habeat quàm 6 ad 1. Alioquin 1 N. maior inuenietur quàm 6. vt si esse ponatur 1 N. + 1. ad 1 N. − 1. sicut 49. ad 36. fiet enim per decimam nonam septimi 36 N. + 36. N. + 36. æqualis 49. N. − 49. & tandem 1 N. fiet 6. $\frac{7}{13}$. Quod est absurdum.

Deinde in duplicata æqualitate resoluenda cùm quæruntur duo numeri, quorum mutuo ductu fiat 195. hi tales sumendi sunt vt quadratus semissis summæ eorum sit minor quàm 260. vel vt quadratus semissis interualli eorundem sit minor quàm 65. quia scilicet numeri quadrato æquandi sunt 260 − 24 N. & 65 − 24. N. Quare cùm latus proximum de 65. sit 8. Oportet interuallum eor um non excedere 16. Idcirco sumi non potuerunt 194. & 1. neque 39. & 5. neque vlli integri præter 15. & 13. quos sumpsit Diophantus, sed per fractiones infinitis modis res expediri poterat.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros, vt si alter ab altero eandem partem siue easdem partes acceperit, ratio ad reliquum sit ea quæ poscitur. Iubeatur vt primus accipiens secundi partem aliquam vel partes, sit ad residuum triplus. At secundus sumens à primo eandem partem, vel easdem partes, sit residui quincuplus. Ponatur secundus 1 N + 1. Pars autem vel partes eius esto 1. Primus igitur erit 3 N − 1. sic enim primus sumens à secundo partem aliquam vel partes, nimirum 1. fit residui triplus. Volumus itaque & secundum sumentem primi eandem partem, vel easdem partes, residui quincuplum esse. Sed quoniam ambo simul faciunt 4 N. & secundus aliquid accipit, primusque id dat, & summa residui fit quincupla. Cæterùm summa eadem cum residuo iuncta facit 4 N. residuum vtique habebitur si sumamus sextantem de 4 N. nempe $\frac{2}{3}$ N. si ergo à 3 N. − 1. tollamus $\frac{2}{3}$ N. habebimus primi partem vel partes. Si autem tollamus, relinquitur $\frac{7}{3}$ N. − 1. Hoc ergo pars est vel partes primi. Nam secundus accipiens à primo $\frac{7}{3}$ N. − 1. fit quincuplus ad residuum ex primo. Superest hîc vt quæramus an quæ pars vel partes est 1. de 1 N + 1. eadem pars, vel eædem partes sit $\frac{7}{3}$ N − 1. de 3 N. − 1. Cùm autem tale aliquid quæris productum ex $\frac{7}{3}$ N. − 1. in 1 N. + 1. æquale est producto ex 3 N. − 1. in 1. hoc est partes alternatim multiplicantur, & fiunt $\frac{7}{3}$ Q. + $\frac{4}{3}$ N. − 1. æqualia 3 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{5}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{8}{7}$. secundus $\frac{12}{7}$. Erat autem 1. partes secundi, videamus ergo quæ partes secundi sit 1. Est vtique $\frac{7}{12}$. Multiplico per 7. duos numeros; erit primus 8. secundus 12. Partes autem $\frac{7}{12}$. Et quia primus non habet duodecimam, multiplico per 3. vtrumque, ne incidamus in diuisionem vnitatis, & fit primus 24. secundus 36. Partes autem seu $\frac{7}{12}$ illius quidem 14. Huius verò 21. & demonstratio manifesta.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἕτερος παρὰ τοῦ ἑτέρου προσλαβὼν τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη λόγον ἔχῃ πρὸς τὸν περιλειφθέντα, τὸν ἐπιταχθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν πρῶτον προσλαβόντα παρὰ τοῦ δευτέρου μέρος τί, ἢ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι τριπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον προσλαβόντα παρὰ τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ δεύτερος ς^{ου} $\bar{\alpha}$ μ^{ο} $\bar{\alpha}$. τὸ δὲ μέρος ἢ μέρη αὐτοῦ ἔστω μ^{ο} $\bar{\alpha}$. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ς^{ς} $\bar{\gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. καὶ ὁ πρῶτος ἐὰν προσλάβῃ τοῦ δευτέρου μέρος τὶ, ἢ μέρη, τουτέστι μ^{ο} $\bar{\alpha}$. γίνεται τοῦ λοιποῦ τριπλασίων. θέλομεν δὴ καὶ τὸν δεύτερον προσλαβόντα τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι πενταπλασίονα. ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ δύο εἰσὶν ς^{οι} καὶ ὁ δεύτερος λαμβάνει τὶ, καὶ ὁ πρῶτος δίδωσι, καὶ ὁ γενόμενος τοῦ λοιποῦ γίνεται πενταπλασίων, ὥστε ὁ συναμφότερος ὁ γενόμενος, καὶ ὁ λοιπὸς ἔσται, ς^{ς} $\bar{\delta}$ ὥστε ὁ λοιπὸς ἔσται ἐὰν τῶν ς^{ς} $\bar{\delta}$ λάβωμεν τὸ ἕκτον τουτέστι ς^{ς} $\bar{\beta}$ $^{\gamma}$. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ς^{ς} $\bar{\gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. ἄρωμεν ς^{ς} $\bar{\beta}$ $^{\gamma}$. ἕξομεν τοῦ πρώτου μέρος ἢ μέρη. ἐὰν δὲ ἄρωμεν, γίνεται ς^{ς} $\bar{\zeta}$ $^{\gamma}$. ϛ μ^{ο} $\bar{\alpha}$. τοῦτο ἄρα τοῦ πρώτου μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. λαβὼν γὰρ ὁ δεύτερος παρὰ τοῦ πρώτου ς^{ς} $\bar{\zeta}$ $^{\gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. γίνεται πενταπλασίων τοῦ καταλιμπανομένου τοῦ πρώτου. λοιπὸν δεῖ ἐνθάδε ζητῆσαι, εἰ ὁ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη μονὰς μία, ς^{ε} ἑνὸς μ^{ο} $\bar{\alpha}$. τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ς^{ς} $\bar{\Gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. εἰσὶ οἱ ς^{οι} $\bar{\zeta}$ $^{\gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. ὅταν δέτι τοιοῦτο ζητῆς, τὸ ὑπὸ τῶν ς^{ς} $\bar{\zeta}$ $^{\gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. καὶ ς^{ε} $\bar{\alpha}$ μ^{ο} $\bar{\alpha}$. ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ς^{ς} $\bar{\gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. ἐπὶ τὴν μονάδα. τουτέστι τὰ μέρη ἐναλλὰξ πολλαπλασιάζεται, ὧν εἰσιν δ^{ο} $\bar{\zeta}$ $^{\gamma}$. ς^{οι} $\bar{\delta}$ $^{\gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. ἴσαι ἀριθμοῖς $\bar{\gamma}$. λείψει μ^{ο} $\bar{\alpha}$. καὶ γίνεται ὁ ς^{ο} $\bar{\varepsilon}$ $^{\zeta}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος $\bar{\eta}$ $^{\zeta}$. ὁ δὲ δεύτερος ι$\bar{\beta}$ $^{\zeta}$. ὧν δὲ τοῦ δευτέρου μέρη μ^{ο} $\bar{\alpha}$. σκεπτόμεθα ἃ μέρη ᾖ μ^{ο} $\bar{\alpha}$. τοῦ δευτέρου, ἐστὶ δὲ $\bar{\zeta}$ ^{ιϛ}. καὶ ποιῶ ἑπτάκις τοὺς δύο ἀριθμούς. ἔσται ὁ πρῶτος μ^{ο} $\bar{\eta}$. ὁ δεύτερος μ^{ο} ι$\bar{\beta}$. τὰ δὲ μέρη $\bar{\zeta}$ ^{ιϛ}. ἀλλὰ ἐπεὶ ὁ πρῶτος οὐκ ἔχει δωδέκατον ποιῶ αὐτὰ τρὶς, ἵνα μὴ εἰς μονάδα ἐμπίπτει. ἔσται ὁ πρῶτος κδ̄. ὁ δεύτερος λϛ̄. τὰ δὲ μέρη τῶν $\bar{\zeta}$ ^{ιϛ}. τοῦ μὲν ιδ̄. τοῦ δὲ κᾱ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

INGENIOSA operatione quæstionem hanc soluit Diophantus. Sed emaculato textu, vt fecimus, omnia sunt perspicua. Cæterùm placet & aliam tradere analysim paulò compendiosiorem. Ponatur quæsitorum numerorum summa quotlibet vnitatum, puta 12. & sit primus 1 N. secundus 12 − 1 N. Cùm ergo primus sumpta parte secundi fiat triplus ad reliquum, si 12. diuidatur in partes seruantes proportionem triplam; per secundam primi nempe in 9. & 3. patet primum sumpta parte secundi fore 9. Quare inde detrahendo primum, fiet pars secundi 9 − 1 N. similiter diuiso 12. in partes seruantes rationem quincuplam, puta in 10. & 2. patet secundum sumpta parte primi, fore 10. Quare inde auferendo secundum, fiet pars primi 1 N. − 2. Restat igitur, vt 1 N. − 2. sit eadem pars de 1
19. *septim.* N. quæ pars est 9 − 1 N. de 12 − 1 N. Quamobrem hi quatuor numeri sunt proportionales, ac proinde planus sub extremis æquatur plano sub me diis, ideſt 14 N. − 1 Q. − 24. æquatur 9 N. − 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{24}{5}$. suntque quæsiti numeri $\frac{24}{5}$ & $\frac{36}{5}$. Quod si communem denominatorem abiicere libeat, fient quæsiti numeri 24. & 36. iidem quos reperit Diophantus. Supponimus enim cum Diophanto inuentis semel duobus numeris quæstionem soluentibus, idem euenire duobus aliis quibuscunque sumptis in eadem ratione. Quod facile est demonstrare, quia de partibus proportionalibus agitur numerorum proportionalium, vt tibi considerandum relinquo.

QVAESTIO XXXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμὰς ὁρίσοις, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μὴ συναμφοτέρᾳ ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, πιέτω μ̊ η̄. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ α̈. ὁ δεύτερος μ̊ γ̄. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μὴ συναμφοτέρᾳ ἐστὶν ἀριθμῷ δ̄ μ̊ γ̄. ταῦτα ἴσα μ̊ η̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄ δ̄. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ πρῶτος μ̊ ε̄ δ̄. ὁ δεύτερος μ̊ γ̄. νῦν σκεπτόμεθα ὁ̣ πόθεν ἐγένετο ε̄ δ̄. ἐκ τοῦ τὸ ε̄ μεμονάδηται εἰς τοὺς ς̄ δ̄. ἀλλ' ὁ πέντε ἐστὶν ἐκ τοῦ ὑπεροχῆς τοῦ η̄. ἧς ὑπερέχει τὸ γ̄. οἱ δὲ ς̄ δ̄. εἰσὶν ὁ μονὰς μείζων τοῦ δευτέρου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον ς̄ οἷον δήποτε, καὶ ἄρα αὐτὸν ἀπὸ μ̊ η̄. καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω ὡσαύτως τὴν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἔξω τὸν πρῶτον. οἷον, ἔστω ὁ δεύτερος ς̄ α̈ λείψει μ̊ α̈. ταῦτα αἴρω ἀπὸ μ̊ η̄. λοιπὸν μ̊ Ϝ λείψει ς̄ α̈. ταῦτα μερίζω εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς̄ α̈. καὶ γίνεται μ̊ θ̄ ρ̄ ς̄ α̈ ε̄ϛ̄. α̈ϛ̄. ἔσαι ὁ πρῶτος. καὶ λελυ) ἐν τῇ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν μὴ συναμφοτέρου ποιεῖν μ̊ η̄. τὸ δὲ ἐν τῇ ἀορίστῳ τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τὸν ἀριθμὸν ὅσων ἂν τις θέλει μονάδων ᾖ) ὅπου τὰς ὑποστάσεις.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus ex ipsorum multiplicatione cum vtriusque summa datum faciat numerum. Faciat autem 8. Ponatur primus 1 N. secundus 3. & productus eorum multiplicatione cum summa vtriusque fit 4 N. + 3. Hæc æquantur 8. & fit 1 N $\frac{5}{4}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{5}{4}$. secundus 3. Nunc considero vnde 1 N. sit factus $\frac{5}{4}$. nimirum ex diuisione 5. per 4. sed 5. est excessus quo 8. superat 3. Et ipse 4. est secundus vnitate auctus. Si ergo statuam secundum numerorum quotlibet. Et auferam eum de 8. & residuum diuidam per secundum vnitate auctum, habebo primum. Verbi gratia sit secundus 1 N. − 1. hæc aufero de 8. restant 9 − 1 N. Hæc diuido per secundum vnitate auctum, id est per 1 N. & fit primus $\frac{9-1N}{1N}$. Et sic indefinitè soluta est quæstio, nam productus ex eorum multiplicatione, cum vtriusque summa facit 8. Indefinitè autem solui dicitur, quia quotcunque vnitatum ponatur 1 N. satisfaciet postulatis.

IN QVAESTIONEM XXXVII.

QVID sit indefinitè quæstionem soluere, iam alibi docuit Diophantus, & hîc rursus explicat. Id enim fit cùm ita instituuntur positiones, vt quilibet numerus sumi possit pro valore Numeri. Quod tamen cautè accipiendum est. Etenim sæpè contingit non omnem omnino numerum sumi posse pro valore Numeri, sed omnem qui cadat intra certos limites. Vt in hypothesi Diophanti, cùm alter quæsitorum sit 1 N. − 1. alter $\frac{9}{1N}$ patet 1 N. maiorem esse debere quàm 1. minorem quàm 9. Quod si ponas alterum quęsitorum 1. N. erit alter $\frac{8-1N}{1N+1}$. vnde patet pro valore Numeri sumi posse

quemlibet numerum minorem quàm 8. Porrò de huiusmodi terminis intra quos sumi debet valor Numeri, plura dicemus infrà ad quadragesimam primam.

QVÆSTIO XXXVIII.

INVENIRE tres numeros, vt qui fiunt ex binorum mutuo ductu, adscita eorundem summa, faciant datos numeros. Oportet autem datos esse quadratos vnitate multatos. Imperatum sit vt productus ex primo in secundum adscito vtroque faciat 8. Productus ex secundo in tertium cum vtroque faciat 15. Denique productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. Quoniam igitur volo productum ex primo in secundum cum vtroque facere 8. si posuero secundum quemlibet, & eum de 8. detraxero, & residuum diuisero per vnitate maiorem secundo, habebo primum. Ponatur secundus 1 N — 1. & si eum abstulero de 8. & residuuum diuisero per vnitate maiorem secundo, erit vtique primus $\frac{9}{1N}$ — 1. Rursus simili ratione, quandoquidem volo productum ex secundo in tertium cum vtroque facere 15. Ab his aufero 1 N. — 1. & residuum diuido per vnitate maiorem secundo, hoc est per 1 N. fiunt $\frac{16}{1N}$ — 1. tantus est tertius. Supereſt vt productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. facit autem $\frac{144}{1Q}$ — 1. Hæc æquantur 24. & fit 1 N. $\frac{25}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{33}{12}$. secundus $\frac{7}{3}$. tertius $\frac{68}{12}$. & omnia ad eundem denominatorem, fit primus $\frac{165}{60}$. secundus $\frac{84}{60}$. tertius $\frac{240}{60}$.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ ὁποιωνοῦν τροφλαβὼν συναμφότερον ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι μονάδι μ᾽ α. ὑπετάχθω δὴ τοῦ πρώτου, καὶ δευτέρᾳ μιᾷ συναμφοτέρου ποιεῖν μ᾽ η, τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτῃ μιᾷ συναμφοτέρου ποιεῖν μ᾽ ιε. τοῦ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τρίτῃ μιᾷ συναμφοτέρᾳ ποιεῖν μ᾽ κδ. ἐπεὶ οὖν θέλω τοῦ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρᾳ μιᾷ συναμφοτέρᾳ ποιεῖν μ᾽ η. ἐὰν ἀφέλω τοῦ δευτέρου ὅσου δήποτε, καὶ ἀπὸ μονάδων η ἀρῶ αὐτὸν, καὶ τοῦ λοιποῦ μερίσω εἰς τὴν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἔξω τὸν πρῶτον. τετάχθω ὁ δεύτερος ς᾽ α γ᾽ μ᾽ α. καὶ ἐὰν ἀπὸ μ᾽ η ἀφῶ αὐτὰ, καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω εἰς τὴν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἔσται ὁ πρῶτος ϟ οοῦ. αᾶ. λείψει μ᾽ α. πάλιν ὁμοίως, ἐπεὶ θέλω τοῦ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου μιᾷ συναμφοτέρᾳ ποιεῖν μ᾽ ιε. ἀφέλω ς α. λείψει μ᾽ α. καὶ τοῦ λοιποῦ μερίσω εἰς τὴν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς α. γίνονται ιϛ οοῦ. αᾶ. λείψει μ᾽ α. ἔξω τὸν τρίτον. λοιπὸν ὀξι τοῦ ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μιᾷ συναμφοτέρᾳ ποιεῖν μ᾽ κδ. ποιεῖ γι μ᾽ ρμδ δυ αᾶ. λείψει μ᾽ α. ταῦτα ἴσα μ᾽ κδ. καὶ γίνεται ὁ ς᾽ ιβ ε᾽. ὅπερ τὰς ὑποθέσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος λγ ιϛ᾽ ὁ δὲ δεύτερος ζ ϛ᾽. ὁ δὲ τρίτος ξη ιϛ᾽. καὶ πάντα εἰς ἓν μόριον, καὶ γίνεται ὁ πρῶτος ρξε ξ᾽. ὁ δεύτερος πδ ξ᾽. ὁ δὲ τρίτος σμ ξ᾽.

IN QVAESTIONEM XXXVIII.

CVR hîc requirat Diophantus datos numeros esse quadratos vnitate multatos, ratio est euidens; Cùm enim verbi gratia 25 Q. æquentur 144. vt solutio esset rationalis, oportuit diuidendo vnitates per quadratos, quotientem fieri quadratum, fit autem 25. addita vnitate ad 24. vnum datorum numerorum. Similiter 144. fit ex mutuo ductu 9. & 16. qui fiunt addita vnitate ad datos numeros 8. & 15. vnde sequitur ipsum 144. esse quadratum, cùm ex duorum quadratorum multiplicatione oriatur. Quamobrem quadrato 144. per quadratum 25. diuiso, produci quadratum necesse est, & proinde solutionem contingere rationalem.

Porrò ex his apparet conditionem hanc nimis strictè proponi à Diophanto, non enim erat necesse 144. & 25. quadratos fuisse, sed sufficiebat vt essent quadratorum similes, cùm certum sit huiusmodi numerorum siue multiplicatione, siue diuisione mutua semper procreari quadratum. Ita igitur præscribi debuit hæc conditio. *Oportet autem si cuilibet datorum numerorum addatur vnitas, productum ex binorum multiplicatione, ad reliquum habere rationem quadrati ad quadratum.* Verbi gratia. Summa primi & secundi adscito plano sub ipsis contento esto 11. secundi & tertij 19. tertij & primi 14. Hîc nullus datorum numerorum est quadratus vnitate multatus. Attamen optimè solui potest quæstio; ob conditionis à nobis allatæ obseruationem. Nam ponatur secundus 1 N. — 1. erit primus $\frac{12 - 1N}{1 \text{ N}}$. tertius verò $\frac{20 - 1N}{1N}$. ductoque primo in tertium, & summa illorum producto

addita fiet $\frac{240-10}{10}$. æqualis 14. & tandem 240. æquantur 15 Q. vnde fit 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 2. 3. 4. Itaque vides addita vnitate ad datos numeros 11. & 19. fieri 12. & 20. ex quorum mutuo ductu producitur 240. qui ad reliquum vnitate auctum, nempe ad 15. habet rationem quadrati ad quadratum. Hinc facile est Canonem formare.

Datis numeris adde vnitatem sigillatim, productum ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæsitorum vnitate auctus.

Quod autem ait Xilander duobus primis vt collibuisset per præcedentem quæstionem positis, puta $\frac{1}{3}$ & 7. licuisse tertium inuenire & satisfacere quæstioni, falsum est vt ex hac ipsa hypothesi potes colligere. Nam duobus primis ita positis, impossibile est tertium inueniri qui reliquas postulati partes impleat.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὥστε τὸ ὑπ' αὐτῶν λείψαντα σωαμφότερον ποιεῖν τὸν δοθέντα. ἔστω τὸν η̄. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ᾱ. ὁ δεύτερος μ̄ γ̄. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν τὸ σωαμφότερον ποιεῖ ς̄ς̄ β̄ λείψει μ̄ γ̄. ἴσοις μ̄ η̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ε̄. ᾱ ς̃. ὅπου τὰς ὑποσάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ε̄. ᾱ ς̃. ὁ δεύτερος μ̄ γ̄. πάλιν ἐν σκέπτομαι πόθεν ἐγένετο ὁ ς̄. μ̄ ε̄. ᾱ ς̃. ἐπὶ τῶν τὰ μερισθέντα εἰς τὸν β̄. ἀλλ' ὁ ιᾱ ὁ δοθεὶς ὄζι μεῖζον τοῦ δευτέρου. οἱ δὲ ς̄ς̄ β̄ εἰσὶν ὁ μοναδικῶς ἐλάσσων τοῦ δευτέρου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον ὅσου δήποτε, καὶ προσθῶμεν αὐτὸν τῷ δοθέντι, καὶ τὰ γενόμενα μερίσωμεν διὰ τὸν μοναδικὸν ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, εὑρήσωμεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. ταῦτα μεῖζον μ̄ η̄. ποιεῖ ς̄ ᾱ. μ̄ θ̄. μερίζω ταῦτα εἰς τὸν μοναδικὸν μιᾶ ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς̄ ᾱ. καὶ γίνεται μ̄ ᾱ. ϑ ς̃. ᾱ. καὶ λέλυται ἐν τῇ ἀορίστῳ ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα σωαμφότερον, ποιεῖν μ̄ η̄.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione multatus summa ipsorum, faciat datum numerum. Hic esto 8. Ponatur primus 1 N. secundus 3. & productus eorum multiplicatione, vtroque dempto facit 2 N. −3. æquales 8. & fit 1 N. 5. Ad positiones. Erit primus $5\frac{1}{3}$. secundus 3. Rursum igitur dispicio vnde factum sit quod 1 N. est $5\frac{1}{3}$. nimirum ex diuisione 11. per 2. sed 11. est compositus ex dato & secundo, & 2 N. est numerus vnitate minor secundo. Itaque si statuero secundum quantumcunque, eumque dato adiecero, & summam diuisero per vnitate minorem secundo, inueniam primum. Esto secundus 1 N. + 1. huic addito 6. fit 1 N + 9. quem diuido per vnitate minorem secundo, hoc est per 1 N. & fit 1 + $\frac{9}{1N}$. Itaque soluta est quæstio indefinitè; nam productus eorum multiplicatione, amborum summa detracta, facit 8.

IN QVAESTIONEM XXXIX.

HIc soluitur indefinitè quæstio, ita vt nullus omnino numerus excludatur à valore Numeri. Quod euenit quia in positionibus nullibi reperitur signum defectus, vt ex dicendis ad quadrageſimam primam clarius patebit.

QVÆSTIO XL.

ΕΥΡΕΙΝ ζητῆς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνδὴ σωαμφότερον ποιῇ τοὺς δοθέντας. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι μονάδα. ὑποτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου λείψει σωαμφότερα ποιεῖν μ̄ η̄. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου λείψει σωαμφότερον ποιεῖν μ̄ ιε̄. τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου λείψαντα σωαμφότερον ποιεῖν μ̄ κδ̄. ἐπεὶ θέλω τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου λείψει σωαμφοτέρου ποιεῖν μ̄ η̄. ἐὰν ἄρα

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum mutua multiplicatione detracta amborum summa faciant datos numeros. Oportet autem datos esse quadratos vnitate multatos. Statutum sit productum ex primo in secundum vtroque detracto facere 8. Productum ex secundo in tertium vtroque dempto facere 15. & productum ex primo in tertium, vtroque ablato facere 24. Quia volo productum

ex

ex primo in secundum detracto vtroque facere 8. si secundum statuero quantumcunque, & eum adiecero ad 8. & summam diuisero per vnitate minorem secundo, habebo primum iuxta lemma iam expositum. Esto secundus 1 N. + 1. addo illi 8. fit 1 N + 9. diuido hoc per vnitate minorem secundo, hoc est per 1 N. fit 1 + $\frac{9}{1N}$. Tantus est primus. Simili ratione inuenietur tertius 1 + $\frac{16}{1N}$. Ita duobus postulatis est satisfactum. Superest vt productus ex primo in tertium vtroque dempto faciat 24. facit autem $\frac{144}{1Q}$ — 1. hoc æquatur 24. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{17}{12}$. secundus $\frac{12}{5}$. Tertius $\frac{92}{12}$ Quos si velis idem habere nomen, omnia ad sexagesimas. Erit primus $\frac{285}{60}$. secundus $\frac{204}{60}$. tertius $\frac{460}{60}$.

τάξω τὸν δεύτερον οἱου δήποτε, καὶ πολλαπλασιῶ αὐτὸν εἰς μ° η̄. καὶ τὰ γενόμενα μερίζω διὰ τῆς μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, ἔξω τὸν πρῶτον, καὶ τὸ λῆμμα τὸ προγεγραμμένον. ἔστω ὁ δεύτερος ς^ος ᾱ μ° ᾱ. προσίθημι αὐτῷ μ° η̄ γίνεται ς° ᾱ μ° θ̄. ταῦτα μερίζω εἰς τὴν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ςς^ους ᾱ. καὶ γίνεται μ° ᾱ. ὁ ^ος ᾱ. ἔσται ὁ πρῶτος ὁμοίως ϟ ὁ δὲ τρίτος ἔσται μ° α̅. ις^ος ᾱ. καὶ λέλυνται μοι δύο ἐπιτάγματα. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου γ̄ συναμφότερον ποιεῖν μ° κδ̄. ποιεῖ ϟ ρμδ̄ ^δυ. α̅. γ̄ μ° α̅. ἴσα μ° κδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° ιβ̄ ᾱ. ὅπερ ἦν ὑποστάσις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος νζ̄ ις̄. ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ιζ̄ ῑ ὁ δὲ τρίτος ϛβ̄ ις̄. καὶ ἐὰν θέλῃς αὐτὰς εἶναι ἑνὸς μορίου, πάντα εἰς ξ̄. ἔσται ὁ πρῶτος σπε̄ ξ̄. ὁ δεύτερος σδ̄ ξ̄. ὁ δὲ τρίτος υξ̄ ξ̄.

IN QVAESTIONEM XXXX.

HIC quoque conditio nimis strictè proponitur à Diophanto, & proponenda est omnino vt ad trigesimam octauam dictum est. Etenim summa primi & secundi detracta à plano sub ipsis fiat 11. secundi & tertij 19. tertij & primi 14. Quamuis nullus datorum numerorum sit quadratus vnitate multatus, tamen quia cuilibet addendo vnitatem, productus ex binorum mutua multiplicatione ad reliquum est in ratione quadrati ad quadratum, optimè soluetur quæstio. Esto enim secundus 1 N. + 1. erit ergo primus 1 + $\frac{15}{1N}$. At tertius 1 + $\frac{20}{1N}$. ita satisfit duobus postulatis. Superest vt productus ex primo in tertium, vtroque dempto faciat 14. facit autem $\frac{240}{1Q}$. — 1. hoc ergo æquatur 14. & fit 1 N. 4, Quare quæsiti numeri sunt 4. 5. 6. Hinc etiam elicietur iste Canon.

Datis numeris adde sigillatim vnitatem, productumque ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæsitorum vnitate multatus.

QVÆSTIO XLI.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione ad summam eorundem datam habeat rationem. Esto productus summæ triplus. Ponatur primus 1 N. secundus 5. & est productus eorum multiplicatione. 5 N. hunc volumus triplum esse ad 1 N. + 5. Quamobrem 3 N. + 15. æquantur 5 N. & fit 1 N 7 $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus 7 $\frac{1}{2}$. secundus 5. Considero hîc vnde 1 N. factus sit 7 $\frac{1}{2}$. nimirum ex diuisione 15 per 2. At 15. est multiplex secundi secundum datam rationem. At 2. est excessus quo secundus superat denominatorem rationis. Ergo si secundum statuamus quantumcunque, & multiplicemus eum per denominatorem rationis, & productum diuidamus per excessum quo secundus sueprat denominatorem ratio-

ΕΥΡΕΙΝ ἀριθμοὺς ἀορίστους δύο. ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπετάχθω δή τὸν ὑπ' αὐτῶν συναμφοτέρῳ εἶναι τριπλασίονα. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος ς^ος ᾱ. ὁ δεύτερος μ° ε̄. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ςς̄ ε̄. ταῦτα θέλομεν εἶναι τριπλάσια ς^ος ᾱ μ° ε̄. ὥστε ςς^ους γ̄ μ° ιε̄. ἴσοι εἰσὶν ςς̄ ε̄. καὶ γίνεται ὁ ς° μ° ζ̄. ᾱ ^ος. ὅπερ ἦν ὑποστάσις. ἔσται ὁ πρῶτος μ° ζ̄. ᾱ ^ος. ὁ δεύτερος μ° ε̄. βλέπω ἔν πόθεν ὁ ς° γέγονεν μ° ζ̄. ᾱ ^ος. ἐκ τοῦ τὸν ιε̄ μερισθῆναι εἰς β̄. ἀλλ' οἱ ιε̄ ὁ δευτέρου πολλαπλασίων ἔστιν ὅπερ τὸν λόγον. ὁ δὲ β̄ ἔστιν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς, ἣν ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον οἱου δήποτε ς^ος. καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ὅπερ τὸν λόγον τὸ γενόμενον μερίσωμεν εἰς τὴν ὑπεροχήν, ἣν ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, ἔξωμεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ς^ος ᾱ. οὗτος ὅπερ τὸν

λόγον ποιεῖ ϛς^ους γ̄. ϵ̓ὰν δὲ μειωθῇ εἰς τὸν ὑφροχίαν ἢ ὑφρέχει ὁ δεύτερος τὸν λόγου, τουτέστιν εἰς ἀριθμὸν ᾱ. λείψει μ^ο γ̄. γίνεται ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Γ̄. ἐν μορίῳ ϛ^ῳ α^ῳ λείψει μ^ο γ̄.

nis, habebimus primum. Esto secundus 1 N. Hic in denominatorem rationis, facit 3 N. qui si diuidatur per excessum secundi supra denominatorem rationis, nimirum per 1 N − 3. fit primus $\frac{3\,N}{1\,N-3}$.

IN QVAESTIONEM XLI.

QVAMVIS posito altero numerorum 1 N. altero $\frac{3\,N}{1\,N-3}$ quæstio indefinitè soluta sit, non tamen quilibet numerus statui potest pro valore Numeri, sed sumendus est omnino numerus aliquis maior quàm 3. vt euidens est. Vt haberi possit 1 N. − 3. per quem diuidantur 3 N. Itaque quoniam huc reiecimus tractationem de inueniendis terminis intra quos consistere debet valor Numeri in huiusmodi quæstionibus quæ indefinitè soluuntur, esto hæc regula generalis. Quotiescunque ex lege problematis institutis positionibus, in aliqua vel in aliquibus illarum reperiuntur vnitates cum defectu numerorum vel potestatis alicujus; aut è conuerso numeri vel potestatis cum defectu vnitatum; vel etiam vtrumque: necesse est vel dari terminum infrà quem, vel terminum supra quem, vel denique terminos intra quos sumi debet valor Numeri. Triplex ergo casus dari potest, ac proinde tria hæc obseruanda.

Primò si Numerus vel potestas alia adiunctum habeat defectum vnitatum, diuide vnitates per Numerorum vel potestatis numerum, quotiens erit terminus suprà quem sumi debet valor Numeri vel potestatis, vt in hac quæstione Diophanti, quia in vna positione reperitur 1 N. − 3. diuiso 3. per 1. fit quotiens 3. supra quem necesse est sumi valorem Numeri. Et si in aliqua positionum reperiantur 2 N. − 10. diuiso 10. per 2. fieret 5. terminus supra quem consistere deberet valor Numeri; idemque de alijs dicendum potestatibus, nam si haberes 3 Q. − 12. diuidendo 12. per 3. quotiens 4. esset terminus supra quem sumendus esset valor quadrati.

Secundò si vnitates adiunctum habeant defectum Numerorum vel aliarum potestatum, diuide rursus vnitates per Numerorum vel potestatum numerum, quotiens erit terminus infrà quem sumi debet valor Numeri vel potestatis vt accidit in secunda analysi quam tradidimus trigesima septima huius, vbi ponentes alterum quæsitorum 1 N. alter positus est $\frac{2\,N-1\,N}{1\,N+1}$. Quare cùm diuidendo 8. per 1. fiat quotiens 8. concluſimus Numerum minorem sumi debuisse quàm 8. & sic de aliis.

Denique si in vna positionum reperiantur Numeri vel potestates aliæ cum defectu vnitatum, & simul in alia positione reperiantur vnitates cum defectu Numerorum, vel potestatis. Tunc vtrobique diuidendo vnitates per numerum Numerorum vel potestatum, fient quotientes, qui termini erunt intra quos sumi debet valor Numeri vel potestatis. Vt in analysi Diophantæa, quæstione trigesima septima citata, quoniam in vna positione reperitur 1 N. − 1. in altera 9 − 1 N. facta vtrobique diuisione producuntur 1. & 9. termini intra quos sumendus est valor Numeri. Quamobrem etiam inde facilè cognoscetur an proposita quæstio sit impossibilis, si enim tales termini reperiantur intra quos sumi non possit aliquis numerus, impossibilis erit quæstio. Verbi gratia, si in vna positione sit 3 − 15 N. in alia 2 N. − 12. Quia diuiso 15. per 3. fit 5. terminus infra quem sumendus est valor Numeri, at diuiso 12. per 2. fit 6. terminus suprà quem valor Numeri sumi debet, cùm euidens sit eundem numerum non posse esse maiorem quàm 6. minorem quàm 5. quæstionem impossibilem esse prononciabimus.

Cæterùm si in diuersis positionibus eædem species ab iisdem deficiant, sed inæquali multitudine sumendus erit terminus quæsitus ab illa positione in qua defectus est maior. Vt in primo casu, si in vna positione sit 2 N. − 6. in altera 2 N. − 8. sumendus erit terminus à postrema, diuidendo scilicet 8. per 2. vnde fit 4. terminus suprà quem sumendus est valor Numeri. Sic in secundo casu si in vna positione sit 8 − 2 N. in altera 8 − 4 N. sumetur etiam valor Numeri à postrema in qua est defectus maior. Vel aliter, in primo casu sumendus est terminus ab illa positione, in qua diuisis vnitatibus per Numeros vel potestates, fit quotiens maior. Contrà in secundo casu sumendus est terminus ab illa positione, in qua diuisis vnitatibus per Numeros vel potestates fit quotiens minor. Sic in primo casu si occurrant 3 N. − 15. & 4 N. − 12. sumetur terminus à priore quia diuiso 15. per 3. fit quotiens maior quàm diuiso 12. per 4. sed in secundo casu si occurrant 8 − 2 N. & 12 − 3 N. sumetur terminus à posteriore ob contrariam causam.

His sanè præceptis, tota de inueniendis huiusmodi terminis doctrina comprehenditur, quæ cùm facilia sint, & è re ipsa nata, ita vt suam secum ferant demonstrationem, tamen à nemine ante nos tradita sunt, vt verè asserere possim quæstionum quam plurimarum quæ indefinitè soluuntur, perfectam enodationem neminem hactenus calluisse; quod vno aut altero exemplo fiet manifestum. Sit enim propositum soluere pulcherrimum problema, quod omnium qui nos præcesserunt Arithmeticorum ingenia mirè torsit, quodque olim ex parte explicauimus libello nostro extremo iucundo-

rum problematum qui per numeros absoluuntur, ante aliquot annos Lugduni edito nimirum.

Datum numerum diuidere in quotlibet numeros, ita vt singulis in datos numeros ductis, summa productorum datum conficiat numerum. Oportet autem summam productorum cadere inter productos, ex numero diuidendo in maximum & in minimum multiplicatorum.

Verbi gratia. Sit 20. diuidendus in tres numeros, ita vt primum ducendo in 4. secundum in $\frac{1}{2}$ tertium in $\frac{1}{4}$. summa productorum conficiat etiam 20. Esto primus 1 N. ergo reliqui duo simul erunt 20 − 1 N. & cum primo ducto in 4. fiant 4 N. his subductis à summa productorum, remanet 20 − 4 N. continens vtique $\frac{1}{2}$ secundi & $\frac{1}{4}$ tertij. Quare ducendo 20 − 4 N. in 4. fiet 80 − 16 N. continens bis secundum, & tertium semel. Proinde si hinc auferatur summa secundi & tertij, puta 20 − 1 N. relinquetur secundus 60 − 15 N. quem si auferas à summa secundi & tertij, nempe à 20. − 1 N. remanebit tertius 14 N. − 40. Itaque primo posito 1 N. fit secundus 60. − 15 N. tertius 14 N. − 40. & quæstio indefinitè soluta est. Quoniam verò secundus continet vnitates cum defectu numerorum, & tertius continet numeros cum defectu vnitatum, diuidendo vtrobique vnitates per Numeros, fient termini intra quos consistere debet valor numeri, nimirum 4. & 2 $\frac{6}{7}$. Quare soluetur quæstio si 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 4. maior quàm 2 $\frac{6}{7}$. Verbi gratia ponatur 3. erit primus 3. secundus 15. tertius 2.

Rursus sit propositus 41. diuidendus in tres numeros ea lege, vt primum ducendo in 4. secundum in 3. tertium in $\frac{1}{2}$. summa productorum sit 40. Esto primus 1 N. ergo reliqui simul erunt 41 − 1 N. & cùm primo ducto in 4 fiant 4 N. his detractis à 40. summa productorum, remanet 40 − 4 N. continens ter secundum, & $\frac{1}{3}$ tertij. Quare ducendo 40 − 4 N. in 3. fiet 120 − 12 N. continens secundum nouies, & tertium semel. Ac proinde si hinc auferatur summa secundi & tertij, nempe 41 − 1 N. relinquetur octuplum secundi, puta 79 − 11 N. Quare secundus erit 9. $\frac{7}{8}$ − 1 $\frac{3}{8}$ N. quo subducto à summa secundi & tertij, remanet tertius 31 $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{8}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Quoniam verò signum defectus reperitur tantùm in secundo numero 9 $\frac{7}{8}$ − 1 $\frac{7}{8}$ N. vnus tantùm hîc erit terminus, infrà quem scilicet sumendus erit valor Numeri, qui habetur diuidendo vnitates per numeros, estque 7 $\frac{2}{11}$. Quare soluetur quæstio si 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 7 $\frac{2}{11}$. Ponatur 5. Erunt quæsiti numeri 5. 3. 33.

Sæpe autem huiusmodi quæstiones ita proponuntur, vt requiratur solutionem in integris exhiberi seclusis fractionibus, quod accidit ex rerum quibus applicantur natura quæ non patitur diuisionem in partes, vt si de hominibus vel animalibus mentio fiat. Verbi gratia proponatur ita prior quæstio. Fuerunt in symposio personæ 20. nimirum viri, mulieres, & pueri, & expenderunt simul solidos 20. ita tamẽ vt quilibet virorum soluerit 4. solidos, quælibet mulierum $\frac{1}{2}$ solidi, quilibet puerorum $\frac{1}{4}$ solidi. Quæritur tam virorum, quàm mulierum, atque puerorum numerus sigillatim. Similiter sic proponatur posterior quæstio. Fuerunt personæ 41. expenderuntque solidos 40. & virorum quilibet persoluit 4. solidos, quælibet mulier 3. puerorum quilibet $\frac{1}{3}$ solidi. Quæritur idem quod prius. Hîc patet solutionem in integris omnino exhibendam esse. Quod quidẽ facilè præstabitur in priore quæstione, quia in positionibus nullæ omnino interueniunt fractiones, nam sufficiet si sumatur quilibet numerus integer cadens inter terminos inuentos 4. & 2 $\frac{6}{7}$. qualis est 3. vnde fiunt quæsiti numeri qui suprà 3. 15. 2. At in posteriore, vbi positiones habent fractiones admixtas, maiore artificio res opus habet. Veruntamen ita expedietur. Quoniam tertius numerus ponitur 31 $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{8}$ N. euidens est vt solutio contingat in integris, oportere pro valore Numeri sumi numerum integrum minorem quàm 7 $\frac{2}{11}$. cuius tres octauæ partes adscita $\frac{3}{8}$ vnitatis faciant integrum. Quia vero vt habeantur $\frac{3}{8}$ cuiuslibet numeri, ducendus est ille numerus in 3. & productus diuidendus per 8. Patet quærendum esse numerum minorem quàm 7 $\frac{2}{11}$ quo ducto in 3. & producto addendo 1. fiat numerus multiplex ad 8. seu quod idem est. Quærendus est numerus multiplex ad 8. qui excedat vnitate multiplicem ad 3. ita tamen vt multiplicator ipsius 3. sit minor quàm 7 $\frac{2}{11}$. Id autem qui fieri possit abundè docuimus in elementis, immò demonstrauimus vniuersale hoc problema.

Datis duobus numeris inter se primis, inuenire multiplicem vnius, qui alterius multiplicem superet dato numero, ita vt inuenti multiplices sint minimi qui hoc præstent.

Inuentisque minimis, alios omnes ordinatim multiplices idem præstantes ostendimus inueniri posse vnde sanæ propositæ quæstionis solutio manifesta est, inuenieturque 16. multiplex ad 8. qui excedit vnitate 15. multiplicem ad 3. & diuiso 15. per 3. fiet 5. quæsitus valor Numeri. Quare numeri qui prius reperiuntur 5. 3. 33.

Huius naturæ quæstio proponitur in veteri Epigrammate quod extat apud Pithœum lib. 4. & tale est.

Vt tot emantur aues, bis denis vtere nummis
Perdix, Anſer, Anas empta vocetur auis.
Sit ſimplex obolus pretium Perdicis, ematur.
Sex obolis Anſer, biſque duobus Anas.
Vt tua procedat in lucem quæſtio, mentem
Conſule, ſic loquitur pectoris arca mihi.
Sint Anates tres atque duæ, ſimplex erit Anſer.
Accipe Perdices quatuor atque decem.

Huius quæſtionis ſenſus eſt. Viginti Nummis, quorum quilibet duos obolos valet, ſeu 40. obolis emuntur Aues 20. videlicet Perdices, Anſeres, Anates, ſed Perdix obolo vno conſtat, Anſer 6 obolis, Anas 4. Quæritur Perdicum numerus, itemque Anſerum atque Anatum. Ponatur Anſerum numerus 1 N. erit Perdicum & Anatum ſimul numerus 20 − 1 N. erit autem Anſerum omnium pretium 6 N. quo detracto à 40. obolis, remanet pretium Perdicum & Anatum ſimul 40 − 6 N. Quare 40 − 6 N. continet. Perdicum numerum ſemel, & Anatum numerum quater, ac proinde hinc auferendo numerum Perdicum & Anatum ſemel, nempe 20 − 1 N. remanet 20 − 5 N. triplum numeri Anatum, vnde Anatum numerus eſt $6\frac{2}{3}$ − + $\frac{5}{3}$ N. quo detracto à 20 − 1 N. remanet Perdicum numerus $13\frac{1}{3}$ − + $\frac{2}{3}$ N & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Sed quia in numero Anatum reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum diuiſo $6\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{3}$. fit 4. terminus infrà quem ſumendus eſt valor Numeri. Rurſus ob fractiones adiunctas, vt ſolutio contingat in integris, quia Perdicum numerus eſt $13\frac{1}{3}$ − + $\frac{2}{3}$ N. patet valorem Numeri eſſe debere, numerum integrum cuius $\frac{2}{3}$ adſciſcentes $\frac{1}{3}$ faciant integrum. Seu quod idem eſt quærendus eſt multiplex ad 3. qui excedat vnitate multiplicem ipſius 2. ita tamen vt multiplicator ipſius 2. ſit minor quàm 4. inuenieturque ipſe 3. qui excedit vnitate ipſum 2. Quare diuiſo 2. per 2. fit 1. quæſitus valor Numeri. Eſt ergo Anſerum numerus 1. Anatum 5. Perdicum 14. vt voluit Epigrammatarius.

Iam verò diuidendus ſit 100. in quatuor numeros, vt primo ducto in 3. ſecundo in 1. tertio in $\frac{1}{2}$. quarto in $\frac{1}{7}$. ſumma productorum ſit 100. Pon tur primus 1 N. ergo reliquorum ſumma erit 100 − 1 N. & cùm ex primo in 3. fiant 3 N. erit ſumma trium reliquorum productorum 100 − 3 N. Supereſt igitur vt partiamur 100 − 1 N. in tres numeros vt primo ducto in 1. ſecundo in $\frac{1}{2}$. tertio in $\frac{1}{7}$ ſumma productorum ſit 100. − 3 N. id autem vt fieri poſſit, propter adiectam ab initio huic quæſtioni conditionem, oportet productum ex 1. maximo multiplicatorum in 100 − 1 N. nempe 100 − 1 N maiorem eſſe quàm 100 − 3 N. & rurſus productum ex $\frac{1}{7}$ minimo multiplicatorum in 100 1 N. nempe $\frac{100}{7}$ − $\frac{1}{7}$ N. minorem eſſe quàm 100 − 3 N. Et primùm quidem manifeſtum eſt, nam per ſe patet 100 − 1 N. maiorem eſſe quàm 100 − 3 N. quod ſignum eſt non dari minimum terminum ſupra quem ſumi debeat valor Numeri, ſed ritè ſolui poſſe quæſtionem quantumlibet exiguus ſtatuatur primus quatuor quæſitorum numerorum. At verò vt ſecundum conſequamur, cùm non ſtatim appareat an $\frac{100}{7}$ − $\frac{1}{7}$ N. ſit minor quàm 100 − 3 N. fingamus æquari, fiet 1 N. 30. maximus terminus, infrà quem vtique ſumendus eſt valor Numeri. Vnde iam conſtat quæſtionem infinitas recipere ſolutiones, cùm primus quatuor quæſitorum numerorum ſtatui poſſit quilibet numerus minor quàm 30. Ponatur verbi gratia 20. erit ergo trium reliquorum ſumma 80. & cùm ex 20. in 3. fiat 60. quo ſubducto à 100. remanet 40. erit vtique trium reliquorum productorum ſumma 40. Supereſt igitur vt diuidamus 80. in tres partes, vt prima ducta in 1. ſecunda in $\frac{1}{2}$. tertia in $\frac{1}{7}$. ſumma productorum ſit 40. Ponatur prima 1 N. erunt duæ reliquæ ſimul 80 − 1 N. & quia ex prima parte in 1. fit 1 N. patet duorum reliquorum productorum ſummam eſſe 40 − 1 N. quæ vtique continet $\frac{1}{2}$ ſecundæ partis & $\frac{1}{7}$ tertiæ. Quare multiplicando per 7. fiet 280 − 7 N. continens ſemel tertiam & $\frac{7}{2}$ ſecundæ. Proinde ſi hinc auferatur ſumma ſecundæ & tertiæ, puta 80 − 1 N. reſtat 200 − 6 N. continens $\frac{5}{2}$ ſecundæ. Quamobrem ipſa pars ſecunda reperietur 80 − $\frac{12}{5}$ N. quam auferendo à 80 − 1 N. reſtat pro tertia $\frac{7}{5}$ N. & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Nam poſito primo quatuor quæſitorum numerorum 20. erit ſecundus 1 N. tertius 80 − $\frac{12}{5}$ N. Quartus $\frac{7}{5}$ N. ſed quoniam in tertio ſunt vnitates cum defectu Numerorum diuiſo 80. per $\frac{12}{5}$ fit $33\frac{1}{3}$ terminus infrà quem ſumendus eſt valor Numeri. Quod ſi ſumas 30. fient quæſiti Numeri 20. 30. 8. 42. qui ſatisfaciunt propoſito. Et ſic infinitis alijs modis ſolui poteſt quæſtio, cùm admittendo fractiones infiniti numeri ſumi poſſint infra $33\frac{1}{3}$.

Verùm ſi requiratur ſolutionem in integris exhiberi, vtendum erit eodem artificio quod ſuprà explicauimus. Vt ſi quæſtio hæc ita proponatur. Fuerunt in ſympoſio perſonæ 100. viri, mulieres, pueri, puellæ. Et vir quilibet expendit tres aureos, mulier 1. puer $\frac{1}{2}$ puella $\frac{1}{7}$. Quæritur virorum, & mulierum, puerorúmque & puellarum numerus, eodem vtentes ductu euidenter inferemus ſumendum eſſe pro valore Numeri aliquem Numerum minorem quàm $33\frac{1}{3}$ quem quinarius metiatur, & ſic ſex ſolutiones in integris per hanc operationem reperientur, prout poſito virorum numero 20. ponetur mulierum numerus 5. vel 10. vel 15. vel 20. vel 25. vel 30. Itaque vt omnes ſolutiones quæ in in-

tegris possunt exhiberi, reperiamus, cum iam determinatum sit virorum numerum poni posse quemlibet infrà 30. toties repetenda erit hæc operatio quot sunt numeri integri infra 30. nimirum nouies & vicesies. Sed rem succedere non posse inueniemus, si numerus virorum ponatur 1. vel 2. vel 3. vel 29. Nam si ponatur 1. & mulierum numerus 1 N. erit puerorum numerus 232 $-\frac{12}{5}$ N. At puellarum $\frac{7}{5}$ N. $-$ 133. Quare termini intra quos cadere debet valor Numeri erunt 97. & 96. $\frac{2}{3}$. inter quos nullus cadit integer numerus. Similiter si virorum numerus ponatur 2. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 224 $-\frac{12}{5}$ N. puellarum verò $\frac{7}{5}$ N. $-$ 126. Quare termini intra quos consistere debet valor Numeri erunt 93 $\frac{1}{3}$. & 90. inter quos nullus cadit integer quem quinarius metiatur. Rursus si statuatur virorum numerus 3. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 216 $-\frac{12}{5}$ N. & puellarum $\frac{7}{5}$ N. $-$ 119. Quare termini intra quos sumi debet valor Numeri reperientur 90. & 85. inter quos non cadit integer quem quinarius metiatur. Denique si numerus virorum ponatur 29. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 8 $-\frac{12}{5}$ N. puellarum verò $\frac{7}{5}$ N. $+$ 63. Quare terminus infra quem sumendus est valor Numeri reperietur 3 $\frac{1}{3}$. Infra quem nullus est numerus integer quem quinarius metiatur. Cæterùm si virorum Numerus statuatur quilibet cadens inter 3. & 29. res optimè succedet, & reperientur in integris solutiones numero 81. quas omnes in sequenti diagrammate exhibeo, monens primum numerum esse virorum, secundum mulierum, tertium puerorum, quartum denique puellarum.

28	27	26	26	25	25	25	24	24
5	5	10	5	15	10	5	15	10
4	12	8	20	4	16	28	12	24
63	56	56	49	56	49	42	49	42
24	23	23	23	23	22	22	22	22
5	20	15	10	5	20	15	10	25
36	8	20	32	44	16	28	40	4
35	49	42	35	28	42	35	28	49
22	21	21	21	21	21	20	20	20
5	25	20	15	10	5	30	25	20
52	12	24	36	48	60	8	20	32
21	42	35	28	21	14	42	35	28
20	20	20	19	19	19	19	19	19
15	10	5	35	30	25	20	15	10
44	56	68	4	16	28	40	52	64
21	14	7	42	35	28	21	14	7
18	18	18	18	18	17	17	17	17
35	30	25	20	15	40	35	30	25
12	24	36	48	60	8	20	32	44
35	28	21	14	7	35	28	21	14
17	16	16	16	16	16	15	15	15
20	45	40	35	30	25	45	40	35
56	4	16	28	40	52	12	24	36
7	35	28	21	14	7	28	21	14
15	14	14	14	14	13	13	13	13
30	50	45	40	35	55	50	45	40
48	8	20	32	44	4	16	28	40
7	28	21	14	7	28	21	14	7
12	12	12	11	11	11	10	10	10
55	50	45	60	55	50	65	60	55
12	24	36	8	20	32	4	16	28
21	14	7	21	14	7	21	14	7
9	9	8	8	7	7	6	5	4
65	60	70	65	75	70	75	80	85
12	24	8	20	4	16	12	8	4
14	7	14	7	14	7	7	7	7

Hinc apparet quæstiones huiusmodi à nobis perfectissimè resolui, cùm tamen Nicolaus Tartalea asserat, neque per Algebram, neque per aliam certam regulam id fieri posse. Sed & alius non contemnendus Arithmeticus, cùm hanc ipsam quæstionē sub eadem prorsus hypothesi sibi proposuisset enodandam, vnicam tantùm illius solutionem affert, eam scilicet quæ primum in superiore diagrammate locum obtinet, eamque etiam non satis certa ratione inuestigat, sed illa vtitur regula quam in libello nostro Iucundorum Problematum olim explicauimus, quamque vt nimis inperfectam meritò reiicimus.

Quod si postuletur exemplum in quo vnica solutio contingat in integris. Sit Personarum numerus 60. aureorum expensorum summa 100. & vir quilibet expendat 2. aureos. Mulier $\frac{2}{3}$. Puer $\frac{1}{5}$. Puella $\frac{1}{2}$. Ponatur virorum numerus 1 N. Igitur 60 − 1 N. erit numerus mulierum, puerorum & puellarum simul, & 100 − 2 N. erit reliquorum aureorum summa, quare ducendo tum $\frac{2}{3}$. tum $\frac{1}{2}$ in 60 − 1 N. fiet 40 − $\frac{2}{3}$ N. maior quàm 100. − 2 N & 30 − $\frac{1}{2}$ N. minor quàm 100 − 2 N. & vtraque æquatione sigillatim resoluta fient termini intra quos consistere debet valor Numeri 45. & 46. $\frac{2}{3}$. Proinde cùm inter eos cadat solus numerus integer 46. patet virorum Numerorum non posse poni nisi 46. Atque ideo relinquentur personæ 14. Aurei 8. statuatur mulierum numerus 1 N. tandem inuenietur puerorum numerus 10 − $\frac{5}{3}$ N. Puellarum verò 4 + $\frac{2}{3}$ N. Quare cùm diuiso 10. per $\frac{5}{3}$ prodeat 6. patet pro valore Numeri sumendum esse Numerum infrà 6. quem ternarius metiatur ob fractiones positionibus admixtas. Itaque cùm infrà 6. solus numerus 3. habeat tertiam partem in integris; vnica continget solutio posito scilicet valore Numeri 3. & erit virorum numerus 46. Mulierum 3. Puerorum 5. Puellarum 6. eodem prorsus artificio diuidetur datus numerus in quinque aut plures numeros, ita vt singulis in datos numeros ductis, summa productorum datum conficiat numerum. Quamobrem ex omni parte satisfactum est proposito.

Cæterùm ad hanc quæstionem facilè reducuntur Alligationis regulæ, quarum perfectam enodationem, neminem antè nos tradidisse audacter asserere ausim. Etenim cùm tria rei alicuius genera proponuntur alliganda, patet vulgari regula vnicam tantùm reperiri solutionem, quamuis infinitæ tradi possint. Quod vt exemplo comprobemus. Sint alliganda tria Auri genera. Primum 24. graduum bonitatis quos vulgo Karattos vocant. Secundum 22. Karattorum. Tertium 18. & conficienda sit Massa librarum 60. auri Karattorum 20. sanè per vulgarem illam Alligationis regulam vnica reperietur solutio, & sumendæ erunt libræ 12. ex auro 24. Karattorum. Itemque libræ 12. ex auro 22. Karattorum. Ac denique libræ 36. ex auro 18. Karattorum. Sed quæstio suaptè natura infinitas recipit solutiones, quas sic indagabimus. Quoniam ducto 60. in 20. fit 1200. patet in tota massa conficienda contineri gradus bonitatis seu Karattos 1200. Quare supereſt vt diuidamus 60. in tres numeros, ita vt primo ducto in 24. secundo in 22. tertio in 18. summa productorum sit 1200. Ponatur primus 1 N. erit summa reliquorum 60 − 1 N. & cùm ducto 24. in 1 N. fiant 24 N. erit reliquorum productorum summa 1200 − 24 N. quæ continet secundum numerum bis & viceſies. Tertium verò decies & octies. Quare cùm 60 − 1 N. contineat secundum & tertium semel, ducto eo in 18. fiet 1080 − 18 N. continens vtrumque decies & octies, & si hic auferatur à 1200. − 24 N. remanet 120 − 6 N. continens secundum quater. Proinde secundus est 30 − $\frac{3}{2}$ N. quo detracto à 60 − 1 N. remanet tertius 30 + $\frac{1}{2}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Vt ergo habeamus terminum infra quem consistere debet valor Numeri diuidamus 30. per $\frac{3}{2}$ fiet 20. quæsitus terminus. Igitur ex auro 24. Karattorum sumi potest quilibet librarum numerus minor quàm 20. vnde constat infinitis modis solui posse quæstionem. Verbi gratia, sumantur ex prædicto auro libræ 18. sumemus ex secundo libras 3. ex tertio libras 39. Rursus sumantur primi auri libræ 16. secundi 6. tertij 38. Rursus sumantur, primi auri libræ 14. secundi 9. tertij 37. vel sumantur, primi auri libræ 10. secundi 15. tertij 35. vel sumantur primi auri libræ 8. secundi 18. tertij 34. vel sumantur primi auri libræ 6. secundi 21. tertij 33. vel sumantur primi auri libræ 4. secundi 24. tertij 32. vel etiam sumantur primi auri libræ 2. secundi 27. tertij 31. His omnibus modis, etiam per integros soluitur quæstio, quod si fractiones admittere libeat, quæ ab hoc quæstionum genere non excluduntur, infinitas alias solutiones reperiri posse manifestum est. Hæc dixisse sufficiat, ne pulcherrimum vtilissimúmque inuentum posteris inuidisse videamur.

QVÆSTIO XLII.

ΕΥΡΕΙΝ ζητῆς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπερεπάχθω δὴ ὁ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου συναμφοτέρους εἰς τρίς. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου, συναμφοτέρους εἰς τετράκις. τὸν δὲ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου συναμφο-

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt, is ad eorum summam datam habeat rationem. Sit productus è primo in secundum, ad summam ipsorum triplus, productus è secundo in tertium, sit ad summam eorum quadruplus,

& productus è primo in tertium, ſummæ amborum ſit quintuplus. Statuatur ſecundus 1 N. erit ex præcedenti lemmate primus $\frac{3N}{1N-3}$. eodem modo tertius erit $\frac{4N}{1N-4}$. Reſtat vt productus ex primo in tertium ad ſummam ipſorum ſit quincuplus. Sed productus ex primo in tertium eſt $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$ ſumma verò primi & tertij eſt $\frac{7Q-24N}{1Q+12-7N}$. quæ ſic habetur. Quoniam oportet addere minutias $\frac{3N}{1N-3}$ & $\frac{4N}{1N-4}$. Ipſi quidem numeri in denominatores alternatim multiplicabuntur, verbi gratia 3 N. in denominatorem alterius, hoc eſt in 1 N. — 4. & rurſus 4 N. in denominatorem alterius, puta in 1 N. — 3. ſic facta eſt ſumma 7 Q. — 24 N. ſub denominatione partis quæ fit ex denominatorum mutua multiplicatione, hoc eſt 1 Q. + 12 — 7 N. Habemus autem & productum ex primo in tertium $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$. Quamobrem $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$. quincuplum eſt ſummæ. Proinde ſumma quinquies puta $\frac{35Q-120N}{1Q+12-7N}$. æqualis eſt $\frac{12Q}{1Q+12-7N}$. & omnia ducantur in communem denominatorem, Puta 1 Q. + 12 — 7 N. fiunt 12 Q. æqualis 35 Q. — 120 N. & fit 1 N. $\frac{120}{23}$. Ad hypoſtaſes. Poſueram primum $\frac{3N}{1N-3}$. ſecundum 1 N. tertium $\frac{4N}{1N-4}$ At 1 N. inuentus eſt $\frac{120}{23}$. hunc ſi ducas in primum, eo ducto in 3 N. fiet $\frac{360}{23}$. At eo ducto in denominatorem 1 N. — 3. fient $\frac{51}{23}$. erit igitur primus $\frac{240}{51}$. ſecundus autem $\frac{120}{23}$. non enim habebat numericam minutiam. At tertius ſimiliter inuenietur, nam ducto $\frac{120}{23}$ in 4 N. fiet $\frac{480}{23}$. Eodem modo ducto $\frac{120}{23}$ in denominatorem 1 N. — 4. fiet $\frac{28}{23}$. Eſt ergo tertius $\frac{480}{28}$. & demonſtratio eſt manifeſta.

τέρους ἓξ) πεντάκις. τετάχθω ὁ δεύτερος ϛ̅ ᾱ̅ ἔσαι δὴ διὰ τὸ λῆμμα ὁ πρῶτος ϛ̅ γ̅. ἐν μορίῳ ϛ̅ ᾱ̅ λείψει μ̅ γ̅. ὁμοίως ☾ ὁ τρίτος ϛ̅ δ̅. ἐν μορίῳ ϛ̅ ᾱ̅. λείψει μ̅ δ̅. λοιπὸν δεῖ τὸ ὑπὸ τῶ πρώτου ☾ τρίτου σωαμφοτέρους ἓξ) πεντάκις. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τῶ πρώτου ☾ τρίτου ἐστὶ δ̅ῦ ιβ̅. ἐν μορίῳ δ̅ῦ ᾱ̅ μ̅ ιβ̅. λείψει ϛ̅ ζ̅ σωαμφότερος δὲ ἐστιν ὁ πρῶτος ϗ̈ ὁ τρίτος δ̅ῦ ζ̅. λείψει ϛ̅ κδ̅ μορίᾳ δ̅ῦ ᾱ̅. μ̅ ιβ̅. λείψει ϛ̅ ζ̅. ὅπως. ὅταν γὰρ δέῃ σωθεῖναι μόρια εἶσιν ϛ̅ο̅υ̅ς̅ γ̅. μορίᾳ ϛ̅ ᾱ̅. λείψει μ̅ γ̅. ϗ̈ ϛ̅ο̅υ̅ς̅ δ̅. μορίᾳ ϛ̅ ᾱ̅. λείψει μ̅ γ̅. ϗ̈ ϛ̅ο̅υ̅ς̅ δ̅. μορίᾳ ϛ̅ ᾱ̅. λείψει μ̅ δ̅. οἱ μὲν ϛ̅ο̅ι̅ ὅπη τὰ ἐναλλὰξ μόρια πολλαπλασιαθήσονται, οἷον ϛ̅ο̅ι̅ γ̅. ὅπη τὰ ἕτερα μόρια τουτέστιν ὅπη ϛ̅ ᾱ̅. λείψει μ̅ δ̅. ϗ̈ πάλιν οἱ ϛ̅ο̅ι̅ δ̅. ὅπη τὰ μόρια τῶ ἑτέρω ὅπη ϛ̅ ᾱ̅. λείψει μ̅ γ̅. ὅπως ἐποίησεν ἡ συνθεσις δ̅ῦ ζ̅. λείψει ϛ̅ κδ̅ μορίᾳ τῶ ὑπὸ τ̈ μορίων, τουτέστι δ̅ῦ ᾱ̅ μ̅ ιβ̅. λείψει ϛ̅ ζ̅. εἴχομεν ὃ ϗ̈ τὸ ὑπὸ τῶ πρώτου ϗ̈ τρίτου δ̅ῦ ιβ̅. μορίᾳ δ̅ῦ ᾱ̅. μ̅ ιβ̅. λείψει ϛ̅ ζ̅. δυνάμεις ἄρα ιβ̅. μορίᾳ δ̅ῦ ᾱ̅. μ̅ ιβ̅. λείψει ϛ̅ ζ̅. πενταπλάσιαι εἰσὶ τῆς συνθέτεως. πεντάκις ἄρα ἡ σύνθεσις γίνεται δ̅ῦ λ̅ε̅ γ̅ ϛ̅ ρ̅κ̅. μορίᾳ δ̅ῦ ᾱ̅. μ̅ ιβ̅ γ̅ ϛ̅ ζ̅. ἴσαι δ̅ῦ ιβ̅. μορίᾳ τῶ αὐτῶ, ☾ πάντα ὅπη τὸ κυὸν αὐτ̈ μόριον δ̅ῦ ᾱ̅. μ̅ ιβ̅ γ̅ ϛ̅ ζ̅. ☾ γίνονται δ̅ῦ ιβ̅. ἴσαι δ̅ γ̅ λ̅ε̅ γ̅ ϛ̅ ρ̅κ̅. ☾ γίνεται ὁ ϛ̅ ρ̅κ̅ ϰγ̅. ὅπη ταῖς ὑποτάσεσι. εἶχεν ὃ τὸν μὲν πρῶτον ϛ̅ γ̅. μορίου ϛ̅ ᾱ̅ γ̅ μ̅ γ̅. ϗ̈ ὃ δεύτερος ϛ̅ ᾱ̅. ϗ̈ ὃ τρίτον ϛ̅ δ̅. μορίᾳ ϛ̅ ᾱ̅. γ̅ μ̅ δ̅. εὑρέθη δὲ ὁ ϛ̅ ρ̅κ̅ ϰγ̅. ἐὰν μὲν ὅπη ϗ̈ πρῶτον ποιῇς, ὅπη ϛ̅ο̅υ̅ς̅ γ̅. ἔσονται μ̅ τ̅ξ̅ ϰγ̅. λοιπὸς ὅπη τὸ μόριον ρ̅κ̅ ϰγ̅. ὅπη ϛ̅ ᾱ̅. λείψει μ̅ γ̅. γίνονται μ̅ να̅ ϰγ̅. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος τ̅ξ̅ να̅ϛ̅. ὁ ὃ δεύτερος ρ̅κ̅ ϰγ̅. ὃ γὰρ εἶχεν ἀριθμητικὸν μόριον. ὁ ὃ τρίτος ὁμοίως, ρ̅κ̅ ϰγ̅. ὅπη τὰς τέσσαρας ϛ̅ο̅υ̅ς̅. γίνονται υ̅π̅ ϰγ̅. ὁμοίως, ϗ̈ ὅπη τὸ μόριον, ρ̅κ̅ ϰγ̅. ὅπη ϛ̅ ᾱ̅. γ̅ μ̅ δ̅. γίνονται μ̅ κη̅ ϰγ̅. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος μ̅ υ̅π̅ ϰγ̅. ☾ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XLII.

HÆC quæſtio pendet à præcedente, vt diſertis verbis monet Diophantus. Cæterùm in ſua verſione Xilander multa omiſit, quæ clarioris doctrinæ gratia poſuit Diophantus, vt apparet ex textu Græco, & ex noſtra verſione.

QVÆSTIO XLIII.

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, is ad compoſitum ex tribus datam

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τ̈ συγκείμενον ἐκ τ̈ ξιῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπιτετάχθω δὴ τ̈

μμ· ὑπὸ τῶ πρώτε, καὶ τῶ δευτέρε τῶν τριῶν ἐστὶ τετραπλασίονα. τὸ δὲ ὑπὸ τῶ δευτέρε, καὶ τῶ τρίτου τῶν τριῶν ἐστὶ τετραπλασίονα. τὸ δὲ ὑπὸ τῶ τρίτου, καὶ τῶ πρώτου τῶν τριῶν ἐστὶ πενταπλασίονα. ἐπειδὴ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχει δεδομένον. ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ τυχόντα, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν τυχόντα λόγον ἔχῃ τὸν ⸗ὑποταχθέντα. ἔστω ὁ τυχὼν μ̊ ε̄. καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τῶ πρώτου τυχόντος καὶ τῶ δευτέρε τυχόντος ἔστι τριπλασίων τουτέστι τῶ ε̄. ὁ ὑπὸ τῶ πρώτου, ἄρα καὶ τῶ δευτέρου ἔσται μ̊ ιε̄ δ̄ ῡ τε ζ̄ς ς̆ᵃ ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται ιε̄ ς̆ᵃ. α̃. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τῶ δευτέρου, τῶ τρίτου τῶ ὲ. ὅστι τετραπλασίων. ὁ ἄρα ὑπὸ καὶ δευτέρου, καὶ τρίτου ἔσται μ̊ κ̄. ἔστι δὲ ὁ δ̄ ῡ τε ζ̄ς ς̆ᵃ ᾱ. ὁ ἄρα τρίτος ἔσται κ̄ ς̆ᵃ. α̃. λοιπόν ὅστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶ πρώτου, καὶ τῶ τρίτου ὃς εἰσὶ τ̃ δ̄ῦ. α̃. ταῦτα τῶ ε̄. ἑξ πενταπλάσια, γίνονται μ̊ τ̄. ἴσα δ̄ῦ κε̄. καὶ εἰ ἰῶ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχον ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. λελυμένον αὖ ἰῶμοι τὸ ζητούμενον, ἀλλ' αἱ μ̊ τ̄. ὑπὸ τῶ ιε̄. ἔστι καὶ τῶ κε̄. ἀλλ' οἱ ιε̄. τριπλασίων ὅστι τῶ ε̄. ὁ ἄρα κ̄. τετραπλασίων ὅστι ε̄. θέλομεν οὖν τῶ τριπλασίονος τῶ ε̄. ὅτι τὸν τετραπλασίονα τῶ ε̄. πολλαπλασιαθέντος γενόμενον πρὸς τὸν πενταπλασίονα τῶ ε̄. λόγον ἔχειν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ὁ δὲ ε̄. τυχὼν ὅστι. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ ζητεῖν τινα ἀριθμὸν ὅπως ὁ τριπλασίων αὐτῶ πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ τὸν τετραπλασίονα αὐτῶ, καὶ ὁ γενόμενος, πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτῶ, λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος ς̆ ᾱ. καὶ ὁ τριπλασίων αὐτῶ πολλαπλασιαθεὶς ὅτι τὸν τετραπλασίονα αὐτῶ ποιεῖ δ̄ῦ ιβ̄. δεῖ τοίνυν ζῦζι πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτῶ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. δυνάμεις ἄρα ιβ̄. πρὸς ἀριθμὸν ε̄. ἐθέλομεν ἑξ ἐν λόγῳ ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν, καὶ αὐτὸς ἔσται τετράγωνος. κύβοι ἄρα ξ̃. ἴσοι τετραγώνῳ ϛ̄ῦ̄ ἥ ἄρα ἔστω δ̄ῦ π̄. καὶ γίνε ὁ ς̆ᵇ μ̊ ιε̄. ὅτι τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ ζητούμενος μ̊ ιε̄. τάσσω οὖν αὐτὸν μ̊ ιε̄. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ τῶ πρώτου, καὶ τῶ δευτέρου μ̊ με̄. καὶ ἔστιν ὁ δ̄ῦ τε ζ̄ς ς̆ᵃ ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται με̄ ς̆ᵃ. α̃. ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος ξ ς̆ᵃ. α̃ λοιπόν ὅστι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου ζυτέστι βψ δ̄ῦ. α̃. ἴσῳ μ̊ ιε̄. καταπλάσας πενταπλασίονα, τὸ ἄρα βψ δ̄ῦ. α̃. ἴσον μ̊ οε̄. καὶ γίνεται ὁ ς̆ᵃ μ̊

habeat rationem. Sit productus ex primo in ſecundum ad ſummam trium triplus; at productus ex ſecundo in tertium, ſit ſummæ quadruplus. Denique productus ex tertio in primum, ſummæ omnium ſit quincuplus. Quia igitur productus ex binorum mutua multiplicatione ad ſummam trium datam habet rationem. Quæro primùm tres numeros, & aliquem vt cumque adſcitum, ad quem producti ex binorum mutuo ductu datas habeant rationes. Arbitrarius eſto 5. Tunc quia productus ex primo in ſecundum triplus eſt arbitrarij numeri, nempe ipſius 5. vtique productus ex primo in ſecundum erit 15. eſto ſecundus 1 N. ergo primus $\frac{15}{1N}$. Rurſus quia productus ex ſecundo in tertium eſt quadruplus ipſius 5. vtique productus ex ſecundo in tertium erit 20. At ſecundus eſt 1 N. ergo tertius erit $\frac{20}{1N}$. Supereſt vt productus ex primo in tertium, nimirùm $\frac{300}{1Q}$. ſit quincuplus ipſius 5. Proinde fiunt 300. æquales 25 Q. Hîc ſi ſpecies ad ſpeciem rationem haberet quæ eſt quadrati ad quadratum, ſoluta eſſet quæſtio. Enim vero 300. orti ſunt ex 15. in 20. At 15. triplum eſt ipſius 5. & 20. eſt eiuſdem 5. quadruplum. Volumus ergo vt triplo ipſius 5. per quadruplum eiuſdem multiplicato, producti ad quincuplum eiuſdem 5. ratio ſit quæ quadrati ad quadratum. Atqui 5. arbitrarius eſt. Hoc igitur mihi negotij incumbit, vt quæram numerum, cuius triplus & quadruplus inter ſe multiplicati numerum producant qui ad quincuplum eiuſdem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Eſto qui quæritur 1 N. & triplus eius ductus in quadruplum facit 12 Q. Oportet igitur hunc ad quintuplum eiuſdem rationem habere quæ eſt quadrati ad quadratum. Volumus ergo 12 Q. ad 5 N. eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Quamobrem altero in alterum ducto fiet quadratus. Proinde 60 C. æquantur quadrato, ſit ille 900 Q. & fit 1 N. 15. Ad poſitiones, erit quæſitus 15. Pono ergo eum 15. Quare productus ex primo in ſecundum erit 45. Atqui ſecundus eſt 1 N. ergo primus erit $\frac{45}{1N}$. ſimiliter inuenietur tertius $\frac{60}{1N}$. ſupereſt vt productus ex primo in tertium.

tium, hoc est $\frac{2700}{1\text{Q}}$ ipsius 15. quincuplus reperiatur. Igitur $\frac{2700}{1\text{Q}}$ æquatur 75. & fit 1 N. 6. Ad positiones. erit primus 7 $\frac{1}{2}$. secundus 6. tertius 10. Horum summa si foret 15. soluta planè esset quæstio. Statuo itaque summam trium 15 Q. Ipsos autem tres in numeris, quales eos inuenimus, primum scilicet 7 $\frac{1}{2}$ N. secundum 6 N. tertium 10 N. Supereſt igitur vt trium summa sit 15 Q. est autem 23 $\frac{1}{2}$ N. Quare 23 $\frac{1}{2}$ N. æquantur 15 Q. & fit 1 N. $\frac{47}{30}$ Ad positiones. Erit primus $\frac{345}{30}$ $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{282}{30}$. tertius $\frac{470}{30}$.

ς̄. ὅτι ταὶς ὑποσάσις. ἔσαι ὁ πρῶτος μ° ζ̄. ᾱ ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μ° ς̄. ὁ δ' τρίτος μ° ῑ. καὶ εἰ ἰσ̄ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶ τριῶν μ° ιε̄. λελυμένον ἰσ̄ μοι τὸ ζητούμενον. τάσσω δὴ τ' συγκείμενον ἐκ τῶ τριῶν ιε̄. αὐτὸς δ' τὸς ζεῖς ἐν ἀριθμῷ, ὡς δύο μὲν πρῶτον ϛς̄ ζ̄. ᾱ ς̄. τὸν δ' δεύτερον ϛς̄ ς̄. τὸν δ' τρίτον ϛς̄ ῑ. καὶ λοιπὸν δεῖ τὸς ζεῖς εἶ δ° ιε̄. εἰσὶ δ' οἱ τρεῖς ϛς̄ κγ̄. ᾱ ς̄. ἀριθμοὶ ἄρα κγ̄. ᾱ ς̄. ἴσοι δ° ιε̄. ὧ γίνεται ὁ ς̄ μ° μζ̄ λ̄. ὅτι ταὶς ὑποσάσις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος τνβ̄ λ̄. α ς̄. ὁ δὲ δεύτερος σπβ̄ λ̄. ὁ δ' τρίτος υο̄ λ̄.

IN QVAESTIONEM XLIII.

Hic restituto textu, vt fecimus, omnia sunt perspicua, nec maiore explicatione indigent: nonnulla etiam omiserat Xilander, quorum defectu res obscurabatur, vt videre est si versio illius cum nostra conferatur.

QVÆSTIO XLIV.

INvenire tres numeros, vt compositus ex tribus multiplicatus in primum faciat triangulum; in secundum, faciat quadratum, in tertium faciat cubum. Statuatur summa trium 1 Q. Primus autem fractio quadratica vnitatum triangularium, puta $\frac{6}{1\text{Q}}$. secundus fractio quadratica vnitatum quadratarum, vt $\frac{4}{1\text{Q}}$. Tertius denique fractio quadratica vnitatum cubicarum, nimirum $\frac{8}{1\text{Q}}$. & quidem 1 Q. multiplicatus in primum facit 6. qui est triangulus, & 1 Q. multiplicatus in secundum facit 4. qui est quadratus, & rursus 1 Q. multiplicatus in tertium facit 8. qui est cubus. Supereſt vt trium summa sit 1 Q. sed trium summa est $\frac{18}{1\text{Q}}$. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. multiplicentur, fit 1 QQ. æqualis 18. Oportet igitur 18. esse quadratoquadratum. Atqui 18. est compositus ex triangulo, quadrato, & cubo. Proinde reperiendus est quadratus, latus habens quadratum, & diuidendus in triangulum, quadratum, & cubum. Esto is 1 QQ. Quadratus autem 1. QQ. + 1 − 2 Q. si ergo de 1 QQ. abstulero 1 QQ. + 1 − 2 Q. relinquetur 2 Q. − 1. Hunc rursus oportet diuidere in cubum, & triangulum. Esto cubus 8. relinquitur ergo triangulus

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμὸς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τ' τριῶν πολλαπλασιαζόμενος ὅτι μὲν τὸν πρῶτον ποιῆ τρίγωνον, ὅτι δ' τὸν δεύτερον ποιῆ τετράγωνον, ὅτι δὲ τ' τρίτο ποιῆ κύβον. τετάχθω δὴ οἱ τρεῖς δυνάμεως ᾱ. ὁ δ' πρῶτος δυναμοσὸν μονάδων τριγωνικῶν, ἔστω ς̄ δ̄ᵛ. ᾱ̃. ὁ δὲ δεύτερος δυναμοσὸν μονάδων τετραγωνικῶν ἔστω δ̄ δ̄ᵛ. ᾱ̃. ὁ δ' τρίτος δυναμοσὸν μονάδων κυβικῶν. ἔστω η̄ δ̄ᵛ. ᾱ̃. καὶ ἡ δύναμις μία πολλαπλασιαθεῖσα ὅτι μὲν τὸν πρῶτον ποιεῖ μ° ς̄. ὅς ὅζι τρίγωνος, ὅτι δὲ τὸν δεύτερον ποιεῖ μ° δ̄. ὅς ὅζι τετράγωνος, ὅτι δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μ° η̄. ὅς ὅζι κύβος. λοιπὸν ὅζι τὸς τρεῖς εἶ δ° ᾱ. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσὶ ιη̄ δ̄ᵛ. ᾱ̃. ἴσοι δ° ᾱ. καὶ πάντα ὅτι δύναμιν μίαν, γίνεται δ° ᾱ. ἴση μ° ιη̄. δεῖ δ' τὸν ιη̄. εἶ δυναμοδύναμιν, ἀλλ' ὁ ιη̄. συνθετός ὅζι τριγώνου, καὶ τετραγώνου, καὶ κύβου. ἀπῆκται δ' μοι δυρεῖν τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, καὶ αὐτὸν διελεῖν εἰς τρίγωνον, καὶ τετράγωνον, καὶ κύβον. ἔστω δ° δ° ᾱ μ° ᾱ λείψει δ° β̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ δ° δ° μιᾶς ἄρα δ° δ° ᾱ. μ° ᾱ. λείψει δ° β̄. λοιπὸς καταλείπεται δ° β̄ λείψει μ° ᾱ. πάλιν ταῦτα δεῖ διαρεθῆναι εἰς τε κύβον, καὶ τρίγωνον, καὶ ἔστω ὁ κύβος μ° η̄. λοιπὸ: ἄρα ὁ τρίγωνος δ° β̄ λείψει μ°. Θ̄. πᾶς ἢ Τρίγωνος ὀκτάκις γ̣υόμενος, καὶ ϖεσλαβὼν μονάδα τε-

τράγωνος γίνεται. δυνάμεις ἄρα ις̄. λείψει μ̊ οᾱ. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ες̄ δ̄. λείψει μ̊ ᾱ. γίνεται ὁ ς̄ μ̊ ϑ̄. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̊ ρνβ̄. ὁ δὲ τράγωνος, σν̄. ὁ δὲ κύβος μ̊ η̄. ἔρχομαι εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν ἐπὶ τῷ τειδν συγκείμενον τετράγωνον δ̄ ᾱ. τὸν δὲ πρῶτον ρνβ δ̄ᾱ. ἐπεισλὴ τρίγωνον γενέσθαι. τὸν δὲ δεύτερον σν̄ δ̄ᾱ. ἐπεισλὴ τετράγωνον γενέσθαι. τὸν δὲ τρίτον η δ̄ᾱ. ἐπεισλὴ κύβον γενέσθαι. καὶ ἡ δύναμις ᾱ. τετράγωνος οὖσα, ἐφ' ὃν ἂν πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ, ὃν μὲν τρίγωνον, ὃν δὲ τράγωνον, ὃν δὲ κύβον. δεῖ δὴ τὰς τρεῖς εἶναι δ̄ ᾱ. εἰσὶ δὲ σφξᾱ δ̄ᾱ. ἴσον δ̄ ᾱ. καὶ πάντα ὅπου δύναμιν γίνεσθαι δ̄ δ̄ ᾱ. ἴση μ̊ σφξᾱ. καὶ ὅτι ὁ ς̄ μ̊ ϑ̄. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρνβ πᾱ. ὁ δὲ δεύτερος σν̄ πᾱ. ὁ δὲ τρίτος η πᾱ. καὶ ἡ ὑπόδειξις φανερά.

2 Q. — 9. Porrò quiuis triangulus per 8. multiplicatus, & adsumens vnitatem, facit quadratum. Proinde 16 Q. — 71. æquantur quadrato. Formo quadratum à 4 N. — 1. fit 1 N. 9. Ad positiones. Erit triangulus 153. quadratus 6400. cubus 8. Venio ad id quod initio propositum fuit & statuo compositum ex tribus quadratum 1 Q. Primum autem $\frac{153}{1}$ Q. vt fiat triangulus. Secundum $\frac{6400}{1}$ Q. vt fiat quadratus. Tertium denique $\frac{8}{1}$ Q. vt fiat cubus. & 1 Q. cùm sit quadratus ductus in vnumquemque, facit primum triangulum, secundum quadratum, tertium cubum. Oportet autem tres simul esse 1 Q. sunt autem $\frac{6561}{1}$ Q. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia in 1 Q. ducantur, fit 1 Q Q. æqualis 6561. & fit 1 N. 9. Ad positiones. erit primus $\frac{153}{81}$. secundus $\frac{6400}{81}$. tertius $\frac{8}{81}$. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XLIV.

HIc tota obscuritas nascitur ex fractionibus quadraticis, quæ vt iam sæpe monuimus semper ambiguè exprimuntur apud Diophantum. Deerant & nonnulla verba quæ reposuimus, ea more nostro virgulis includentes. Numerus triangulus dicitur summa progressionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, & per vnitatem progredientis, cuius vltimus terminus, qui & idem est cum numero qui exprimit multitudinem terminorum dicitur latus trianguli vt quinque terminorum 1. 2. 3. 4. 5. summa 15. est triangulus cuius latus 5. & sex terminorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. summa 21. est triangulus cuius latus 6. Quod fusius explicat Diophantus libro de numeris multangulis. Nos quoque in appendice ad eundem librum vniuersalissimè demonstrabimus Theorema quod de Numeris triangulis profert Diophantus. nimirum, Omnis triangulus per octo multiplicatus & adsciscens vnitatem quadratum facit. Interim tamen peculiari demonstratione libet id ostendere, supponendo modum illum communem inueniendi summam cuiuscunque progressionis arithmeticæ, ducendo scilicet summam extremorum in semissem numeri terminorum, quem etiam demonstrat Diophantus loco citato. Vnde infertur in progressione cuius summa est numerus triangulus, vbi primus terminus est 1. maximus verò æquatur numero terminorum, seu lateri trianguli, ipsum triangulum haberi si latus ipsius vnitate auctum ducatur in semissem eiusdem lateris. His positis, sic pronuncio.

Omnis numerus triangulus per octo multiplicatus, & adsciscens vnitatem, quadratum facit, cuius latus est duplum lateris ipsius trianguli vnitate auctum.

A 21.
B... C... D. E
F 168. G. 169.
H..... K. L

Sit numerus triangulus A cuius latus B D. cuius semissis B C. & sit vnitas D E, & octuplum ipsius A esto F cui addita vnitate fiat G. sumaturque H K duplum ipsius B D. cui addatur vnitas K L. dico G esse quadratum à latere H L. etenim ex suprà dictis constat triangulum A æquari producto ex B C. in totum B E; sed hic productus 1. *secundi* æquatur productis ex B C in B C. & in C D. & in D E. hoc est duplo quadrati ipsius B C & ipsi B C. semel. Quare octuplum ipsius A puta F. æquatur sedecuplo quadrati ipsius B C. & octuplo ipsius B C. Ergo G continet sedecuplũ quadrati ipsius B C. octuplum ipsius B C & præterea vnitatẽ. Porro cùm B D sit duplus ad B C. & rursus H K sit duplus ad B D. patet H K esse quadruplum ipsius B C. ac proinde quadratus ipsius H K æquatur sedecuplo quadrati ipsius B C. & duplum ipsius H K æquatur octuplo eiusdem B C. Igitur G æquatur quadrato ipsius H K. & duplo ipsius H K. & vnitati. Sed & quadratus ipsius H L 4. *secundi* æquatur quadrato H K. & quadrato K L. hoc est vnitati, & duplo producti ex H K. in vnitatem K L. hoc est duplo ipsius H K. Ergo G æqualis est quadrato ipsius H L. Quod erat demonstrandum. Nec refert vtrum B D. secari possit bifariam indiuisa vnitate, necne, cùm hæc demonstratio nitatur solùm propositionibus libri secundi Euclidis, quæ abstruhunt ab integris & à fractis, vt manifestum est. Porro hinc euidenter colligitur omnem quadratum imparem vnitate multatum, esse multiplicem octonarij, nam metitur eum octonarius

per numerum triangulum, cuius latus æquatur ſemiſſi lateris quadrati vnitate multati.

Diligenter autem attendenda eſt operatio Diophanti, qui poſitiones ſuas appoſitiſſimè inſtituit vt ſolutio contingat rationalis. Etenim cùm quærendus ſit quadratoquadratus conſtans ex triangulo, quadrato, & cubo, ponit eum 1 Q Q. Tum argutè quadratum ſtatuit 1 Q Q. + 1. − 2 Q. à latere 1 Q. − 1. quo ablato ab 1 Q Q. ſupereſt 2 Q. − 1. qui ex cubo & ex triangulo componi debet. Hinc ergò ſi auferatur cubus quilibet, puta 8. reſtat 2 Q. − 9. æquandus triangulo. Quamobrem oportet vt ductus in 8. & adſciſcens vnitatem, faciat quadratum per theorema ſuprà demonſtratum. Vnde fit 16 Q. − 71. æquandus quadrato. Hoc autem fieri minimè poſſet, niſi 16. quadratorum numerus, eſſet quadratus. Itaque.

Aduerte primò in quadrato detrahendo ab 1 Q Q. talem reperiri debere quadratorum numerum, vt is ad 8. habeat rationem quadrati ad quadratum, quales ſunt 1. 8. 32. &c. ſic poni poterat quadratus ille 1 Q Q. + 19 − 8 Q. à latere 1 Q. 4. vel etiam 1 Q Q. + 256 − 32 Q. à latere 1 Q. − 16. & ſic de aliis. Verbi gratia ſi ponatur quadratus 1 Q Q. + 16 − 8 Q. eo detracto ab 1 Q Q. reſtabit 8 Q. − 16. vnde ſi auferas cubum aliquem, puta 8. remanebit 8 Q. − 24. æquandus triangulo, ac proinde ducto eo in 8. & producto addendo vnitatem, fiet 64 Q. − 191. æquandus quadrato, cuius latus ſi fingas 8 N. − 1. fiet 1 N. 12. cuius quadratoquadratus optimè ſatisfacit propoſito.

Aduerte ſecundò, alium etiam quemlibet cubum quàm 8. ſumi poſſe, vt in hypotheſi Diophanti ſi ſumatur cubus 27. fiet 2 Q. − 28. æquandus triangulo, quem ſi ducas in 8. & producto addas 1. fiet 16. Q. − 223. æquandus quadrato, cuius latus ſi ponas 4 N. − 1. fiet 1 N. 28. cuius quadratoquadratus [illegible] poſtulata.

Aduerte poſtremò in fingendo latere vltimi quadrati, talem adhibendam eſſe cautionem, vt valor Numeri reperiatur in integris numeris, cùm numerus triangulus non poſſit eſſe niſi integer. Id autem ſemper ſuccedet operando modo à Diophanto tradito, ſi quadrati latus fingatur à tot numeris qui ſint latus quadratorum in numero quadrato æquando contentorum − 1. Cæterùm vix aliter id fieri poſſe, ſatis experiendo deprehendes. Ex operatione autem Diophanti facilè eſt elicere Canonem ad inueniendum quadrato quadratum qui conſtet ex triangulo, quadrato, & cubo nimirum.

OBSERVATIO D. P. F.

EXperientiam non ſatis exactam fecit Bachetus. Sumatur quilibet cubus v.g. cuius latus multiplici ternarii ſuperaddat vnitatẽ Erunt v.g. 2 Q − 344 æquando triangulo ergo 16. Q. − 2751 æquabuntur quadrato cuius latus finges ſi libet, 4 N − 3. &c. Nihil enim vetat quo minus generali methodo loco etiam ipſius 3. reliquos in infinitum impares vſurpemus, variando cubos.

Sume cubum quemlibet, & huic adde vnitatem, fiet latus quæſiti quadratoquadrati.

Quod ſi velis reperire quadratum, & cubum, & triangulum, ex quibus inuentus quadratoquadratus componitur. Adde 1. quadratoquadrato inuento, & hinc aufer duplum quadrati ab eodem latere profecti, relinquetur quadratus quæſitus. Cubus verò is eſt quem ab initio ſumpſiſti. Triangulus verò reperietur ſi ab inuento quadratoquadrato auferas compoſitum ex quadrato & cubo iam inuentis. Verbi gratia, ſume cubum 1. cui adde 1. fiet 2. latus quæſiti quadratoquadratis. Is ergo eſt 16. quem dico componi ex quadrato, cubo, & triangulo. Nam adde 1. ad 16. fit 17. vnde aufer duplum quadrati à latere 2. puta 8. remanet quæſitus quadratus 9. cubus verò eſt is quem ſumpſiſti ab initio, nempe 1. Quare à quadratoquadrato 16. auferendo 9. & 1. ſimul, remanet triangulus 6. ſed & quadratum ſic aliter inuenies, aufer 1. à quadrato ab eodem latere profecto, à quo proficiſcitur quadratoquadratus inuentus, reſiduum erit latus quæſiti quadrati, vt in eodem exemplo, cùm quadratus lateris 2. ſit 4. aufer hinc 1. remanet 3. latus quæſiti quadrati 9.

Rurſus aliter inuenietur triangulus hac arte. Cape duplum cubi ab initio ſumpti, & huic adde vnitatem, fiet latus quæſiti trianguli. Vt in eodem exemplo, duplo cubi 1. adde 1. fiet 3. latus trianguli 6.

Hoc verò lemmate ſoluto, ſoluetur & propoſita quæſtio huiuſmodi Canone.

Sume quadratoquadratum ex triangulo, quadrato, & cubo compoſitum. Tum diuide ſigillatim triangulum, quadratum & cubum, per quadratum à latere quadratoquadrati ſumpti, orientur quæſiti numeri.

Vt in noſtra hypotheſi, diuide ſigillatim 6. 9. 1. per 4. fient quæſiti numeri $\frac{6}{4}. \frac{9}{4}. \frac{1}{4}$. nam eorum ſumma eſt 4. qua ducta in primum fit triangulus 6. & eadem ducta in ſecundum 1. fit quadratus 9 & eadem ducta in tertium, fit cubus 1.

Dignum quoque animaduersione est, ex vi analyseos Diophantææ sequi, summam quæsitorum numerorum esse quadratum numerum, quoniam ponitur huiusmodi summa 1 Q. sic vides in illius hypothesi, summam numerorum esse 81. At in nostra 4. & sic de alijs.

Sed & operæ pretium fuerit adnotasse, quæstionem hanc eodem prorsus artificio extendi posse ad quoslibet polygonos & quaslibet potestates, dummodo iis adnumerentur quadratus & triangulus, verbi gratia.

Inueniantur quinque numeri, vt summa ipsorum ducta in primum, fiat triangulus, in secundum quadratus, in tertium cubus, in quartum Pentagonus, in quintum quadrato quadratus.

Hîc euidens est reperiendum esse quadratoquadratum compositum ex triangulo, quadrato, cubo, pentagono, & quadratoquadrato. Is esto 1 QQ. quadratus autem 1 QQ. + 1−2 Q. quo detracto ab 1 QQ. remanet 2 Q. − 1. diuidendus in cubum, pentagonum, quadratoquadratum, & triangulum. Esto cubus 8. pentagonum 5. Quadratoquadratus 1. relinquitur ergo triangulus 2 Q. − 15. qui ductus in 8. & adsumens 1. facit 16 Q. − 119. æquandandum quadrato. Esto latus eius 4 N. − 1. fiet 1 N. 15. Est ergo triangulus 435. quadratus 50176. cubus 8. Pentagonus 5. Quadratoquadratus 1. Veniamus iam ad propositam quæstionem, & statuantur summa quæsitorum numerorum 1 Q. primus verò $\frac{435}{1Q}$. secundus $\frac{50176}{1Q}$. tertius $\frac{8}{1Q}$. quartus $\frac{5}{1Q}$ quintus $\frac{1}{1Q}$. Erit illorum summa $\frac{50625}{1Q}$. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. 15. Igitur primus est $\frac{435}{225}$. secundus $\frac{50176}{225}$. tertius $\frac{8}{225}$ quartus $\frac{5}{225}$. quintus $\frac{1}{225}$.

QVÆSTIO XLV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀεριθμὸς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλάσσονος λόγον ἔχῃ δεδομένον. ἔτι δὲ καὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον ὁπιοτάχθη δὴ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἰς τετράγωνα. ἐπεὶ ὃ συναμφότερος ὁ μέσος, καὶ ὁ ἐλάσσων ποιεῖ τετράγωνον. ποιείτω μ̊ δ̅. ὁ ἄρα μέσος μείζων ἐστὶ δυάδος. ἔστω ἀριθμὸς α̅. μ̊ β̅. ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται μ̊ β̅. ϛ̅ ς̱ α̅. καὶ ἐπεισὴ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ς̱ς̱ᵒⁱ β̅. ἡ ἄρα ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου ἔσται ς̱ς̱ γ̅. καὶ ὁ μείζων ἄρα ἔσται ς̱ς̱ ζ̅. μ̊ β̅. λοιπὸν ἐστὶ δύο ὁπτάγωνα, τότε συναμφότερον τὸ μείζονα, καὶ τὸν μέσον ποιεῖν τετράγωνον τότε τὸ μείζονα, καὶ τὸ ἐλάχιστον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεταί μοι διπλῆ ἡ ἰσότης ς̱ς̱ᵒⁱ ἡ μ̊ δ̅. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ς̱ς̱ᵒⁱ γ̅. μ̊ δ̅. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικὰς, δύχρηστός ἐστιν ἡ ἴσωσις. πλάσσω ἀριθμοὺς δύο, ἵνα τὸ ἀπὸ αὐτῶν ᾖ ς̱ς̱ᵒⁱ β̅. καθὼς ἴσμεν διπλῶν ἰσότητα. ἔστωσαν ς̱ᵉ τὸ ἥμισυ, καὶ μ̊ δ̅. καὶ γίνεται ὁ ς̱ᵒ μ̊ ριβ̅. ἐλθὼν ὅτι τὰς ὑποσάσεις, ἃ δύναμαι ἀφεῖναι ἀπὸ μ̊ β̅. τὸν ς̱ᵒⁱ α̅. τουτέστι τὰς μ̊ ριβ̅. θέλω οὖν τὸν ς̱ᵒⁱ ὑπερθλῶν ἐλάττονα μ̊ β̅. ὥστε καὶ ς̱ς̱ᵒⁱ γ̅ μ̊ δ̅. ἐλάσσονες ἔσονται μ̊ ιϛ̅. ἐαν γὰρ ἡ δυὰς ὅτι ς̱ς̱ᵒⁱ γ̅. γένηται καὶ προσλάβῃ μ̊ δ̅.

INVENIRE tres numeros, vt interuallum maioris & medij, ad interuallum medij & minoris datam habeat rationem; sed & bini sumpti quadratum constituant. Imperetur vt interuallum maioris & medij, interualli medij & minimi sit triplum. Iam cùm summa medij & minimi sit quadratus, esto 4. ergo medius maior est binario. esto 1 N. + 2. Igitur minimus erit 2 − 1 N. & quoniam interuallum maximi & medij, est triplum interualli medij & minimi interuallum autem medij & minimi est 2 N. erit interuallum maximi & medij 6 N. Quamobrem maximus erit 7 N. + 2. Supersunt duo postulata, nimirum vt maximus cum medio faciat quadratum, & vt maximus cum minimo faciat quadratum, & occurrit duplicata æqualitas, nempè 8 N. + 4. æquales quadrato, & 6 N. + 4. æquales quadrato, & quia vnitates sunt quadratæ, expedita est æquationis ratio. Statuo duos numeros quorum mutuo ductu fiant 2 N. sicut nouimus in duplicata æqualitate faciendum. sunto $\frac{1}{2}$ N. & 4. fit 1 N. 112. At vbi me ad positiones confero, non possum de 2. auferre 1 N. nimirum 112. Volo igitur numerum inueniri minorem quàm 2. atque sic etiam 6 N. + 4. minores erunt quàm 16. nam binario in 6 N. multiplicato, & additis 4. fiunt 16. Quandoquidem ergo quæro 8 N. + 4. æquari quadrato,

& 6 N. + 4. æquari quadrato, sed & à binario fit quadratus 4. sunt tres quadrati 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & 4. & interuallum maximi & medij est triens interualli medij & minimi: eò res rediit vt inueniantur tres quadrati, vt interuallum maximi & medij, sit triens interualli medij & minimi, sed & minimus sit 4. Medius autem minor quàm 16. Ponatur minimus 4. At medij latus 1 N. + 2. Ipse igitur erit 1 Q. + 4 N. + 4. Quia ergo interuallum maximi & medij, est triens interualli medij & minimi, at interuallum medij & minimi est 1 Q. + 4 N. vtique maximi & medij interuallum erit $\frac{1}{3}$ Q. + $1\frac{1}{3}$ N. At est medius 1 Q. + 4 N. + 4. Igitur maximus erit $1\frac{1}{3}$ Q. + $5\frac{1}{3}$ N. + 4. æqualis quadrato. Omnia nouies. Ergo 12 Q. + 48 N. + 36. æquatur quadrato, & huius quadrans, nempè 3 Q. + 12 N. + 9. æquatur quadrato. Atqui oportet & medium minorem esse quàm 16. Quare & latus minus esse oportet quàm 4. latus autem medij est 1 N. + 2. Proinde 1 N. + 2. minus sunt quàm 4. & sublato vtrimque binario. 1 N. minor est quàm 2. volens itaque 3 Q. + 12 N. + 9. æquare quadrato, formo quadratum à 3. cum defectu aliquot numerorum, & fit 1 N. ex aliquo numero sexies sumpto, & adsciscente 12. nimirum 12 N. æquationis, & diuiso per interuallum quo numeri quadratus superat quadratos qui sunt in æquatione, nempè 3. Eò itaque deducta res est, vt inueniatur numerus qui sexies sumptus, & adsciscens 12. diuisusque per interuallum quo ipsius quadratus excedit ternarium, quotientem binario minorem exhibeat. Esto quæsitus 1 N. Hic sexies sumptus & adsciscens 12. facit 6 N. + 12. Quadratus autem illius detracto ternario facit 1 Q. − 3. Volo ergo 6 N. + 12. diuidi per 1 Q. − 3. & facere quotientem minorem quam 2. Atqui 2. diuisus per vnitatem, facit quotientem 2. Proinde 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorem habet rationem quàm 2. ad 1. Quare & planus plano inæqualis est. Igitur productus ex 6 N. + 12. in 1. minor est producto ex 2. in 1 Q. − 3. hoc est 6 N. + 12. minus sunt quàm 2 Q. − 6. Adiiciantur

ποιεῖν μ° ιϛ̄. ἐπεὶ οὖν ζητῶ ϛϛ^ους ῆ. μ° δ̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ϛϛ^ους ϛ̄. μ° δ̄. ἴσους τετραγώνῳ. ἀλλ' καὶ ὁ ἀπὸ τῆς δυάδος τουτέστι μ° δ̄. τετράγωνός ἐστι. γεγόνασι τρεῖς τετράγωνοι ϛϛ ῆ. μ° δ̄. καὶ ϛϛ ϛ̄. μ° δ̄. καὶ μ° δ̄. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρός ἐστιν. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ᾖ, ἔτι δὲ ὁ μὲν ἐλάχιστος ᾖ μ° δ̄. ὁ δὲ μέσος ἐλάσσων μ° ιϛ̄. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάχιστος μ° δ̄. ἡ δὲ τοῦ μέσου πλευρὰ ϛ^ου ᾱ. μ° β̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δ^ου ᾱ. ϛϛ δ̄. μ° δ̄. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρός ἐστι, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου δ^ου ᾱ. ϛϛ δ̄. ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ μέσου ἔσται δ^ου ᾱ ^γ̄. ϛ^ου ᾱ. ᾱ ^γ̄. καὶ ἔστιν ὁ μέσος δ^ου ϛϛ δ̄. μ° δ̄. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δ^ου ᾱ. ᾱ ^γ̄. ϛϛ ε̄. ᾱ ^γ̄ μ° δ̄. ἴσοι τετραγώνῳ. πάντα ἐννεάκις δυνάμεις ἄρα ιβ̄. ϛϛ^οι μη̄. μ° λϛ̄. ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον αὐτῶν δ^ου γ̄. ϛϛ^οι ιβ̄. μ° θ̄. ἴσον τετραγώνῳ, δεῖ δὲ καὶ τὸν μέσον ἐλάσσονα εἶναι μ° ιϛ̄ καὶ τὴν πλευρὰν δηλαδὴ ἐλάσσονα εἶναι μ° δ̄. ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ μέσου ἐστὶν ϛ^ου ᾱ. μ° β̄. ἀριθμὸς ἄρα εἷς μ° β̄. ἐλάττονές εἰσι μ° δ̄. καὶ κοινῶν ἀφαιρεθεισῶν τῶν β̄ μ°. ὁ ϛ^ὸ ἔσται ἐλάσσων μ° β̄. γέγονε οὖν μοι δ^ου γ̄. ϛϛ^ους ιβ̄. μ° θ̄. ἴσας ποιῆσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τετράγωνόν τινα ἀπὸ μ° γ̄. λειπόντων ϛϛ^ους τινας, καὶ γίνεται ὁ ϛ^ὸ ἔκτινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου, καὶ προσλαβόντος τὸν ιβ̄. τουτέστι τῆς ἰσώσεως τοὺς ϛϛ^ους ιβ̄. καὶ μεριθέντος εἰς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ϛ^ου τετράγωνος τῶν δυνάμεων τῶν ἐν τῇ ἰσώσει τριῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ϛ̄. ὃς ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μ° ιβ̄. μεριζόμενος εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τετράγωνος, τριάδος, ποιεῖ τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μ° β̄. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ^ου ᾱ. ἐστὶ ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν μ° ιβ̄. ποιεῖ ϛϛ^ους ϛ̄. μ° ιβ̄. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος λείψας μ° γ̄. ποιεῖ δ^ου ᾱ. ϛ μ° γ̄. θέλω οὖν ϛϛ^ους ϛ̄. μ° ιβ̄. μερίζεσθαι εἰς δ^ου ᾱ ϛ μ° γ̄. καὶ ποιεῖν τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μ° β̄. καὶ ὁ β̄ μεριζόμενος εἰς μονάδα μίαν ποιεῖ τὴν παραβολὴν, δυάδα, ὥστε ϛϛ^οι ϛ̄ μ° ιβ̄ πρὸς δύναμιν ᾱ

γ μ̊ γ̄. ἐλάσσονα λόγον ἔχουσιν, ἢπερ δύο πρὸς ἕνα. ℂ χωρίῳ χωρίον ἄνισον. ὁ ἄρα ὑπὸ ςς̄ ς̄ μ̊ ιβ̄. καὶ μονάδος μιᾶς, ἐλάσσων ὅσῃ, τῷ ὑπὸ δυάδος καὶ δυνάμεως α̅ γ μ̊ γ̄. ἴσωται ςς̄οῖ ς̄ μ̊ ιβ̄. ἐλάσσονες εἰσὶ δ̊ β̄ γ μ̊ ς̄. καὶ κειναὶ προσπεί̈θωσαν αἱ μονάδες, μείζονες ςς̄οῖς θ̄ μ̊. ιη̄. αἱ δυνάμεις β̄. ὅταν ᾖ τοιαύτῳ ἴσωσιν ἰσώσωμεν, ποιῶμεν τ̄ ςς̄ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ, γίνε) ϙ̄. καὶ τὰς δ̊ β̄. ὅλῃ τὰς μ̊ ιη̄. γίνον) λς̄. προάδες τοῖς θ̄. γίνονται μέ. ὧν πλευρὰ ἐκ ἐλάττ̈ον ὄσι μ̊ ζ̄. προάδες τὸ ἡμίσυμα τῷ ςς̄ καὶ μείζον εἰς δυνάμεις γίνεται ὁ ς̄ ἐκ ἐλάττ̈ων υ̊ ε̄. γέγονεν δ̄ν μοι δυνάμεις γ̄. ςς̄οῖ ιβ̄ μ̊ θ̄. ἵνα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μ̊ γ̄. λείψει ἀριθμῷ ε̄ καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̊ ιβ̄ ᵡς̄. τουτέστι κα̅ ι̊α̅. τέθεικα δὲ τοῦ τῶ μέσου τετραγώνου πλευρὰν ς̄ α̅. μ̊ β̄. ἔσαι ἡ τῶ τετραγώνου πλευρὰ μ̊ μγ̄ ι̊α̅ᾱ. αὐτὸς ᾖ ὁ τετράγωνος μ̊ ϡωμθ̄ ρκα̅ᾱ. ἔρχομαι δ̄ν ὅλῃ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσω μονάδας ϡωμθ̄ ρκα̅ᾱ. ὅντα τετράγωνον ἴσον τοῖς ςς̄οῖς ς̄. μ̊ δ̄. καὶ πάντα εἰς ρκα̅. ℂ γινέσθαι ὁ ς̄ ατξὲ ψ̄ᵡς̄. ℂ ἔστιν ἐλάσσων δυάδος. ὅλῃ τὰς ἴσος ἀσῃς τῷ προβλήματος τῷ ἐξ ἀρχῆς. ὑπέστημεν ᾖ τ̄ μὲν μέσον ς̄ α̅. μ̊ β̄. τ̄ ᾖ ἐλάχιστον μ̊ β̄ γ ς̄ α̅. τ̄ ᾖ μέγιστον ςς̄ ζ̄. μ̊ β̄. ἔσαι ὁ μὲν μέγιστος α̅. αζ̄ ψ̄ᵡς̄. ὁ ᾖ δεύτερος βωιζ̄ ψ̄ᵡς̄ᾱ. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὁ τρίτος ωζ̄ ψ̄ᵡς̄ᾱ. καὶ ἐπεὶ τὸ μόριον τὸ ψ̄ᵡς̄. ἐκ ἔστιν τετράγωνος ἔκλον δ̄ὲ ἔστιν αὐτῷ, ἐὰν λάβωμεν ρκα̅. ὅ ὄστι τετράγωνος. πάντων δ̄ν τὸ ἔκλον. καὶ ὁ μὲν πρῶτος ϡωλδ̄ ρκα̅ᾱ α̅ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος υξϑ̄ ρκα̅. α̅ ᾱ. ὁ δὲ τρίτος ιδ̄ ρκα̅ᾱ. α̅ ᾱ. καὶ ἐὰν ὦν ὁλοκλήρους θέλῃς, ἵνα μὴ τὸ ἥμισυ ὑπερέχῃ, εἰς τέσσαρα ἐμβαλες. ℂ ἔσαι ὁ πρῶτος ζτλῆ υ̊πδ̄ᾱ. ὁ δεύτερος ϡοῆ υ̊πδ̄ᾱ. ὁ δὲ τρίτος νῆ υ̊πδ̄ᾱ. ℂ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

quæ desunt vtrimque vnitates, erunt 2 Q. maiores quàm 6 N. + 18. In æquatione autem hac explicanda, dimidium numerorum in se ducimus, & fit 9. ducimus etiam quadratos in vnitates, & fiunt 36. & addito 9. fiunt 45. cuius latus non minus est 7. Adde semissem numerorum, & diuide per quadratos, fit 1 N. minor 5. Oportet igitur 3 + 12. N. + 9. æquare quadrato à latere 3 − 5 N. & fit 1 N. $\frac{42}{22}$. hoc est $\frac{21}{11}$. Posueram autem medij quadrati latus 1 N. + 2. erit ergo huiusmodi latus. $\frac{43}{11}$ ipse verò quadratus $\frac{1849}{121}$. venio igitur ad primò propositum, & statuo $\frac{1849}{121}$ qui est quadratus, æqualem 6 N. + 4. & omnia ducendo in 121. fit 1 N. $\frac{1365}{1849}$. minor vtique binario. Ad positiones quæstionis initio propositæ. Statueramus medium 1 N. + 2. minimum 2 − 1 N. Maximum verò 7 N. + 2. erit ergo maximus $\frac{11907}{726}$. secundus $\frac{2857}{726}$. minimus seu tertius $\frac{87}{726}$. & quia denominator 726. non est quadratus sed eius sextans 121. est quadratus, omnium sextantes accipiamus, & erit similiter primus $\frac{18341}{121\ 2}$. secundus $\frac{4691}{121\ 2}$. tertius $\frac{1400}{121}$. Quod si in integris hæc desideras, ne semissis intercurrat, omnia quadruplica, & erit primus $\frac{73533}{484}$. secundus $\frac{18378}{484}$. tertius $\frac{58}{484}$. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XLV.

PRÆCLARVM est hoc problema, & admirandæ subtilitatis, in quo etiam continetur nouus modus vtendi duplicata æqualitate omnium quos hactenus explicauimus, elegantissimus. Cùm ergo tres operationes instituat Diophantus, age singulas persequamur, vt multa dilucidentur, in quibus omnino cæcutiit Xilander.

In prima itaque operatione. Aduerte primò pro quadrato quem conficiunt medius & minimus sumi potuisse quemlibet vnitatum numerum quadratum. Author sumpsit 4. minimum scilicet more suo.

Aduerte secundo cur inferat medium maiorem esse debere binario, causam esse quia medius debet esse maior minimo. Quare posita summa medij & minimi 4. oportet medium excedere semissem ipsius 4.

Aduerte tertiò cùm æquandi sint quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. Diophantum indicare primùm, modum illum resoluendi duplicatam æqualitatem, quo sæpè in simili vsus est libro tertio. Quia enim vnitatum numerus vtrobique quadratus est, procedit æquatio, si sumantur duo numeri quorum mutuo ductu fiat interuallum 2 N. ita tamen vt in semisse summæ illorum contineatur 2. latus quadrati 4. tales sunt $\frac{1}{2}$ N. & 4. Quare si horum summæ semissis quadratus æquetur ipsi 8 N. + 4. vel si eorundem interualli semissis quadratus æquetur ipsi 6 N. + 4. fiet vtrobique 1 N. 112. Hinc autem hoc in commodi accidit, vt per hunc Numeri valorem resolui non possint hypostases.

Etenim cùm minimus positus sit 2 − 1 N. euidens est valorem Numeri debere esse minorem quàm 2. Proinde cùm hoc modo resoluendo duplicatam æqualitatem vnica solutio reperiri possit, qua fit 1 N. 112. patet eum hoc loco inutilem esse. Igitur.

Aduerte quartò aliud hîc genus duplicatæ æqualitatis tradi à Diophanto, quo in data hypothesi, & alijs omnibus similibus infinitæ reperiri possunt solutiones, hac arte. Consideratis tribus numeris 8 N. + 4. 6 N. + 4. 4. Quorum minimus 4 est vnitatum numerus quadratus. At interuallum maiorum 2 N. est triens interualli minorum 6 N. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit triens interualli quo minor illorum superabit 4. quales sunt 64. & 49. Tunc verò siue æques 64. & 8 N. + 4. siue 49. & 6 N. + 4. fiet vtrobique idem valor numeri $7\frac{1}{2}$. Hoc autem ita necessario inuenire, ac proinde modum istum resoluendi duplicatam æqualitatem esse legitimum, sic demonstrabitur. Sint tres numeri A. B C. & interuallum maiorum A B. esto D. interuallum minorum B C. esto E. Rursus sint tres F G H. & maiorum F G. interuallum esto K. minorum L. Ponaturque H æqualis ipsi C. & sic eadem ratio D ad E. quæ K ad L. dico si G fiat æqualis ipsi B. & ipsum F fore æqualem ipsi A. in quo consistit vis omnis duplicatæ æqualitatis. Etenim quia B G ponuntur æquales, si ab his demantur æquales C H. erunt & residui E L. æquales. Cùm ergo sit D ad E. vt K ad L. erunt & ipsi D K æquales. Quamobrem additis æqualibus D. K ad æquales B G. fient & toti A F æquales. Quod demonstrandum erat. Itaque vt reperiat quadratos quales sunt F. G. quorum scilicet interuallum sit triens interualli quo minor G. superat 4. secundam instituit operationem Diophantus.

D − E −
A − B − C −
F 64. G 49. H 4.
K 15. L 45.

In secunda operatione. Aduertè primò minoris quæsitorum quadratorum latus ritè poni 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. vt in eius quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. vnitatum numerus æquetur ipsi 4. ac proinde excessus quadrati illius supra 4. nimirum 1 Q. + 4 N. constet ex solis quadratis & numeris, quorum triens cùm sit $\frac{1}{3}$ Q. + $1\frac{1}{3}$ N. constans etiam ex solis quadratis & numeris, eo addito ad minorem quadratum, fit maior quadratus $1\frac{1}{3}$ Q. + $5\frac{1}{3}$ N. + 4. vbi vnitatum numerus reperitur idem quadratus 4. quod accidit quia is reperiebatur in minore quadrato, & vt dictum est, maior quadratus fit addendo minori solos quadratos & numeros, vnde vnitates manent immutatæ. Necesse autem fuit vnitatum numerum quæ sunt in maiori quadrato, quadratum fuisse, ad hoc vt latus eius fingi potuerit.

Aduerte secundò numerum quadrato æquandum, puta in $\frac{1}{3}$ Q. + $5\frac{1}{3}$ N. + 4. duci in 9. ad tollendas fractiones, tum productum diuidi per 4. vt æquatio reducatur ad minimos numeros, vnde fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato. Nam vt alias sæpè monuimus tam quadrato in quadratum ducto, quàm per quadratum diuiso, producitur quadratus.

Aduerte tertiò numerum 3 Q. + 12 N. + 9. æquandum esse quadrato cum quadam Numeri determinatione. Etenim vt suprà ostensum est, 6 N. + 4. ita æquandus est quadrato, vt fiat 1 N. minor quàm 2. At si 1 N. sit minor quàm 2. erunt 6 N. minores quàm 12. Quare adiecto 4. erit 6 N. + 4. minor quàm 16. ac proinde latus quadrati cui æquandus est 6 N. + 4. debet esse minus quàm 4. Positum autem est latus illud 1 N. + 2. Igitur 1 N. + 2. minus est quàm 4. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. minor quàm 2. Rectè igitur concludit Diophantus numeri 3 Q. + 12 N. + 9. latus ita fingendum esse, vt fiat 1 N. minor quàm 2. Porro necesse est hoc latus fingi 3 − certo numero Numerorum, vnde patet fieri valorem Numeri, si per quadratum numeri Numerorum in latere positorum ternario multatum, diuidatur sextuplum eiusdem numeri Numerorum, auctum numero 12. Itaque benè infertur quærendum esse numerum cuius sextuplum auctum numero 12. & diuisum per quadratum quæsiti numeri, ternario multatum, det quotientem minorem quàm 2. Ad hunc ergo numerum inueniendum tertiam molitur operationem Diophantus.

In tertia operatione. Cùm 6 N. + 12. debeat diuidi per 1 Q. − 3. ita vt fiat quotiens minor binario, Diophantus ita ratiocinatur. Quouis numero per alium diuiso, quotiens est denominator proportionis diuisi ad diuisorem, qui denominator eò maior est, quo maior est proportio, & contrà. Cùm igitur binario per 1. diuiso fiat quotiẽs 2. & diuiso 6 N. + 12 per 1 Q. − 3. debeat fieri minus quàm 2. sequitur 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorem habere rationem, quam 2. ad 1. Datis igitur quatuor numeris 6 N. + 12. 1 Q. − 3. 2. 1. Cùm minor sit ratio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, sequitur ex primo in quartum produci minorem numerum, quàm ex secundo in tertium, vt demonstrauit Clauius ad decimam nonam septimi. Rectè igitur infert Diophantus 6 N. + 12. minus esse quàm 2 Q. − 6. & adiectis æqualibus 6 N. + 18. minus esse quam 2 Q. Hoc autem vt sit, oportet vtique 2 Q. æquari numero alicui maiori quàm 6 N. + 18. Quod vt præstet considerat primùm Diophantus qualis fiat valor Numeri si 2 Q. ponantur æquales 6 N. + 18. quæ est secunda regula compositarum, quamque modo sibi familiari resoluit, ducendo scilicet numerum quadratorum 2. in vnitates 18. vnde fit 36. cui addit quadratum semissis numeri Numerorum, puta 9. & fit 45. cuius lateri si addatur 3. semissis numeri Numerorum, & summa diuidatur per numerum Quadratorum 2. fit valor Numeri. Sed hæc æquatio solutionem dat irrationalem, quia 45. non habet latus quadratum. Sumitur ergo loco 45. proximè maior quadratus 49. cuius lateri 7. addendo 3. fit 10 quo diuiso

per 2. prodit 5 valor numeri. In hac autem æquatione 6 N. + 18. ponitur minor quàm 2 Q. Quia 2 Q. fiunt æquales 6 N. + 20. Eadem de causa statui potest valor Numeri quilibet numerus major quàm 5. puta 6. 7. 8. &c. Tunc enim semper 2 Q. fient æquales alicui numero maiori quàm 6 N. + 18.

Hæc quidem ad perfectam Diophantæi Problematis explicationem satis superque sufficiunt. Quoniam verò hîc vtitur author elegantissimè duplicata æqualitate, vnde re subtilius considerata modos aliquot adinuenimus eadem vtendi, etiam in dissimili casu, quibus sanè difficillima pulcherrimáque problemata feliciter explicari possunt, minimè pigebit non vulgare inuentum curioso lectori tradere vt illo perfruatur. Quemadmodum ergo in hac quæstione Diophantus docet modum quo duo numeri simul æquenter quadrato, cùm vterque componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum, numeri autem vnitatem sunt inæquales & quadrati: sic aio modum dari posse resoluendi duplicatam æqualitatem, cùm vterque propositorum numerorum quadrato æquandorum, componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum; sed & numeri vnitatum inæquales sunt, siue quadrati sint, siue non. Id autem præstabimus in duplici casu.

Primus casus est, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale est, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiso, & producto vel quotiente à minore propositorum numerorum detracto, supersit vnitatum numerus solus quadratus. verbi gratia. Propositi sint quadrato æquandi 3 N. + 13. & 1 N. + 7. quia horum interuallum est 2 N. + 6. quo diuiso per 2. fit quotiens 1 N. + 3. quo ablato de 1 N. + 7. supereſt quadratus 4. explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 3 N. + 13. 1 N. + 7. & 4. cùm maiorum interuallum, puta 2 N. + 6. duplus sit interualli minorum, puta 1 N. + 3. Quærendi sunt duo quadrati; quorum interuallum sit duplum interualli, quo minor illorum superat 4. Quod facilè fiet, infinitisque modis insistendo vestigiis Diophanti. Esto enim latus minoris 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. cuius excessus supra 4. est 1 Q. + 4 N. cuius duplum 2 Q. + 8 N. quo addito ad minorem quadratum, fiet maior 3 Q. + 12 N. + 4. hic ergo æquandus est quadrato, sed prius determinandum est de valore Numeri. Quia enim minor numerorum quadrato æquandorum est 1 N. + 7. patet talem ei quadratum æquari debere, qui sit maior quàm 7. Quare cùm latus proximum ipsius 7. sit 2 $\frac{3}{4}$. debet & latus quadrati maius esse quàm 2 $\frac{3}{4}$. At latus huius quadrati supra positum est 1 N. + 2. hoc ergo maius sit oportet, quàm 2 $\frac{3}{4}$. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. maior quàm $\frac{3}{4}$. Quoniam igitur vt æquemus quadrato 3 Q. + 12 N. + 4. latus eius ponendum est 2. — certo numerorum numero, vnde fiet valor Numeri diuidendo quadruplum numeri Numerorum auctum numero 12. per quadratum eiusdem numeri numerorum multatum ternario. Euidens est quærendum esse numerum, cuius quadruplum auctum numero 12. & diuisum per quadratum quæsiti numeri multatum ternario, det quotientem maiorem quàm $\frac{3}{4}$. Ponatur quæsitus numerus 1 N. ergo $\frac{4\,N\,+\,12}{1\,Q\,-\,3}$ maior est quàm $\frac{3}{4}$. & omnia ducendo in 1 Q. — 3. fit 4 N. + 12. maior quàm $\frac{3}{4}$ Q. — $\frac{9}{4}$. additoque defectu, & omnia per 4. multiplicando, fit 16 N. + 57. maior quàm 3 Q. Quamobrem æquando 3 Q. numero alicui minori quàm 16 N. + 57. puta 16 N. + 53 $\frac{2}{3}$ cùm fiat 1 N. 7 $\frac{2}{3}$ pronuncio quæsitum numerum sumendum esse minorem quàm 7 $\frac{2}{3}$. talem tamen vt eius quadratus excedat 3. sumatur 3. Igitur numeri 3 Q. + 12 N. + 4. fingo latus 2 — 3 N. & fit 1 N. 4. & sunt quæsiti quadrati 100. & 36. Nam siue æques 100. & 3 N. + 13. siue 36. & 1 N. + 7. fit vtrobique idem valor Numeri 29. Quod erat propositum.

Itaque in hoc casu, vt æquatio sit explicabilis. Oportet vt interualli propositorum numerorum diuidendo Numeros per Numeros minoris numeri, vel contrà; & per quotientem diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus quo detracto ab vnitatibus minoris numeri, supersit quadratus. Vt in exemplo allato vbi interuallum est 2 N. + 6. minor numerus 1 N. + 7. quia diuidendo 2 N. per 1 N. & per quotientem 2. diuidendo vnitates 6. fit 3. quo detracto de 7. remanet quadratus 4. ideo æquatio potuit explicari. Quod si proponantur quadrato æquandi 8 N. + 25. & 6 N. + 21. quorum interuallum 2 N. + 4. Quia diuidendo 6 N. per 2 N. & per quotientem 3. multiplicando vnitates interualli 4. fit 12. quo ablato de 21. remanet quadratus 9. ideo poterit explicari æquatio, quærendo duos quadratos quorum interuallum sit triens interualli, quo minor superat 9. Ponatur latus minoris 1 N. + 3. erit ipse 1 Q. + 6 N. + 9. & excessus eius super 9. erit $\frac{1}{3}$ Q. + 2 N. quo ipsi minori quadrato addito, fiet maior 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 8 N. + 9. & omnia ducendo in 9. fiet 12 Q. + 72 N. + 81. æquandus quadrato, & si Numeri determinationem inuestiges, inuenies quadrati latus fingendum esse 9 — tot numeris qui non excedant 14. sed quorum quadratus excedat 12. Ponatur 9 — 4 N. fiet 1 N. 36. & erunt quæsiti quadrati 2025. & 1521. quos si æques propositis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 250.

Secundus casus est. Cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale est, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiso, & producto vel quotiente à minore propositorum numerorum detracto, deficiat vnitatum numerus solus, qui ad multiplicatorem vel diuisorem.

rationem

rationem habeat quadrati ad quadratum. Vt si proponantur æquandi quadrato 6 N. + 25. & 2 N. + 3. quorum interuallum 4 N. + 22. quia hoc diuiso per 2. fit 2 N. + 11. quo detracto à minore numero supereſt − 8. & numerus 8. ad diuisorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 6 N. + 25. 2 N. + 3. & − 8. quoniam maiorum interuallum, puta 4 N. + 22. duplum est interualli minorum, quod est 2 N. + 11. Quær. um duos quadratos, quorum interuallum sit duplum interualli quo minor superat − 8. Ponatur minor 1 Q. huius interuallum suprà − 8 est 1 Q. + 8. cuius duplum 2 Q. + 16. quo addito ad minorem quadratum, fit maior 3 Q. + 16. Hoc ergo vt æques aptè quadrato, si quæras Numeri determinationem, inuenies latus ponendum esse 4 − tot numeris qui non excedant 4 $\frac{1}{3}$. & quorum quadratus superet 3. Ponatur ergo latus illud 4 − 3 N. fiet 1 N. 4. & erunt quæsiti quadrati 64. & 16. Nam siue æques 64. & 6 N. + 25. siue 16. & 2 N. + 3. fit vtrobique 1 N. 6 $\frac{1}{2}$. Itaque in hoc casu, vt æquatio sit explicabilis, oportet vt interualli propositorum numerorũ diuidendo Numeros per Numeros minoris, vel contra, & per quotientem hunc primum diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus, à quo detrahendo vnitates minoris numeri, superfit numerus qui ad primum quotientem habeat rationem quadrati ad quadratum. Vt in allato exemplo, vbi interuallum est 4 N. + 22. minor numerus 2 N. + 3. quia diuidendo 4 N. per 2 N. & per quotientem 2. diuidendo 22. vnitates interualli fit 11. à quo auferendo 3. vnitates minoris numeri, supereſt 8. qui ad quotientem 2. habet rationem quadrato numero expressam, ideo æquatio potuit explicari. Quod si proponantur quadrato æquandi 15 N. + 39. & 12 N. + 31. quorum interuallum 3 N. + 8. quia diuidendo 12 N. per 3 N. fit quotiens 4. Quo ducto in 8. fit 32. à quo auferendo 31. supereſt 1. qui ad quotientem 4. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 15 N. + 39. 12 N. + 31. & − 1. quia maiorum interuallum 3 N. + 8. est quadrans interualli minorum quod est 12 N. + 32. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit quadrans interualli quo minor superat − 1. esto minor 1 Q. erit maior $\frac{5}{4}$ Q. + $\frac{1}{4}$ æquandus quadrato, omnia in 4. fit 5 Q. + 4. æqualis quadrato, & si quæras Numeri determinationem. Inuenies latus eius ponendum 2 − certo numero vnitatum qui non sit maior quàm 2 $\frac{2}{7}$. nec minor quàm 2 $\frac{1}{4}$. Ponatur ergo 2 − 2 $\frac{1}{4}$ N. fiet 1 N. 144. & erunt quæsiti quadrati 25920 $\frac{1}{4}$ & 20736. quos si æques propositis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 1725 $\frac{5}{12}$.

Hac arte in æquatione quam resoluit Diophantus propositione 17. lib. 3. æquans quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. Cùm ille vnicam solutionem reperire possit, nos infinitas dabimus. Etenim quia interuallum est 5 N. + 5. & diuidendo 5 N. per 5 N. fit 1. per quem diuidendo vnitates 5. fit quotiens 5. à quo auferendo 4. supereſt 1. qui ad priorem quotientem 1. habet rationem quadrati ad quadratum, puta æqualitatis, ideo explicabitur æquatio si quærantur duo quadrati, quorum interuallum sit æquale interuallo quo minor superat − 1. sit minor 1 Q. erit maior 2 Q. + 1. quadrato æquandus, sed si quæras Numeri determinationem inuenies latus fingendum esse 1 − tot numeris qui sint minus quàm 2. & quorum quadratus excedat 2. fingatur 1 − 1 $\frac{1}{2}$ N. fiet 1 N. 28. vt apud Diophantum. Rursus fingatur 1 − $\frac{5}{3}$ N. het 1 N. $\frac{30}{7}$ eruntque quæsiti quadrati $\frac{1849}{49}$ $\frac{900}{49}$. & primum si æques 10 N. + 9. secundum 5 N. + 4. fiet 1 N. vtrobique $\frac{704}{245}$.

Porrò vtraque regula suam vim obtinet qualicunque signo afficiantur numeri quadrato æquandi, vt constat ex sequentibus exemplis.

Sint quadrato æquandi 24. − 8 N. & 9 − 2 N. quia horum interuallum est 15 − 6 N. quo diuiso per 3. fit 5 − 2 N. quo detracto à minore supereſt 4. quadratus numerus, resoluetur æquatio per primam regulam; sit minoris quadrati latus 1 N. + 2. erit ipse 1 Q. + 4 N. + 4. Ergo maior 4 Q. + 16 N. + 4. cuius latus si ponas 2. − 8 N. fiet 1 N. $\frac{4}{5}$. & quæsiti quadrati $\frac{484}{625}$. & $\frac{196}{25}$. quos si æques propositis numeris, fiet vtrobique idem valor Numeri $\frac{29}{50}$.

Rursus sint quadrato æquandi 30 N. − 17. & 10 N. − 11. quia horum interuallum est 20 N. − 6. quo diuiso per 2. fit 10 N. − 3. quo detracto de minore supereſt − 8. qui ad diuisorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, resoluetur æquatio per secundam regulam. Sit minor quadratus 1 Q. erit maior 3 Q. + 16. cuius latus esto 4 + 1 N. fiet 1 N. 4. Erunt ergo quadrati 64. & 16. qui si æquentur propositis numeris, fiet vtrobique valor Numeri $\frac{27}{10}$.

Rursus sint æquandi quadrato 24 N. − 2 & 8 + 10. cùm horum interuallum sit 16 N. − 12. quo diuiso per 2. fit 8 N − 6. quo detracto à minore supereſt 16. quadratus. Explicabitur æquatio per primam regulam. Sit minoris quadrati latus 4 + 1 N. erit ipse 16 + 8 N. + 1 Q. ergo maior erit 16 + 24 N. + 3 Q. cuius latus esto 4 + 2 N. fiet 1 N. 8. ergo quæsiti quadrati sunt 400. & 144. qui si æquentur propositis numeris, fit vtrobique valor Numeri $\frac{67}{4}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Sed proponatur si placet hæc duplicata æqualitas nempè 2 N. + 5. & 6 N. + 3. æquandi quadrato. Quadratus æquãdus 2 N. + 5. erit 16 & quadratus æquandus 6

N. + 3. erit 36. & inuenientur alij in infinitum quæstioni satisfacientes, nec difficile est regulam generalem ad huiusmodi quæstionum solutionem proponere, vt vix limitatio ista Bacheti sit tanto viro digna, cum ad infinitos casus extendi, quod in duobus tantum adinuenit, facillime possit, imo & ad casus omnes possibiles.

QVÆSTIO XLVI.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὲς, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τῆ μείζονος τετράγωνος, τῆ ἀπὸ τῆ μέσου τετραγώνου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆ μέσου, καὶ τῆ ἐλαχίστου, λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἐπὶ ᾧ σὺν δύο λαμβανόμενοι, ποιῶσι τετράγωνον. ἡ ᾧ ὑπεροχὴ ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τῆ μείζονος τετράγωνος, τῆ ἀπὸ τῆ μέσου τετραγώνου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ἣν ὑπερέχει ὁ μέσος τῆ ἐλαχίστου, ἔστω τετπλασίων. ἐπεὶ ὁ μείζονος, καὶ ὁ μέσος ποιῶσι τετράγωνον, ποιείτωσαν δ̄ ις̄. ὁ ἄρα μείζονος ἔσται μείζων δ̄ η̄. ἔστω δ̄ η̄. μ̄ β̄. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ὁ μείζονος, καὶ ὁ μέσος, μείζων ἐστὶ συναμφοτέρου τῆ μείζονος, καὶ τῆ ἐλαχίστου, καὶ ἔστι συναμφότερος ὁ μείζονος, καὶ ὁ μέσος δ̄ωνάμεις ις̄. συναμφότερος ἄρα ὁ μείζονος, καὶ ὁ ἐλάχιστος, ἐλάσσονὶ μέν ἐστι δ̄ωνάμεων ις̄. μείζων δὲ δ̄ωνάμεων η̄. ἔστω οὖν συναμφότερος ὁ μείζονος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δ̄ωνάμεις θ̄. ἔστι καὶ ὁ μείζονος, καὶ ὁ μέσος δ̄ις̄. ὧν ὁ μείζονός ἐστι δ̄ η̄. μ̄ β̄. ἔσται ἄρα καὶ ὁ μέσος δ̄ η̄. λείψει μ̄ β̄. ὁ δὲ τρίτος δ̄ ᾱ. λείψει μ̄ β̄. καὶ ἐπεὶ θέλω τὴν ὑπεροχὴν ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τῆ μείζονος τὸν ἀπὸ τῆ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τῆ μέσου, καὶ τῆ ἐλαχίστου εἶδ τετπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τῆ μείζονος τετράγωνος, τῆ ἀπὸ τῆ μέσου τετραγώνου ἐστὶ δ̄ ξδ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ, τῆ μέσου καὶ τῆ ἐλαχίστου ἐστὶ δ̄ ζ̄. καὶ θέλωμεν ταὶς δ̄ωνάμεις ξδ̄. τ̄ δ̄ ζ̄. εἶδ τετπλασίονα. ἀλλ' αἱ δ̄ ζ̄. τετπλασίονα γίνόμεναι ποιῶσι δ̄ κᾱ. ἀλλ' αἱ δ̄ωνάμεις ξδ̄. ἐκ τῆ τετρακοντάκις καὶ δὶς ἐστὶ τῶ μ̄ β̄. γέγονεν οὖν μοι δεῖξαι πνα ἀριθμὸν, ὃς τετρακοντάκις, καὶ δὶς γινόμενος ποιῇ μ̄ κᾱ. ἔστι δὲ τὰ κᾱ λς̄. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δ̄ η̄. μ̄ κᾱ λς̄. τὸν δὲ μέσον δ̄ η̄. λείψει μ̄ κᾱ. λς̄. καὶ λοιπόν ἐστιν ἐν ὑπάρχοντα, συναμφότερον τὸν μέσον, καὶ τὸν ἐλάσσονα εἶδ τετράγωνον, ἴσα ἢ ὁ μέσος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δ̄ ῡ Ϝ̄. λείψει μ̄ μβ̄ λς̄. ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ὧν γ̄. λείψει μ̄ ς̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄. φκζ̄ φος̄. ὑπὸ τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τ̄ς̄. Ϝ̄ λχ̄. αψος̄. ὁ δὲ δεύτερος σξγ̄. γφμδ̄. λχ̄. αψος̄. ὁ δὲ τρίτος ιγ̄. ηχπᾱ λχ̄. αψος̄.

INVENIRE tres numeros, vt excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad interuallum medij & minimi, datam habeat rationem, sed & bini sumpti faciant quadratum. Porrò excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad excessum medij supra minimum sit triplus. Quandoquidem maximus & medius faciunt quadratum, faciant 16 Q. ergo maximus est maior quàm 8 Q. esto 8 Q. + 2. & quando maximus & medius coniuncti superant summam maximi & minimi, at maximus & medius simul sunt 16 Q. erit vtique summa maximi & minimi minor quidem quàm 16 Q. sed maior quàm 8 Q. Igitur summa maximi & minimi esto 9 Q. Atqui summa maximi & medij est 16 Q. quorum maximus est 8 Q. + 2. erit ergo medius 8 Q. − 2. Tertius verò 1 Q. − 2. & quia volo excessum quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad excessum medij supra minimum esse triplum, sed excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij est 64 Q. At interuallum medij & minimi est 7 Q. cuius triplum est 21 Q. Porro 64 Q. fiunt ex 32. in 2. ducto: incumbit ergo mihi vt numerum aliquem inueniam, qui per 32 multiplicatus faciat 21. est autem $\frac{21}{32}$. Pono igitur primum 8 Q. + $\frac{21}{32}$. Medium 8 Q. − $\frac{21}{32}$. tertium 1 Q. − $\frac{21}{32}$. & restat implendum vnum postulatorum, nimirum vt summa medij & minimi sit quadratus numerus. est autem hæc summa 9 Q. − $\frac{42}{32}$. hoc ergo æquatur quadrato à latere 3 N. − 6. & fit 1 N. $\frac{527}{576}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{3869000}{331776}$. secundus $\frac{2633544}{331776}$ tertius $\frac{138681}{331776}$.

IN QVAESTIONEM XLVI.

Hîc quatuor præstanda sunt. Primo summa maximi & medij debet esse quadratus, ideo statuitur 16 Q. & poni poterat quilibet alius quadratorum numerus quadratus. Quia verò ex duobus inæqualibus numeris, patet maiorem illorum excedere semissem summæ ipsorum eodem numero, quo minor deficit ab eodem semisse, ideo posito maximo 8 Q. + 2. sequitur medium esse 8 Q. − 2.

Secundò summa maximi & minimi debet quoque esse quadratus, sed quia summa maximi & minimi, minor est summa maximi & medij eodem numero quo medius superat minimum, ideò cùm posita sit summa maximi & medij 16 Q. oportet vtique summam maximi & minimi minorem esse quàm 16 Q. Quia verò, vt dictum est, ipse maximus maior est quàm 8 Q. multò magis summa maximi & minimi, maior erit quam 8 Q. quare rectè concludit Diophantus, pro summa maximi & minimi sumendum esse quadratum minorem quàm 16 Q. maiorem quàm 8 Q. puta 9 Q. vnde si auferatur maximus qui positus est 8 Q. + 2. restat minimus 1 Q. − 2.

Tertiò excessus quadrati maximi super quadratum medij ad excessum medij supra minimum, datam rationem habere debet, putà triplam. Quia verò maximus est binomium constans ex quadratis & vnitatibus, puta 8 Q. + 2. At minimus est residuum eiusdem binomij, puta 8 Q. − 2. Quadratus autem binomij excedit quadratum sui residui, quadruplo plani sub partibus comprehensi, vt constat ex genesi quadrati per quartam secundi Euclidis, cùm quadrati partium sint iidem tam in binimio quàm in residuo, ideo sequitur interuallum quadratorum maximi & medij esse quadruplum producti ex 8 Q. in 2. nimirum 64 Q. At interuallum medij & minimi est 7 Q. cuius triplum 21 Q. æquari deberet 64 Q. Hoc ergo vt per ipsas positiones consequamur, quærendus est numerus loco ipsius 2. qui quater ductus in 8. seu in 32. semel, efficiat 21. hoc habetur diuidendo 21. per 32. estque $\frac{21}{32}$. Hunc igitur sumentes loco ipsius 2. erit maximus 8 Q. + $\frac{21}{32}$. medius 8 Q. + $\frac{21}{32}$. Minimus 1 Q. $\frac{21}{32}$. & sic per ipsas positiones tribus postulati partibus est satisfactum.

Quartò restat vt summa medij & minimi sit quadratus. Quare 9 Q. − $\frac{81}{16}$ æquandus est quadrato, cuius latus ponitur à Diophanto 3 N. − 6. non absque cautione aliqua. Etenim talis inueniri debet valor Numeri, vt 1 Q. sit maior quàm $\frac{21}{32}$. quia scilicet minimus numerus positus est 1 Q. − $\frac{21}{32}$. At 1 Q. maior erit quàm $\frac{21}{32}$. si sit maior vnitate, & si 1 Q. maior sit vnitate, erit & 1 N. maior vnitate. Itaque cùm fiat valor Numeri ex quodam quadrato adsciscente $\frac{21}{16}$. & sic diuiso per sextuplum sui lateris, vt autem fiat quotiens maior vnitate, oportet diuisum numerum esse maiorem diuisore, quærendus est numerus cuius quadratus adsciscens $\frac{21}{16}$ sit maior sextuplo ipsius numeri. Porro talis est 6. & omnis numerus suprà 6. Quia enim quadratus ipsius 6. æquatur sextuplo sui lateris, & quadratus cuiuslibet numeri supra 6. est maior sextuplo sui lateris, patet addendo $\frac{21}{16}$. ad huiusmodi quadratum fieri semper numerum maiorem sextuplo lateris. Ideo numeri 9 Q. − $\frac{21}{16}$. latus rectè ponetur 3 N. − 6. vel 3 N. − 7. vel 3 N. − 8. & sic in infinitum.

Cæterùm eodem prorsus artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt excessus quadrati medij supra quadratum minimi ad interuallum, quo maximus superat medium datam, habeat rationem. Sed & bini sumpti faciat quadratum. Sit data ratio tripla.

Ponatur summa minimi & medij 4 Q. & esto medius 2 Q. + 1. minimus 2 Q. − 1. Tum ponatur summa minimi & maximi quilibet quadratus maior quàm 4 Q. puta 9 Q. erit ergo maximus 7 Q. + 1. Est porro interuallum quadratorum minorum 8 Q. At interuallum maiorum 5 Q. cuius triplum 15 Q. æquari deberet 8 Q. fit autem 8 Q. ex 2 Q. quater in vnitatem. Itaque quærendus est numerus loco vnitatis, qui ductus in 2. quater, seu qui ductus in 8. semel, efficiat 15. is est $\frac{15}{8}$. hunc ergo sumentes loco vnitatis ponemus minimum 2 Q. − $\frac{15}{8}$. medium 2 Q. + $\frac{15}{8}$. maximum 7 Q. $\frac{15}{8}$. Superest vt summa medij & maximi æquetur quadrato, fit ergo 9 Q. + $\frac{15}{4}$ æqualis quadrato, cuius latus ita fingendum est vt fiat valor Numeri maior vnitate, quia minimus positus est 2 Q. − $\frac{15}{8}$. Quare oportet vt 1 Q. sit maior quàm $\frac{15}{16}$. quod accidit si sit maior vnitate. Porrò fiet valor numeri ex quodam quadrato multato numero $\frac{15}{4}$. & diuiso per sextuplum sui lateris. Quare vt hac diuisione prodeat quotiens maior vnitate, oportet 1 Q. − $\frac{15}{4}$ maiorem esse quàm 6 N. vnde tandem fit 1 Q. maior quàm 6 N. + $\frac{15}{4}$. qua æquatione resoluta fit 1 N. maior quàm 7. Igitur numeri 9 Q. + $\frac{15}{4}$ latus fingemus 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ superent 7. Ponatur 3 N. − 10. fiet 1 N. $\frac{77}{48}$. eruntque quæsiti numeri $\frac{3769}{1152}$. $\frac{8089}{1152}$. $\frac{45823}{2304}$. qui satisfaciunt postulatis, nam bini faciunt quadratos $\frac{5929}{576}$. $\frac{53361}{2304}$. $\frac{62001}{2304}$. quorum latera $\frac{77}{24}$. $\frac{231}{48}$. $\frac{249}{48}$. interuallum verò quadratorum primi & secundi est $\frac{512265601}{1327104}$. seu $\frac{88935}{2304}$. triplus vtique interualli secundi & tertij quod est $\frac{29645}{2304}$.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER QVINTVS.

QVÆSTIO I.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ιβ̄. γεωμετρικὴ δὲ ἐστι ἀναλογία, ὅταν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἀριθμὸς πλευρὰν ἔχῃ τὸν μέσον. ζητῶ πρότερον τὶς τετράγωνος λείψει μ̄ ιβ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ἐστι δὲ τοῦτο ῥάδιον, καὶ ἔστιν ὁ μβ̄. α̅ δ̅. τάσσω οὖν ἕνα τῶν ἄκρων μ̄ μβ̄. α̅ δ̅. τὸν δὲ ἕτερον δ̄ α̅. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς̄ ϛ̄ α̅ ϛ̅. λοιπόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν ⊤ μ̄ ιβ̄ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔστι δ̄ α̅ λείψει μ̄ ιβ̄ ἴση τετραγώνῳ. καὶ ςς̄ οἱ ϛ̄ α̅ ϛ̅ λείψει μ̄ ιβ̄. ἴσοι τετραγώνῳ. ἡ τούτων ὑπεροχή ἐστιν δ̄ α ⊤ ςς̄ ϛ̄. α̅ ϛ̅. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ϛ̄ α̅ κ̄ ϛ̄ α̅ ⊤ μ̄ ϛ̄. α̅ ϛ̅. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό ἐστι μ̄ ρξθ̄ ιϛ̅. ταῦτα ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι, ςς̄ οἷς ϛ̄. α̅ ϛ̅. λείψει μ̄ ιβ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ τξα̅ ρδ̅. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ μβ̄. α̅ δ̅. ὁ δὲ δεύτερος βτμϛ̄ ρδ̅. α̅ ϛ̅. ὁ δὲ τρίτος ιγ̄. τκα̅ α ωιϛ.

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quiuis eorum detracto dato numero faciat quadratum. Esto datus 12. Est autem geometrica proportionalitas, cùm numerus sub extremis contentus habet medium pro latere quadrato. Quæro primùm quis quadratus, detractis 12. faciat quadratum, hoc autem facilè fit & est $42\frac{1}{4}$. Pono ergo alterum extremorum $42\frac{1}{4}$. alterum 1 Q. Igitur medius erit $6\frac{1}{2}$ N. Restat vt horum vterque demptis 12. faciat quadratum. Proinde 1 Q. — 12. æquatur quadrato, & quadrato, & $6\frac{1}{2}$ N. — 12. æquatur quadrato horum interuallum est 1 Q. — $6\frac{1}{2}$ N. mensuratio. Metitur 1 N. per 1 N. — $6\frac{1}{2}$. horum interualli semissis in se, facit $\frac{169}{16}$. hoc æquatur minori, seu $6\frac{1}{2}$ N. — 12. & fit 1 N. $\frac{361}{104}$. Ad positiones. Erit primus $42\frac{1}{4}$. secundus $\frac{2346}{104}$. $\frac{1}{1}$. tertius $\frac{130321}{10816}$.

In V. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

RESTITVTO textu, nihil hîc superest difficultatis. Quadratum qui detracto 12. relinquat quadratum, inuenit Diophantus per vndecimam secundi, vt benè monet Xilander, cùm hoc nihil aliud sit quàm quærere duos quadratos interuallo 12. differentes. Cæterùm cùm ex duobus numeris quadrato æquandis 1 Q. — 12. & $6\frac{1}{2}$ N. — 12. non constet quisnam sit maior altero, potest eorum interuallum statim 1 Q. — $6\frac{1}{2}$ N. vt fecit Diophantus, vel etiam $6\frac{1}{2}$ N. — 1 Q. supponendo scilicet $6\frac{1}{2}$ N. — 12. esse maiorem; & eadem nihilominus inuenietur solutio. Nam metientes erunt $6\frac{1}{2}$ — 1 N. & 1 N. quorum summæ semissis quadratus $\frac{169}{16}$ æquatur maiori, putà $6\frac{1}{2}$ N. — 12. vt prius. Hinc etiam facilè Canonem fabricabimur.

Sume pro primo quæsitorum, quemlibet quadratum, qui detracto dato numero quadratum relinquat. Huius quadranti adde datum numerum, fiet secundus. Hunc diuide per latus primi, orietur latus tertij.

Sic ponendo primum 42 $\frac{1}{4}$ cum Diophanto, cùm eius quadrans sit 10 $\frac{9}{16}$. & addendo 12. fiat 22. $\frac{9}{16}$. seu $\frac{3}{16}$. tantus erit secundus. Quò diuiso per 6 $\frac{1}{2}$. quod est latus primi, fit latus tertij $\frac{361}{64}$. & ipse tertius $\frac{130321}{10816}$. Diophantus loco $\frac{361}{16}$ posuit secundum more suo $\frac{2346}{104}\frac{1}{2}$ exprimens eum per partes à numero 104. denominatas.

QVÆSTIO II.

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quilibet ipsorum adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 20. Rursus quæro quis quadratus adscito 20. faciat quadratum; est autem 16. Pono ergo alterum extremorum 16. alterum verò 1 Q. Igitur medius erit 4 N. Proinde ob ea quæ in præcedente dicta sunt, restat 4 N. + 20. æquari quadrato, & 1 Q. + 20. æquari quadrato, & est horum interuallum 1 Q. − 4 N. Mensuratio metitur 1 N. per 1 N. − 4. horum interualli semissis in se facit 4. æqualem minori seu 4. N. + 20. Quod est absurdum. Oporteret enim 4 maiorem esse quàm 20. sed vnitates 4. sunt quadrans de 16. Porrò 16. non est casu oblatus. Sed est quadratus qui adsciscens 20. facit quadratum. Eò igitur deuentum est vt quæratur quadratus, cuius quadrans sit maior quàm 20. & adsumens 20. faciat quadratum. Vtique quadratus hic maior erit quàm 80. At 81. est quadratus maior quàm 80. Ergo si latus quadrati quem quærimus statuimus 1 N. + 9. erit ipse quadratus 1 Q. + 18 N. + 81. hunc oportet additis 20. facere quadratum. Proinde 1 Q. + 18 N. + 101. æquantur quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 11. Erit ergo quadratus 1 Q. + 121. − 22 N. Hæc æquantur 1 Q. + 18 N. + 101. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Erat autem quæsiti quadrati latus 1 N. + 9. Erit ergo quadratus 90 $\frac{1}{4}$. Recurro nunc ad id quod initio proponebatur, & statuo primum 90 $\frac{1}{4}$. tertium 1 Q. medius ergo erit 9 $\frac{1}{2}$ N. & eo ventum est vt quæram quo pacto & 1 Q. + 20. & 9 $\frac{1}{2}$ N. + 20. æquentur quadrato. Interualli semissis in se facit $\frac{361}{16}$ quod æquatur minori, hoc est 9 $\frac{1}{2}$ N. + 20. & fit 1 N. $\frac{41}{152}$. Ad positiones. Erit primus 90 $\frac{1}{4}$. secundus $\frac{3889}{152}\frac{1}{2}$. tertius $\frac{1681}{23104}$.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν πολλαπλασιασθεὶς τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ τὸν κ̄. πάλιν ζητῶ τὸν τετράγωνον πολλαπλασιασθεὶς μ° κ̄. ποιεῖ τετράγωνον, ἔστι δὲ ὁ ις̄. τάσσω εἶναι ἕνα τῶν ἄκρων μ° ις̄. τὸν δὲ ἕτερον τῶν ἄκρων δ͞υ α̅. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ς̄ς̄ δ̅. καὶ κτ̄ τὴν πολλαπλασιασθεῖσαν λοιπὸν γίνεται ζητεῖν ς̄ς̄ους δ̅ μ° κ̄. ἴσους τετραγώνῳ. καὶ δ͞υ α̅. μ° κ̄. ἴσοις τετραγώνῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ δ͞υ α̅. λείψει ς̄ς̄ δ̅. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ς° α̅. κτ̄ ς̄ α̅. λείψει μ° δ̅. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιεῖ μ° δ̄ι̅. ἴσας τῷ ἐλάσσονι ς̄ς̄οις δ̄ι̅ μ° κ̄. ὅπερ ἄτοπον. δεῖ γὰρ τέσσαρας μονάδας μὴ ἐλάσσονας εἶναι μ° κ̄. ἀλλ' αἱ μ° δ̅. τέταρτόν εἰσι τῶν ις̄. αἱ δὲ μ° ις̄. οὐκ εἰσὶν αἱ τυχοῦσαι. ἀλλ' ὁ τετράγωνός ἐστιν ὁ πολλαπλασιασθεὶς μ° κ̄. καὶ ποιῶν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τοὺς τετράγωνον ἔχει μέρος τέταρτον, ὃ μεῖζον ὄξυ μ° κ̄. πολλαπλασιασθὲν δὲ μ° κ̄. ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε ὁ τετράγωνος γίνεται μείζων μ° π̄. ἔστι δὲ ὁ πα̅ τετράγωνος μείζων π̄. ἐὰν ἄρα τῶν τὸ ζητουμένου τετραγώνου πλευραὶ κατασκευάσωμεν ἀπὸ ς̄ς̄ α̅. μ° ϡ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δ͞υ α̅. ς̄ς̄ ιη̄. μ° πα̅. ὅθεν μ° κ̄. ὀφείλει γνύεσθαι τετράγωνος. ἔστιν ἄρα δ͞υ α̅. ς̄ς̄οι ιη̄. μ° ρα̅. ἴσαι τετραγώνῳ ἔστω ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ α̅. λείψει μ° ια̅. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δ͞υ α̅. μ° ρκα̅. λείψει ς̄ς̄ κβ̅. ταῦτα ἴσα δ͞υ α̅. ς̄ς̄οις ιη̄. μ° ρα̅. καὶ γίνεται ὁ ς° μονάδος ἡμίσεως. ὧν δὲ ἡ τῷ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰ ς̄ς̄ α̅. μ° ϡ̄. ἔσται ἄρα ὁ τετράγωνος μ° ζ̄. α̅ δ̄ς̄. νῦν ἀνατρέχω ὅτι τὸ ὀξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω πρῶτον τῶν ἄκρων μ° ζ̄. α̅ δ̄ς̄. τὸν δὲ τρίτον δ͞υ α̅. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ς̄ς̄ θ̄ς̄. α̅ ς̄ς̄. καὶ ἔρχομαι εἰς τὸ ζητεῖν δ͞υ α̅. μ° κ̄. ἴσας τετραγώνῳ. καὶ ς̄ς̄ους θ̄ς̄. α̅ ς̄ς̄. μ° κ̄. ἴσοις τετραγώνῳ, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ δ͞υ α̅. λείψει ς̄ς̄ θ̄ς̄. α̅ ς̄ς̄. μετρεῖ ς° α̅ κτ̄ ς̄ α̅. λείψει μ° θ̄. ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι ς̄ς̄οις θ̄ς̄. α̅ ς̄ς̄. μ°. κ̄. καὶ γίνεται ὁ ς° μα̅ ρις̄ς̄. ὅθεν τὰς ὑποσάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ζ̄ς̄ α̅ δ̄ς̄. ὁ δεύτερος τπϑ̄. ρις̄ς̄. α̅ ς̄ς̄. ὁ τρίτος ᾱχπα̅ ς̄ς̄. γρδ̄ς̄.

IN QVAESTIONEM II.

IN prima operatione occurrunt quadrato æquandi 4 N. + 20. & 1 Q. + 20. sed explicari non potest huiusmodi æquatio, quia horum interuallum est 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 4 quorum interuallum 4. cuius semissis quadratus 4. æquari debet minori, putà 4 N. + 20. quod est impossibile, quia 4. non est maior quàm 20. Considerat ergo Diophantus vnde 4. prouenerit, est autem quadratus semissis numeri Numerorum 4. pro secundo positi. At secundus statuitur numerus Numerorum qui latus est quadrati pro primo positi, quia enim primus positus est 16. fit secundus
II. octaui. 4. N. Quoniam ergo quadratus semissis cuiuslibet numeri, est quadrans quadrati totius numeri, eò quod quadrati sunt in ratione duplicata laterum, rectè concludit Diophantus quadratum 4. esse quadrantem quadrati 16. Quare eò deuentum est, vt loco 16. statuamus pro primo aliquem alium quadratum, qui adscito 20. faciat quadratum, & cuius quadrans sit maior quàm 20. Reliqua plana sunt, nec maiore explicatione indigent. Sed ex ipsa operatione talis Canon elici potest.

Sume pro primo quemlibet quadratum, qui adscito dato numero quadratum faciat, & cuius quadrans excedat datum numerum. Ab huius quadrante aufer datum numerum, relinquetur secundus: quem diuide per latus primi, orietur latus tertij.

QVÆSTIO III.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσθεῖναι τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ τὸν ε̄. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ δοθέντος ποιῇ τετράγωνον. γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῶν κδ̄ τὸ ἐξῆς. ἐκτίθεμαι οὖν δύο τετραγώνους τῶν κδ̄ τὸ ἐξῆς, ὧν μὲν ἀπὸ ς̄ᵘ ā. ā. μ̄ᵒ γ̄. ὧν δὲ ἀπὸ ς̄ᵘ μ̄ᵒ δ̄ καὶ γίνον(ται) οἱ τετράγωνοι ὧν μὲν δ̄ᵘ ā ς̄ς̄ ε̄. μ̄ᵒ θ̄. ὧν ὁ δ̄ᵘ ā. ς̄ς̄ η̄. μ̄ᵒ ῑε̄. ἀλλὰ ἀπὸ ἑνὸς μ̄ᵒ ε̄. καὶ τάσσω ὧν μὲν δ̄ᵘ ā. ς̄ς̄ ε̄. μ̄ᵒ δ̄. ὧν δὲ δ̄ᵘ ā. ς̄ς̄ η̄. μ̄ᵒ ιᾱ. ἵνα δὲ τρίτην τὴν συναμφοτέρων δὶς τῶν μονάδα, τουτέστι δ̄ᵘ δ̄. ς̄ς̄ κη̄. μ̄ᵒ κδ̄. λοιπὸν ἄρα καὶ τῶν μ̄ᵒ ε̄. πιεῖν τετράγωνον. δυσὶ μὲν ἄρα δ̄. ς̄ς̄ᵒⁱ κη̄. μ̄ᵒ λδ̄. ἵσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ β̄. λείψει μ̄ᵒ ε̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος. δ̄ᵘ δ̄. μ̄ᵒ λς̄. λείψει ς̄ς̄ κδ̄. ἴσων δυσὶν ἀριθμοῖς δ̄. ς̄ς̄ᵒⁱˢ κη̄. μ̄ᵒ λδ̄. καὶ γίνε(ται) ὁ ς̄ᵒ μ̄ᵒ ā ᵡᵒˢ. ὅπερ τὰς ὑποκειμένας. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος, βωξα ᵡᵒˢ. ὁ δὲ δεύτερος, ζχμε ᵡᵒˢ. ὁ δὲ τρίτος β̄. τλς̄ ᵡᵒˢ.

DATO numero apponere tres numeros, vt quilibet ipsorum, & qui à binis producitur quibusuis datum adsumens numerum, faciat quadratum. Datus esto 5. Quoniam habemus in porismatibus; si duo sint numeri, quorum tam vterque, quam productus eorum multiplicatione eodem dato numero adscito faciat quadratum, oriuntur à duobus quadratis continenter proximis. Expono duos huiusmodi quadratos, alterum à latere 1 N. + 3. alterum à latere 1 N. + 4. & fiunt quadrati, alter quidem 1 Q. + 6 N. + 9. alter verò 1 Q. + 8 N. + 16. Aufero ab vtroque 5. & statuo alterum 1 Q. + 6 N. + 4. alterum 1 Q. + 8 N. + 11. tertium autem duplum summæ horum dempta vnitate, hoc est 4 Q. + 28 N. + 29. Restat ergo vt & hic adsumpto 5. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 28 N. + 34. æquantur quadrato, à latere scilicet 2 N. + 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 28 N. + 34. & fit 1 N. $\frac{1}{52}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{2861}{676}$. secundus $\frac{7645}{676}$. tertius $\frac{20336}{676}$.

IN QVAESTIONEM III.

PORISMA quod assumit Diophantus, vniuersalius propositum, demonstrauimus propositione decima tertia libri secundi porismatum. Nam propositio illa hic facilè applicatur, si quod ibi vniuersaliter demonstratur de quibuscumque quadratis, adaptetur quadratis continenter proximis. Etenim cùm laterum interuallum sit vnitas, quæ numeros quos diuidit non immutat, patet quadratos multatos dato numero, vnà cum duplo summæ illorum, vnitate multato, præstare quod ait Diophantus, & reliqua plana sunt.

Porrò vsus erit huius porismatis, quare demonstratum est loco citato, si proponatur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt quem bini producunt adscito dato numero quadratum faciat, sed & quilibet in eundem aliquem numerum ductus, & assumens eundem datum numerum, fiat quadratus.

Datus esto 5. & quilibet ductus in 2. & adsumens eundem 5. fiat quadratus. Exponantur duo quadrati, quorum interuallum sit 2. sintque eorum latera 1 N. + 3. & 1 N. + 5. erunt ipsi quadrati 1 Q. + 6 N. + 9. & 1 Q. + 10 N. + 25. aufer ab vtroque 5. & residua diuide per interuallum laterum 2. fient $\frac{1}{2}$ Q + 3 N + 2. & $\frac{1}{2}$ Q. + 5 N. + 10. primus & secundus quæsitorum, tertius autem erit duplum summæ illorum multatum eodem interuallo laterum 2. putà 2 Q. + 16 N. + 22. Restat vt & huius duplum adscito 5. quadratum faciat. Igitur 4 Q. + 32 N. + 49. æquatur quadrato, esto latus eius 2 N. − 17. fiet 1 N. $\frac{13}{5}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{302}{25}$. $\frac{622}{25}$. $\frac{1705}{25}$. qui satisfaciunt proposito.

OBSERVATIO D. P. F.

EX hac propositione facilè deducetur sequens quæstio. Inuenire 4. numeros eâ conditione, vt quod sub binis producitur, adscito dato numero faciat quadratum. Inueniantur tres quæstioni satisfacientes ita vt singuli dato numero aucti conficiant quadratos iuxta hanc propositionem. Ponatur quartus inueniendus esse 1 N. + 1 orietur triplicata æqualitas cuius solutio nostræ methodi beneficio erit in promptu. Vide adnotata ad 24. quæstionem lib. 6. soluetur itaque quæstio quam proposuit Bachetus ad quæstionem 12. lib. 31. per hanc methodum quæ cum multò sit generalior, hoc præterea amplius habet quam methodus Bacheti quod tres priores numeri aucti dato numero conficiant quadratos in nostrâ solutione. An verò ita solui possit quæstio vt etiam quartus auctus dato numero conficiat quadratum, Hoc sanè hactenus ignoramus. Inquiratur itaque vlterius.

QVÆSTIO IV.

DATO numero, innenire alios tres, vt quiuis ipsorum, & qui ex binis quibusque fit, multatus dato numero faciat quadratum. Esto datus 6. Rursum similiter expono duos quadratos continenter proximos, alterum 1 Q. alterum 1 Q. + 2 N. + 1. & his adiicio datum numerum, & statuo primum 1 Q. + 6. secundum 1 Q. + 2 N. + 7. tertium similiter duplum amborum dempta vnitate, hoc est 4 Q. + 4 N. + 25. Restat vt & is detracto 6. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 4 N. + 19. æquantur quadrato, esto latus eius 2 N. 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 4 N. + 19. & fit 1 N. $\frac{17}{28}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{4993}{784}$. secundus $\frac{6729}{784}$. tertius $\frac{2660}{784}$.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ δύρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἑκάτερός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνῦν λείψας τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̊ ϛ̄. πάλιν δὴ ὁμοίως ἐκτίθεμαι δύο τετραγώνους τοὺς κῑ̄ τὸ ἑξῆς ὄντας, ὧν μὲν δ̄ᵘ̄ ὰ. ὧν δὲ δ̄ᵘ̄ α̃. ϛ̄ς̄ β̄. μ̊ ὰ. ϲ τούτοις προστίθημι τὸ δοθέντα, ϲ τάσσω μὲν τὸ πρῶτον δ̄ᵘ̄ α̃ μ̊ ϛ̄. τὸ δὲ δεύτερον δ̄ᵘ̄ α̃ ϛ̄ς̄ β̄ μ̊ ζ̃. τὸν δὲ τρίτον ὁμοίως τῷ διπλασίονος συναμφοτέρου πλὴν μονάδα α̃. ϲυτέϲει δ̄ᵘ̄ δ̄. ϛ̄ς̄ δ̄. μ̊ κε̃. λοιπὸν ἄρα καὶ τὸν λείψαντα μ̊ ϛ̄. ποιεῖν τετράγωνον. δ̄ᵘ̄ ἄρα δ̄. ϛ̄ϛ̀ δ̄. μ̊ ιϑ̄. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛ̄ς̄ β̄. γ̄ μ̊ ϛ̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ᵘ̄ δ̄ζ̄ μ̊ λϛ̄. λείψει ϛ̄ς̄ κδ̄. ἴσων δ̄ᵘ̄ δ̄. ϛ̄ϛ̀ δ̄. μ̊ ιϑ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̀ ιζ̄ ᾱ. ὅπου τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϡπϛγ̄ ψ̄ᵗ̄ϛ̄. ὁ δὲ δεύτερος ,ϛϡκθ̄ ψ̄ᵗ̄ϛ̄. ὁ δὲ τρίτος β̄. ,βχξ̄ ψ̄ᵗ̄ϛ̄.

IN QVAESTIONEM IV.

PORISMA quoque quod hîc assumitur, demonstratum est à nobis propositione decimaquarta libri secundi porismatum, sed vniuersalius, cuius etiam vsus ampliari potest, eodem prorsus modo, quo ad præcedentem docuimus id fieri posse in simili porismate.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἀπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἑαυτῶν προσλάβῃ σωαμφότερον, ἑαυτὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. ἠχμὴν πάλιν ἐν τοῖς πορίσμασιν. ὅτι παῦσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς ὃς ὢν διπλασίων σωαμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, ἓξ ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ἀπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἑαυτὸν προσλάβῃ σωαμφότερον, ἑαυτὸν λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. τάσσωμεν οὖν τῶν ζητουμένων τριῶν τετράγωνοι. ὁ μὲν $\overline{\alpha}$. ⟨ς⟩ $\overline{\beta}$. μ^{ος} $\overline{\alpha}$. ὁ δὲ $\overline{\alpha}$. ⟨ς⟩ $\overline{\delta}$. μ^{ος} $\overline{\delta}$. τὸν δὲ τρίτον $\overline{\delta}$ $\overline{\delta}$. ⟨ς⟩ $\overline{\iota\beta}$. μ^{ος} $\overline{\iota\beta}$. λοιπὸν δεῖ κατασκευάσαι τὸν τρίτον, τουτέστι $\overline{\delta}$ $\overline{\delta}$. ἀριθμοὺς $\overline{\iota\beta}$. μ^{ος} $\overline{\iota\beta}$. ἵνα τετραγώνῳ, καὶ ἑκάτερον τὸ τέταρτον γίνεται δύναμις $\overline{\alpha}$. ἀριθμοὶ $\overline{\gamma}$. μ^{ος} $\overline{\gamma}$. ἵνα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ⟨ς⟩ $\overline{\alpha}$. $\overline{\gamma}$ μ^{ος} $\overline{\Gamma}$. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος. $\overline{\delta\upsilon}$ $\overline{\alpha}$. μ^{ος} $\overline{\theta}$. $\overline{\gamma}$ ⟨ς⟩ $\overline{\varsigma}$. ἵσα $\overline{\delta\upsilon}$ $\overline{\alpha}$. ⟨ς⟩^{οις} $\overline{\gamma}$. μ^{ος} $\overline{\gamma}$. καὶ γίνεται ὁ ⟨ς⟩ μ^{ος} $\overline{\beta}$ $\overline{\gamma}$. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος $\overline{\kappa\epsilon}$ $\overline{\theta}$, ὁ δὲ τρίτος $\overline{\rho\varsigma}$ $\overline{\theta}$.

INVENIRE tres quadratos, vt quem bini faciunt planum, siue adsciscat amborum summam, siue reliquum, faciat quadratum. Habemus rursum in porismatibus. Quod duobus quibúsque quadratis continenter proximis adinueniri potest alius numerus, qui cum sit summæ illorum duplus, & binario amplior, tres facit numeros, quorum bini quem producunt, siue adsciscat amborum summam, siue reliquum, faciat quadratum. Statuo igitur trium quæsitorum quadratorum, alterum 1 Q. + 2 N. + 1. alterum 1 Q. + 4 N. + 4. tertium 4 Q. + 12 N. + 12. Restat vt tertiũ, nempè 4 Q. + 12 N. + 12. æquemus quadrato, sed & huius quadrans fit 1 Q. + 3 N. + 3. æqualis quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 3. est ergo quadratus ipse 1 Q. + 9 − 6 N. æqualis 1 Q. + 3 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{3}{3}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{25}{9}$. secundus $\frac{64}{9}$. tertius $\frac{196}{9}$.

IN QVAESTIONEM V.

Hîc codex manu exaratus porismatis explicationem sic exhibet. ὅτι παῦσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς, προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς, ὃς ὢν διπλασίων σωαμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, ὅς πως τὸν ἐπὶ καὶ δέκα μείζονα, ἓξ ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ἀπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἑαυτὸν προσλάβῃ σωαμφότερον, ἑαυτὸν λοιπὸν, ποιεῖ τετράγωνον. Vnde nos, tanquam subreptitia, expunximus verba illa, ὅς πως τὸν ἐπὶ καὶ δέκα μείζονα. Ipsum verò porisma demonstrauimus vniuersalissimè propositione decimasexta libri secundi porismatum. Itaque nihil hîc supereſt difficultatis.

QVAESTIO VI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος μὲν αὐτῶν λείψας δυάδα ποιῇ τετράγωνον, ὁ δὲ ἀπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἑαυτὸν λείψῃ σωαμφότερον, ἑαυτὸν λοιπὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἐπὶ ἑκάστῳ τῶν ἐν τῷ πρὸ τούτου εὑρεθέντων ἀριθμῶν, προτίθει δυάδα, οἱ γενόμενοι ποιοῦσι τὸ προκείμενον. τὸ δὲ γενόμενον ἑκατόν ἐστι. τάσσωμεν γὰρ ἕνα τῶν ζητουμένων $\overline{\delta\upsilon}$ $\overline{\alpha}$. μ^{ος} $\overline{\beta}$. τὸν δὲ ἕτερον $\overline{\delta\upsilon}$ $\overline{\alpha}$. ⟨ς⟩^{ους} $\overline{\beta}$. μ^{ος} $\overline{\gamma}$. τὸν δὲ τρίτον $\overline{\delta\upsilon}$ $\overline{\delta}$. ⟨ς⟩^{ους} $\overline{\delta}$. μ^{ος} $\overline{\varsigma}$. καὶ μοί ἐστι τὰ ὑποταχθέντα. λοιπὸν ἐστι $\overline{\delta\upsilon}$ $\overline{\delta}$. ⟨ς⟩^{ους} $\overline{\delta\lambda}$. μ^{ος} $\overline{\delta}$. ἰσῶσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον, ὥστε καὶ δύναμιν $\overline{\alpha}$. ⟨ς⟩ $\overline{\alpha}$. μ^{ος} $\overline{\alpha}$. ἵσους ἓξ τετραγώνῳ, καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν τῆς τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ

INVENIRE tres numeros, vt quiuis eorum binario multatus faciat quadratum, & qui fit ex binorum mutuo ductu, siue amborum summam abiiciat, siue reliquum, fiat quadratus. Si cuiuis superiore quæstione inuentorum numerorum adiicio 2. sic confecti satisfaciunt postulatis. Quod itaque dicitur tale est. Ponimus vnum eorum qui quæruntur 1 Q. + 2. Alterum 1 Q. + 2 N. + 3. tertium 4 Q. + 4 N. + 6. & fit quod iubetur. Restat vt 4 Q. + 4 N. + 4. æquetur quadrato. Proinde & quadrans eius æquatur quadrato, nempè 1 Q. + 1 N. + 1. Quod si latus quadrati ponamus à differentia, erit

1 N

1 N − 2. fit quadratus 1 Q + 4 − 4 N. æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{5}{3}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{55}{15}$. secundus $\frac{114}{15}$. tertius $\frac{246}{15}$. & euidens est demonstratio.

διαφορᾶς. ἔστω ἀπὸ ς̄ᵉ ᾱ ↓ μ̄ᵒ β̄. γίνεται ὁ τετράγωνος. δ̄ᵘ ᾱ. μ̄ᵒ δ̄. ϛ̄ᵉ δ̄. ἴσος δ̄ᵘ ᾱ. ς̄ᵉ ᾱ. μ̄ᵒ ᾱ. ἀγ γίνεται ὁ ς̄ᵒ Γ̄. ὅτι τὰς ὑποτάσεις ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος νθ̄ ιβ̄ᵉ. ὁ δὲ δεύτερος ριδ̄ ιβ̄ᵉ. ὁ δὲ τρίτος σμς̄ ιβ̄ᵉ. ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM VI.

IN huius quæstionis propositione, habet codex manuscriptus. ὁ δὲ τὰ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ σωαμφότερον, ἐάν τε τὸν ὅλον, ποιῇ τετράγωνον, pro quo reposuimus, ἐάν τε λείψῃ σωαμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν, &c.

Porrò duplicem modum tangit Diophantus, soluendi quæstionem istam. Primus est addendo binarium tribus numeris præcedentem soluentibus, vbi nulla opus est operatione Algebræ. Secundus est per operationem Algebræ supponendo porisma quod ostendimus propositione decima septima libri secundi. Nimirum. Si sumantur duo quadrati, itemque duplum summæ illorum & quadrati interualli laterum, fient tres numeri, quibus si addatur sigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producent mutuo ductu, is, siue multetur amborum summa, siue reliquo, fiet quadratus. Vnde sanè operatio Diophanti manifestè pendet, sed & primus modus hinc suam mutuatur demonstrationem, vt luce clarius est.

Huc pertinet quæstio quam tradidit Vieta Zetetico duodecimo libri quinti. Quamuis eam imperfectè tractauerit, omittens alteram illius partem, eò quod Porismatum quæ demonstrauimus propositione decimasexta, & decimaseptima libri secundi perfectam cognitionem non habuit. Nos vniuersalissimè proponemus hoc pacto.

Inueniantur tres quadrati, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, additus ei qui fit ex quadrato dato, siue in amborum summam, siue in reliquum, conficiat quadratum.

Datus quadratus esto 9.

Ponatur primi latus 1 N. secundi 1 N. + 3. erunt quadrati 1 Q & 1 Q. + 6 N. + 9. & sit tertius duplum primi & secundi, & quadrati interualli laterum, seu ipsius 9 puta 4 Q. + 12 N. + 36. Constat ergo per decimamsextam secundi porismatum productum ex binorum mutuo ductu adscito producto ex quadrato 9. siue in amborum summam, siue in reliquum, facere quadratum. Restat vt tertius sit quadratus. Ergo 4 Q + 12 N. + 36. æquandus est quadrato, cuius latus esto 2 N. + 4. fiet 1 N. 5. Erunt ergo quæsiti quadrati 25. 64. 196. & satisfaciunt proposito.

Rursus.

Inueniantur tres numeri, vt quiuis eorum multatus duplo dati quadrati, faciat quadratum; & productus ex binorum mutuo ductu, detracto eo qui fit ex dato quadrato, siue in summam amborum, siue in reliquum, relinquat quadratum.

Datus quadratus esto 9.

Si tribus per præcedentem inuentis quadratis addas duplum dati quadrati, puta 18. fient quæsiti numeri 43. 82. 214. qui satisfaciunt postulatis, vt constat ex decimaseptima secundi porismatum. Itaque non satis feliciter quæstiones istas explicauit Franciscus Vieta loco citato, cùm numerorum quos inuenit proprietates penitus perspectas non habuerit.

QVÆSTIO VII.

Lemma ad id quod sequitur. Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione addito vtriusque quadrato, summam faciat quadratum. Esto primus 1 N. secundus vnitatum quotlibet, puta 1. & est productus eorum multiplicatione 1 N. summa verò quadratorum est 1 Q. + 1 adde 1 N. fit 1 Q. + 1 N. + 1 æqualis quadrato. Esto latus eius 1 N. − 2. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τοὺς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετραγώνους τινὶ συνθέσιν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ πρῶτος ς̄ᵉ ᾱ, ὁ δεύτερος μ̄ᵒ ὁσωνοῦν θέλεις. ἔστω μ̄ᵒ ᾱ. ἀγ γίνεται ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν ς̄ᵉ ᾱ. ὁ δὲ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ποιεῖ δ̄ᵘ ᾱ. μ̄ᵒ ᾱ. μῆ τῶν ς̄ᵉ ᾱ. γίνεται δ̄ᵘ ᾱ. ς̄ᵒ ᾱ. μ̄ᵒ ᾱ. ἴσον τετραγώνῳ. ἔστω ὧν πλευρὰ ς̄ᵉ ᾱ. λείψει μ̄ᵒ β̄. γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ᵘ

ᾱ. μ̃ δ̃. λείψει ϛϛ̃ δ̃. ἴσον δῦ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ϛ̃ γ̄ ε̃. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ̄ ε̃. ὁ δὲ δεύτερος ε̄ ε̃. καὶ ἀρθέντος τοῦ μορίου. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̃ Γ̄. ὁ δεύτερος ε̄. καὶ ποιοῦσι τὸ προκείμενον. ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον. ὁσάκις δὲ ἐὰν θέλῃς τὸν γ̄. καὶ τὸν ε̄. ποιήσουσιν οἱ γενόμενοι ἀριθμοὶ τὸ ἐπίταγμα.

æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{3}{5}$. Ad positiones. erit primus $\frac{3}{5}$. secundus $\frac{5}{5}$. & abiecto denominatore, erit primus 3. secundus 5. & postulatis respondent, nam productus eorum multiplicatione cum summa quadratorum, facit quadratum. Quotiescunque autem voles ternarium & quinarium sumere, facient numeri qui nascuntur, id quod iuberis.

IN QVAESTIONEM VII.

Hîc triplex varietas contingere potest. Primo enim posito altero 1 N. alter statui potest quotlibet vnitatum. Deinde primus etiam poni potest quilibet Numerorum numerus. Denique latus numeri quadrato æquandi diuersimodè fingi potest.

Restat probandum quod ait Diophantus, nimirum. Si dentur duo numeri quæstioni satisfacientes, duo alij quicunque in eadem ratione sumpti, soluent quæstionem. Sint A B propositum implentes, sint videlicet eorum quadrati C D. & productus multiplicationis E. & summa C E D. sit F. quadratus numerus. Tum sumantur G H in ratione ipsorum A B. & sint eorum quadrati K M, & productus L, & ipsorum K L M. summa sit N. Dico N. esse quadratum. Quia enim vt constat ex constructione vndecimæ octaui est C ad E. & E ad D. sicut A ad B, & similiter est K ad L. & L ad M. sicut G ad H. cùm sit A ad B. vt G ad H ex hypothesi, erit & C ad E. & E ad D, sicut K ad L & L ad M. & permutando erit C ad K. vt E ad L. & vt D ad M. [1] Quare & antecedentium summa, puta F ad summam consequentium, puta ad N. est vt vnus antecedens C ad vnum consequentem K. Sed vterque C & K quadratus est. Ergo F ad N. rationem habet quadrati ad quadratum. Ac proinde cùm F sit quadratus [2] & N. quadratus erit. Quod demonstrandum erat.

A 3. B 5. F. 49.
C 9. E 15. D 25.
G 6. H 10. N 196.
K 36. L 60. M 100.

12. *septimi.*

24. *octaui.*

Ex ipsa autem operatione formatur huiusmodi Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum sui lateris vnitate auctum, duo numeri quicumque in ratione quotientis ad vnitatem, satisfacient proposito.

Cæterùm eadem arte soluetur hæc quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum, detracto producto relinquat quadratum.

Esto primus 1 N. secundus 1. fit productus 1 N. summa quadratorum 1 Q. + 1. vnde auferendo 1 N. manet 1 Q. + 1 − 1 N. æquandus quadrato. Esto latus 1 N. − 3. fit 1 N. $\frac{8}{5}$. est ergo primus $\frac{8}{5}$ secundus $\frac{5}{5}$. & abiecto denominatore, fit primus 8. secundus 5. & satisfaciunt postulatis. Hinc etiam elicietur iste Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum sui lateris vnitate multatum, quotiens ad vnitatem habebit rationem quæsitorum numerorum.

Vbi hoc animaduersione dignum occurrit, si sumantur duo numeri huic quæstioni sætisfacientes, maior quoque illorum & eorum interuallum quæstionem soluunt. At minor illorum & interuallum, soluunt quæstionem Diophanti. Contrà, si duo numeri soluant quæstionem Diophanti, summa ipsorum, & alteruter eorundem, nostram hanc quæstionem soluunt. Sic sumptis 8. & 5. nostram quæstionem soluentibus (nam summa quadratorum detracto producto, facit quadratum 49.) maior 8. & interuallum 3. eandem soluunt quæstionem; nam rursus summa quadratorum detracto producto facit 49. At minor 5. & interuallum 3. soluunt quæstionem Diophanti, cùm summa quadratorum adsumpto producto, rursus faciat 49. Huius rei demonstratio, ab huiusmodi theoremate pendet.

Si numerus secetur in duas partes, quadrati partium, vnà cum producto multiplicationis earundem, æquantur quadratis à toto & à qualibet parte, multatis producto multiplicationis ex toto in eandem partem.

A . . . . . B . . . C

Sit numerus A C. sectus in A B B C. dico quadratos ex A B. B C. vnà cum producto ex A B in B C. æquari quadratis ex A C. A B multatis producto ex A C in A B. Itemque quadratis ex A C. B C. multatis producto ex A C in B C. Quia enim quadratus ex A C. [1] æquatur quadratis ipsorum A B. B C. & duplo producti ex A B. in B C. addito quadrato ex A B. erit summa quadratorum ex A C. A B. æqualis quadrato ex A B. bis, ex B C semel, & duplo producti ex A B in B C. At quadratus ex A B cum producto ex A B in B C. [2] æquatur producto ex A C in A B. Quare auferendo à summa quadratorum ex A C.

4. *secundi.*

3. *secundi.*

AB. productum ex AC in AB, seu quod idem est, quadratum ex AB & productum ex AB in BC, remanent quadrati ex AB. BC, vnà cum producto ex AB in BC. Eadem prorsus ratione ostendemus auferendo à quadratis ex AC. BC. productum ex AC in BC. remanere quadratos ex AB BC. vnà cum producto ex AC. in BC. Igitur ex omni parte constat propositum.

QVÆSTIO VIII.

INVENIRE tria triangula rectangula, quorum areæ sint æquales. Primùm oportet quærere duos numeros, vt productus eorũ multiplicatione cum summa quadratorum faciat quadratũ. Hoc autem suprà ostẽsum est, & sunt 3. & 5. quorum mutuo ductu productus cum summa quadratorum facit quadratum, cuius latus est 7. Compono ergo tria triangula rectangula à duobus numeris, alterum à 7. & 3. alterum à 7. & 5. & præterea alterum à 7. & à summa inuentorum numerorum 3. & 5. hoc est à 8. Erunt igitur triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. & sunt triangula, quorum eadem est area 840.

ΕΤΡΕΙΝ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδὰ. πρότερον δεῖ ζητῆσαι δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετ' αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ πρόδηλον, ἐὰν εἰσὶ γ. ε. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν, μετ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν ζ. συνίστασθω τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ὑπὸ ἀριθμῶν δύο, ὑπότε τοῦ ζ. καὶ τοῦ γ. καὶ πάλιν ὑπὸ τοῦ ζ. καὶ τοῦ ε. καὶ ἔτι ὑπὸ τοῦ ζ. καὶ τῆς συνθέσεως τῶν δύο ἀριθμῶν ἀριθμῶν τοῦτε γ. καὶ τοῦ ε. τουτέστι η. ὑπὸ ἄρα τοῦ ζ. καὶ τοῦ η. ἔσται οὖν τὰ τρίγωνα. μ. μβ. νη. καὶ κδ. ο. οδ. καὶ ιε. ριβ. ρις. καὶ ἔστι τὰ τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδὰ ὑπὸ μ' ωμ.

IN QVAESTIONEM VIII.

MAGNA hîc verborum iactura facta erat in textu Diophanti, vt bene animaduertit Xilander, nos eam resarcire conati sumus, verba reponentes quæ virgulis inclusa vides. Itaque nil superest difficultatis, nisi vt demonstretur trium triangulorum rectangulorum, modo quem tradit Diophantus inuentorum, æquales esse areas, quod præstabimus more nostro, si prius hoc veluti lemma præmiserimus.

Si duobus quadratis addatur sigillatim productus ex mutuo laterum ductu, erit compositorum eadem ratio, quæ & laterum ipsorum.

Sint quadrati AB. quorum latera CD. ex quorum mutuo ductu fiat G. Dico summam duorum AG. ad summam duorum GB se habere, vt C ad D. etenim vt constat ex vndecima octaui, AGB sunt continuè proportionales in ratione G ad D. Quare cùm sit A ad G. vt G ad B. erit & componendo summa duorum AG ad G. sicut summa duorum GB. ad B. & permutando, erit summa duorum AG. ad summam duorum GB. sicut G ad B. hoc est sicut C ad D. Quod erat demonstrandum.

A 9. G 12. B 16.
C 3. D 4.

Hoc posito sint numeri AB præcedenti quæstioni satisfacientes, sint videlicet eorum quadrati EF. & productus mutuo illorum ductu G. & summa ipsorum EFG. sit quadratus H. cuius latus C. summa verò ipsorum AB. sit D. cuius quadratus K. Tum vt vult Diophantus [1] formetur triangulum à numeris CA. sit videlicet hypotenusa L. summa quadratorum HE. & sit basis M. interuallum eorundem. & sit cathetus N. duplum producti ex C in A. Similiter formetur triangulum à numeris CB. sitque hypotenusa P. summa quadratorum HF. At sit basis Q. interuallum eorundem ac demum cathetus R sit duplum producti ex C in B. Rursus formetur triangulum à numeris CD. sitque hypotenusa S. summa quadratorum HK. sit basis T. interuallum eorundem. & sit cathetus V duplum producti ex C. in D. Dico tria triangula LMN. PQR. STV. præstare quod requiritur, hoc est areas eorum æquales esse, seu productos ex M in N. ex Q. in R. & ex T in V æquales esse, sic enim sequitur areas æquales esse [2], cùm sint semisses huiusmodi productorum. Itaque quoniam idem C ductus bis in ipsos AB D. producit ipsos NRV. [3] erit N ad R. vt A ad B. & rursus R ad V. vt B ad D. Quonjam verò M est interuallum quadratorum HE. & H est summa ipsorum EFG. patet M æquari ipsis FG simul. Rursus quia Q. est interuallum quadratorum HF. patet Q. æquari ipsis EG. Est autem summa duorum EG ad summam duorum GF. sicut A ad B per Lemma assumptum. Igitur est Q ad M. sicut A ad B. Cùm ergo ostensum sit esse N ad R. vt A ad B. patet esse N ad R. vt Q ad M. Quare [4] planus sub extremis NM. æquatur plano sub mediis RQ. ac proinde triangulorum LMN. PQR. æquales sunt areæ. Præterea cùm ostensum sit Q. æquari duobus EG. quadrato

G 15.
H 49. E 9. F 25. K 64.
C 7. A 3. B 5. D 8.
L 58. M 40. N 42.
P 74. Q 24. R 70.
S 113. T 15. V 112.

5. 3. *porism.*

defin. 3. 3. porisi.

17. *septimi.*

19. *septim*

3. secundi. scilicet ipsius A. & producto ex A in B. [5] æquabitur idem Q. producto ex summa duorum A B, hoc est ex D in A. Quoniam verò K est quadratus summæ ipsorum A B [1]. patet K æquari ipsis E F. & duplo G. Quare ex K auferendo H qui continet ipsos E F G semel, patet reliquum T æqualem esse ipsi G. ac proinde fieri ex A in B. Itaque cùm idem A ductus in B. & in D. producat T & Q. erit T ad Q. vt B ad D. Sed vt B ad D. sic ostensum est esse R ad V. Igitur vt R ad V. sic T vt ad Q. Quare [2] rursus qui continetur sub extremis R Q. æquatur contento sub mediis V T. vnde sequitur triangulorum P Q R. S T V æquales esse areas, ac per consequens tria exposita triangula eandem prorsus aream habere. Quod erat demonstrandum.

4. secundi.

19. septimi.

OBSERVATIO D. P. F.

NVm vero inueniri possunt 4. aut etiam plura in infinitum triangula æqualis areæ nihil videtur obstare quo minus quæstio sit possibilis. inquiratur itaque vlterius.

Nos hoc problema construximus imò & data qualibet trianguli areâ infinita triangula eiusdem areæ exhibemus v. g. data areâ 6. trianguli 3. 4. 5. en aliud triangulum eiusdem areæ $\frac{7}{10}$ $\frac{120}{7}$ $\frac{1201}{70}$. *aut si placet eadem denominatio* $\frac{49}{70}$ $\frac{1200}{70}$ $\frac{1201}{70}$.

Perpetua & constans methodus hæc est. Exponatur quodlibet triangulum cuius hypothenusa Z. basis B. perpendiculum D. ab eo sic formatur aliud triangulum dissimile eiusdem areæ, nempe formetur abs Z. quadrato & B in D. bis, & planoplana lateribus similia applicentur Z in B. quadratum bis — Z in D. quadratum bis hoc nouum triangulũ habebit aream æqualem areæ præcedentis, ab hoc secundo eâdem methodo formetur tertium, à tertio quartum, à quarto quintum & fient triangula in infinitum dissimilia eiusdem areæ & ne dubites plura tribus dari posse inuentis tribus Diophanti 40. 42. 58. 24. 70. 74. & 15. 112. 113. quartum adiungimus dissimile eiusdem tamen areæ. $\frac{1412881}{1189}$ *hypothe.* $\frac{1412880}{1189}$ *basis.* $\frac{1681}{1189}$ *perpendic.*

Et omnibus in eundem denominatorem ductis fient 4 triangula in integris æqualis areæ quæ sequuntur.

Primum.	47560.	49938.	68962.
Secundum.	28536.	83230.	87986.
Tertium.	17835.	133168.	134357.
Quartum.	1681.	1412880.	1412881.

Eâdemque methodo inuenientur triangula eiusdem areæ in infinitum, & quæstio sequens vltra Diophantæos limites progredietur.

En etiam aliâ methodo triangulum cuius area facit sextuplum quadrati sicut 3. 4. 5.

Nempe 2896804. 7216803. 7776485.

QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. παντὸς δὲ τριγώνου ὀρθογωνίου ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τετράκις τὸ ἐμβαδὸν ἐάν τε λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ ἔσονται ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτείνουσαι, ὁ δὲ ἐκ τὸν τριῶν συγκείμενος ἔσται τέσσαρα ἐμβαδὰ τριγώνων, ὧν εἰσὶν αἱ ὑποτείνουσαι. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδά.

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque quadratus, summa trium siue addita, siue detracta, faciat quadratum. Quoniam volumus vt quadratus primi, summa trium siue addita, siue dempta, faciat quadratum. In omni autem triangulo rectangulo, quadratus hypotenusæ, siue adiecto quadruplo areæ, siue detracto, facit quadratũ. Erunt vtique tres numeri, hypotenusæ triangulorum, rectangulorũ at summa trium erit quadruplũ areæ triangulorum, quorum hypotenusæ sunt ipsi numeri. Eò itaque res redit, vt tria triangula inueniantur, quorum eadem sit area.

Id autem iam demonstratum est, & sunt triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. Nunc ad propositum ab initio rediens, statuo tres in numeris hypotenusarum triangulorum, & erit primus 58 N. secundus 74 N. tertius 113 N. summam verò trium, pono in quadratis quadrupli areæ. Proinde 3360 Q. æquantur 245 N. & fit 1 N. $\frac{7}{96}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{406}{96}$. secundus $\frac{518}{96}$. tertius $\frac{791}{96}$.

τῦτο δὲ προσδέδεικται, ἡ εἰσὶ τὰ τρίγωνα. μ̄. μβ̄. νη̄. ἡ κδ̄. ο̄. οδ̄ ἡ ιε̄. ριβ̄. ριγ̄. νῦν τάσσω ἐλθὼν ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς τὰς τρεῖς ἐν ἀριθμοῖς, τῷ ὑποτεινούσῃ τῷ τριγώνῳ, ἡ ἔσαι ὁ πρῶτος ϛ̄ς̄ νη̄. ὁ δεύτερος ϛ̄ς̄ οδ̄. ὁ τρίτος ϛ̄ς̄ ριγ̄. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῷ τριῶν ἐν δυνάμει τῦ τετραπλασίονος τῦ ἐμβαδοῦ. δυνάμεις ἄρα γτξ̄. ἴσαι ϛ̄ς̄ις̄ σμε̄. ἡ γίνεται ὁ ς̄ ζ̄. ϛ̄ς̄. ὅτι τὰς ὑποτάσας. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος υς̄ ϛ̄ς̄. ὁ δ' δεύτερος φιη̄ ϛ̄ς̄. ὁ δὲ τρίτος ψϟᾱ. ϛ̄ς̄.

IN QVAESTIONEM IX.

EX dictis ad præcedentem facilis redditur hæc quæstio. Quod assumitur de quadrato hypotenusæ trianguli rectanguli, qui assumpto vel dempto quadruplo areæ, quadratum facit; iam à nobis demonstratum est ad vigesimam secundam tertij, vbi etiam vsurpatur à Diophanto.

OBSERVATIO D. P. F.

EX supradictis patet posse nos construere generaliter problema, inuenire quotcumque numeros vt vnius cuiusque quadratus summa omnium siue additâ siue detractâ quadratum faciat. Hanc quæstionem forte Bachetus ignorauit. Diophantum quippè promouisset vt suprà 31. quæstione lib. 4. & alijs in locis si quæstionis huius solutionem detexisset.

QVÆSTIO X.

DATIS tribus numeris quadratis, possunt inueniri tres numeri, quorum bini quadratos istos producant alter in alterum ductus. Nam si sint dati quadrati 4. 9. & 16. & ponamus vnum quæsitorum 1 N. erit reliquorum duorum alter $\frac{4}{1N}$. alter $\frac{9}{1N}$. Restat vt productus ex secundo in tertium faciat 26. atqui productus ex secundo in tertiũ est $\frac{36}{1Q}$. Hoc ergo æquatur 16. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus 1 $\frac{1}{2}$. secundus 2 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{6}$. tertius 6. sed vt hoc etiam methodo exponatur. Inueni $\frac{36}{1Q}$. æqualia 16. & omnia per 1 Q. multiplicando fiunt 16 Q. æquales 36. & fit 1 Q. $\frac{36}{16}$. cuius latus $\frac{6}{4}$. atqui 6. fit ex mutuo ductu laterum ipsorum 4. & 9. hoc est primi & secundi. Denominator verò 4. est latus alterius quadrati 16. Quamobrem cùm iussus fueris tres numeros inuenire, quorum bini mutuo ductu datos quadratos producant, vt 4. 9. 16. sume productum ex

ΤΡΙΩΝ τετραγώνων δοθέντων, πλευρὰ ὅτι δυρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνῦν ποιῇ τὸν δοθέντας τετραγώνους ἀριθμούς. ἐαν γὰρ ὦσιν οἱ δοθέντες τετράγωνοι. ὅπε δ̄. ἡ θ̄. ἡ ῑς̄. ἡ τάξωμεν ἕνα τ̄ ζητουμένων ς̄ ᾱ. ἔσονται τὰ λοιπὰ δύο, ὁ μὲν δ̄ ς̄ᾱ. α̃ᾶ. ὁ δὲ θ̄ ς̄ᾱ. α̃ᾶ. ἡ λοιπὸν ὅτι τὸ ὑπὸ τῦ δευτέρου, ἡ τῦ τρίτου, ποιεῖν μ̄ ῑς̄. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τῦ δευτέρου, ἡ τῦ τρίτου ἔστι λϛ̄ δῡ. α̃. ἴσος μ̄ ῑς̄. ἡ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ α̃. α̃ ς̄ᾶ. ὅτι τὰς ὑποτάσας. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος α̃. α̃ ς̄ᾶ. ὁ δ' δεύτερος β. α̃ ς̄ᾶ. α̃ ς̄ᾶ. ὁ τρίτος ϛ̄. ἵνα δ' ἡμῖν ἐν μιᾷ πλευρᾷ κείμενον ᾖ. δῦρον λϛ̄ δῡ. α̃ᾶ. ἴσα μονάσι ῑς̄. ἡ πάντα ὅτι δύναμιν μίαν γίνου δυνάμεις ῑς̄. ἴσαι μ̄ λϛ̄. ἡ γίνεται ἡ δύναμις λϛ̄ ῑς̄ᾶ. ἧ πλευρὰ ὁ ϛ̄ δᾶ. ἀλλὰ τὰ ϛ̄. ἃ ὑπὸ τῆν πλευρῶν τῦ δ̄ ἡ τῦ θ̄. τουτέστι τῦ πρώτου ἡ τῦ δευτέρου τὸ δὲ μόριον τουτέστι τὰ δ̄. πλευρὰ ὅτι τῦ ῑς̄ τετραγώνου. ὅταν οὖν σοι προβληθῇ δυρεῖν ζεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιεῖ τὸς δοθέντας τετραγώνους. οἷον τὸν δ̄. ἡ τὸν θ̄. ἡ τ̄ ῑς̄. ποιεῖ τὸ ὑπὸ τὸν πλευρῶν τῦ δ̄. ἡ τῦ θ̄. γίνεται ϛ̄. μερίσῃ ταῦτα πρῶτα τὰ πλευρὰν τῦ ῑς̄ τετραγώνου, γίνεται ὁ ς̄ ϛ̄ δᾶ. καὶ

πάλιν τὸν δ̄. τετράγωνον ϖρὸς τὸν ε̄ δ̄ᵒ. γίνονται μ̄ᵒ ις̄ ε̄ᵒ. καὶ πάλιν τὸν θ̄ᵒ. τετράγωνον. ϖρὸς τὸν ε̄ δ̄ᵒ. γίνονται μ̄ᵒ ε̄. ἔσαι ἄρα ὁ ϖρῶτος ε̄ δ̄ᵒ. ὁ δεύτερος ις̄ ε̄ᵒ. ὁ τρίτος μ̄ᵒ ε̄.

lateribus ipsorum 4. & 9. fit 6. hunc diuide per latus alterius quadratus 16. fit 1 N. $\frac{6}{4}$. Rursus diuide quadratum 4. per $\frac{6}{4}$. fiunt $\frac{16}{6}$. & rursum diuide quadratum 9. per $\frac{6}{4}$. fiunt 6. erit igitur primus $\frac{6}{4}$. secundus $\frac{16}{6}$. tertius 6.

IN QVAESTIONEM X.

OPERATIO Diophanti facilis est, & Canon quem tradit ab ea depromitur. Posset tamen breuius & facilius explicari Canon iste, hoc pacto.

Numeros quos producunt dati numeri, dum inter se bini & bini multiplicantur, diuide per reliquum, quotientum latera quæsitos exhibent numeros.

Vt in exemplo Diophanti productum ex 4. in 9. putà 36. Diuide per reliquum 16. fiet $\frac{9}{4}$. cuius latus $1\frac{1}{2}$ est vnus quæsitorum. Rursus productum ex 4. in 9. putà 64. diuide per reliquum 9. fit $\frac{64}{9}$. cuius latus $2\frac{2}{3}$. est secundus quæsitorum. Denique productum ex 9. in 16. putà 144. diuide per reliquum 4. fit 36. cuius latus, est tertius quæsitorum.

Porrò vniuersalius etiam proponi potest ipsa quæstio in hunc modum.

Datis tribus numeris, inuenire tres numeros, quorum bini inuicem ducti, datos producant numeros. Oportet autem solidum sub datis numeris contentum esse quadratum.

Sint dati 6. 8. 12. Ponatur primus 1 N. secundus $\frac{6}{1N}$. tertius $\frac{8}{1N}$. Restat vt ex secundo in tertium fiat 12. fit autem $\frac{48}{1Q}$ hoc ergo æquatur 12. & fit 1 N. 2. sunt igitur quæsiti numeri 2. 3. 4.

QVÆSTIO XI.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁμοιονοῦν, ἐὰν τε ϖροσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦμεν ϖρότερον τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα τὰς ἐμβαδὰς & δύροντες λαμβάνομεν τὰς ἀπὸ τῶν ὑποτεινουσῶν τετραγώνους. ἔστι δὲ ὁ μὲν γτξδ̄. ὁ δ' εὐθὺς ε̄. ὁ δὲ ᾱ. βψξϝ̄. καὶ ἔχοντες τούτους, δύρίσκομεν ὡς ϖροείρηται ξεῖς ἀριθμὸς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τὰς δοθέντας τετραγώνους. ἔστω δὴ τὰς κειμένους. τούτους δὴ ἐξεθέμεθα, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν τετραγώνων ἐάν τε ϖροσλάβῃ μονάδας γτξ̄. ἐάν τε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' αἱ γτξ̄. μονάδες ὁ τετράκις ὅστι τῶ ἐμβαδῶ τῶ ἑκάστου τῶ τριγώνου. καὶ διὰ τοῦτο δίνιν τάνυν ἐν ϛς οἷς. ὧν μὲν ἀριθμῶν δσῃβ ριν. ὧν δὲ ϗ καὶ δ̄., γψλγ. ὧν δὲ ζ̄. αρπζ̄. καὶ ὁ ὑπὸ δύο αὐτῶν ποιεῖ τὰς ἐπάνω τετραγώνους. λοιπὸν δεῖ τὰς γ̄. ἰσῶσαι δυνάμεσι γτξ̄. καὶ ϖάντα ἵνα ἓν μέρεον γένηται βάλλομεν ἐ. εψϛ̄. & ὁ ς̄ ὁ ϛς νδ̄. ηφι. μορίου τῶ αὐτῶ. ὁ τρίτος ϛς ϛβ̄. εὑλᾶ. μορίου τῶ αὐτῶ. καὶ γίνονται οἱ τρεῖς ς̄οι αρπϛᾶ. ἐσιᾶ. μορίου ε̄. εψϛ̄. ἴσοις δυνάμεσι γτξ̄. καὶ ϖάντα εἰς ε̄. εψϛ̄. ἐσιᾶ. ἴσος δῦ ᾱ. ηψμζ̄. δφμξ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ὸ μ̄ᵒ αρπϛᾶ. ἐτιδ̄. μορίω β̄ μοναδὰς ᾱ. καὶ ᾱ. ηψμζ̄. μ̄ᵒ δψιξ̄. μορίου κοινῶ ληφθέντος τινὸς, ὅπερ ὅστι ἀλλύαζον. ϖρώτοι γὰρ ἥμισυ ἄλλη εἰσὶν ς̄οὶ. ἔσαι ὁ ς̄ὸ μ̄ᵒ αρπϛᾶ. ἐσιδ̄. μορίου ᾱ. ηψμζ̄. μ. φξε̄. ὅπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν ϖρῶτος.*

ΙΝVENIRE tres numeros, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, omnium summa siue detracta quadratum faciat. Rursum primò quærantur tria triangula æquales areas habentia. Quibus inuentis sumemus quadratos hypotenusarum. Est autem primus 3364. secundus 5476. tertius 12769. Hos nacti, inueniemus, vt iam traditum est, tres numeros, vt producti ex binorum mutuo ductu faciant datos quadratos, qui sint ij quos exposuimus autem istos, quia quiuis ipsorum siue addas ei, siue adimas 3360. facit quadratum. At 3360. est quadruplum areæ singulorum triangulorum. Ea propter nunc in numeris pono primum $\frac{4292}{113}$. N. secundum $\frac{4181}{29}$. N. tertium $\frac{3177}{37}$ N. quorum bini inuicem ducti faciunt supradictos quadratos. Restat vt hi tres æquentur 3360 Q. & omnia vt vnius fiant denominationis, reducantur ad 121249. erit primus $\frac{46053116}{121249}$. N. secundus $\frac{27480761}{121249}$. N. tertius $\frac{10738729}{121249}$. N. & fit trium summa $\frac{32824806}{121249}$ N. æqualis 3360 Q. & omnia in 121249. fiunt 32824806. N. æquales 407396640 Q. & fit 1 N. $\frac{32824806}{407396640}$. Ad posines, erit primus.

IN QVAESTIONEM XI.

HÆc quæstio, vt bene monet Xilander, à duobus præcedentibus pendet omnino, & operatio Diophanti plana est, sed tota minutiarum tractatio in textu Græco scatet mendis. Quamobrem malui in mea versione rem subiicere per veros numeros modo nobis consueto, quàm in verbis & in numeris Diophantæis omni ex parte restituendis diutius animum torquere.

Porro quod deest in Diophanto (ipsa nimirum quæstionis solutio) sic à nobis supplebitur fit 1 N. $\frac{328248^{06}}{407396^{40}}$. seu in minimis $\frac{781543}{969920}$. Ad positiones erit primus $\frac{838595639}{274022740}$. secundus $\frac{326763^{1283}}{281297^{680}}$ tertius denique $\frac{2561^{11}1641^{1}}{3588970^{40}}$. Vt autem proposito satisfaciant huiusmodi numeri, tu si vacat experire, nos ad ea quæ maioris sunt momenti interim progrediemur.

QVAESTIO XII.

VNITATEM diuidere in duas partes, & vtrique segmento datum numerum adjicere, & facere quadratum. Oportet autem datum neque imparem esse, * neque duplum eius N. vnitas maiorem habere quadrantem quàm est numerus, quo ipsum metitur primus numerus. * Imperatum sit vt vtrique portioni adiungamus 6. itáque efficiamus quadratum. Quia ergo volumus vnitatem secare, & vtrique segmento addere 6. & facere quadratum: summa duorum qui sic fient quadratorum erit 13. Opportet igirur diuidere 13. in duos quadratos, vt vterque ipsorum maior sit senario. Ergo si 13. diuidam in duos quadratos, quorum interuallum vnitate sit minus, soluo quæstionem. Sumo semissem de 13. qui est $6\frac{1}{2}$. & quæro quam partem possim ad $6\frac{1}{2}$. adiungere, ita vt quadratum conficiam. Multiplico per 4. & quæro postmodum partem quadratam, quæ si ad 26. adijciatur faciat quadratum. sit pars apponenda $\frac{1}{1Q}$. fiunt $26. + \frac{1}{1Q}$. æqualia quadrato, & si omnia per 1 Q. multiplicentur, fiunt $26\,Q. + 1.$ æqualia quadrato, esto latus eius $5\,N. + 1.$ & fit $1\,N.\ 10.$ Quadratus ergo 100. Pars quadratica $\frac{1}{100}$. Proinde pars addenda ad 26. est $\frac{1}{100}$. Quare pars addenda ad $6\frac{1}{2}$. est $\frac{1}{400}$. & facit quadratum à latere $\frac{51}{20}$. Oportet igitur ita diuidere 13. in duos quadratos, vt vtriusq; latus proximè accedat ad $\frac{51}{20}$. Et quæro quo numero ternarius multatus, & quo binarius auctus faciat supradictum numerum $\frac{51}{20}$. Statuo itáque duos quadratos, alterum à latere $11\,N. + 2.$ alterum à latere $3 - 9\,N.$ & fit summa quadratorum ab his ortorum. $202\,Q. +$

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο μόρια, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δεῖ δὲ τὸν διδόμενον μήτε πρῶτον εἶναι, * μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ᾖ μονάδι ἐλάσσονα ἔχῃ μέρος δ'. ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α̅ ϛ̅. ς̅. * ὑπέκειται δὲ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μ̊ ϛ̅. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἐπεὶ οὖν θέλομεν τὴν μονάδα τεμεῖν, καὶ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μονάδας ϛ̅ καὶ ποιεῖν τετράγωνον. τὸ ἄρα συγκείμενον ἔκ τε τετραγώνων ἐστὶ μ̊ ιβ̅. δέησε ἄρα τὸν ιγ̅. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ μ̊ ϛ̅. ἐὰν οὖν τὸν ιγ̅. διέλω εἰς δύο τετραγώνους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἐλάσσων ὄσης μονάδος α̅. λύω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τοῦ ιγ̅. τὸ ἥμισυ, γίνεται ϛ̅. α̅ ς̆. καὶ ζητῶ τι μόριον προσθεῖναι μονάσιν ϛ̅. α̅ ς̆. καὶ ποιεῖν τετράγωνον, καὶ πάντα τετράκις. ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς κϛ̅. μονάσιν καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον α̅ δῠ. ᾰς̆. καὶ γίνονται μ̊ κϛ̅. α̅ δῠ. ᾰς̆. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα ὑπὸ δύναμιν. γίνονται δ̊ κϛ̅. μ̊ α̅. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῆς ὑπὸ πλευρὰς ς̄ς̄ ε̅. μ̊ α̅. καὶ γίνεται ὁ ς̄ς̄ μ̊ ι̅. δύναμις γδ̊ μ̊ ρ̅. τὸ δυναμοστὸν μ̊ α̅ ρ̆. ἔσαι ἄρα τὸ ταῖς κϛ̅. προστιθέμενον α̅. ρ̆. τὸ ἄρα ταῖς μονάσιν ϛ̅. α̅ ς̆. γίνεται α̅ ῠ. καὶ ποιεῖ τετράγωνον τὸν ὑπὸ πλευρὰς να̅ ν̆ᾰ. δεῖ οὖν τὸν ι̅ϛ̅. διαιρεθέντα εἰς δύο τετραγώνους κατασκευάζειν τὸ ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔλαττα να̅ ν̆ᾰ. καὶ ζητῶ τινὰ ἢ τετράκις λείψασα προσλαβοῦσα δυὰς ποιεῖ τὸν αὐτὸν, τουτέστι να̅ ν̆ᾰ. τάσσω οὖν δύο τετραγώνους ἕνα μὲν ὑπὸ ς̄ς̄ ια̅. μ̊ β̅. τὸν δὲ ἕτερον ὑπὸ μ̊ γ̅. λείψει ς̄ς̄ θ̆. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τ῀ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. δυνάμεις σβ̅. μ̊ ιγ̅. λείψει ς̄ς̄ ι̅. ἴσοις μ̊ ιγ̅. καὶ γίνεται

ὁ ς̄ ε̄ ρα̃. ἔςαι ἄρα ἑνὸς τῶ τετραγώνων ἡ πλευρὰ σνζ̃ ρα̃. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου σνη̄ ρα̃. καὶ ἀπὸ ἑκατέρου τῶ ἀπ' αὐτῶ τετραγώνων, ἄρα μὲν μ̄ ς̄. ἔςαι τὸ μὲν ἓν τμῆμα τῆς μονάδος ε̣τνη̄ α. σα̃. τὸ δὲ ἕτερον ,δωμγ̄ α̃. σα. καὶ δῆλον ὡς ἑκάτερος μετὰ μονάδων ς̄. ποιεῖ τετράγωνον.

13 – 10 N. æqualis 13. & fit 1 N. $\frac{5}{101}$. Erit igitur alterius quadrati latus $\frac{257}{101}$. alterius verò $\frac{258}{101}$ & si ab vtroque quadratorum inde factorum auferamus 6; erit alterum segmentum vnitatis $\frac{5358}{10201}$. alterum $\frac{4843}{10201}$. & liquet horum vtrumque adscito 6. facere quadratum.

IN QVAESTIONEM XII.

PVLCHERRIMVM problema, sed miserrimè affectum, ita vt medicantis manum vix admittat, & cùm in eo enodando multùm desudauerit Xilander, id tamen quod potissimum est prætermisit, accuratam scilicet appositæ conditionis explicationem. Quàm enim sit necessaria conditionis huius cognitio, manifestum est ex eo quod in hypothesi Diophanti tota vis æquationis consistit in diuidendo numero 13. in duos quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 6. minor quàm 7. Nullibi autem traditus est modus diuidendi numerum aliquem in duos quadratos, nisi numerus ille sit quadratus, vel suaptè natura ex duobus quadratis compositus. Itaque cùm euidens sit, ponendo latera quadratorum 11. N. + 2. & 3. – 9 N. æquationem succedere non posse nisi quadrati ipsorum 2. & 3. simul efficiant 13. Necesse est vtique 13. componi ex duobus quadratis. Atqui 13. est duplum dati numeri 6. vnitate auctum. Certum ergo est conditionem à Diophanto allatam requirere debere, vt duplum dati numeri vnitate auctum, sit quadratus numerus, vel compositus ex duobus quadratis. Quod etiam validè confirmatur verbis illis. *Oportet autem datum neque imparem esse.* Nam si datus numerus sit impar, nullo modo duplum eius vnitate auctum potest esse quadratus, vel compositus ex duobus quadratis, vt facilè est demonstrare. Sit enim numerus impar A B. cuius duplum esto A C. cui addita vnitate C D. fiat A D. dico primo A D. non esse quadratum. Si enim ponatur quadratus; cùm numero pari A C. addita vnitate C D, fiat A D est A D impar. Ergo à quadrato impari A D, detracta vnitate C D[1] reliquus A C est pariter par.[2] Quamobrem illius dimidium A B est numerus par, contrà hypothesim. Rursus dico numerum A D non componi ex duobus quadratis. Etenim cùm A D ostensus sit, impar, necesse est è duobus quadratis ex quibus componi dicitur, alterum parum esse, alterum imparem.[3] At omnis quadratus par, est pariter par. Et ab omni quadrato impari auferendo vnitatem relinquitur pariter par. Igitur à toto A D ablata vnitate, reliquus A C componetur ex duobus pariter partibus,[4] ac proinde A C. pariter par est.[5] Quamobrem illius dimidium A B, par, est contrà hypothesim.

A...B...C.D

21. 1. *poris.* 8. 1. *poris.* 20. & 21. 1. *porism.* 16. 1. *poris.* 8. 1. *porism.*

Reliqua verò verba. *Neque duplum eius*, &c. adeo vitiata sunt, vt nullam commodè recipere possint explicationem. Non dubito quidem Diophantum respexisse ad aliquam numerorum non vulgarem proprietatem, qua definitur quis numerus par deligendus sit, vt duplum eius vnitate auctum sit quadratus numerus, vel compositus ex duobus quadratis. Sed quid sibi velit in tanta verborum caligine diuinare non possunt. Id oneris relinquam illi qui in codicem aliquem emendatiorem inciderit. Sufficiat nobis appositissimam attulisse conditionem, cum qua necesse est conditionem Diophanti coincidere si rectè præscribatur. Sanè quod ait Xilander verba illa corrupta, videri velle, debere eum qui datur esse duplum numeri primi, id vtique futile est, & nulli fundamento nixum, quodque ipsa statim experientia refelli potest, nam si datus sit 10. is est duplus numeri primi 5. & tamen quæstioni soluendæ minimè reperitur idoneus, nam oporteret diuidere in duos quadratos numerum 21. Quod quidem impossibile est, vt reor, cùm is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis.

OBSERVATIO D. P. F.

NVmerus 21. non potest diuidi in duos quadratos in fractis. Hoc autem facillime demonstrare possumus, & generalius omnis numerus cuius triens non habet trientem non potest diuidi in duos quadratos neque in integris neque in fractis.

Aliquando mihi venit in mentem Diophantum voluisse duplum dati numeri paris vnitate auctum esse numerum primum, quandoquidem omnes fere huiusmodi numeri componuntur ex duobus quadratis, quales sunt 5. 13. 17. 29. 41. aliique primi numeri qui sublata vnitate relinquunt numerum pariter parem. Veruntamen neque hæc explicatio sustineri potest. Nam primum hac ratione per huiusmodi conditionem excluderentur omnes numeri, quorum duplum vnitate auctum est quadratus numerus, quos tamen aptissimos esse soluendæ quæstioni patet, quia quilibet quadratus diuidi potest in duos quadratos per octauam secundi; sed & infrà exemplo

exemplo id comprobabimus. Deinde excluderentur etiam multi numeri, quorum duplum vnitate auctum componitur ex duobus quadratis, quales sunt 22. 58. 62. & alij innumerabiles. Nam dupli horum vnitate aucti sunt 45. 117. 125. quorum nullus est primus numerus, cùm quilibet multos habeat metientes; vnusquisque tamen è duobus quadratis conflatur, primus scilicet ex quadratis 36. & 9. secundus ex quadratis 81. & 36. tertius ex quadratis 100. & 25. Itaque satius erit conditionem à nobis allatam amplecti, donec aliquis ex emendatiore codice restituat Diophantum. Solùm hoc moneo in codice Vaticano, hæc verba sic haberi. μήτε ὁ διπλασίων ἀπὸ ἀριθμὸν μονάδα α̅. μείζονα ἔχῃ μέρος τέταρτον, ἢ μετρεῖται ὑπὸ τῆ πρώτε ἀριθμῶ.

OBSERVATIO D. P. F.

VEra limitatio hæc est, generalis nempe & omnes numeros inutiles excludens. Oportet datum numerum non esse imparem, neque duplum eius vnitate auctum per maximum quadratum ex quo mensuratur diuisum diuidi à quouis numero primo vnitate minori quâ multiplex quaternarij.

Porro quoniam operatio Diophanti subtilis est, & non vulgaris artificij, placet eam explicare, quoad potero breuiter & dilucidè. Primum itaque cùm 13. diuidendus sit in duos quadratos, quorum vterque maior sit senario, rectè quæritur pars quadrati quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita faciat quadratum, sic enim diuidendo postmodum 13. in duos quadratos, quorum quilibet proximè accedat ad inuentum quadratum, satisfactum erit proposito, nam quilibet illorum non multùm distabit à $6\frac{1}{2}$. Reducit autem omnia ad integros more suo Diophantus, multiplicando $6\frac{1}{2}$ per 4. vnde fit 26. Nam inuenta parte quadratica quæ ad 26. addita quadratum faciat, illius vtique quarta pars addita ad $6\frac{1}{2}$ faciet quadratum. Ponitur ergo pars huiusmodi $\frac{1}{1\text{Q}}$. quia scilicet pars quadratica fit diuidendo vnitatem per aliquem quadratum; vnde sequitur $26 + \frac{1}{1\text{Q}}$ æquari quadrato; vt autem rursus ad integros fiat reductio, ducuntur omnia in 1 Q. & fit $26\text{Q.} + 1$. æquandus quadrato; cuius latus ita fingendum est vt valor Numeri sit maior vnitate, si enim sit vnitate minor, patet $\frac{1}{1\text{Q}}$. fore plerũque maiorem vnitate, ac proinde non fore propriè partem quadraticam, vnde sequitur inuentum quadratum, tota vnitate, vel etiam maiore interuallo superaturum numerũ $6\frac{1}{2}$. Verbi gratia si fingatur latus supradicti quadrati $1\text{N.} + 1$. erit quadratus $1\text{Q.} + 2\text{N.} + 1$. æqualis ab $\text{Q.} + 1$. & fiet $1\text{N.} \frac{2}{25}$. Quare $\frac{1}{1\text{Q}}$ erit $\frac{625}{4}$ cuius quadrans $\frac{625}{16}$ additus ad $6\frac{1}{2}$ quadratum facit $\frac{725}{100}$. qui excedit ipsum $6\frac{1}{2}$ plus quàm 39. vnitatibus, ac proinde quæstioni soluendæ prorsus est inutilis. Igitur vt arte certa, non fortuitò fingatur huiusmodi latus, ita vt valor Numeri superet vnitatem, cùm fingi possit huiusmodi latus vel $1 +$ tot numeris, quorum quadratus sit minor quàm 26. vel $1 -$ tot numeris. quorum quadratus sit maior quàm 26. Primo modo fiet valor Numeri, auferendo quendam quadratum à 26. & per residuum diuidendo duplũ lateris eiusdem quadrati. Vt ergo quotiens sit maior vnitate reperiẽdus est quadratus quo detracto à 26. relinquatur numerus minor duplo lateris eiusdem quadrati, ponatur is 1Q. ergo 2N. maior est quàm $26 - 1\text{Q.}$ & tandem $1\text{Q.} + 2\text{N.}$ maior est quàm 26. Qua æquatione resoluta, fit 1N. non minor quàm $4\frac{1}{5}$. Fingetur ergo latus quadrati $1 +$ tot numeris qui excedant $4\frac{1}{5}$ dum eorum quadratus sit minor quàm 26. sic Diophantus posuit hoc latus $1 + 5\text{N.}$ & poni posset $1 + 4\frac{1}{2}\text{N.}$ vel $1 + 4\frac{2}{3}\text{N.}$ & sic aliis infinitis modis. Secundo verò modo fingendo latus quadrati, fiet valor Numeri, à quodam quadrato auferendo 26. & per residuum diuidendo duplum lateris. Quare vt fiat valor Numeri maior vnitate, posito illo quadrato 1Q. erit 2N. maior quàm $1\text{Q.} - 26$. & tandem 1Q. maior erit quàm $2\text{N.} + 26$. Qua æquatione resoluta fit 1N. minor quàm $6\frac{1}{5}$. fingetur ergo latus $1 -$ aliquot Numeris infrà $6\frac{1}{5}$ dum eorum quadratus excedat 26. Verbi gratia fingatur $1 - 6\text{N.}$ fiet $1\text{N.} \frac{6}{5}$ & pars quadratica ad $6\frac{1}{2}$ adiicienda erit $\frac{25}{144}$. fietque quadratus $\frac{961}{144}$. à latere $\frac{31}{11}$. Vnde collige partem quadraticam hîc non sumi strictè pro fractione quadrata cuius numerator sit 1. Sed tantum pro fractione quadrata quæ minor sit vnitate, ideſt cuius numerator sit minor denominatore.

Inuenta porro parte quadratica $\frac{1}{400}$. quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita facit quadratum $\frac{2601}{400}$ cuius latus $\frac{51}{20}$ rectè infert Diophantus numerum 13. ita diuidendum esse in duos quadratos, vt latus vtriusque proximè accedat ad $\frac{11}{20}$. sic enim vterque quadratus proximè accedet ad $6\frac{1}{2}$. Vt autem 13. diuidatur in duos quadratos per operationem decimæ secundi, debent sumi 2. & 3. latera quadratorum, ex quibus 13. suaptè natura componitur, & alteri addi oportet certum numerum Numerorum, ab altero detrahi: Vt ergo vtriusque quadrati latus adæquetur numero $\frac{51}{20}$. necesse est ad 2. addi $\frac{11}{20}$. & à 3. auferri $\frac{9}{20}$. Quare si 1N. supponatur esse $\frac{1}{20}$. erit vtique $11.\text{N.} + 2$. æqualis $\frac{51}{20}$. Itemque $3 - 9\text{N.}$ sic autem quadrati horum laterum æquari deberent $13\frac{1}{100}$. Quare si æquentur ipsi 13. fiet vtique 1N. paulò minor quàm $\frac{1}{20}$. ac proinde 11N. & 9N. paulò minus erunt quàm $\frac{11}{20}$ & $\frac{9}{20}$. vnde sequetur vtrumque latus non multùm distare posse à $\frac{51}{20}$. ac per consequens vtrumque quadratum fore proximum numero $6\frac{1}{4}$ atque adeo proposito ritè satisfacturum. Hinc satis colligitur, quod suprà diximus, in conditionis

explicatione nimirum, fuisse necessarium numerum 13. componi ex duobus quadratis. Qua de causa res etiam optimè succedet, si datus numerus talis sit, vt eius duplum vnitate auctum sit quadratus numerus, quandoquidem omnis quadratus in duos quadratos potest diuidi per octauam secundi.

Hoc autem vt manifestius fiat, & simul artificium Diophanti magis illustretur; talis quæstio proponatur. *Vnitatem secare in duas partes, vt vtrique addendo 4. fiat quadratus.* Patet numerum 9. diuidendum esse in duos quadratos, quorum interuallum sit vnitate minus, hoc est tales vt vterque superet 4. Quare sumendo semissem ipsius 9. puta $4\frac{1}{2}$. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, & ducendo in 4. fit 18. Positâque parte quadrati $\frac{1}{1Q}$. fit $18 + \frac{1}{1Q}$. æquandus quadrato, & omnia ducendo in Q. fit $18\,Q + 1$. æquandus quadrato, esto latus $4\,N. + 1$. fiet $1\,N. 4$. Igitur $\frac{1}{1Q}$. est $\frac{1}{16}$. cuius quadrans puta $\frac{1}{64}$. additus ad $4\frac{1}{2}$ facit quadratum $\frac{289}{64}$. cuius latus $\frac{17}{8}$. Quare 9. ita diuidendus est in duos quadratos, vt vtriusque latus adæquetur ipsi $\frac{17}{8}$. Diuiditur autem 9. in duos quadratos per octauam secundi, putà in $\frac{81}{225}$. & $\frac{144}{225}$ quorum latera $\frac{9}{15}$ & $\frac{12}{15}$. Video ergo quid addendum sit ad $\frac{9}{15}$. & quid detrahendum à $\frac{12}{15}$. vt fiant $\frac{17}{8}$. & inuenio hinc $\frac{13}{40}$ inde $\frac{11}{40}$. Quare fingo quadratorum latera $\frac{9}{15} + 13\,N.$ & $\frac{12}{15} - 11\,N.$ fitque summa quadratorum $290\,Q. + 9 - 6\,N.$ æqualis 9. vnde fit $1\,N. \frac{3}{14}$. suntque latera quadratorum $\frac{69}{29}$. $\frac{63}{29}$. ipsi quadrati $\frac{3600}{841}$ & $\frac{3969}{841}$ vnde si auferas sigillatim 4. supersunt quæsitæ partes vnitatis $\frac{2336}{748}$ & $\frac{605}{841}$.

Possem etiam in huiusmodi quæstione artificium imitari decimæ tertiæ sequentis, hoc pacto. Ponatur alter quadratorum $1\,Q.$ erit alter $9 - 1\,Q.$ qui æquari debet quadrato, ita tamen vt $1\,Q.$ inueniatur maior quàm 4. minor quàm 5. Sumantur ergo duo quadrati inter 4. & 5. quales sunt $\frac{441}{100}$ & $\frac{484}{100}$. quorum latera $\frac{21}{10}$ & $\frac{22}{10}$. Quare curandum vt valor numeri cadat inter $\frac{21}{10}$ & $\frac{22}{10}$. fit autem valor Numeri, diuidendo sextuplum alicuius numeri per quadratum ipsius vnitate auctum. Oportet igitur $\frac{6\,N}{1Q+1}$ maiorem esse quàm $\frac{21}{10}$ minorem quàm $\frac{22}{10}$. & tandem 60 N. maiores sunt quàm $21\,Q. + 21.$ minores quàm $22\,Q. + 22.$ Et vtraque æquatione per approximationem resoluta, fit $1\,N.$ maior quàm $\frac{63}{22}$. minor quàm $\frac{55}{22}$. ponatur ergo $2\frac{1}{3}$. & quadrati $9 - 1\,Q.$ latus statuatur $3 - 2\frac{1}{3}\,N.$ fiet $1\,N. \frac{63}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{63}{29}$. & $\frac{69}{29}$. ipsi quadrati $\frac{3969}{841}$ & $\frac{3600}{841}$ à quibus auferendo sigillatim 4. remanent quæsitæ partes vnitatis $\frac{605}{841}$ & $\frac{2336}{841}$. vt suprà.

Animaduersione quoque dignum est, eodem prorsus artificio Numerum quemlibet ita diuidi posse in duas partes, vt vtrique adiiciendo eundem datum numerum, fiat quadratus, dummodo duplum addititi numeri adsumens numerum diuidendum, faciat quadratum, vel numerum è duobus quadratis compositum. Verbi gratia. Sit diuidendus 2. in duas partes, vt vtrique adiiciendo 4. fiat quadratus. Patet numerum 10. diuidendum esse in duos quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 4. sumo ergo semissem de 10. puta 5. & quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, ponatur $\frac{1}{1Q}$ ergo $5 + \frac{1}{1Q}$ æquatur quadrato, & omnia per $1\,Q.$ multiplicando, fit $5\,Q. + 1.$ æquandus quadrato. Esto latus illius $1 + 2\,N.$ fit $1\,N. 4.$ est ergo pars quadrati $\frac{1}{16}$ qua addita ad 5. fit quadratus $\frac{81}{64}$ cuius latus $\frac{9}{8}$. Diuidendus ergo est 10. in duos quadratos, quorum latera proximè accedunt ad $\frac{9}{8}$. Diuiditur autem 10. suaptè natura in quadratos, quorum latera sunt 1. & 3. Quare imitando artificium Diophanti fingemus latera quæsitorum quadratorum $1 + 5\,N.$ & $3 - 3\,N.$ fiet summa quadratorum $10 + 34\,Q. - 8\,N.$ æqualis 10. & fiet $1\,N. \frac{4}{17}$. Sunt igitur quadratorum latera $\frac{37}{17}$. & $\frac{59}{17}$. ipsi quadrati $\frac{1369}{289}$. & $\frac{3481}{289}$. à quibus si auferas 4. sigillatim, restant quæsitæ binarij partes $\frac{213}{289}$ & $\frac{565}{289}$.

Denique, non dissimulandum eadem arte solui quæstionem quam tradidit Vieta Zetetico 5. lib. quarti nimirum.

Datum numerum ex duobus quadratis compositum, rursus diuidere in duos quadratos, quorum alter consistat intra limites præstitutos.

Sit diuidendus 5. in duos quadratos, quorum alter sit maior quàm 1. minor quàm 2. sumo medium in arithmetica medietate inter 1. & 2. puta $1\frac{1}{2}$. & quæro quæ pars quadrati illi addita, quadratum faciat, inuenietur modo suprà tradito $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{25}{16}$. cuius latus $\frac{5}{4}$. Ita ergo fingendum erit latus præfiniti quadrati vt accedat ad $\frac{5}{4}$. Quoniam verò volumus ita diuidere 5. in duos quadratos, vt alter proximà accedat ad $1\frac{1}{2}$. & detracto $1\frac{1}{2}$. ab ipso 5. supereft $3\frac{1}{2}$. euidens est alterum quadratum accedere debere ad $3\frac{1}{2}$. Rursus ergo quæro quæ pars quadrati ad $3\frac{1}{2}$. addita, faciat quadratum, ea inuenietur modo tradito $\frac{1}{64}$. fitque quadratus $\frac{225}{64}$. à latere $\frac{15}{8}$. Itaque diuidendus est 5. in duos quadratos ita vt huius latus adæquetur $\frac{5}{4}$. seu $\frac{10}{8}$. alterius verò $\frac{15}{8}$. Sunt autem latera quadratorum ex quibus 5. suapte natura componitur 1. & 2. Quare cùm vnitati desint $\frac{1}{2}$. quominus æquet $\frac{15}{8}$. & binarius supereft $\frac{19}{8}$. interuallo $\frac{5}{8}$. fingo quadratorum latera $1 + 7\,N.$ & $2 - 6\,N.$ estque quadratorum summa $5 + 85\,Q. - 10\,N.$ æqualis 5. & fit $1\,N. \frac{2}{17}$. suntque latera quadratorum $\frac{31}{17}$. & $\frac{22}{17}$. ipsi quadrati $\frac{961}{289}$. & $\frac{484}{289}$. quorum summa 5. & alter puta $\frac{434}{289}$. maior est vnitate, minor binario vt postulabatur.

Rursus diuidendus esto 20. in duos quadratos quorum alter maior sit quàm 6. minor quàm 10. sumo medium arithmeticè inter 6. & 10. puta 8. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{36}$. fitque quadratus $\frac{289}{36}$. à latere $\frac{17}{6}$. Quia verò detrahendo 8. ab ipso 20. supereft 12. Quæro rursus partem quadrati quæ ad 12. addita, faciat quadratum, ea est $\frac{1}{4}$. fitque quadratus $\frac{49}{4}$ cuius latus $\frac{7}{2}$. Itaque diuidendus est 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{17}{6}$. alterius verò latus adæquetur $\frac{7}{2}$. seu $\frac{21}{6}$. Componitur autem 20. ex duobus quadratis suaptè natura, quorum latera

2. & 4. Quare cùm ipſi 2. deſint $\frac{2}{6}$. quominus æquet $\frac{24}{6}$ & ipſe 4. ſuperet $\frac{17}{6}$. interuallo $\frac{7}{6}$. fingo quadratorum latera 2. + 9. N. & 4 − 7 N. eſtque ſumma quadratorum 20 + 130 Q. − 20 N. æqualis 20. & fit 1 N. $\frac{2}{13}$. ſunt igitur quadratorum latera $\frac{44}{13}$. & $\frac{38}{13}$. ipſi quadrati $\frac{1936}{169}$. & $\frac{1444}{169}$. quorum ſumma 20. & alter, puta $\frac{1444}{169}$. maior eſt quàm $\frac{1014}{169}$ ſeu quàm 6. & minor quàm $\frac{1690}{169}$. ſeu quàm 10. vt poſtulabatur. Soluit hoc problema Franciſcus Vieta loco citato, alia methodo, ſibique peculiari: ſed cùm ea, non ſit iſta melior, immò ſit longè difficilior, non eſt cur eam explicandi laborem aſſumamus.

QVÆSTIO XIII.

D A G B E

1 1 1

δ α γ β ε

1 1 1

VNITATEM ſecare, & adiicere vtrique ſegmento alium atque aliũ datum numerum, itáque quadratum conficere. Imperatum ſit vt vnitas ſecetur, & adiiciatur alteri ſegmento 2. alteri 6. vt fiat vtrimque quadratus. Exponatur vnitas A B. & ſecetur in G. & ipſi A G. adjiciatur binarius A D. At ipſi G B. addatur ſenarius B E. vterque igitur ipſorum G D. G E. eſt quadratus. Et quia A B. eſt vnitas. At ſumma duorum A D. B E. eſt 8. Totus vtique D E erit 9. Et hunc oportet diuidere in duos quadratos, nempè in ipſos G D. G E. Sed quoniam quadratorum alter maior eſt binario A D. & minor ternario D B. eo res rediit vt datum quadratum 9. diuidam in duos quadratos nempè ipſos G D. G E. vt alter ipſorum G D. cadat medius inter binarium, & ternarium. Nam inuento ipſo G D. cùm A D. binarius ſit, dabitur etiam reliquus A G. Eſt autem A B. vnitas. Quamobrem & reliquus B G. datus erit, ſed & dabitur G. in quo ſecanda eſt vnitas. Iam deſcriptionis ductum ſic exequamur. Eſto alter quadratorum, is qui inter 2. & 3. cadere debet 1 Q. alter ergo erit 9. − 1 Q. æquandus quadrato. Et quidem hunc æquare quadrato. facile eſt, ſed oportet talem inueniri 1 Q. vt cadat inter 2. & 3. Sumamus duos quadratos, alterum maiorem quàm 2. alterum minorem quàm 3. ſunt autem $\frac{289}{144}$. & $\frac{361}{144}$. Iam ſi 1 Q. ita adornemus vt inter hos duos quadratos incidat, ſoluemus quæſtionem. Oportebit ergo Latus etiam 1 Q. hoc eſt 1 N. maius eſſe quam $\frac{17}{12}$. minus verò quàm $\frac{19}{12}$. Oportet igitur 9 − 1 Q. æquantes quadrato, inuenire 1 N. maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Quod ſi 9 − 1 Q. æqualem quadrato ſtatuamus, fingemus qua-

ΜΟΝΑΔΑ τμεῖν ἡ θεοσθεῖναι ἑκατέρῳ τῷ τμημάτων ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ὑπο-τετάχθω δὴ μονάδα τμεῖν καὶ θεοσθεῖναι ᾧ μὲν μ° β̄. ᾧ δὲ μ° ε̄. ἡ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἐκκείσθω μονὰς ἡ α β̄. ἡ τετμήσθω ἡ τὸ γ̄. ἡ τῷ μὲν α γ̄. θεοκείσθω δυὰς ἡ α δ̄. τὰ ἄρα γ β̄. ἕξας ἡ β ε̄. ἑκάτερον ἄρα τῶν γ δ̄. γ ε̄. ὅστι τετράγωνος. ἡ ἐπὶ ὁ μὲν α β̄. ἔστι μονὰς ἄ. συναμφότερον ἄρα ὁ α δ̄. β ε̄. ὀκτάς. ὅλος ἄρα ὁ δ ε̄. γίνεται μ° ῡ. ἡ ταύτας δεῖ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τὰς Γδ̄. γ ε̄. ἀλλὰ ἐπεὶ εἷς τῶν τετραγώνων. τὸ μὲν α δ̄. ἔστι μείζων τουτέστι δυάδος. τὸ δὲ β δ̄. ἔστιν ἐλάσσων τουτέστι τριάδος. ἀπῆκταί μοι εἰς τὸν ὑποτεθέντα τετράγωνον, οἱονεὶ ϛ θ̄. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τὰς Γδ̄. γ ε̄ ὥστε ἕνα τὸν Γδ̄. εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῆστε δυάδος καὶ τῆς τριάδος. ὑπερθέντος γὰρ τοῦ Γδ̄. δοθεὶς ὢν ὁ α δ̄. ὅστι δυάς. λοιπὸς ἄρα ὁ α γ̄. δοθείς. ἔστι δὲ ὁ α β̄. μονὰς ᾱ. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ β γ̄. ἔστι δοθείς. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ γ̄. καθ' ὃ τέμνεται ἡ μονὰς, ἡ δὲ ἀγωγὴ ὑπογραφῆς. ἔστω γὰρ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων μεταξύ τε δυάδος, καὶ τῆς τριάδος δύναμις ᾱ. ὁ ἄρα λοιπὸς ἔσται μονάδες ϝ̄. λείψει δυνάμεως ᾱ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πιεῖν ῥᾴδιόν ὅστι, δεῖ δὲ δυρεῖν τὴν δύναμιν μεταξὺ τοῦτε β̄. καὶ τοῦ Γ̄. λαμβάνομεν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν μείζονα τοῦ β̄. τὸν δὲ ἕτερον ἐλάσσονα τοῦ Γ̄. εἰσὶ δὲ τὰ σπϝ ϙμϑ. καὶ τξᾱ ϙμϑ. ἐὰν οὖν τὴν δύναμιν καταστήσωμεν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν θεωρημένων δύο τετραγώνων. λύσομεν τὸ ζητούμενον. δεῖ οὖν τὴν πλευρὰν δ ᾱ. τουτέστιν ς ᾱ. μείζονα μὲν ἢ ιζ ις̄. ἐλάσσονα δὲ ἢ ιϑ ις̄. ὥστε δεῖ ζητῆσαι μ° ϝ γ δ ᾱ. ἴσον τετραγώνῳ, δυρεῖν τὸν ς̄ μείζονα μὲν μ° ιζ ις̄. ἐλάσσονα δὲ ἢ ιϑ ις̄. ἐὰν δὲ μ° θ̄ γ δ ᾱ.

ποιῶμεν ἴσας τετραγώνῳ. πλάσομεν τὴν τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ μ̊ γ̄ λείψει ς̄ς̄ πινῶν, καὶ διῄσομεν τὸν ς̄ εἰδέναι ἐκ τίνος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου καὶ μειζομένου εἰς τὸν μονάδι μιᾷ μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ διρεῖν πινα ἀριθμὸν ὃς ἑξάκις γενόμενος, καὶ προσβληθεὶς εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, ποιῇ τὸν προσβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν ῑζ̄ ῑς̄. ἐλάσσονα δὲ ιθ̄ ῑς̄. ἔστω ὁ ζητούμενος ς̄ α̅. θέλω ἄρα ς̄ς̄ς̄ ς̄. προσβληθέντας εἰς δ̄ α̅ μ. α̅. ποιεῖν τὴν προσβολὴν μείζονα μὲν ῑζ̄ ῑς̄. ἐλάσσονα δὲ ιθ̄ ῑς̄. ἀλλὰ καὶ ὁ ῑζ̄. προσβληθεὶς προσβαλὲ τὸν β̄. τὴν προσβολὴν ποιεῖ ῑζ̄ ῑς̄. ὥστε δεῖ ς̄ς̄ς̄ ς̄ προσὸς δ̄ α̅ μ̊ α̅. μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ῑζ̄ πρὸς ιβ̄. τὸ ἄρα ὑπὸ ς̄ς̄ ς̄. καὶ μ̊ ιβ̄. τουτέστι ς̄ς̄ οβ̄. ὀφείλει μείζον εἶναι τοῦ ὑπὸ δυνάμεως α̅ μ̊ α̅. καὶ ῑζ̄. τουτέστι δυνάμεων ῑζ̄. μ̊ ῑζ̄. τῶν ς̄ς̄ τοῦ ἡμίσεως ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται ασιδ̄ς̄. ἄφελε τὰς δυνάμεις ἀπὸ τὰς μονάδας τουτέστι σπδ̄. λοιπὸν ἄρα αζ̄. τούτων πλευρὰ οὐ μείζον λα̅. πρόσθες τὸ ἥμισυ τῶν ς̄ς̄ γίνεται οὐ μείζων ξζ̄. προσβάλε προσβὲ τὸ πλῆθος τῶν δυνάμεων, γίνεται ὁ ς̄ ὁ ξζ̄ ῑζ̄. καὶ ὁμοίως ἐπεὶ δεῖσθαι ς̄ς̄ς̄ ς̄. πρὸς δ̄ α̅ μ̊ α̅. ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ιθ̄ πρὸς ιβ̄. διῄσομεν τὸν ς̄ ἐπ ἐλάσσονα ξς̄ ῑθ̄. ἀλλὰ καὶ οὐ μείζονα ξζ̄ ῑζ̄. ἔστω μ̊ γ̄. α̅ ς̄. πλάσω οὖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ μ̊ γ̄ λείψει ς̄ς̄ γ̄. α̅ ς̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ ιβ̄. α̅ δ̄. μ̊ θ̄ ϛ ς̄ς̄ κα̅. ταῦτα ἴσα μ̊ θ̄ ϛ δ̄ α̅. ὅθεν ὁ ς̄ πδ̄ ν̄ς̄. ἡ δὲ δύναμις ζ̄ς̄ θ̄ ς̄. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν τὴν δυάδα. ἔσαι ἐν τιμῆμα τῆς μονάδος αυλη ,ςωθ̄. ὥστε τὸ ἕτερον ἔσαι ,ατοα ,ς̄ωθ̄. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

drati latus à 3. cum defectu aliquot numerorum, & inueniemus 1 N. fieri ex aliquo numero sexies sumpto, & diuiso per quadratum ipsius vnitate auctum. Eo itaque sum redactus vt inueniam aliquem numerum, qui sexies sumptus, & diuisus per quadratum ipsius vnitate auctum quotientem faciat maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Esto qui quæritur 1 N. Volo ergo vt 6 N. diuisi per 1 Q. + 1. quotientem faciant maiorem quàm $\frac{17}{12}$. minorem quàm $\frac{19}{12}$. Sed & 17. diuisus per 12. quotientem facit $\frac{17}{12}$. Oportet itaque 6 N. ad 1 Q. + 1. maiorem habere rationem quàm quæ est 17. ad 12. productus ergo ex 6 N. in 12. hoc est 72 N. maior esse debet producto ex 1 Q. + 1. in 17. hoc est 17 Q. + 17. Numerorum semissis in se ducatur, fit 1296. aufer productum ex quadratis in vnitates, hoc est 289. relinquitur 1007. huius latus non maius 31. adde dimidium numerorum, fit non maius 67. diuide per multitudinem quadratorum fit 1 N. $\frac{67}{19}$. Similiter quandoquidem oportet 6 N. ad 1 Q. + 1. minorem rationem habere quàm quæ est 19. ad 12. Inueniemus 1 N. non minorem $\frac{66}{19}$. sed & non maior inuentus est $\frac{67}{19}$. esto igitur $3\frac{1}{2}$. formo ergo quadratum à latere $3 - 3\frac{1}{2}$. N. & fit $12\frac{1}{4}$. Q + 9 − 21 N. Hæc æquantur 9 − 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{84}{53}$. Quadratus verò $\frac{7056}{2809}$. & si hinc auferamus binarium, erit alterum segmentum vnitatis $\frac{1428}{2809}$. alterum $\frac{1377}{2809}$. Et postulatis satisfit.

IN QVAESTIONEM XIII.

SATIS accuratè quæstionem hanc explicauit Xilander, multa tamen prætermisit notatu digna, quæ vt sigillatim persequamur. Aduerte primò necessariam à Diophanto hîc omissam esse conditionem. Certum est enim numerum 9 − 1 Q æquari non potuisse quadrato, nisi 9. quadratus fuisset. Quare cùm 9. factus sit addita vnitate ad 8. summam adiiciendorum numerorum 2. & 6. euidens est huiusmodi conditionem præscribi debere. *Oportet autem summam adiiciendorum numerorum conficere quadratum vnitate auctam.* Moneo tamen sic esse concipiendam conditionem, si non aliter quàm per operationem Diophanti soluenda sit quæstio. Cùm enim, vt infrà commonstrabimus, quæstio æquè bene solui possit, dum summa numerorum additiorum vnitate aucta conficiat numerum ex duobus quadratis compositum, poterit vniuersalius proponi conditio, nimirum sic. *Oportet autem summam adiiciendorum numerorum vnitate auctam conficere quadratum, vel numerum ex duobus quadratis compositum.*

Aduerte secundò in codice manu exarato deesse diagramma descriptionis Diophantææ quod nos restituimus, cùm absque illo non possint intelligi Græca authoris verba. Cæterùm absque huiusmodi descriptione res facilius & breuius explicari potest, hoc modo. Cùm ad 2. addendo partem vnitatis debeat fieri quadratus, & ad 6. addendo residuum vnitatis conficiendus sit aliter quadratus, patet

ſummam quadratorum fore 9. Quare 9. diuidendus eſt in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. alter 6. & 7. conſiſtat. Vnde duplici via peruenire poteſt ad æquationem. Sicut enim Diophantus, eum qui inter 2. & 3. cadere debet, poſuit 1 Q. alterum 9 − Q. ſic ille qui inter 6. & 7. conſiſtere debet poni poteſt 1 Q. alter 9 − 1 Q. & ſimilis prorſus erit operatio. Certùm eſt autem hiſce quadratis inuentis ſolui quæſtionem, nam ſi ab altero auferatur 2. ab altero 6. remanebunt quæſitæ partes vnitatis.

Aduerte tertiò vt inueniat Diophantus quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. rectè ſumere duos quadratos qui cadant inter 2. & 3. quales ſunt $\frac{289}{144}$ & $\frac{361}{144}$. ſi enim curemus vt 1 Q. cadat inter hoſce duos quadratos, euidens eſt eum fore maiorem quàm 2. minorem quàm 3. eſt autem facile duos quadratos reperire qui cadant inter 2. & 3. id enim fiet, ſi ſumatur quilibet quadratus, inter cuius duplum & triplum cadant duo quadrati. Vt ſi ſumas 36. cuius duplum 72. triplum 108. cùm inter 72. & 108. cadant duo quadrati 81. & 100. his ſubſcribendo denominatorem 36. fient quadrati quæſiti $\frac{81}{36}$. & $\frac{100}{36}$. Quare ſi per hos ſoluere velis quæſtionem curandum erit, vt valor Numeri cadat inter $\frac{9}{6}$ & $\frac{10}{6}$.

Denique aduerte vt fiat valor Numeri maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Diophantum vti artificio quo iam ſæpè in ſimili vſus eſt. Quia enim 9 − 1 Q. quadrato æquandus eſt, fiet valor Numeri, fingendo latus 3 − aliquot numeris, quorum ſextuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quærendus ergo Numerus cuius ſextuplo per quadratum ipſius numeri diuiſo fiat quotiens maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Poſito ergo huiuſmodi numero 1 N. fiet $\frac{6\,N}{1Q\,+\,1}$ maior quàm $\frac{17}{12}$. minor quàm $\frac{19}{12}$. & omnia per denominatores 1 Q. + 1. & 12. multiplicando, fient 72 N. maiores quàm 17 Q. + 17. minores quàm 19. Proinde vtraque æquatione per approximationem reſoluta, fiet 1 N. maior quàm $\frac{65}{17}$ minor quàm $\frac{67}{17}$. Quare ſumetur numerus aliquis intermedius, puta 3 $\frac{1}{2}$ & fingetur numeri 9 − 1 Q. latus 3 − 3 $\frac{1}{2}$ N. & cætera ſunt manifeſta.

Porro Diophanti operatio eatenus locum habet, quatenus adiiciendorum numerorum ſumma vnitate aucta quadratum facit. Sed ſi huiuſmodi ſumma vnitate aucta, conficiat numerum ex duobus quadratis compoſitum, aliter operandum erit, imitando ſcilicet artificium eius quam ad præcedentem attulimus ex Vieta. Verbi gratia. Diuidenda ſit vnitas in duas partes, vt alteri addendo 2. alteri 7. fiat vtrimque quadratus. Euidens eſt numerum 10. diuidendum eſſe in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. Alter verò inter 7. & 8. Cùm ergo addendo ſemiſſem vnitatis vtrique datorum numerorum fiant 2 $\frac{1}{2}$. & 7 $\frac{1}{2}$. Quærendi ſunt quadrati qui ad hos numeros accedant. Quæro ergo quæ pars quadrati addita ad 2 $\frac{1}{2}$. faciat quadratum, ea reperietur $\frac{1}{144}$ fitque quadratus $\frac{361}{144}$ cuius latus $\frac{19}{12}$. Rurſus quæro quæ pars quadrati ad 7 $\frac{1}{2}$ adiecta, faciat quadratum, ea reperitur $\frac{1}{17}$. & fit quadratus $\frac{121}{16}$ à latere $\frac{11}{4}$. Quamobrem 10, diuidendus eſt in duos quadratos, ita vt latus vnius accedat ad $\frac{19}{12}$. Alterius vero ad $\frac{11}{4}$ ſeu ad $\frac{33}{12}$. Statuentur ergo per ad æqualitatem quadratorum latera 1 + 7 N. & 3 − 3 N. fietque ſumma quadratorum 10 + 58 Q. − 4 N. æqualis 10. vnde fiet 1 N. $\frac{2}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{13}{29}$ & $\frac{81}{29}$. ipſi quadrati $\frac{1349}{841}$. & $\frac{6561}{841}$. quorum ſumma 10. & ſi à primo auferas 2. à ſecundo 7. reſtant quæſitæ partes vnitatis $\frac{167}{841}$ & $\frac{674}{841}$.

Hæc autem quæſtio extendetur quoque ad quemlibet numerum, & ſic vniuerſalius proponetur:

Datum numerum diuidere in duas partes, vt vtrique addendo alterum atque alterum numerum, fiat vtrimque quadratus. Oportet autem compoſitum ex diuidendo numero, & vtroque adiiciendorum, quadratum eſſe, vel compoſitum ex duobus quadratis.

Diuidendus eſto 6. adiiciendi verò 3. & 7. Cùm ergo horum trium ſumma ſit 16. oportet diuidere 16. in duos quadratos, quorum alter ſit maior quàm 3. minor quàm 9. Alter verò ſit maior quàm 7. minor quàm 13. Ponatur primus 1 Q. erit alter 16. − 1 Q. cuius latus ita fingendum eſt, vt 1 Q. cadat inter 3. & 9. ſumantur duo quadrati cadentes inter 3. & 9. puta 4. & $\frac{64}{9}$. quorum latera 2. & $\frac{8}{3}$. Oportet igitur fictitium latus ita ponere, vt 1 N. ſit maior quàm 2. minor quàm $\frac{8}{3}$. Porro fiet valor Numeri ponendo fictitium latus 4 − aliquot numeris, quorum octuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quamobrem $\frac{8\,N}{1Q\,+\,1}$ maior eſt quàm 2. minor quàm $\frac{8}{3}$. & tandem 8 N. maior eſt quàm 2 Q. + 2. & 24. N. minor eſt quàm 8 Q. + 8. & vtraque æquatione per approximationem reſoluta ſit 1 N. maior quàm $\frac{21}{8}$ minor quàm $\frac{3}{8}$. Ponatur 3. & numeri 16 − 1 Q. latus ſtatuatur 4 − 3 N. fiet 1 N. $\frac{12}{3}$. erunt igitur latera quadratorum $\frac{12}{5}$ & $\frac{16}{5}$. ipſi quadrati $\frac{144}{25}$ & $\frac{256}{25}$ & à primo auferendo 3. à ſecundo 7. remanent quæſitæ ſenarij partes $\frac{69}{25}$. & $\frac{81}{25}$.

Rurſus numerus 8. diuidendus ſit in duas partes, vt alteri addendo 5. alteri 7. fiat vtrumque quadratus. Cùm ergo ipſorum 8. 5. 7. ſumma ſit 20. oportet diuidere 20. in duos quadratos quorum alter cadat inter 5. & 13. alter conſiſtat inter 7. & 15. ſumo medium arithmeticè inter vtrumque terminum, puta 9. & 11. & quæro quæ pars quadrati ad vtrumque addita faciat quadratum; inuenio hinc $\frac{49}{14}$. inde $\frac{1}{5}$. fiuntque quadrati $\frac{625}{64}$ & $\frac{100}{9}$ quorum latera in eadem denominatione ſunt $\frac{75}{27}$. & $\frac{80}{24}$. Diuidendus ergo mihi eſt 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{75}{24}$. Alterius latus ſit proxi-

mum $\frac{80}{24}$. erunt ergo per ad æqualitatẽ huiuſmodi latera 2 + 27 N. & 4 − 16 N. eſtque ſumma quadratorum 20 + 985 Q. − 20 N. vnde fit 1 N. $\frac{4}{197}$. & ſunt quadratorum latera $\frac{502}{197}$ & $\frac{724}{197}$ ipſi quadrati $\frac{252004}{38809}$ & $\frac{524176}{38809}$. Quod ſi à priore auferas 5. à poſteriore 7. remanent quæſitæ partes octonarij, $\frac{57952}{38809}$ & $\frac{252513}{38809}$.

QVÆSTIO XIV.

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς ξεῖς ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν τὸν αὐτὸν δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν, μήτε δυάδα εἶναι, μήτε τινα τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκις συναυξανομένων. ὑπερτεθήτω δὴ τῷ μονάδα διελεῖν εἰς ξεῖς ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ μ° γ̃. καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. πάλιν δεῖ τὸν ι̃. διελεῖν εἰς ξεῖς τετράγωνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μ° γ̃. ἐὰν οὖν πάλιν τὸν ι̃. διέλωμεν εἰς ξεῖς τετραγώνους. τῇ τῆς παρισότητος ἀγωγῇ. ἔσαι ἕκαστος αὐτῶν μείζων τριάδος. καὶ δυνησόμεθα ἀφ' ἑκάστου αὐτῶν ἀφελόντες μ° Γ̃. ἔχειν εἰς οὓς ἡ μονὰς διαιρεῖται. λαμβάνομεν ἄρτι τὸ ι̃. τὸ τρίτον, γίνεται Γ̃. ᾱ γ̃ ᾱ. καὶ ζητοῦμεν τὶ προσθέντες μόριον τετραγωνικὸν ταῖς μονάσι γ̃. ᾱ γ̃ ᾱ. ποιήσομεν τετράγωνον πάντα ἐννάκις, καὶ δεῖ τῷ λ̃. προσθεῖναι τὶ μόριον τετραγωνικὸν, καὶ ποιεῖν τὸν ὅλον τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον α̃ δυ. ᾱ α̃. καὶ πάντα ὑπὸ δύναμιν γίνου· δυ λ̃. μ° ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ις̃ ε̃. μ° α̃ γίνεται ὁ τετράγωνος δυ. κε̃. ς° ι̃. ἴσος δυ λ̃. μ° α̃. ὅθεν ὁ ς° μ° β̃. ἡ δύναμις μ° δ̃. τὸ δὲ συναμφοτέρου μ° ᾱ δ̃ α̃. εἰ ἓν ταῖς μ° λ̃. προσίδεται μ° ᾱ δ̃ α̃. ταῖς μονάσι γ̃. ᾱ γ̃ ᾱ. προστεθήσεται α̃ λς̃ α̃. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος ρκα̃ λς̃ α̃. δεῖ οὖν τὸν ι̃. διελεῖν εἰς ξεῖς τετραγώνους ὅπως ἑκάστου τετραγώνου ἡ πλευρὰ πάρισος ᾖ μ° ια̃ ς̃ α̃. ἀλλὰ καὶ ὁ ι̃. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων τῶν Θ̃. καὶ τῆς μονάδος. διαιρῶμεν οὖν τὴν μονάδα εἰς δύο τετραγώνους τὰ τε Θ̃ κε̃ α̃. καὶ τὰ ις̃ κε̃ α̃. ὥστε τὸν ι̃. συγκεῖσθαι ἐκ τεσσάρων τετραγώνων. ἔκτε τῶν Θ̃. καὶ τῶν ις̃ κε̃ α̃. δεῖ οὖν ἑκάστῳ τῶν πλευρῶν τούτων προσθεῖναι πάρισον ια̃ ς̃ α̃. ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἰσι μ° γ̃. καὶ μ° δ̃ ε̃ α̃. καὶ μ° γ̃ ε̃ α̃. καὶ πάντα τετρακοντάκις. καὶ γίνονται μ° ζ̃ α̃. καὶ μ° κδ̃. καὶ μ° ιη̃. ἃ ἴσα ια̃ ς̃ α̃. γίνονται μ° νε̃ α̃. δεῖ οὖν ἑκάστῳ πλευρὰν καταπεσθάσαι νε̃. πλάσομεν ἑνὸς πλευρὰν μ° γ̃. ῾ ςς̃ λε̃. ἑτέρᾳ ᾗ ξς̃ λζ̃ μ° γ̃ ε̃ α̃. γίνονται οἱ ἀπὸ τῶν εἰρημένων τετράγωνοι. δυ γφνε̃ μ° ι̃ λείψει ςς̃ ρις̃. ταῦτα ἴσα μονάσι ι̃. ὅθεν δύρισται ὁ ς° ρις̃ γφνε̃ α̃. ὅπου τοὺς ὑποστάσεις, καὶ γίνονται αἱ πλευραὶ

VNITATEM diuidere in tres numeros, & cuilibet addere datum eundem numerum, & ita quemlibet quadratum facere. Oportet autem datum neque binarium eſſe, neque aliquem eorum qui fit addito binario ad octonarij multiplicem. Imperatum ſit vt vnitas diuidatur in tres numeros, & cuilibet addatur 3. & ſic fiat quadratus. Rurſus oportet diuidere 10. in tres quadratos, vt quilibet ipſorum ſit maior quàm 3. Si ergo iterum diuidamus 10. in tres quadratos adæqualitatis ductu, erit quilibet ipſorum maior ternario, & poterimus ternario à quouis detracto, eos habere in quos vnitas diuidenda eſt. Sumamus itaque trientem de 10. hoc eſt $3\frac{1}{3}$. Et quæramus quæ pars quadrata poſſit adiici ad $3\frac{1}{3}$. vt fiat quadratus. Omnia nouies. Iam ad 30. oportet partem à quadrato denominatum addi, & fieri quadratum. Eſto pars adiicienda $\frac{1}{1}$. & omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 30 Q. + 1. æqualia quadrato à latere 5 N. + 1 ſitque quadratus 25 Q. + 10 N + 1. æqualis 30 Q. + 1. vnde fit 1 N. 2. & 1 Q. 4. Parſque quadratica $\frac{1}{4}$. Si ergo ad 30. adiicimus $\frac{1}{4}$. ad $3\frac{1}{3}$. addemus $\frac{1}{36}$. & fit quadratus $\frac{121}{36}$. Oportet igitur diuidere 10. in tres quadratos, vt vniuſcuiuſque quadrati latus ſit adæquale vnitatibus $\frac{11}{6}$. Atqui 10. componitur ex duobus quadratis 9. & 1. Diuidimus ergo 1. in duos quadratos $\frac{9}{25}$. & $\frac{16}{25}$. ita vt 10. conſtet ex tribus quadratis 9. $\frac{16}{25}$. & $\frac{9}{25}$. Oportet igitur horum cuiuſuis lateri adæqualem facere $\frac{11}{6}$. Sed & latera eorum ſunt 3. $\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. & omnia per 30. multiplicentur. Et fiunt 90. 24. & 18. Ipſe verò $\frac{11}{6}$. fit 55. Oportet itaque vnum quodque latus adæquare ipſi 55. fingamus vnius latus 3 − 35 N. alterius autem 31 N. + $\frac{4}{5}$. Alterius denique 37 N. + $\frac{3}{5}$. fiunt ab his quadrati in vnam ſummam redacti 3555 Q. + 10. − 1155 N. N. hæc æquantur 10. vnde inuenitur 1 N. $\frac{1156}{3555}$. Ad poſitiones. Et fiunt la-

tera quadratorum data, ipsique etiam dantur, & reliqua sunt manifesta.

τῶν τετραγώνων δοθεῖσαι, ὥστε καὶ αὐτοὶ, τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μήτε δυάδα εἶναι, μήτε πνα τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκι πολλαπλασιασμένων, perperam vertit Xilander & ex eius versione commodum aliquem sensum recipere nequeunt. Itaque cùm eorum vim non perciperet, nihil super huiusmodi limitatione adnotauit. Certum est autem, vt quæstio solui possit oportere vt triplum dati numeri vnitate auctum sit quadratus, vel ex duobus, aut ex tribus etiam quadratis suapte natura compositis. Quare vt Diophanti limitatio sit necessaria, ostendendum est numeros 2. 10. 18. 26. 34. 42. & alios omnes qui fiunt addendo 2. ad aliquem octonarij multiplicem tales esse, vt eorum triplum vnitate auctum non possit esse quadratus, neque numerus ex duobus aut tribus quadratis compositus. Et de binario quidem, manifestum est eius triplum vnitate auctum puta 7. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum. De aliis autem sic demonstrabitur.

Esto A. quilibet octonarij multiplex, cui addito binario fiat B. & sumatur C H triplum ipsius B. cui addita vnitate H K. fiat C K. dico C K nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum: Quia enim B. continet A & binarium, & C H triplus est ad B, patet C H continere triplum ipsius A, & triplum binarij, puta senarium. Sit ergo C F triplum ipsius A, erit reliquus F H senarius, in quo sumendo binarium G H, relinquetur quaternarius F G.

A 16. B 18.
C———————F....G..H.K

Primum itaque C K non esse quadratum, sic probatur. Quoniam A est multiplex octonarij, [1] est A par, addito binario fit rursus B par. Quamobrem & C H multiplex ad B. par est, ac proinde C K est impar ex definitione. Si ergo C K. ponatur quadratus, ablata vnitate, [2] reliquus C H. erit pariter par. [3] Quare quaternarius eum metietur. Sed idem quaternarius metitur C F multiplicem octonarij, ergo idem quaternarius metietur reliquum F H. sed & quaternarius metietur seipsum, puta F G. ergo idem quaternarius metietur reliquam binarium G H. Quod est impossibile. Quare C K non est quadratus.

[1] 21. noni.
[2] 21. 1. poris.
[3] 16. 1. poris.

Deinde C K. non componi ex duobus quadratis sic ostendo. Etenim si componatur ex duobus quadratis, non erit vterque par, nec vterque impar, alioquin ipse C K. esset par, contrà id quod ostensum est. Necesse est ergo alterum quadratorum parem esse, alterum imparem. [4] At quadratus par est pariter par [5] & à quadrato impare auferendo vnitatem, relinquitur pariter par. Igitur à numero C K. auferendo vnitatem, reliquus C H. componitur ex duobus pariter paribus, [6] ac proinde C H. est pariter par. Quare vt prius sequitur quaternarium metiri binarium. Quod est absurdum. Igitur C K. non componitur ex duobus quadratis.

[4] 20. 1. poris.
[5] 21. 1. poris.
[6] 16. 1. poris.

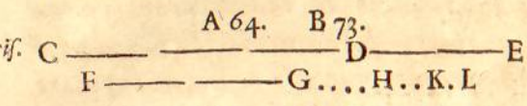
Denique si C K. ponatur componi ex tribus quadratis; non erit quilibet illorum par; nec erunt duo impares & tertius par; sic enim fieret ex illis compositus C K. par, contra id quod ostensum est. Relinquitur ergo tres illos quadratos vel impares esse omnes; vel duos esse pares & tertium imparem. Atqui neutrum possibile est. Nam primò si ponantur duo pares & tertius impar, si à tertio auferatur vnitas, [7] relinquetur pariter par, quo addito aliis duobus quadratis itidem pariter paribus [8] fiet totus C H. pariter par. Quare rursus inferetur quaternarium metiri binarium. Quod est impossibile. Deinde si quilibet trium quadratorum ex quibus C K. componi dicitur, ponatur impar cùm à quolibet ipsorum detracta vnitate relinquatur multiplex octonarij, vt ostensum est ad quadragesimam quartam quarti, & euidentius demonstrabitur ad octauam de numeris multangulis: patet si à composito ex tribus, nempè à toto C K, auferatur ternarius G K, residuum C G, multiplicem esse octonarij: sed & C F. multiplex est octonarij ex constructione. Igitur octonarius metiens totum C G. & ablatum C F, metietur & reliquum quaternarium F G. Quod est impossibile. Non erit ergo C K. quadratus, nec compositus è duobus vel tribus quadratis. Quod demonstrandum erat.

[7] 21. 1. poris.
[8] 16. 1. poris.

Ex his liquidò apparet eum esse sensum verborum Diophanti, quem expressimus versione nostra, nam ingeniosa est, & authore digna huiusmodi limitatio. Cæterùm quamuis, vt ostensum est, hæc conditio sit necessaria, non est tamen sufficiens, nam non solùm numeri omnes hac limitatione comprehensi soluendæ quæstioni sunt inutiles, sed præterea numerus 9. & omnes alij qui fiunt addito 9. ad 32. vel ad aliquem eius multiplicem, quales sunt 41. 73. 105. &c. nam horum triplum addita vnitate, neque quadratus est, neque numerus è duobus vel tribus quadratis compositus. Et quidem de ipso 9. patet experientia, nam eius triplum vnitate auctum, puta 28. nec quadratus est, nec è duobus vel tribus quadratis compositus. De aliis autem sic demonstratur. Esto A multiplex ad 32. cui addendo 9. fiat B. cuius triplum vnitate auctum esto C E. Dico C E. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum. Quia enim B. continet A. & nouenarium, ipse C E. continet triplum ipsius A, & triplum ipsius 9. & vnitatem. Sit C D triplum ipsius A, erit ergo D E. tri-

plum nouenarij & vnitas, puta numerus 28. Quare cùm C D. multiplex pariter paris sit pariter par & ipse etiam D E, seu 28. sit pariter par erit totus C E, pariter par, [1] ac proinde metietur cum quaternarius, sit illius quadrans F L, constans ex F G. quadrante ipsius. C D, & ex G L. seu septenario quadrante ipsius D E, seu 28. in quo sumatur G H, quaternarius. H K binarius. K L vnitas. Cùm ergo C D sit multiplex ad 32. & quadrans ipsius 32. sit 8. patet F G multiplicem esse ad 8. & toties continere 8. quoties C D continet 32. Quare F G. est pariter par, & multiplex octonarij.

11. 1. *poris.*



Primum itaque C E non esse quadratum sic probatur. Si enim C E quadratus sit, eo per quadratum 4. diuiso, fiet & F L quadratus. Quare cùm F L sit impar, constans scilicet ex pari F G. & ex impari G L, ablata inde vnitate, residuum F K, erit multiplex octonarij per ostensa ad quadragesimam quartam quarti. Cùm ergo 8. metiatur totum F K, & ablatum F G, vt ostensum est, metietur & 8. reliquum senarium G K Quod est impossibile.

Deinde C E, non componi ex duobus quadratis sic ostenditur. Non potest componi ex duobus quadratis, quorum alter sit par, alter impar, alioquin C E esset impar contra id quod ostensum est.

21. 1. *poris.* Non componetur etiam ex duobus imparibus [2], nam ab vtroque auferendo vnitatem, relinquerentur duo numeri pariter pares, quorum summa esset pariter par; ac proinde totus C E, constaret ex numero pariter pari, atque ex binario [3]. Quare C E, esset pariter impar tantùm contra id quod demonstratum est. Restat ergo vt vterque quadratorum ex quibus C E componi dicitur, sit par [4], vterque ergo erit pariter par. Quare eorum quadrantes sumendo, fient duo quadrati æquales toti F L. Cùm ergo F L sit impar, necesse est alterum quadratorum ex quibus componitur, esse parem, alterum imparem, & ab impari auferendo vnitatem cùm remaneat pariter par, patet F K ex duobus pariter paribus compositum, esse pariter parem [5]. Igitur metietur quaternarius totum F K, sed & metietur pariter parem F G, & seipsum puta G H. Ergo idem quaternarius metietur reliquum binarium H K. Quod est absurdum.

11. 1. *poris.*
20. 1. *poris.*
10. 1. *poris.*

Denique C E non potest componi ex tribus quadratis. Etenim non potest componi ex tribus imparibus neque ex duobus paribus & tertio impari, alioquin ipse C E esset impar contra demonstrata. Non componetur etiam ex duobus imparibus, & tertio pari, sic enim à quadratis imparibus concipiendo auferri vnitatem, concludetur totum C E componi ex tribus numeris pariter paribus, & ex binario, [6] ac proinde C E esse pariter imparem tantùm, contra id quod ostensum est. Restat ergo C E componi ex tribus quadratis paribus, qui cùm sint pariter pares, & eorum quadrantes sint quadrati numeri, erit F L compositus ex tribus quadratis. Non erunt autem tres hi quadrati pares, neque duo impares erunt & tertius par, alioquin totus F L erit par contra demonstrata. Non erunt etiam duo pares, tertius impar, nam si à tertio impari auferatur vnitas, relinquetur totus F K compositus ex tribus pariter paribus, ac proinde pariter par. Quare vt prius inferetur quaternarium metiri binarium. Demum non erunt tres quadrati impares, nam tunc à quolibet auferendo vnitatem, relinquentur tres numeri quos sigillatim octonarius metietur per ostensa, ad quadragesimam quartam quarti ac proinde à toto F L auferendo ternarium, relinquetur F H multiplex octonarij. Cùm ergo 8. metiatur totum F H, & ablatum F G vt ostensum est, metietur idem 8. reliquum quaternarium G H. Quod est impossibile. Non est ergo C E quadratus, nec componitur è duobus vel tribus quadratis. Quod erat demonstrandum. Cæterùm an hæ duæ limitationes simul sufficientes sint, ita vt per vtramque simul excludantur omnes omnino numeri quorum triplum vnitate auctum non est quadratus, nec è duobus vel tribus quadratis compositus, non ausim temerè affirmare. Equidem vix adducor vt aliter sentiam, cùm in omnibus numeris ab vnitate vsque ad 325. id sim expertus.

10. 1. *poris.*

OBSERVATIO D. P. F.

Limitatio ipsa Bacheti est insufficiens, imo nec ipsius experientia satis fuit accurata, nam 37 numerus cadit in limitationem, non autem in regulam.

Vera limitatio sic concipi debet.

Exponantur duæ progressiones quadrati altera ab 1, *altera ob octonario, & vna alteri superponatur sic.*

1 4 16 64 256 1024 4096 *&c.*
8 32 128 512 2048 8192 32768 *&c.*

Et considerando primò terminum primum secundæ qui est 8. *oportet datum numerum non esse duplum vnitatis quia ipsi superponitur vnitas, neque superare duplo vnitatis multiplicem* 8.

Deinde

Deinde considerando secundum terminum secundæ progressionis qui est 32, sumatur duplum numeri superpositi qui est 4. fit 8. cui si addas omnes in eadem progressione superiori proxime antecedentes (in hoc exemplo inuenietur sola vnitas) fit 9. sumptis igitur duobus numeris 32 & 9. oportet datum numerum neque esse 9 neque superare dicto numero 9. multiplicem 32. consideretur mox tertius progressionis secundæ terminus qui est 128. sumatur duplum numeri superpositi qui est 16. fit 32, cui si addas omnes in eâdem progressione superiori proxime antecedentes qui iam sunt 1. & 4. fit 37. sumptis igitur duobus numeris 128. & 37 oportet datum numerum neque esse 37. neque superare dicto 37. multiplicem 128.

Considerato deinde 4. progressionis secundæ termino fient ex methodo numeri 512 & 149. oportebit itaque datum numerum neque esse 149. neque superare dicto 149. multiplicem 512. & est vniformis & perpetua in infinitum methodus quam neque Diophantus generaliter indicauit, nec Bachetus ipse detexit cuius vel ipsa experientia fallit, vt iam præmonuimus, non solum in numero 37 qui est intra limites experientiæ de quâ fidem facit, sed etiam in numero 149. & alijs.

Reliqua operatio Diophanti ex dictis ad duodecimam perspicua redditur. Inuento $\frac{11}{6}$ latere quadrati cui adæquari oportet latera quadratorum in quos numerus 10. diuidendus est, sumit latera quadratorũ ex quibus 10. suapte natura cõponitur, puta 3. $\frac{4}{5}$. & $\frac{2}{5}$. & omnia reducendo ad eandem denominationem, fiunt hæc tria latera $\frac{90}{30}$ $\frac{24}{30}$ $\frac{18}{30}$ ipse verò $\frac{11}{6}$ fit $\frac{55}{30}$. Posito ergo valore Numeri $\frac{1}{30}$. patet latera quadratorum quæsitorum ponẽda esse, vt facit Diophantus $3 - 35$ N. 31 N. $+ \frac{4}{5}$. 37 N. $+ \frac{3}{5}$. & reliqua sunt manifesta. Placuit autem παρισότητα vertere cum Xilandro ad æqualitatem. Quia enim in huiusmodi quæstionibus Diophantus, cuidam lateri adæquat proximè latera quadratorum quæsitorum, non autem æquat propriè, vocat ille hanc comparationem παρισότητα, non autem ἰσότητα. Nos etiam non æqualitatem sed adæqualitatem appellamus, sicut etiam πάρισον vertimus adæquale.

Porrò solutionem quæstionis omisit Diophantus molestiæ fractionum se subtrahens, sed talis est, fit 1 N. $\frac{116}{711}$ per quem si resoluas hypostases, fiunt quadratorum latera $\frac{1321}{711}$ $\frac{1285}{711}$ $\frac{1288}{711}$. Ipsi quadrati $\frac{1745044}{505521}$ $\frac{1651225}{505521}$. $\frac{1658944}{505521}$. à quibus si auferas sigillatim ternarium, restant quæsitæ partes vnitatis, videlicet $\frac{228478}{505521}$ $\frac{134662}{505521}$ $\frac{142581}{505521}$. Hæc autem quæstio extendetur etiam ad quemlibet numerum, sic eam proponendo.

Datum numerum secare in tres partes, & cuilibet addere eundem numerum, & facere quadratum. Oportet autem, vt numerus diuidendus adsumens triplum addititi numeri, faciat quadratum, vel numerum è duobus aut tribus quadratis compositum.

Diuidendus esto 5. addititius numerus 3. Igitur 14. diuidendus est in tres quadratos, quorum quilibet excedat 3. sumo $\frac{1}{3}$ de 14. puta $\frac{14}{3}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita, faciat quadratum ea inuenietur $\frac{1}{36}$ & fit quadratus $\frac{169}{36}$ à latere $\frac{13}{6}$. Diuidendus ergo est 14. in tres quadratos, ita vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{13}{6}$. At 14. suapte natura componitur ex tribus quadratis, quorum latera 3. 2. 1. fingentur ergo per adæqualitatem quæsitorum quadratorum latera $3 - 5$ N. $2 + 1$ N. & $1 + 7$ N. eritque summa quadratorum $14 + 75$ Q. $- 12$ N. æqualis 14. vnde fiet 1 N. $\frac{4}{25}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{55}{25}$ $\frac{54}{25}$ $\frac{53}{25}$. ipsi quadrati $\frac{3025}{625}$ $\frac{2916}{625}$ $\frac{2809}{625}$. à quibus sigillatim auferendo ternarium remanent quæsitæ quinarij partes $\frac{1150}{625}$ $\frac{1041}{625}$ $\frac{934}{625}$.

Rursus vniuersalius etiam proponetur quæstio, hoc pacto.

Datum numerum secare in quotlibet partes, vt cuilibet addendo eundem numerum, fiat quadratus.

Sit secandus 6. in quatuor partes vt cuilibet addendo 4. fiat quadratus, oportet ergo quadruplum ipsius 4. adsumpto 6. puta 22. diuidere in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat 4. Porrò 22. diuiditur in tres quadratos 9. 9. 4. quorum primus 9. excedit 4. & duorum reliquorum summa 13. excedit triplum ipsius 4. Quare supereſt vt diuidamus 13. in tres quadratos quorum quilibet excedat 4. sumo trientem de 13. puta $\frac{13}{3}$. & quæro quæ pars quadrati huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{x}{144}$. & fit quadratus $\frac{625}{144}$ cuius latus $\frac{25}{12}$. Porrò 13. diuiditur in tres quadratos quorum latera $\frac{2}{5}$. 2. $\frac{12}{5}$. Quare per adæqualitatem constituentur quæsitorum quadratorum latera $\frac{2}{5} + 17$ N. $2 + 5$ N. $\frac{12}{5} - 19$ N. & fit quadratorum summa $13 + 675$ Q. $- 10$ N. æqualis 13. vnde fit 1 N. $\frac{2}{135}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{277}{135}$ $\frac{280}{135}$ $\frac{286}{135}$. Ipsi quadrati $\frac{76729}{18225}$ $\frac{78400}{18225}$ $\frac{81796}{18225}$. quibus si addatur quartus quadratus 9. habentur quatuor quæsiti quadrati, à quibus auferendo sigillatim numerum 4. remanent quæsitæ partes senarij $\frac{3829}{18225}$ $\frac{5500}{18225}$ $\frac{8896}{18225}$. & 5. Hîc nulla conditio præscribitur, quia quilibet numerus in quatuor pluresve quadratos diuidi potest, vt abundè docuimus ad trigesimam primam quarti, vbi etiam quarundem

quæstionum explicationem in hunc locum reiecimus, quas iam enodare libet. Sit ergo propositum.

Inuenire duos quadratos, quorum summa cum summa laterum, datum faciat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum binario auctum diuidi posse in duos quadratos.

Datus esto 6.

Patet ex dictis ad trigesimam primam quarti, si ad 6. addamus duos quadrantes vnitatis, puta $\frac{1}{2}$ summam $6\frac{1}{2}$ æquari debere duobus quadratis, à quorum lateribus si auferatur figillatim $\frac{1}{2}$ restant quæsitorum quadratorum latera. Porro ad vitandas minutias ducto $6\frac{1}{2}$ in 4. fit 26. diuidendus in duos quadratos. Quia verò $6\frac{1}{2}$ ita diuidendus est in duos quadratos, vt quilibet excedat $\frac{1}{2}$. patet eius quadruplum 26. ita diuidendum in duos quadratos, vt quilibet excedat 1. id est vt quilibet sit maior quàm 1. minor quàm 25. Sumpto ergo medio inter 1. & 25. puta 13. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum ea est $\frac{4}{9}$. fitque quadratus $\frac{121}{9}$ à latere $\frac{11}{3}$. Ergo latera quadratorum adæquari debent $\frac{11}{3}$. Quare sumptis lateribus quadratorum ex quibus 26. componitur 1. & 5. fingentur per adæqualitatem quæsitorum latera $1 + 8\,N. \& 5 - 4\,N.$ fit summa quadratorum $26 + 80\,Q. - 24\,N.$ æqualis 26. vnde fit $1\,N. \frac{1}{10}$. sunt igitur latera quadratorum $\frac{19}{5}$. $\frac{17}{5}$. Quorum semisses puta $\frac{19}{10}$ $\frac{17}{10}$ sunt latera quadratorum ex quibus $6\frac{1}{2}$ componitur. Quamobrem à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$ remanent quæsitorum quadratorum latera $\frac{7}{5}$ $\frac{6}{5}$. nam horum summa cum summa quadratorum conficit 6.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres quadratos, quorum summa cum summa laterum, datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario, diuidi posse in tres quadratos.

Datus esto 4.

Ergo $4\frac{3}{4}$ diuidendus est in tres quadratos quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. omnia per 4. fit 19. diuidendus in tres quadratos, quorum quilibet excedat 1. Diuiditur autem 19. in tres quadratos 9. 9. 1. quorum primo retento, supereſt vt residuum de 19. puta 10. diuidamus in duos quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quæro partem quadrati quæ ad 5. addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{16}$. & fit quadratus $\frac{81}{16}$ à latere $\frac{9}{4}$. fingo ergo latera quadratorum per adæqualitatem $1 + 5\,N. \& 3 - 3\,N.$ fitque summa quadratorum $10 + 34\,Q. - 8\,N.$ æqualis 10. vnde fit $1\,N. \frac{4}{17}$. sunt igitur latera $\frac{37}{17}$ & $\frac{39}{17}$. & sic totus 19. diuisus est in tres quadratos, quorum latera 3. $\frac{39}{17}$. $\frac{32}{17}$. quorum semisses $\frac{3}{2}$ $\frac{29}{34}$ $\frac{37}{34}$ sunt latera quadratorum ex quibus $4\frac{3}{4}$. componitur. Proinde à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$ remanent quæsitorum quadratorum latera 1. $\frac{11}{17}$. $\frac{10}{17}$ quorum summa cum summa quadratorum conficit 4.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum summa cum summa laterum datum conficiat numerum.

Hîc nulla conditio præscribitur, quia quilibet Numerus in quatuor vel plures quotlibet quadratos diuidi potest. Sufficit ergo, si datus numerus tot quadrantibus vnitatis auctus, quot quadrati postulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. seu quod idem est; si dati numeri quadruplum auctum tot vnitatibus quot quadrati postulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quod perficietur eadem arte.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum summa adscito quolibet multiplice summæ laterum conficiat quadratum.

Sint inueniendi quatuor quadrati, quorum summa adscito triplo summæ laterum, faciat 3. Quoniam per lemma vniuersaliter demonstratum ad decimam tertiam quarti, omnis quadratus auctus triplo sui lateris, & numero $2\frac{1}{4}$ facit quadratum, cuius latus detracto $1\frac{1}{2}$ exhibet prioris quadrati latus. At quater $2\frac{1}{4}$ conficit 9. & volumus quatuor quadratos cum suis lateribus efficere 3. patet addito 3. ad 9. eò deuentum esse vt numerus 12. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat $2\frac{1}{4}$. nam si à latere cuiuslibet auferamus $1\frac{1}{2}$. restabunt quæsitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 12. in quatuor quadratos 4. 4. $\frac{64}{25}$ $\frac{36}{25}$. quorum tres primi satis congruunt proposito, cùm quilibet excedat $2\frac{1}{4}$. Quartus verò minor est. Quare oportet rursus diuidere 12. in quatuor alios quadratos proposito satisfacientes. Sumo 3. quadrantem ipsius 12. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{225}$. fitque quadratus $\frac{676}{225}$ à latere $\frac{26}{15}$. Ita igitur fingam quadratorum latera, vt quotlibet per adæqualitatem proximè accedat ad $\frac{26}{15}$. Et quia inuentorum latera ad ean-

dem redacta denominationem sunt $\frac{30}{13}$. $\frac{30}{15}$. $\frac{24}{15}$. $\frac{18}{15}$. sumo differentias numeratorum à 26. & fingo latera quæsitorum quadratorum 2 − 4 N. 2 − 4 N. $\frac{8}{5}$ + 2 N. $\frac{6}{5}$ + 8 N. fitque quadratorum summa 12 + 100 Q. − $\frac{32}{5}$ N. æqualis 12. vnde fit 1 N. $\frac{1}{225}$. seu $\frac{16}{250}$. Quare latera quadratorum sunt $\frac{436}{250}$. $\frac{436}{250}$. $\frac{432}{250}$. $\frac{428}{250}$. Proinde à quolibet auferendo 1 $\frac{1}{2}$ supersunt quæsitorum quadratorum latera $\frac{61}{250}$. $\frac{61}{250}$. $\frac{57}{250}$ $\frac{53}{250}$. suntque ipsi quadrati $\frac{3721}{625^{00}}$ $\frac{3721}{625^{00}}$. $\frac{3149}{625^{00}}$. $\frac{2809}{625^{00}}$. quorum summa cum triplo summæ laterum quod est $\frac{174000}{625^{00}}$. facit $\frac{187500}{625^{00}}$. seu 3.

QVÆSTIO XV.

VNITATEM diuidere in tres numeros, & addere cuilibet ipsorum alium atque alium datum numerum, & facere vnumquemque quadratum. Sunto dati 2. & 3. & 4. Rursum eò res rediit vt diuidam 10. in tres quadratos, vt primus ipsorum sit maior binario, secundus sit maior ternario, tertius sit maior quaternario. Si ergo vnitatem bifariam secantes, cuilibet datorum adiiciamus $\frac{1}{2}$. Oportebit quærere vnum quadratorum maiorem quàm 2. minorem verò quàm 2 $\frac{1}{2}$. Alterum maiorem quàm 3. minorem quàm 3 $\frac{1}{2}$. tertium denique maiorem quàm 4. minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Eoque omnia deducuntur vt 10. ex duobus conflatum quadratis, rursus diuidam in alios duos, vt vnus eorum maior sit quàm 2. minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. Et ab hoc si auferamus 2. inueniemus vnam partium vnitatis. Rursus alterum quadratorum diuidemus in alios duos quadratos, ita vt vnus ipsorum sit maior quàm 3. minor quàm 3 $\frac{1}{2}$. A quo item si detraxero 3. inueniam alterum quæsitorum. Eadem etiam ratione inueniemus tertium.

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς ϝεῖς ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὅτε $\bar{\beta}$. καὶ ὁ $\bar{\gamma}$. καὶ ὁ $\bar{\delta}$. καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ τὸν ι. διελεῖν εἰς ϝεῖς τετραγώνους. ὅπως αὐτῶν ὁ μὲν πρῶτος μείζων ᾖ δυάδος. ὁ δ' ἕτερος μείζων ᾖ τριάδος. ὁ δὲ τρίτος μείζων ᾖ μ^{ο} $\bar{\delta}$. ἐὰν οὖν τεμόντες μ^{ο} $\bar{\alpha}$. διχῆ πεποιῶμεν τοὺς δοθέντας, ἀνὰ μονάδος ἡμίσεως, γίνεται ἕνα τῶν τετραγώνων. ζητεῖν μείζονα μὲν δυάδος, ἐλάσσονα δ' μ^{ο} $\bar{\beta}$. $\bar{\alpha}$ $\bar{\varsigma}$. ἕτερον μείζονα μὲν μ^{ο} $\bar{\Gamma}$. ἐλάσσονα δ' μ^{ο} $\bar{\gamma}$. $\bar{\alpha}$ $\bar{\varsigma}$. τὸν δὲ τρίτον μείζονα μὲν μ^{ο} $\bar{\delta}$. ἐλάσσονα δ' μ^{ο} $\bar{\delta}$. $\bar{\alpha}$ $\bar{\varsigma}$. καὶ ἀπάγεται ἅπαντα εἰς τὸ τὸν ι. συγκείμενον ἐκ δύο τετραγώνων μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ μ^{ο} $\bar{\beta}$. ἐλάσσων δ' μ^{ο} $\bar{\beta}$. $\bar{\alpha}$ $\bar{\varsigma}$. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν δυάδα, λείψομεν ἕνα τῶν ἀπὸ τ῀ μονάδος. καὶ πάλιν τὸν ἕτερον τῶν τετραγώνων μεταδιαιρῶμεν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς μὲν αὐτῶν μείζων ᾖ μ^{ο} $\bar{\gamma}$. ἐλάσσων δ' μ^{ο} $\bar{\gamma}$. $\bar{\alpha}$ $\bar{\varsigma}$. καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν μονάδας ϝεῖς, λείψομεν ἕνα τῶν ζητουμένων. ὥστε καὶ τὸν τρίτον ὁμοίως εὑρήσομεν.

IN QVAESTIONEM XV.

EX adnotatis ad duodecimam & decimam tertiam pendet quæstionis huius enodatio, & verba Diophanti satis sunt perspicua, sed totam operationem, quam ipse prætermisit, in tyronum gratiam subiicere non grauabor. Quoniam 10. diuidendus est in tres quadratos, quorum primus sit maior quàm 2. secundus quàm 3. tertius quàm 4. Diuido primum 10. in duos quadratos quorum alter cadat inter 2. & 3. id fiet per ea quæ attulimus ad duodecimam, eruntque huiusmodi quadrati $\frac{1849}{841}$ & $\frac{6561}{841}$ quorum latera $\frac{43}{29}$ & $\frac{81}{29}$. Habeoque iam vnum ex tribus quadratis quæsitis, puta $\frac{1849}{841}$. qui maior est quàm 2. minor quàm 3. vnde si auferatur 2. remanet vna ex quæsitis partibus vnitatis, puta $\frac{767}{841}$. Restat ergo vt reliquum quadratum $\frac{6561}{841}$ diuidamus in duos quadratos quorum alter cadat inter 3. & 4. Id fiet per ipsam operationem decimæ tertiæ. Quæro primum duos quadratos qui cadant inter 3. & 4. quales sunt $\frac{256}{81}$ & $\frac{289}{81}$ quorum latera $\frac{16}{9}$ & $\frac{17}{9}$. Tum posito altero quadratorum 1 Q. altero $\frac{6561}{841}$ − 1 Q. posterioris latus ita fingendum est. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{17}{9}$. fingi autem debet hoc latus à $\frac{81}{29}$ minus aliquot Numeris quorum duplum ductum in $\frac{81}{29}$ & diuisum per ipsorum numerorum quadratum vnitate auctum fiet valor Numeri. Quare posito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{162}{29}$ N. diuisus per 1 Q. + 1. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{17}{9}$. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta fiet 1 N. maior quàm $\frac{1266}{493}$ minor quàm $\frac{1291}{4^{74}}$. Ponatur ergo 2 $\frac{3}{4}$. & fingatur numeri $\frac{6561}{841}$ − 1 Q. latus, $\frac{81}{29}$ − 2 $\frac{3}{4}$ N. fiet 1 N. $\frac{7128}{3973}$. latus scilicet primi quadrati, eritque latus secundi $\frac{8505}{3973}$. suntque ipsi quadrati $\frac{50808384}{15784729}$ & $\frac{72335025}{15784729}$. à priore

si auferas 3. A posteriore 4. remanent reliquæ partes vnitatis $\frac{3454197}{15784729}$ & $\frac{2196109}{15784729}$ quibus si addas primam iam inuentam $\frac{167}{841}$ seu vt idem sit denominator $\frac{3134425}{15784729}$. soluta erit quæstio.

Posset etiam aliter institui operatio, fingendo scilicet simul & semel tria latera quadratorum, eodem artificio quo iam vsi sumus ad decimam tertiam. Quoniam enim 10. diuidendus est in tres quadratos quorum primus superet 2. secundus 3. tertius 4. Diuido vnitatem in tres trientes, & cuilibet datorum numerorum addo $\frac{1}{3}$. fiuntque $2\frac{1}{3}.3\frac{1}{3}.4\frac{1}{3}$. Iam quæro partes quadrati quæ singulis additæ quadratum faciant, eæ sunt $\frac{1}{1296}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{1}{144}$ & fiunt quadrati $\frac{3025}{1296}$ $\frac{121}{36}$ $\frac{625}{144}$. quorum latera $\frac{55}{36}$ $\frac{66}{36}$ $\frac{75}{36}$. vt omnium sit idem denominator. Oportet igitur ita fingere latera quadratorum, vt primum adæquetur $\frac{55}{36}$. secundum adæquetur $\frac{66}{36}$. tertium adæquetur $\frac{66}{36}$. Porrò numerus 10. diuiditur in tres quadratos, quorum latera $3.\frac{3}{5}\frac{4}{5}$. quæ vt reducantur ad eandem denominationem cum lateribus adæqualitatis, erunt hæc $\frac{540}{180}$ $\frac{108}{180}$ $\frac{144}{180}$. Illa verò $\frac{275}{180}$ $\frac{330}{180}$ $\frac{375}{180}$. Itaque fingentur per adæqualitatem latera primum $\frac{5}{3}$ + 167 N. secundum $\frac{4}{3}$ + 186 N. tertium 3 − 166 N. fitque summa quadratorum 10 + 89710 Q. − 492 N. æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{246}{44855}$ sunt igitur quæsita latera, primum $\frac{13599}{8971}$. secundum $\frac{16388}{8971}$. tertium $\frac{18795}{8971}$. Ipsi verò quadrati $\frac{184932801}{80478841}$ $\frac{266603584}{80478841}$ $\frac{353252025}{80478841}$. Et si auferas 2. à primo, 3. à secundo, 4. à tertio, remanent quæsitæ partes vnitatis $\frac{23975119}{80478841}$ $\frac{25167061}{80478841}$ $\frac{31336661}{80478841}$.

Cæterùm non est dubium, & hîc requiri huiusmodi conditionem.

Oportet autem datorum numerorum summam vnitate auctam conficere numerum qui in tres quadratos diuidi possit.

Patet etiam eodem artificio quemlibet numerum diuidi posse in tres partes, ita vt cuilibet addendo alterum atque alterum numerum fiat quadratus. Et rursus tam vnitatem quàm numerum quemlibet diuidi posse in partes quotlibet, quibus addendo datos quoscunque numeros, fiant quadrati. Quæ omnia facilè mihi esset exemplis commonstrare, sed huic labori, ne sim prolixior, supersedebo.

QVÆSTIO XVI.

ΤΟΝ ὁπταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως σωὶ δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ὁπτετάχθω δὴ τὸν ῑ. καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς ζητουμένοις τρισὶν ἀριθμοῖς ὁ μείζων καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι τετράγωνον. ὁμοίως καὶ ὁ μέσος μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου. οἱ ἄρα τρεῖς δὶς ληφθέντες ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μ° ῑ. ἀλλὰ δὶς οἱ τρεῖς εἰσι μ° κ̄. δεῖ οὖν τὸν κ̄. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μ° ῑ. ὁ δὲ κ̄. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, τοῦτε ις̄. καὶ τοῦ δ̄. καὶ ἐαὶ τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων μ° δ̄. δεήσει τὸν ις̄. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μ° ῑ. ἐμάθομεν δὲ τὸν δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως εἷς τῶν αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ μ° ϛ̄. ἐλάσσων δὲ μ° ῑ. ἔστωσαν ἀμφότεροι μ° ις̄. ὥστε διῃρῆσθω κ̄. εἰς τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστον αὐτῶν ἐλάσσονα ᾖ μ° ῑ. καὶ ἐαὶ ἕκαστον ἀφελωμὲν ἀπὸ μ° ῑ. εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς οἱ σωὶ δύο λαμβανόμενοι ποιοῦσι τετράγωνον.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt bini coniuncti quadratum conficiant. Datus esto 10. Quoniam de tribus qui quæruntur numeris maior & medius simul faciunt quadratum, sed & medius cum tertio facit quadratum, & tertius cum primo. Ergo tres bis sumpti faciunt tres quadratos, quorum quilibet minor est quàm 10. Sed tres bis sumpti sunt 20. Oportet ergo diuidere 20. in tres quadratos, quorum quiuis minor sit quàm 10. Atqui 20. componitur è duobus quadratis 16. & 4. Et si de quæsitis vnum ponamus 4. oportebit diuidere 16. in duos quadratos, quorum quiuis minor sit quàm 10. Didicimus autem datum quadratum diuidere in duos quadratos, vt quiuis eorum maior sit quàm 6. minor quàm 10. sunto ambo simul 16. Itaque 20. diuisus erit in tres quadratos, quorum quilibet minor erit quàm 10. & si vnumquemque auferamus à denario, inueniemus reliquos, quorum bini coniuncti quadratum faciunt.

IN QVAESTIONEM XVI.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ex dictis in præcedentibus pendet. Certum est autem cùm tres numeri sumuntur bini & bini, vnumquemque bis sumi, quare posita summa numerorum 10. necesse est summam quadratorum quos bini conficiunt esse 20. Igitur oportet diuidere 20. in

tres quadratos quorum quilibet sit minor quàm 10. tum verò singulos quadratos ab ipso 10. detrahendo, remanebunt tres quæsiti numeri, vt constat ex Canone decimæ-sextæ primi. Quoniam verò 20. diuiditur suaptè natura in duos quadratos 4. & 16. quorum primus minor est quàm 10. ac proinde congruit proposito. Restat vt diuidamus 16. in duos quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. maior quàm 6. quia scilicet 10. & 6. conficiunt 16. Hoc autem fiet per operationem decimætertiæ hac arte. Sumo duos quadratos inter 6. & 10. puta 9. & $\frac{64}{9}$. quorum latera 3. & $\frac{8}{3}$. Positoque altero quadratorum quæsitorum 1 Q. altero $16 - 1$ Q. fingo huius latus à $4 -$ tot numeris, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{8}{3}$. minor quàm 3. fiet autem valor numeri, si octuplum numeri Numerorum diuidatur per ipsorum quadratum vnitate auctum. Quare posito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{8\ N}{1\ Q\ +\ 1}$. maior quàm $\frac{8}{3}$. minor quàm 3. vnde vtraque hac æquatione resoluta, inuenietur 1 N. maior quàm $\frac{7}{3}$. minor quàm $\frac{5}{2}$. ponatur $\frac{12}{5}$. Igitur quadrati $16 - 1$ Q. latus statuetur $4 - \frac{12}{5}$. N. & fiet 1 N. $\frac{480}{769}$. latus scilicet vnius quæsitorum quadratorum, estque alterum $\frac{476}{169}$. Quamobrem tres quæsiti quadrati sunt 4. $\frac{230400}{295561}$. $\frac{226576}{295561}$. quos si auferas sigillatim à denario, restant tres denarij quæsitæ partes 6 $\frac{552210}{295561}$. & $\frac{59034}{295561}$.

Hinc collige huic quoque quæstioni præscribi debere huiusmodi conditionem.

Oportet dati numeri duplum diuidi posse in tres quadratos.

Potest etiam aliter institui operatio, fingendo simul & semel trium latera quadratorum, & imitando artificium decimæquartæ hoc pacto. Quoniam 20. diuidi debet in tres quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. sumo trientem de 20. puta 6 $\frac{2}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, hæc est $\frac{1}{144}$. fitque quadratus $\frac{961}{144}$. à latera $\frac{31}{12}$. fingenda ergo sunt latera quadratorum, vt vnumquodque adæquet $\frac{31}{12}$. Porrò numerus 20. diuiditur in tres quadratos, quorum latera 4. $\frac{8}{5}$. $\frac{6}{5}$. quæ redacta ad eandem denominationem cum numero adæqualitatis, fiunt 240. $\frac{96}{60}$. $\frac{72}{60}$. Ipse verò adæqualitatis numerus fit $\frac{155}{60}$. Quamobrem fingentur aptè latera quadratorum $4 - 85$ N. $\frac{8}{5} + 59$ N. $\frac{6}{5} + 83$ N. estque summa quadratorum $20 + 17595$ Q. $- 292$ N. æqualis 20. vnde fit 1 N. $\frac{292}{17595}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{9112}{3519}$. $\frac{9076}{3519}$. & $\frac{9070}{3519}$. Ipsi quadrati $\frac{83028544}{12383361}$. $\frac{82373770}{12383361}$. & $\frac{82264900}{12383361}$. quos si auferas sigillatim à denario, remanent vtique quæsitæ denarij partes $\frac{4080\,5066}{12383361}$. $\frac{414\,59834}{12383361}$. $\frac{41568710}{12383361}$.

QVÆSTIO XVII.

DATVM numerum diuidere in quatuor numeros, vt terni coniuncti quadratum faciant. Datus esto 10. Quoniam qui à primo deinceps tres iuncti faciunt quadratum, itemque tres à secundo, & tres à tertio, & tres à quarto deinceps idem præstant. Ergò quatuor numeri ter sumpti faciunt quatuor quadratos. At quatuor numeri ter sumpti faciunt 30. Ergo 30. diuidendus est in quatuor quadratos, quorum quilibet minor sit quàm 10. Hoc autem sic inuenietur. Si per adæqualitatem statuamus quemlibet $7\frac{1}{2}$. & vnumquemque quadratorum auferamus de 10. inueniemus quæsitos. Sin autem animaduerto 30. componi ex 16. 9. 4. & 1. ponam 4. & 9. quandoquidem vterque minor sit quàm 10. si ergo 17. diuidamus in duos quadratos vt didicimus, quorum alter maior sit quàm $8\frac{1}{2}$. minor quàm 10. erit vterque ipsorum minor quàm 10. Proinde si vtrumque eorum de 10. auferamus, inueniemus reliquos de quæsitis. Nam duo iam sunt inuenti, nempe 6. & 1 & soluetur quæstio.

Δοθεντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τέσσαρας ἀριθμούς, οἱ σὺν τρεῖς λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθω δὴ τὸν ι. ἐπεὶ οὖν οἱ ἀπὸ τῆ πρώτου τρεῖς ποιοῦσι τετράγωνον. ἀλλὰ καὶ οἱ ἀπὸ τῆ δευτέρου τρεῖς, τὸ αὐτὸ ποιῶσι, καὶ οἱ ἀπὸ τῆ τρίτου τρεῖς τὸ αὐτὸ ποιῶσι. καὶ οἱ ἀπὸ τῆ τετάρτου τρεῖς. οἱ ἄρα τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλ' οἱ τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι μ̊ λ̄ δεήσει ἄρα μ̊ λ̄. διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους ὅπως ἕκαστος ἐλάσσων ᾖ μ̊ ῑ. τοῦτο δ' οὕτως εὑρεθήσεται. ἐκκείσθω διὰ τῆς παρεισότητος τάξαντες ἕκαστον αὐτῶν μ̊ ζ̄. α̃ c̃. καὶ ἕκαστον τετραγώνων ἀφῃρήσθω ἀπὸ μ̊ ῑ. εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους, οἱ δὲ ὑπὸ ὀρθὴν τὴν λ̄. συγκείσθωσαν ἐκτὸς τῆ ιε̄. καὶ τῆ θ̄. καὶ τῆ δ̄. καὶ τῆς μ̊ α̃. θῶμεν τὸν δ̄. καὶ τὸν θ̄. ἐπεισθὴ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ὀξεῖ μ̊ ῑ. λοιπὸν γίνεται μ̊ ιζ̄. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάττων ᾖ μ̊ ῑ. ἐὰν δὲ τὸν ιζ̄. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους ὡς ἐμάθομεν, ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μ̊ η̄. α̃ c̃. ἐλάσσονα ᾖ μ̊ ῑ. ἔσται ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάσσων μ̊. ῑ ᾗ ἐὰν ἑκάτερον αὐτῶν ἀφέλωμεν ἀπὸ μ̊ ῑ εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς τῶν ζητουμένων [δύο δὲ ἤδη εὑρήκαμεν] ὧν μὲν μ̊ ε̄. ὧν δὲ μ̊ α̃. ὥστε λελύσθαι τὸ ζητούμενον.

IN QVAESTIONEM XVII.

DVPLICEM operandi modum tangit Diophantus in propoſito exemplo. Primus talis eſt. Quoniam 30. diuidendus eſt in quatuor quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 10. ſumo quadrantem de 30. puta $7\frac{1}{2}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{121}{16}$. à latere $\frac{11}{4}$. Curandum ergo vt diuidatur 30. in quatuor quadratos, ita vt cuiuſlibet latus adæquatur $\frac{11}{4}$. Atqui 30. ſuaptè natura diuiditur in quatuor quadratos, quorum latera ſunt 4. 3. 2. 1. Quare per adæqualitatem ſtatuentur quæſitorum quadratorum latera $4-5$ N. $3-1$ N. 2 $+$ 3 N. 1 $+$ 7 N. eritque ſumma quadratorum 30 $+$ 84 Q. $-$ 20 N. æqualis 30. vnde fiet 1 N. $\frac{5}{11}$. Erunt igitur latera quadratorum $\frac{19}{11}$. $\frac{38}{11}$. $\frac{57}{11}$. $\frac{56}{11}$. Ipſi verò quadrati $\frac{3481}{441}$. $\frac{3364}{441}$. $\frac{3249}{441}$. $\frac{3136}{441}$. à quibus ſi auferatur ſigillatim numerus 10. remanent quæſitæ denarij partes $\frac{929}{441}$. $\frac{1046}{441}$. $\frac{1161}{441}$. $\frac{1274}{441}$.

Secundus operandi modus talis eſt. Quoniam 30. ſuapte natura diuiditur in quatuor quadratos 16. 9. 4. 1. quorum duo 9. & 4. propoſito congruunt cùm ſint minores denario, reſtat vt reliquorũ ſummam. puta 17. diuidamus in duos alios quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 10. maior quàm 7. quod ſi fiet, ſumo ſemiſſem de 17. puta $8\frac{1}{2}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea eſt $\frac{1}{144}$ & fit quadratus $\frac{1225}{144}$ à latere $\frac{35}{12}$. Quare per adæqualitatem fingentur latera quadratorum $4-13$ N. & 1 $+$ 23 N. eſt ſumma quadratorum 17 $+$ 698 Q. $-$ 58 N. æqualis 17. vnde fit 1 N. $\frac{29}{349}$. Quare latera quadratorum ſunt $\frac{1019}{349}$ $\frac{1016}{349}$. Ipſi quadrati $\frac{1038361}{121801}$ & $\frac{1032256}{121801}$. quibus addendo tertium & quartum 4. & 9. habemus totum 30. diuiſum in quatuor quadratos, quos ſigillatim auferendo à denario, remanent quæſitæ denarij partes, puta $\frac{185754}{121801}$. $\frac{179649}{121801}$. 6. & 1.

Cæterùm in textu Græco verba illa mendo non carent, ἐαν̀ οὡ τὸν ις. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους, ὡς ἐμάθομεν, ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μίζονα εἶναι μ̊ η̄. α̅ β̅. ἐλάσσονα δὲ μ̊ ῑ. nam ſi numerus ϟ. α̅ β̅. hoc eſt $8\frac{1}{2}$ retinendus eſt, procul dubio non ἑκάτερον, ſed ἕτερον legendum eſt, nam impoſſibile eſt numerum 17. diuidi in duos quadratos quorum vterque ſit maior quàm $8\frac{1}{2}$ vt euidens eſt. Quod ſi vocem ἑκάτερον retinere libet, numerus ϟ. ὰ ϛ̃ mutandus eſt in ζ̀ ſeu in 7. verè enim numerus 17. diuidendus eſt in duos quadratos quorum vterque ſit maior quàm 7. minor quàm 10. ſed & poſtrema verba mutila erant, vt ex iis quæ adiecimus manifeſtum eſt.

Demum moneo eodem prorſus artificio datum numerum diuidi poſſe in quinque partes, vt quaternæ quadratum conficiant, vel in ſex partes, vt quinæ quadratum faciant, & ſic in infinitum. Reſtat vt quæſtionem explicemus, quam in hunc locum reiecimus in adnotatione ad ſextam tertij nimirum.

Inuenire quinque numeros quadrato æquales, vt quaterni reliquum ſuperent quadrato numero.

Ponatur ſumma eorum quilibet quadratus, puta 1. Quia ergo vt oſtenſum eſt ad vigeſimam primi ſumma exceſſuum tripla eſt ſummæ numerorum, erit ſumma exceſſuum 3. Oportet igitur diuidere 3. in quinque quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 1. Et quidem diuidendo bis vnitatem in duos quadratos, totus 3. diuiſus erit in quinque quadratos, puta in $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{25}{169}$. 1. Sed quia quintus non eſt minor vnitate, adiicio eum vni priorum, puta $\frac{25}{169}$. & fit 1 $\frac{25}{169}$. diuidendus rurſus in duos alios quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 1. ſemiſſis ſummæ eſt $\frac{97}{169}$. cui proximus eſt quadratus $\frac{100}{169}$. à latere $\frac{10}{13}$. Ita ergo diuidendus 1 $\frac{25}{169}$. in duos quadratos vt cuiuſlibet latus adæquetur $\frac{10}{13}$. Quare fingentur latera quadratorum $1-3$ N. & $\frac{5}{13}$ $+$ 7 N. fitque ſumma quadratorum 1 $\frac{25}{169}$ $+$ 58 Q. $-$ $\frac{8}{13}$ N. æquales 1 $\frac{25}{169}$. vnde fit 1 N $\frac{4}{377}$ ſunt ergo latera quadratorum $\frac{365}{377}$ & $\frac{173}{377}$. ipſi quadrati $\frac{133225}{142129}$. & $\frac{29929}{142129}$ Quamobrem quinque exceſſus ſunt $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{133225}{142129}$. $\frac{29929}{142129}$. quos ſi auferas ſigillatim ab vnitate, & reſiduorum ſemiſſes ſumas, fient quæſiti numeri $\frac{8}{25}$. $\frac{9}{50}$. $\frac{25}{338}$. $\frac{4452}{142129}$. $\frac{56100}{142129}$.

Ita ſi quærantur ſex numeri quadrato æquales, quorum quini reliquum ſuperent quadrato numero, ponetur ſumma numerorum quilibet quadratus, puta 1. Et quia exceſſuum ſumma eſt quadrupla ſummæ numerorum, diuidetur 4. in ſex quadratos, quorum quilibet ſit minor quàm 1. quod fiet eodem prorſus artificio. Et ſic ad quotlibet numeros quæſtio extendetur.

Immo res extenditur, etiam ſi proponatur quilibet datus numerus diuidendus in quotlibet partes, vt omnium vna dempta ſuper reliquam exceſſus ſit quadratus numerus. Sed ſi tres tantùm partes poſtulentur, oportebit datum numerum diuidi poſſe in tres quadratos.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τ̃ τριῶν κύβος ποιῇ λα-

INVENIRE tres numeros, vt cubus ſummæ eorum adſciſcens quemlibet

ipsorum, faciat cubum. Statuatur summa trium 1 N. Quæsitorum autem alter 7 C. alter 26 C. tertius 63 C. & constat cubum summæ adscito quolibet ipsorum facere cubum. Reliquum est vt tres isti coniuncti faciant 1 N. sed tres coniucti faciunt 96 C. Hoc ergo æquatur 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 96 Q. æquales 1. & vnitas quidem quadratus est, ac si 96. item quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Proinde quæro vnde 96. ortus sit, est nimirum summa trium numerorum, quorum quilibet vnitate auctus cubum facit. Itaque eò res rediit vt inueniantur tres numeri, quorum quilibet vnitate adscita cubus fiat, sed & summa trium sit quadratus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. secundi verò 2 − 1 N. tertij 2. cubi fient, primus quidem 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1. secundus 6 Q. + 8 − 1 C. − 12 N. tertius 8. Aufero ab vnoquoque vnitatem, & statuo primum 1 C. + 3 Q. + 3 N. secundum 6 Q. + 7. − 1 C. − 12 N. tertium 7. Reliquum est vt summa eorum sit quadratus, fit autem 9 Q. + 14 − 9 N. æqualis quadrato à latere 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{2}{15}$. erit igitur quæsitorum primus $\frac{1538}{3375}$. secundus $\frac{18077}{3375}$. tertius 7. Venio ad id quod initio propositum erat, & pono primum $\frac{1538}{3375}$ C. secundum $\frac{18577}{3375}$ C. tertium 7 C. & rursus statuo trium summam 1 N. & fiunt $\frac{4374^{0}}{3375}$ C. æquales 1 N. & omnium decimaquinta pars sumatur, & omnia per numerum diuidantur, fiunt 2916 Q. æquales 225. & fit 1 N. $\frac{15}{17}$. Ad positiones, & constat.

βὼν ἕκαστον, ποιῆ κύβον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τειῶν ς$^{\bar{ς}}$ ᾱ. ἕκαστος δὲ τ̃ ζητουμένων, ὁ μὲν κύβων ζ̄. ὁ δὲ κύβων κ$^{\bar{ς}}$. ὁ δὲ κύβων ξγ̄. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τ̃ συγκειμένου ἐκ τῶν τειῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιεῖ κύβον. λοιπὸν ὅτι τὰς τρεῖς ἰσῶσαι ς$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν κ$^{\bar{ῳ}}$ 45̄. ὥστε κ$^{\bar{ῳ}}$ 45̄. ἴσοι ς$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. καὶ παντὰ ἁπλᾶ ἀριθμὸν δ$^{\bar{ῳ}}$. 45̄. ἴσαι μ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. ☾ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος. εἰ ἦσαν καὶ αἱ μ$^{\bar{ῳ}}$ 45̄ τετράγωνος λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ὅθεν ζητῶ πόθεν ὅτι ὁ 45̄. ἔστι τῶν τειῶν ἀριθμῶν συνθεμα, ὧν ἕκαστος μ$^{\bar{ῳ}}$ μονάδος μιᾶς ποιεῖ κύβον. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ δύρειν ἀριθμὺς τρεῖς; ὅπως ἕκαστος αὐτ̃ μ$^{\bar{ῳ}}$ μονάδος μιᾶς ποιῇ κύβον, ἔτι δὲ τὸ συνθεμα τῶν τειῶν ᾖ τετράγωνος. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν τ̃ πρώτου πλευρὰ ς$^{\bar{ς}}$ ᾱ. μ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. ἡ δὲ τ̃ δευτέρου μ$^{\bar{ῳ}}$ β̄. λείψει ς$^{\bar{ς}}$ ᾱ. ἡ δὲ τ̃ τρίτου μ$^{\bar{ῳ}}$ β̄. οἱ κύβοι γίνονται. ὁ μὲν κ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. δ$^{\bar{ῳ}}$ γ̄. ς$^{\bar{ς}}$ γ̄. μ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. ὁ δὲ δ$^{\bar{ῳ}}$ 5̄. μ$^{\bar{ῳ}}$ η̄. λείψει κ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. ς$^{\bar{ς}}$ ιβ̄. ὁ δὲ μ$^{\bar{ῳ}}$ η̄. αἴρω ἀπὸ ἑκάτου μ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον. κ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. δ$^{\bar{ῳ}}$ γ̄. ς$^{\bar{ς}}$ γ̄. τὸν δὲ δεύτερον δ$^{\bar{ῳ}}$ 5̄. μ$^{\bar{ῳ}}$ ζ̄. λείψει κ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. ς$^{\bar{ς}}$ ιβ̄. τὸν δὲ τρίτον μ$^{\bar{ῳ}}$ ζ̄. λοιπὸν ὅτι αὐτὸς συντεθέντας ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται ἡ δ$^{\bar{ῳ}}$ ϟ. μ$^{\bar{ῳ}}$ ιδ̄ ρ̄ ς$^{\bar{ς}}$ ϟ. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς$^{\bar{ς}}$ γ̄. λείψει μ$^{\bar{ῳ}}$ δ̄. ☾ γίνεται ὁ ς$^{\bar{ὸ}}$ β̄ ι$^{\bar{ε}}$ γ$^{\bar{τος}}$ ε$^{\bar{ον}}$. ἔσαι τῶν ζητουμένων ὁ μὲν πρῶτος ἁπλῆ γ$^{\bar{τος}}$ ε$^{\bar{ον}}$. ὁ δὲ δεύτερος ᾱ. πρὸς γ$^{\bar{τος}}$ ε$^{\bar{ον}}$. ὁ δὲ τρίτος ζ̄. ἔρχομαι ὅθεν τὸ ἐξ ἀρχῆς, ☾ τάσσω τὸν μὲν κ$^{\bar{ῳ}}$ ἁπλῆ γ$^{\bar{τος}}$ ε$^{\bar{ον}}$. τ̃ ἡ κ$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. πρὸς γ$^{\bar{τος}}$ ε$^{\bar{ον}}$. τὸν ἡ κ$^{\bar{ῳ}}$ ζ̄. καὶ πάλιν τάσσομεν τὰς ἑξῆς ς$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. καὶ γίνονται κύβοι ϡμ̄ γ$^{\bar{τος}}$ ε$^{\bar{ον}}$. ἴσοι ς$^{\bar{ῳ}}$ ᾱ. πάντων τὸ πεντεκαιδεκατὸν καὶ πάλιν ἀριθμὸν, καὶ γίνονται δ$^{\bar{ῳ}}$ βπιϛ̄. ἴσαι μ$^{\bar{ῳ}}$ σκε̄. καὶ γίνονται ὁ ς$^{\bar{ὸ}}$ ιε̄ γ$^{\bar{τος}}$ ε$^{\bar{ον}}$. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XVIII.

PENDET omnino solutio quæstionis huius, à lemmate assumpto, quo scilicet quæruntur tres cubi vnitate multati, quorum summa sit quadratus numerus. Et ponit Diophantus latus primi 1 N + 1. latus secundi 2 − 1 N. vbi numeri contrario signo afficiuntur, vt etiam in cubis, numeri cuborum contrario signo reperiantur affecti, cùm hinc reperiatur + 1 C. inde verò − 1 C. vnde fit vt in summa cuborum cubis se mutuo elidentibus, remaneant solùm Quadrati, Numeri, & Vnitates; cùm autem tertij cubi latus ponatur quilibet vnitatum numerus. puta 2. eius cubus vnitate multatus, puta 7. est certus vnitatum numerus, cui additus summæ priorum cuborum vnitate multatorum, non constituit diuersam speciem, quia in illa summa, vt dictum est, reperiuntur vnitates; sic fit summa trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 14. − 9 N. quæ quadrato æquari debet. Hoc verò fieri non posset, si numerus quadratorum 9. non esset quadratus, vt euidens est, quod tamen non animaduertit Xilander. Vt ergo positiones arte certa, non casu instituantur, videndum vnde in summa cuborum contentus numerus quadratorum prouenerit. Atqui est triplum summæ vnitatum] quæ ponuntur in primo & secundo latere, quia videlicet in primo latere ponitur ī.

in secundo 2. quorum summa 3. cuius triplum 9. Idcirco 9 Q. reperiuntur in summa cuborum. Igitur cùm in primo latere ponatur 1. cuius triplum 3. oportebit in secundo latere constituere tot vnitates, quarum triplum adsumpto 3 faciat quadratum, id autem facillimè fiet, infinitisque modis si à quolibet quadrato auferatur 3. & residui triens sumatur, vt si à 9. auferas 3. residui triens 2. poni poterit in secundo latere, vt fecit Diophantus. Rursus si à 36. auferas 3. residui triens 11. congruet proposito, & poni poterit secundum latus 11 − 1 N. & sic in infinitum. Tertius quoque cubus poni potest quilibet vnitatum numerus cubicus; ita si loco 8. quem posuit Diophantus, sumas 27. erit summa trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 33 − 9 N. æqualis quadrato, cuius latus si fingas 3 N − 6. fiet 1 N $\frac{1}{9}$. & diuersa omnino continget solutio ab ea quam tradit Diophantus, quam sanè in falsis numeris assignauit Xilander, in eo allucinatus quod putauit 1 N. fieri $\frac{18}{5}$. cum fiat $\frac{3}{18}$. Quare tres quæsiti numeri sunt $\frac{1538}{157464}$. $\frac{18570}{157464}$. $\frac{23625}{157464}$. Quorum summa est $\frac{5}{10}$. cuius cubus $\frac{125}{3832}$. quo addito ad singulos numeros, fiunt cubi $\frac{4913}{157464}$. $\frac{21952}{157464}$. $\frac{27000}{157464}$. quorum latera $\frac{17}{54}$. $\frac{28}{54}$. $\frac{30}{54}$.

Animaduersione præterea dignum est numeri 9 Q + 14 − 9 N. latus cautè fingendum esse. Quia enim latus secundi cubi positum est 2 − 1 N. necesse est 1 N. minorem esse quàm 2. fiet autem valor numeri fingendo latus quadrati 3 N − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 14. diuidendo harum vnitatum quadratum multatum numero 14. per sextuplum earundem vnitatum multatum numero 9. Oportet ergo quotientem hunc minorem esse quàm 2. hoc est $\frac{9Q-14}{6N-9}$ minor est quàm 2. & tandem 1 Q + 2 minor est quàm 12 N. Qua æquatione per approximationem resoluta, fit 1 N 11 $\frac{9}{10}$. Ponetur igitur fictitium latus 3 N − tot vnitatibus quæ sint minores quàm 11 $\frac{9}{10}$. dum earum quadratus excedat 14. Ponit Diophantus 3 N − 4. vnde fit 1 N. $\frac{2}{15}$.

Cæterùm ex ipsius operationis ductu manifestum est; quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Nam verbi gratia propositum sit inuenire quatuor numeros, vt cubus summæ eorum, quouis adsumpto cubum faciat. Sanè quærendi erunt quatuor cubi, quorum vnitate multatorum summa sit quadratus numerus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. secundi 2 − 1 N. tertij 2. quarti 3. Erit summa cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 40 − 9 N. æqualis quadrato. Quod si Numeri determinationem quæras inuenies fingendum latus 3 N. − tot vnitatibus quæ sint minores quam 13 $\frac{3}{5}$. ita vt earum quadratus excedat 40. Ponantur ergo 7. & sit latus fictitium 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{3}{11}$. Erunt igitur quatuor cubi $\frac{2744}{1331}$. $\frac{6859}{1331}$. 8. 27. & à singulis si auferas vnitatem, & apponas signum cuborum residuis, erunt quatuor quæsiti numeri $\frac{1413}{1331}$ C. $\frac{5528}{1331}$ C. 7 C. 26 C. Quorum summa in minimis $\frac{4624}{121}$. C. æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{121}{68}$. Ad Positiones, erunt quæsiti numeri $\frac{1880703}{4185089992}$. $\frac{73557768}{4185089992}$. $\frac{12400927}{4185089992}$. $\frac{476605136}{4185089992}$. quorum summa vtique est $\frac{11}{68}$. cuius cubus $\frac{1331}{314432}$. adscito quolibet ipsorum, cubos facit $\frac{365226}{4185089992}$. $\frac{5129229}{4185089992}$. $\frac{14177488}{4185089992}$. $\frac{47837147}{4185089992}$. quorum latera $\frac{154}{748}$. $\frac{209}{748}$. $\frac{242}{748}$. $\frac{363}{748}$.

QVÆSTIO XIX.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τῆ τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν οἱ ξεῖς ς̄ ᾱ. ἡ αὐτῆ ὁ μὲν κύβων ζ̄ η̄. ὁ δ' κύβων κς̄ ᾱχς̄. ὁ δ' κύβων ζγ̄ ξδ̄. λοιπὸν ὅτι τὰς ξεῖς ἰσῶσαι ς̄ ᾱ. γίνεται κυβικὸν ,δωοζ̄ ,ᾱψ̄ᾱ. ἴσον ς̄ ᾱ. πάντα δὲ ἀριθμὸν, ἡ γίνεται δυναμοστὸν ,δωοζ̄ ,ᾱψ̄ᾱ. ἴσον μ̄ ᾱ. ἡ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνον. δεῖσθαι ἄρα καὶ τὰς δυνάμεις εἶναι τετράγωνον. πόθεν ὅτι τὸ πλῆθος τῆ δ̄ ὧν τὸ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι ξεῖς κύβους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. καὶ ἀπάγει εἰς τὸ δύνειν ξεῖς κύβους, ὅπως ἕκαστος αὐτῆ, ἐλάσσων ἢ μ̄ ᾱ. τὸ δὲ συνθεμα αὐτὸ ἄρθεν ἀπὸ τριάδος ποιῇ τετράγωνον. ἡ ἐπεὶ ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῆ κύβον ἐλάσσονα εἶναι μονάδος μιᾶς, ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τὰς τρεῖς ἀριθμὰς ἐλάσσονας μονάδος ᾱ. πολλῷ ἕκαστος αὐτῆ ἐλάσσων μονάδος ᾱ. ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος τετρά-

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum, quouis ipsorum detracto, faciat cubum. Ponatur rursus trium summa 1 N. & ipsi $\frac{7}{8}$ C. $\frac{26}{27}$ C. $\frac{63}{64}$ C. supereſt vt tres coniuncti æquentur 1 N. fit ergo $\frac{4877}{1728}$ C. æquale 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fit $\frac{4877}{1728}$ Q. æquale 1. est autem 1. quadratus. Oportebat ergo & numerum quadratorum esse quadratum: vnde autem is natus est? Quod à ternario subducti sunt tres cubi, quorum quilibet minor est vnitate. Eò itaque res redit, vt inueniantur tres cubi, quorum quilibet sit minor vnitate, summa autem ipsorum à ternario sublata, faciat quadratum. Et quia volumus cuborum quemque minorem esse vnitate, si statuamus tres numeros simul vnitate minores, multo minores singuli erunt vnitate. Sic autem quadratum qui relinquetur, oportebit maiorem esse binario. Statuatur quadratus

dratus qui relinquitur 2 $\frac{1}{4}$. Oportet igitur $\frac{3}{4}$ diuidere in tres cubos, & horum multiplicia secundum aliquos cubos diuisa. Esto secundum 216. Oportet igitur vt diuidamus 162. in tres cubos. At 162. componitur ex cubo 125. & interuallo duorum cuborum 64. & 27. Habemus autem in porismatis, omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis. Recurramus ad propositum initio, & sumamus vnumquemque cuborum inuentorum, & quolibet ab vnitate subtracto, residua statuamus pro quæsitis numeris, & sit summa 1 N. Ita fiet vt cubus summæ, quouis ipsorum detracto cubum faciat. Restat vt tres simul æquentur 1 N. fit autem trium summa 2 $\frac{1}{4}$ C. Hoc ergo æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{2}{3}$. Ad positiones.

γωνος μείζων ἐῖ) δυάδος. τετάχθω καταλειπόμενος τετράγωνος μ^ο β̄. ᾱ δ̄. δεῖ οὖν τὰ γ̄ δ̄. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. ⲥ κ^τ τούτων πολλαπλάσια κ^τ τινῶν κύβων διαιρεθέντων. ἔστω δὴ κ^τ τὸν σιϛ̄. ὀφείλομεν ουν^ε τὴν ρξβ̄. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. σύγκειται δὴ ὁ ρξβ̄. ἔκτε κύβου τοῦ ρκε̄. ⲥ δύο κύβων ὑπεροχῆς τοῦτε ξδ̄. καὶ τοῦκζ̄. ἔχομεν δὴ ἐν τοῖς πορίσμασιν, ✻ ὅτι πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κ^υ ✻ ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν ἕκαστον κύβων εὑρεθέντων. τοὺς δὲ τρεῖς ἀριθμὸν ᾱ. καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον λείψαντα ἕκαστον, ποιεῖν κύβον. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^ῳ ᾱ. γίνονται δὴ οἱ τρεῖς κ^υ β̄. ᾱ δ̄. ταῦτα ἴσα ς^ῳ ᾱ. ὅθεν γίνεται ὁ ς^ο μ^ο β̄ γ̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

Solutionis modum Diophantus non exprimit, aut græca corrupta sunt. Bachetus casu adiutum Diophantum arbitratur, quod tamen non admittimus, cum Diophantæam methodum non difficilem inuentu existimemus, inueniendus quadratus binario maior ternario minor qui à ternario subtractus relinquat numerum in tres cubos diuidendum. Ponatur quæsiti quadrati latus esse quemlibet numerorum numerum — vnitate v. g. 1 N — 1. ipsius quadratus à ternario subtractus relinquit 2 — 1 Q + 2 N. cui inueniendi tres cubi æquales qui sic effingendi vt æqualitas tandem consistat inter duas tantum species proximas, id quidem innumeris modis construi potest. Sit vnius ex cubis latus 1 — $\frac{1}{3}$ N. alterius (vt numerus numerorum in ambobus cubis conficiat 2 N.) sit 1 + 1 N. tertii latus in numeris duntaxat fingendum, qui etiam ne valor 1 N. quæsitos terminos euadat, debent notari signo defectus, nec est operosum eum numerum numerorum sumere cuius valor æquationem ad præstitutos redigat terminos, hoc peracto patet primum ex cubis esse minorem vnitate vt quærebamus, cum igitur secundus sit maior & tertius signo defectus notetur, patet differentiam secundi & tertij æquandam esse duobus cubis quam ob rationem ad secundam operationem & Diophantus & nos deuoluimur.

Habemus autem, inquit, in porismatibus omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis.

Hæret iterum Bachetus & destitutus porismatibus Diophantæis, hanc quæstionem secundam determinatione indigere contendit, duorum quippè cuborum interuallum eâ tantum conditione in duos cubos diuidere docet dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Nam quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos ignotum sibi ingenuè profitetur. Nos supra ad quæstionem libri 4. secundam, & hanc & reliquas huius materiæ quæstiones generaliter construendi modum fæliciter deteximus.

IN QVAESTIONEM XIX.

HÆC propositio est de numero earum, quas vt ad nos peruenerunt, fateor me non satis assequi. Quamuis enim de illius solutione satis mihi constet, vt infrà patebit, duo tamen sunt quæ

totam eius tractationem valde imperfectam mihi videri faciunt. Primum enim licet ingeniosè inferat Diophantus inueniendos esse tres cubos, quorum quilibet sit vnitate minor, ita vt summa eorum à ternario sublata relinquat quadratum, vnde concludit curandum esse vt tres cubi simul sint vnitate minores, sic enim quilibet multo magis erit vnitate minor, quare sequitur quadratum qui relinquitur, summam cuborum auferendo à ternario, debere esse maiorem quàm 2. minorem quàm 3. licet inquam hæc subtiliter ediscerat Diophantus, non docet tamen quomodo talis inueniendus sit quadratus, & cur $2\frac{1}{4}$. sumat potiùs quàm alium quemlibet ex infinitis qui cadunt inter 1. & 3. Certè, vt ex processu apparet, talis deligendus est quadratus, quo à ternario sublato, relinquatur numerus ex tribus cubis compositus. Id ergo qui fieri possit arte certa, docere debuit Diophantus, neque enim in promptu est si loco quadrati $2\frac{1}{4}$. sumatur quadratus $2\frac{7}{9}$. quomodo residuum de 3. puta $\frac{2}{9}$. dinidi possit in tres cubos, eademque de alijs ratio. Quamobrem casu factum videtur, vt sumpserit author $2\frac{1}{4}$. quo de 3. sublato relinquitur $\frac{3}{4}$. ex tribus cubis compositus.

Deinde porisma, quod hîc assumitur, quale sit non est facile diuinare, cùm Græca Diophanti hoc loco mutila sint. Si verò libeat amplecti quod nostra versione exhibemus, sanè docuimus ad secundam quarti. Duorum cuborum interuallũ diuidi posse in duos cubos, dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Sed quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos, ignotum mihi adhuc. Nam nec operationes loco citato allatæ, nec canon ibidem traditus locum habent, cùm duplum minoris cubi excedit maiorem. Itaque penes eruditos iudicium esto, vtrum ex propositionis huius deprauatione huiusmodi difficultates ortum habeant, an verò ipsi Diophanto imputandæ sint, qui cùm fortè quadratum $2\frac{1}{4}$. inuenisset quo de 3. sublato supereſt $\frac{3}{4}$. compositus ex tribus cubis, arduum problema vt cumque potuit, explicauit, melioribus destitutus auxilijs. Nos quod supereſt, illius solutionem afferemus à Diophanto prætermissam. Quoniam diuidere oportet $\frac{3}{4}$. in tres cubos, reducatur ad denominatiom cubicam, puta ad $\frac{162}{216}$. Itaque cùm denominator sit cubus, supereſt vt numeratorem 162. diuidamus in tres cubos. Porro 162. componitur ex cubo 125. & ex 37. interuallo cuborum 27. & 64. Quare cùm duplum minoris non superet maiorem, poterit 37. diuidi in duos cubos per Canonem primæ earum quas ad secundam quarti attulimus. Quod fiet hoc pacto. Ducito ter vtrumque datorum cuborum in latus alterius, fient 324. & 576. quos diuide per summam cuborum, fiunt $\frac{324}{91}$. $\frac{576}{91}$. Tum aufer priorem à maiore latere 4. & aufer minus latus 3. à posteriore, remanent quæsitorum cuborum latera $\frac{40}{91}$. & $\frac{323}{91}$. sunt ergo cubi $\frac{64000}{753571}$. & $\frac{27818127}{753571}$. quorum summa 37. his ergo adnumerando 125. fit trium cuborum summa 162. vt ergo $\frac{162}{216}$. diuidatur in tres cubos, diuidemus sigillatim tres inuentos cubos per denominatorem 216. & fient quæsiti cubi $\frac{125}{216}$. $\frac{8000}{20346417}$. $\frac{1030301}{6028568}$. à lateribus $\frac{5}{6}$. $\frac{20}{273}$. $\frac{101}{182}$. & vnumquemque cubum auferendo ab vnitate, relinquuntur $\frac{91}{216}$. $\frac{203846417}{20346417}$. & $\frac{4998267}{6028568}$. Statuamus igitur quæsitorum numerorum summam 1 N. ipsos autem $\frac{91}{216}$ C. $\frac{203846417}{20346417}$ C. $\frac{4998267}{6028568}$ C. nam horum vnoquoque ab 1 C. detracto, relinquitur cubus, vnus scilicet ex tribus cubis suprà allatis. Supereſt vt horum summa sit 1 N. est autem $2\frac{1}{4}$ C. Igitur fit 1 N. $\frac{3}{13}$. cuius cubus $\frac{8}{27}$. suntque quæsiti numeri ad eandem denominationem redacti $\frac{185152}{148325}\frac{3947}{37993}$. $\frac{43930}{148325}\frac{98072}{37993}$. $\frac{23643}{148325}\frac{736643}{37993}$. quorum summa est vtique $\frac{3}{13}$. & auferendo vnumquemque à cubo summæ hoc est à $\frac{8}{27}$. seu à $\frac{4}{148325}\frac{394826072}{37993}$. relinquuntur cubi $\frac{2543302125}{148325}\frac{}{37993}$. $\frac{1728000}{148325}\frac{}{37993}$. $\frac{751089429}{148325}\frac{}{37993}$. quorum latera $\frac{1365}{2457}$. $\frac{120}{2457}$. $\frac{900}{2457}$.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τ τριῶν κύβος ἁρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ς^{ος} ᾱ. τοῦ δὲ τριῶν ὁ μὲν κ^{ος} β̄. ὁ δὲ κ^{ος} θ̄ ὁ δὲ κ^{ος} κη̄. λοιπὸν ὄξι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^{ῳ} ᾱ. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσὶ κύβοι λϑ̄. ὥστε κ^{ος} λϑ̄. ἴσοι ς^{ῳ} ᾱ. πάντα ἐφ' ἑ ς^{ν}. ὥστε δυνάμεις λϑ̄. ἴσαι μ^{οις} ᾱ. καὶ εἰ ἦσαν αἱ δυνάμεις λϑ̄. τετράγωνος, ἐλελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, ὄξι δὲ ὁ λϑ̄. τριῶν κύβων τὸ συνθεμα μ^{ῶν} μ^{οις} τριῶν. δεῖσῃ ἄρα εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὧν τὸ σύνθεμα μ^{ῶν} μ^{οις} γ̄. ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς^{ος} ᾱ. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ^{οις} γ̄. λείψει ς^{ος} ᾱ. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονάδων τινῶν. ἔστω δὴ μ^{οις} ᾱ. καὶ γίνεται τὸ

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum, à quolibet ipsorum detractus, cubum faciat. Ponatur rursus trium summa 1 N. ipsi autem 2 C. 9 C. 28 C. Reliquum est hos tres simul æquari 1 N. sed hi tres simul sunt 39 C. Igitur 39 C. æquantur 1 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 39 Q. æquantur 1. & si quadratorum numerus foret quadratus, soluta esset quæstio. Est autem 39. summa trium cuborum adiecto ternario. Oportet ergo inuenire tres cubos, quorum summa adiecto ternario faciat quadratum. Satuatur primi cubi latus 1 N. secundi 3 — 1 N. tertij quotlibet vnitatum,

ac sit 1. Itaque fit summa trium cuborum 9 Q. + 28 − 27 N. cui addendo 3. fit 9 Q. + 31 − 27 N. æquale quadrato à latere 3 N. − 7. & fit 1 N. $\frac{6}{5}$. Tantum est latus primi cubi, alterius verò latus est $\frac{9}{5}$. reliqui 1. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum addos 1. & venio ad propositum initio, statuo quemlibet totidem cuborum. Restat vt trium summa æquetur 1 N. fit autem summa trium 11 $\frac{14}{25}$ C. Hoc æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{17}$. Ad positiones.

σύνθεμα τῶν τειῶν κύβων. δ^α Δ̄. μ^ο κη̄. λείψει ς̄ς̄ κ̄ζ̄. ταῦτα μ̄ϛ̄ μ^ο γ̄. γίνεται δ^α θ̄. μ^ι λᾱ. λείψει ς̄ς̄ κ̄ζ̄. ἴσοι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ γ̄. λείψει μ^ο ζ̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ὸ μ^ο ϛ̄ ᵉ̄. [ἡ ὀρθὴ πλευρὰ τοῦ πρώτου κύβου] ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου θ̄ ᵉ̄. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονὰς α̅. καὶ τῷ ἀπὸ ἑκάστου τούτων κύβῳ συνέθεμαι μ^ο α̅. καὶ ἔρχομαι ὅπερ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον κύβων τοσούτων. λοιπὸν ὅτι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛ^ᾱͅ α̅. γίνονται οἱ τρεῖς κ^ῳ ια̅. ιδ̄ ᵉ̄. ταῦτα ἴσα ϛ^ᾱͅ α̅. ☾ γίνεται ὁ ς^ὸ ε ιϛ̄. ὅπερ ταῖς ὑποθέσεσι.

IN QVAESTIONEM XX.

MALE' assignat Xilander valorem Numeri $\frac{17}{5}$. cùm is sit $\frac{5}{17}$. nam à lateribus $\frac{5}{6}$. $\frac{9}{5}$ & 1. fiunt cubi $\frac{216}{125}$ $\frac{729}{125}$. & 1. quorum cuilibet si addatur vnitas, & præfigatur nota C. statuemus pro quæsitis numeris $\frac{341}{125}$ C. $\frac{854}{125}$ C. & 2 C. quorum summa fit $\frac{289}{25}$ C. æqualis 1 N. ac proinde $\frac{289}{25}$ æquatur vnitati, vnde fit 1 N. $\frac{5}{17}$. summa trium quæsitorum numerorum, suntque ipsi numeri $\frac{341}{4913}$. $\frac{854}{4913}$. $\frac{250}{4913}$. Nam si ab vnoquoque auferatur cubus summæ, puta $\frac{125}{4913}$ remanent cubi $\frac{216}{4913}$. $\frac{729}{4913}$. & $\frac{125}{4913}$. quorum latera $\frac{6}{17}$. $\frac{9}{17}$. $\frac{5}{17}$.

Præterea in soluendo lemmate quo quæruntur tres cubi, quorum summa adsumpto 3 faciat quadratum, non benè docet Xilander cur secundi cubi latus ponatur 3 − 1 N. ait enim suspectum esse binarium, eo quod in sequente propositione, vbi lemma propositum infinitè soluitur, necesse est valorem Numeri poni maiorem binario. Hoc verò ad præsentem quæstionem nil facit, vt ex iis quæ ad sequentem dicturi sumus apparebit. Et hîc non minus suspecti sunt 4. 5. 6. aliique infiniti, quàm 2. Talis enim ponendus est in latere secundi cubi vnitatum numerus, cuius triplum sit quadratus numerus. Patet enim ex iis quæ sæpè diximus de cubi efformatione, numerum quadratorum qui in hoc cubo reperietur gigni ex 1 Q. quadrato ex − 1 N. in triplum vnitatum adiunctarum. Necesse est autem hunc quadratorum numerum esse quadratum, alioquin quomodo fingi posset latus numeri 9 Q. + 31 − 27 N. si 9. quadratorum numerus non esset quadratus ? Oportet igitur vnitatum numerum qui statuitur in latere secundi cubi esse trientem alicuius quadrati, puta 3. vel 12. vel 27. & sic poterat hoc latus poni non solùm 3 − 1 N. sed etiam 12 − 1 N. vel 27. − 1 N. & sic aliis modis infinitis. Sed & in fingendo latere quadrati 9 Q. + 31 − 27 N. magna cautio est adhibenda. cum enim secundi cubi latus positum sit 3 − 1 N. euidens est 1 N. minorem esse debere ternario. Fiet autem valor Numeri fingendo latus quadrati 3 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 31. diuidendo scilicet harum vnitatum quadratum multatum numero 31. per sextuplum earundem multatum numero 27. Quare oportet $\frac{1\,Q-31}{6\,N-27}$ minorem esse ternario, vnde fit 1 Q − 31. minor quàm 18 N. − 81. & tandem 1 Q. + 50. minor quàm 18 N. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm 14 $\frac{3}{5}$. Ponentur ergo in latere fictitio tot vnitates, vt minores sint quàm 14 $\frac{3}{5}$ dum earum quadratus excedat 31. sic posuit Diophantus 7. & finxit quadratum à latere 3 N. − 7.

Itaque tripliciter variari possunt positiones. Primò enim in latere secundi cubi poni potest quilibet vnitatum numerus qui sit triens alicuius quadrati, vt docuimus.

Secundò pro latere tertij cubi poni potest quilibet vnitatum numerus.

Denique quadrati qui fit ex summa cuborum ternario aucta, latus diuersimodè fingi potest, vt in hypothesi Diophantæa statui poterit 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ non sint minores quàm 6. nec maiores quàm 14.

Cæterùm euidens est eodem prorsus artificio quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Etenim propositum sit inuenire quatuor numeros, vt cubus summæ, à quotlibet detractus, cubum relinquat. Prius ergo inuenientur quatuor cubi quorum summa quaternario aucta cubum faciat, esto primi latus 1 N. secundi 3 − 1 N. tertij 1. quarti 2. fiet summa cuborum quaternario aucta 9 Q. + 40 − 27 N. æqualis quadrato. Quod si Numeri quæras determinationem, inuenies quadrati latus fingendum 3 N. − tot vnitatibus quæ sint minores quàm 15 $\frac{1}{3}$ dum earum quadratus excedat 40. Fingatur ergo 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{3}{5}$ primi scilicet cubi latus, secundi verò latus erit $\frac{12}{5}$. $\frac{12}{5}$. tertij 1. quarti 2. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum adiicio 1. & præfigo notam C. & statuo quæsitos numeros $\frac{152}{125}$ C. $\frac{1853}{125}$ C. 2 C. 9 C. Restat vt trium summa æquetur 1 N. Igitur $\frac{676}{25}$ C. æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{26}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri $\frac{152}{17576}$. $\frac{1853}{17576}$. $\frac{25}{17576}$. $\frac{1125}{17576}$. quorum

ſumma $\frac{5}{26}$. cuius cubum $\frac{125}{17576}$. ſi auferas à quolibet ipſorum numerorum, remanent cubi $\frac{27}{17576}$; $\frac{1728}{7576}$. $\frac{125}{17576}$. $\frac{1000}{17576}$. à lateribus $\frac{9}{26}$. $\frac{12}{26}$. $\frac{5}{26}$. $\frac{10}{26}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῆς τριάδος ἵνα ᾖ τετράγωνος. δ̄ ᾱ. καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν κ̄ κ̄ γ̄. ὁ δὲ κ̄ κ̄ η̄. ὁ δὲ κ̄ κ̄ ιε̄. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, προσλαβόντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι τοὺς τρεῖς ἰσωθῆναι δ̄ ᾱ. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσὶ κ̄ κ̄ κ̄ς̄. ταῦτα ἴσα δ̄ ᾱ. καὶ πάντα πρὸς δύναμιν ᾱ. γίνονται δ̄ δ̄ κ̄ς̄. ἴσαι μ̄ ᾱ. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. ὥστε ἄρα δ̄ δ̄ κ̄ς̄. δεήσει εἶναι τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον. γέγονε δὴ τῶν εἰρημένων πλῆθος τῶν δυναμοδυνάμεων, ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος μετὰ μ̄ ᾱ. ποιεῖ τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ δύνασθαι τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος μετὰ μονάδος ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. ἔτι δὴ ὁ συγκείμενος ἐκ τῆς τριάδος ᾖ τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. τετάχθω εἷς τῶν ζητουμένων δ̄ δ̄ ᾱ. λείψει δ̄ β̄. ὁ δὴ ἕτερος δ̄ ᾱ. ς̄ς̄ β̄. ὁ δὲ λοιπὸς δ̄ ᾱ. λείψει ς̄ς̄ β̄. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μ̄ ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. ἔτι δὴ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον καὶ ἐν ἀορίστοις ἀριθμοῖς λέλυται τὸ ζητούμενον. ὑποκείσθω δὴ ὁ ς̄ μ̄ γ̄. ἔσαι ἄρα εἷς τῶν ζητουμένων μ̄ ξ̄γ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ιε̄. ὁ δὴ τρίτος μ̄ γ̄. ἀναπέρχομεν ὅπου τὸ ἀπ' ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς δ̄ ᾱ. τῶν δὴ ζητουμένων ὁ μὲν ἔσαι κ̄ κ̄ ξ̄γ̄. ὁ δὴ κ̄ κ̄ ιε̄. ὁ δὲ κ̄ κ̄ γ̄ λοιπὸν ὅτι τοὺς τρεῖς ἰσωθῆναι δυνάμει μιᾷ, καὶ γίνονται κυβόκυβοι πᾱ. ἴσοι δ̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ᾱ γ̄. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres numeros quadrato æquales, vt cubus ſummæ eorum adſumens vnumquemque, faciat quadratum. Ponatur ſumma trium, vt ſit quadratus 1 Q. & eorum qui quæruntur primus 3 C C. ſecundus 8 C C. tertius 15 C C. & contingit cubum ſummæ trium quolibet ipſorum adſumpto, facere quadratum. Reſtat vt tres ſimul æquentur 1 Q. ſed tres ſimul conficiunt 26 C C. Igitur 26 C C. æquantur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt 26 Q Q. æquales 1. Et vnitas quidem quadratus eſt latus habens quadratum, ergo & 26 Q Q. quadratum eſſe oportet latus habentem quadratum. Atqui multitudo iſta quadratoquadratorum è tribus conflata eſt numeris, quorum quiuis adiecta vnitate facit quadratum. Ergo inueniendi ſunt tres numeri, quorum quiuis adiecta vnitate faciat quadratum, porrò ſumma trium quadratus ſit latus habens quadratum. Ponatur vnus quæſitorum 1 Q Q. − 2 Q. alter 1 Q. + 2 N. reliquus 1 Q. − 2 N. & quiuis horum adſcita vnitate facit quadratum. Ac præterea trium ſumma eſt quadratus latus habens quadratum. Ita in numeris indefinitis ſoluta eſt quæſtio. Ponatur ergo 1 N. 3. Erit igitur vnus quæſitorum 63. ſecundus 15. tertius 3. Recurramus ad initio propoſitum, & ponamus rurſus trium ſummam 1 Q. Quæſitorum autem primus erit 63 C C. ſecundus 15 C C. tertius 3 C C. Reſtat vt trium ſumma æquetur 1 Q. & fiunt 81 C C. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Reliqua patent.

IN QVAESTIONEM XXI.

INGENIOSISSIME Diophantus ſoluit infinitè propoſitum lemma quo quæruntur tres quadrati vnitate deminuti, quorum ſumma ſit numerus quadratoquadratus. Cùm enim finxiſſet quadratum à latere 1 Q. − 1. puta 1 Q Q. − 2 Q. + 1. Inde ablata vnitate ſumit 1 Q Q. − 2 Q. pro primo quæſitorum. Tum verò ita ponit ſecundum & tertium, vt elidendo in additione tum quadratos, tum numeros, remaneat trium ſumma 1 Q Q. Ideo formans quadratos à lateribus 1 N. + 1. & 1 N. − 1. & à ſingulis auferendo 1. ponit ſecundum 1 Q. + 2 N. tertium 1 Q. − 2 N. quorum ſumma 2 Q. quæ addita primo, hoc eſt ad 1 Q Q. − 2 Q. fit vtique trium ſumma 1 Q Q. Itaque indefinitè ſoluta eſt quæſtio, & pro valore Numeri ſumi poteſt quilibet numerus maior quàm 2.

quia enim tertius positus est 1 Q. – 2 N. patet 1 Q. maiorem esse debere quàm 2 N. seu quod idem est 1 N. maiorem esse debere quàm 2. Hinc porro liquet quæstionem infinitas recipere solutiones. Possunt etiam ipsæ lemmatis positiones variari vt libet, dum formetur quadratus à quolibet Quadratorum numero quadrato – 1. Verbi gratia, formetur à 4 Q. – 1. erit quadratus 16 QQ. – 8 Q. + 1. vnde ablata vnitate statuetur primus 16 QQ. – 8 Q. ac proinde secundus 4 Q. + 4 N. tertius 4 Q. – 4 N. vt sit trium summa 16 QQ.

Restat vt solutionem quæstionis proferamus quam omisit Diophantus. Inuentis numeris 63. 15. 3. soluentibus lemma propositum. Recurro ad initium & pono trium quæsitorum numerorum summam 1 Q. ipsos verò 63 C C. 15 C C. 3 C C. quorum summa fit 81 C C. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{1}{3}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{63}{729}$. $\frac{15}{729}$. $\frac{3}{729}$. quorum summa $\frac{1}{9}$ quadratus vt postulabatur, cuius cubus $\frac{1}{729}$ quem addendo singulis numeris, fiunt quadrati $\frac{64}{729}$. $\frac{16}{729}$. $\frac{4}{729}$. à lateribus $\frac{8}{27}$. $\frac{4}{27}$. $\frac{2}{27}$.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet sigillatim detracto, quadratum faciat. Rursus diuidendus est binarius vt prius. Porrò binarij cubus est 8. Proinde oportet à 8. vnumquemque detrahere, & facere quadratum. Oportet igitur 22. diuidere in tres quadratos, quorum quilibet maior sit quàm 6. Et si abs 8. quemlibet detrahamus, inueniemus tres quæsitos numeros. Est autem iam ostensum quomodo oporteat diuidere 22. in tres quadratos, quorum quilibet sit maior senario.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς, ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς συγκειμένων ἐκ τῆς τειῶν κύβων β λείψει ἕκαστον αὐτῆς ποιῆ τετράγωνον. καὶ γίνεται ἡμῖν πάλιν τὸν β διελεῖν ὡς ἡ προτέρων. ἡ ἔστιν ὁ ἐκ τῶ δευτέρου ψ̄ κ̄ μονάδας η̄. δεῖ οὖν ἀπὸ μ̄ η̄. ἀφελεῖν ἕκαστον, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δέησ οὖν ἡ κβ διελεῖν εἰς ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῆς μείζων ἦ μ̄ ϛ̄. ἡ ἐὰν ἀπὸ μ̄ η̄. ἀφωμὲν ἕκαστον τούτων, διήσομεν τὰς ζητουμένους ἀριθμὰς ξεῖς. τὸ δὲ προειδείχθη πῶς δεῖ τ̀ κϛ̄ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῆς μείζων ἦ μ̄ ϛ̄.

IN QVAESTIONEM XXII.

QVAM malè affectus sit hoc loco Diophantus, æquo lectori æstimandum relinquo, vbi nec solutio ponitur, nec operatio propositioni respondet, & quæstiones aliquot integras desiderari satis indicant verba illa. *Rursus diuidendus est binarius vt prius.* in qua enim superiorum quæstionum locutus est Diophantus de huiusmodi binarij diuisione? Itaque quantum certissimis coniecturis assequi possum, existimo hîc tres omnino quæstiones intercidisse, in quibus binarij diuisione vtendum fuit, & quarum cum ista magna erat affinitas, vt facilè hinc erroris ansam nactus sit imperitus librarius. Age igitur immeritò solum vertere iussas quæstiones, ab exilio reuocemus.

QVÆSTIO PRIMA.

Inueniantur tres numeri quadrato æquales, vt cubus summæ eorum singulis seorsim detractis, quadratum relinquat.

Statuatur summa numerorum 1 Q. vt sit quadratus. Ipsi vero numeri sint $\frac{3}{4}$ C C. $\frac{8}{9}$ C C $\frac{15}{16}$ C C. sic enim quolibet à cubo summæ detracto, relinquitur quadratus. Supereſt vt trium summa, puta $\frac{371}{144}$ C C. æquetur 1 Q. vnde tandem fit $\frac{371}{144}$ QQ. æqualis vnitati. Oporteret ergo numerum Quadratoquadratorum esse quadratum. At quadratoquadratorum numerus est summa trium numerorum, quorum quilibet ab vnitate detractus relinquit quadratum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres numeros, quorum singuli vnitate sint minores, & quorum summa sit numerus quadratoquadratus, quaque à ternario sublata relinquantur tres quadrati minores singuli vnitate. Vt ergo singuli trium numerorum sint minores vnitate, & eorum summa sit numerus Quadratoquadratus, ponatur eorum summa 1. Igitur reliquorum trium quadratorum summa erit 2. Quare supereſt vt diuidamus 2. in tres quadratos, quorum quilibet sit vnitate minor. Id autem facilè fit per ea quæ ostensa sunt ac decimam quartam huius, suntque huiusmodi quadrati $\frac{16}{25}$ $\frac{71289}{105625}$ $\frac{72361}{105625}$. & quolibet ab vnitate sublato, supersunt quæsiti numeri $\frac{9}{25}$. $\frac{34336}{105625}$. & $\frac{33264}{105625}$. Posita ergo summa numerorum 1 Q. ponantur ipsi numeri $\frac{9}{25}$ C C. $\frac{34336}{105625}$ C C. $\frac{33264}{105625}$ C C. Supereſt vt horum summa puta 1 C C. æquetur 1 Q. vnde fit 1 N. 1. suntque quæsiti numeri ipsi $\frac{9}{25}$. $\frac{34336}{105625}$. $\frac{33264}{105625}$.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres numeros quadrato æquales, vt cubus summæ illorum à quolibet detractus quadratum relinquat.

Esto summa trium numerorum 1 Q. Ipsi verò sint 2 C C. 5 C C. 10 C C. vt auferendo à singulis cubum summæ, remaneant quadrati. Restat vt trium summa sit 1 Q. est autem 17 C C. ergo tandem 17 Q Q. æquantur 1. Oporteret igitur 17. esse quadratoquadratum. Atqui 17. est summa trium quadratorum vnitate auctorum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres quadratos, quorum summa ternario aucta, conficiat quadratoquadratum. Id verò nil aliud est quàm à quouis quadratoquadrato auferre ternarium, & residuum diuidere in tres quadratos. Sumatur ergo quadratoquadratus 16. cùm is ternario detracto relinquat 13. oportet diuidere 13. in tres quadratos. Sunt autem $9. \frac{36}{25}. \frac{64}{25}.$ quibus sigillatim addendo 1. statuemus eos in cubocubis, eritque primus quæsitorum 10 C C. secundus $\frac{61}{25}$ C C. tertius $\frac{89}{25}$. C C. Quorum summa 16 C C. æquatur 1 Q. vnde fit 1 N $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri sub eadem denominatione $\frac{250}{1600}. \frac{61}{1600}. \frac{89}{1600}.$ quorum summa $\frac{1}{4}$. quadratus est, & eius cubus $\frac{1}{64}$. detractus à quolibet numerorum, relinquit quadratos $\frac{9}{64}. \frac{9}{400}. \frac{\epsilon}{25}.$

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet adiecto, fiat quadratus. Sit datus numerus 2.

Oportet igitur diuidere 2. in tres partes, vt cuilibet addendo 8. fiat quadratus. Quamobrem eo res rediit vt diuidamus 26. qui fit ex triplo ipsius 8. adsumente binarium, in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 8. Hoc autem quî fieri possit iam ostensum est. Suntque tres quadrati $9. \frac{1038361}{121801}. \frac{1032256}{121801}.$ à quibus sigillatim auferendo 8. restant quæsitæ binarij partes. 1. $\frac{63953}{121801}. \frac{57848}{121801}.$

Sanè post hanc quæstionem, rectè subiici vigesimam secundam Diophanti, vt eam versione nostra expressimus, res ipsa clamat, cùm in ea binarius simili ratione diuidendus proponatur, additione in subtractionem mutata. Sed & numerus 22. in textu Græco manifestè habetur, quamuis deinde incuria librarij mutetur in 26. Nam Græca Diophanti verba vt habentur in codice Regio exhibuimus, quô coniectura nostra omnibus euidentior appareat, cùm ex nostra versione mendas omnes tollere facile sit. Cæterùm operatio Diophanti satis est perspicua, quia enim à cubo 8. auferendæ sunt sigillatim tres binarij partes, ita vt semper remaneat quadratus, cùm hoc idem sit atque à triplo ipsius 8. puta à 24. auferre binarium, rectè infertur numerum 22. esse diuidendum in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 6. minor autem quàm 8. Hoc vt prestem sumo trientem de 22. puta $7\frac{1}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{576}$. & fit quadratus $\frac{4225}{576}$. à latere $\frac{65}{24}$. Oportet ergo ita diuidere 22. in tres quadratos, vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{65}{24}$. Diuiditur autem suaptè natura in tres quadratos, quorum latera 3. 3. 2. Quare per adæqualitatem fingentur quæsitorum] quadratorum latera $3 - 7$ N. $3 - 7$ N. $2 + 17$ N. estque summa quadratorum 22. $+ 387$ Q $- 16$ N. æqualis 22. vnde fit 1 N. $\frac{16}{387}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{1049}{387}$ $\frac{1049}{387}. \frac{1046}{387}.$ ipsi quadrati $\frac{1100401}{149769}. \frac{1100401}{149769}. \frac{1094116}{149769}.$ quos si auferas sigillatim à 8. supersunt quæsitæ binarij partes, nimirum $\frac{97751}{149769}. \frac{97741}{149769}. \frac{104036}{149769}.$

QVÆSTIO XXIII.

Τὸ δοθὲν μόριον διελεῖν εἰς τρία μόρια, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν λείψαν τὸν ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν τειῶν κύβον, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ δοθὲν μόριον μ̊ α δ̊. καὶ δεῖ ἔστω τὸ α δ̊. διελεῖν εἰς τρία μόρια καθὼς ἐτάχθη. ὥστε δέκατ ἕκαστον αὐτῶν λείψει μ̊ α ξδ̊. ποιεῖν τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς λείψει μ̊ γ ξδ̊. ποιεῖν τρεῖς τετραγώνους. καὶ ἐπὶ ἑκάστῳ τῶν τετραγώνων προτεθῶσαν α ξδ̊. διῃρήσθω ἕκαστον τῶν ζητουμένων. τοῦτο δ' ῥᾴδιον. ἔρχεται δὲ τὰ ιζ ξδ̊. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπερ ὅτι ῥᾴδιον.

DATAM partem diuidere in tres partes, vt quælibet detracto cubo summæ ipsarum, faciat quadratum. Esto data pars $\frac{1}{4}$. & opus sit diuidere $\frac{1}{4}$ in tres partes, vt imperatum est. Oportet igitur quamlibet ipsarum, detracta $\frac{1}{64}$ facere quadratum. Proinde tres simul detractis $\frac{3}{64}$ faciunt tres quadratos. Et si cuiuis trium quadratorum addamus $\frac{1}{64}$. inueniemus singulos quæsitorum. Hoc autem facile est. Eo enim res rediit vt $\frac{13}{64}$ diuidamus in tres quadratos, quod est factu facile.

IN QVAESTIONEM XXIII.

HÆc quæstio non parum confirmat sententiam nostram de præcedente. Nam cùm in illa propositum sit datum numerum diuidere in tres partes, quarum quælibet à cubo summæ detracta quadratum relinquat. Hîc è conuerso postulatur, vt datus numerus sic diuidatur in tres partes, vt à qualibet auferendo cubum summæ remaneat quadratus. Quia verò non potest cubus summæ esse minor qualibet partium, nisi in fractis tales numeri exhibeantur (cùm in integris quilibet cubus suo latere sit maior.) Idcirco proposuit Diophantus datam partem diuidere, non autem datum numerum. Est autem operatio facilis, & quæ ex dictis ad præcedentes nullo negotio intelligatur. Cùm enim tres partes quæsitæ simul faciant $\frac{1}{4}$. Et à singulis auferri debeat $\frac{1}{64}$. patet hoc idem esse atque si ab $\frac{1}{4}$. seu à $\frac{16}{64}$. auferantur $\frac{3}{64}$. vnde restat $\frac{13}{64}$. diuidendus in tres quadratos, quod facilè fit quia componitur ex duobus $\frac{9}{64}$. & $\frac{4}{64}$. quorum altero puta $\frac{4}{64}$. diuiso in duos quadratos $\frac{9}{400}$. & $\frac{16}{400}$. habemus totum $\frac{13}{64}$. diuisum in tres quadratos, qui sub eadem denominatione sunt $\frac{225}{1600}$. $\frac{36}{1600}$. $\frac{64}{1600}$. & si addatur singulis $\frac{1}{64}$. seu $\frac{25}{1600}$. sunt quæsiti numeri $\frac{250}{1600}$. $\frac{61}{1600}$. $\frac{89}{1600}$. quorum summa $\frac{1}{4}$. & si à quolibet auferatur $\frac{1}{64}$. remanent prius inuenti quadrati.

Porrò & hæc & præcedens, aliæque quas ad præcedentem attulimus ad quotlibet numeros extendi possunt, & omnes sub tribus vniuersalissimis propositionibus comprehendentur, nimirum.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes quarum quælibet adsumpto dato numero, quadratum faciat.

Explicata est à nobis ad decimam quartam huius.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt auferendo quamlibet à dato numero, supersit quadratus. Oportet autem numerum à quo fit subtractio maiorem esse ea parte diuidendi numeri, quæ denominatur à numero multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 12. in quatuor partes, quarum quælibet detracta de 5. relinquat quadratum. Cùm ergo auferendo 12. à quadruplo ipsius 5. puta à 20. supersit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 5. Diuiditur autem 8. in duos quadratos 4. 4. quare diuiso 4. bis in duos quadratos, res expedietur. Erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{36}{25}$. $\frac{64}{25}$. $\frac{100}{169}$. $\frac{576}{169}$. quos si auferas sigillatim à quinario, remanent numeri 12. partes quatuor quæsitæ $\frac{89}{25}$. $\frac{91}{25}$. $\frac{745}{169}$. $\frac{269}{169}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt à qualibet auferendo datum numerum supersit quadratus. Oportet autem ablatitium numerum minorem esse ea parte diuidendi numeri, quam exprimit numerus multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 20. in quatuor partes, vt à qualibet auferendo 3. supersit quadratus. Quia quadruplum ipsius 3. puta 12. ablatum de 20. relinquit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos quoscunque, cuilibet addendo 3. fient quæsitæ partes numeri 20. Sumantur ergo quadrati ad præcedentem allati, & cuilibet addatur 3. fient numeri 20. quæsitæ partes $\frac{111}{25}$. $\frac{139}{25}$ $\frac{607}{169}$. $\frac{1083}{169}$.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quouis ipsorum adscito quadratum faciat. Ponatur solidus ille 1 Q. & quærantur tres quadrati, quorum quilibet adscita vnitate faciat quadratum. Hoc autem peti potest à quouis triangulo rectangulo. Expono tria triangula rectangula, & accipiens quadratum vnius laterum circa rectum, diuido

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς δῦ α̅. καὶ ζητοῦμεν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ μονάδος α̅. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἀπὸ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. ἐκτίθεμαι τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον μερίζω εἰς τὸν ἀπὸ τῆς λοιπῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν. καὶ εὑρήσομεν

τὰς τετραγώνους. ἕνα μὲν δ͞υ ϑ͞ ι͞ ς͞. τὸν δὲ ἕτερον δ͞υ κε͞ μ͞δ͞. τὸν δὲ τρίτον δ͞υ ξδ͞ ο͞κ͞ε͞. καὶ μιᾷ ἑκάστος αὐτῶν μ͞ δ͞υ ᾱ͞. ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι ἡ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι δ͞υ ᾱ͞. γίνεται ἡ ὁ ἐκ τριῶν στερεὸς κ͞υ κ͞υ ᾱ͞. δ͞υ ͵α͞ ͵υ͞. ταῦτα ἴσα δ͞υ ᾱ͞. κὴ πάντα εἰς τὸ αὐτὸ μόριον, καὶ ἀφαιρὰ δύναμιν γίνεται δ͞υ δ͞υ ᾱ͞. δ͞υ. ͵α͞ ͵υ͞. ἴσα μ͞ ᾱ͞. κὴ ἡ πλευρὰ τῆς πλευρᾶς γίνεται δ͞υ ρ͞κ͞ ψ͞. ἴσα μ͞ ᾱ͞. κὴ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος, εἰ ὧν τετράγωνος, καὶ τὰ δ͞υ ρ͞κ͞ ψ͞. λελυμένον ἂν ὧν τὸ ζητούμενον, ἐκ ἔστιν δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ δύρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ἐκ τῆς τριῶν καθ᾽ἑαυτὴν στερεὸς πολλαπλασιαθεὶς ὅτι τὸν ἐκ τῶν βάσεων αὐτῆς στερεὸν ποιῇ τετράγωνον. ✻ πλευρὰν ἔχοντα τὸν ὑπὸ τῆς φεὶ τῶν ὀρθῶν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων. κὴ ἐὰν πάντα φαβάλωμεν φαὶ τὸν ὑπὸ τῆς φεὶ τὸ ὀρθῶν τῷ δύρημένῳ ὀρθογωνίου γνήσεται ὁ ὑπὸ τῆς φεὶ τῶν ὀρθῶν τῷ ᾱ δ᾽ ὅτι τὸν φεὶ τῶν ὀρθῶν τῷ ἑτέρου τῆς τριγώνων, καὶ ἐὰν τάξωμεν ἓν αὐτῆς γ͞. δ͞. ε͞. ἀπάγεται εἰς τὸ δύρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ὑπὸ τῆς φεὶ τῶν ὀρθῶν τῷ ὑπὸ τῆς φεὶ τῶν ὀρθῶν ἢ ϛ͞ ιβ͞. ὥστε καὶ ἑμβαδὸν ἑμβάδι ιβ͞ εἰδὲ ιβ͞. κὴ ιγ͞. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον κὴ ἔστιν ὅμοιον τῷ ο͞ζ͞. μ͞. μ͞κ͞. τὸ δὲ ἕτερον ε͞. ιβ͞. ιγ͞. ἔχοντες οὖν τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἐρχόμεθα εἰς τὸ ὃξ ἀρχῆς. τάσσομεν τῆς ζητουμένων τριῶν τετραγώνων, ἓν μὲν θ͞. ὃν δὲ κε͞. ὃν δὲ πᾱ͞. κὴ ἐὰν τὸν ἐκ τῆς δ͞. ε͞. στερεὸν ἰσώσωμεν δ͞υ ᾱ͞. γνήσεται ὁ ῥητὸς, ὅτι τὰς ὑποτάσεις.✻

* Legendum est 8. 15. 17.

eum per quadratum alterius laterum circa rectum, & inuenio quadratos, vnum $\frac{9}{16}$ Q. alterum $\frac{25}{144}$ Q. tertium $\frac{64}{225}$ Q. & quilibet ipsorum cum 1 Q. facit quadratum. Restat vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. Est autem solidus ille $\frac{14400}{518400}$ CC. hoc æquatur 1 Q. & omnia ad eundem denominatorem reducendo, & diuidendo per 1 Q. fiunt $\frac{14400}{518400}$ QQ. æqualia 1. & latus lateri æquatur, fitque $\frac{120}{720}$ Q. æquale 1. Est autem vnitas quadratus. Quod si etiam $\frac{120}{720}$ Q. quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Non est autem. Eò igitur redactus sum, vt inueniam tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub basibus faciat quadratum, ✻ cuius latus sit numerus multiplicatione ortus laterum circa rectum vnius triangulorum. Et si omnia diuiserimus per productum ex lateribus circa rectum inuenti rectanguli, orietur qui sit ex producto laterum circa rectum secundi, in productum laterum circa rectum alterius triangulorum. Et si vnum ipsorum statuamus 3. 4. 5. Eò deuentum est vt inueniantur duo triangula rectangula, vt productus ex lateribus circa rectum producti ex lateribus circa rectum sit 12 N. Proinde & area areæ 12. si autem 12. & 3. Hoc autem facile est, & est simile huic 9. 40. 41. Alterum ✻ 5. 12. 13. Habentes ergo tria triangula rectangula, reuertamur ad initiò propositum. Et statuamus trium quæsitorum quadratorum, alterum 9. alterum 25. tertium 81. & si solidum ex his æquemus 1 Q. fiet 1 N. rationalis. Ad positiones. ✻

IN QVAESTIONEM XXIV.

VIX scio an elegantiora & subtiliora problemata, tribus quæ sequuntur, excogitari possint, ea tamen tam miserè corrupta sunt, vt hîc omni ex parte restituere Diophantum, humani, vt arbitror, vires superet ingenij, nisi quis emendatiorem proferat codicem. Equidem satis apparet ad huius quæstionis solutionem requiri vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. At in duabus sequentibus inuenienda esse tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. Quomodo autem hæc lemmata expediat Diophantus percipere minimè potui. Quoniam verò nos ea perfectè demonstrauimus libro tertio porismatum, & reliqua Diophanti operatio perspicua est, verba illius quæ sanitati restitui poterant, reposuimus, reliqua vt erant relinquere malui, quàm in iis corrigendis diutius animum torquere. Moneo tantùm verba illa, κὴ ἔστιν ὅμοιον τῷ ο͞ζ͞. μ͞. μ͞α͞. in Vaticano codice sic haberi, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ ϑ͞. μ͞. μ͞α͞. Quam lectionem vt pote probabiliorem, sequutus sum in mea versione, verè enim numeri 9. 40. 41. constituunt triangulum rectangulum, quod non accidit ipsis 79. 40. 41.

Porrò multa sunt hîc obseruatione digna. Primò, vt inueniat quadratum qui adscita vnitate faciat quadratum, sumit Diophantus latera trianguli rectanguli, & quadratum baseos diuidit per quadratum perpendiculi. Vt ex positis 3. 4. 5. diuidendo 9. per 16. fit $\frac{9}{16}$. quadratus quæsitus, nam illi

illi addendo 1. fit $\frac{25}{16}$. item quadratus. Cuius rei causa satis est euidens. Nam quolibet numero per seipsum diuiso, quotiens est vnitas. Quare propositis quadratis 9. & 16. quorum summa quadratum facit, puta 25. si alter per alterum diuidatur vt 16. per 9. fit $\frac{9}{16}$. cui addendo $\frac{16}{16}$. seu vnitatem, quadratum fieri necesse est. Cùm enim fractiones sint eiusdem denominationis, sufficit addere numeratores, denominatore communi retento. At numeratores ex hypothesi faciunt quadratum. Quare cùm & denominator sit quadratus erit tota fractio $\frac{25}{16}$. quadratus, vt patet. Aduerte autem si velis tres diuersos quadratos, quorum singuli adscita vnitate, faciant quadratum; sumenda esse tria triangula rectangula non similia, qualia reposuimus in textu Diophanti; nam si sumantur similia triangula, & quadrati laterum homologorum diuidantur per quadratos homologorum laterum, fiet idem quotiens, vt sumptis triangulis 3. 4. 5. & 6. 8. 10. diuiso 9. per 16. & 36. per 64. æquales fiunt quotientes $\frac{9}{16}$. & $\frac{36}{64}$. Quod accidit ob similitudinem proportionum.

Secundò expositis tribus triangulis 3. 4. 5. 5. 12. 13. & 8. 15. 17. diuiduntur basium quadrati per quadratos perpendiculorum, fiuntque quadrati $\frac{9}{16}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{64}{225}$. qui nota Q. insigniti statuuntur pro tribus quæsitis numeris, quia sic quilibet adsumens 1 Q. facit quadratum. Porrò solidus sub iis contentus, fractio est, cuius numerator 14400. fit ex mutua multiplicatione numeratorum 9. 25. 64. At denominator 518400 fit ex denominatorum 16. 144. 225. mutuo ductu. Est ergo huiusmodi solidus $\frac{14400}{518400}$. Quia verò numeri ex mutua quadratorum multiplicatione orti, quadrati sunt, quorum latera fiunt ex mutuo ductu laterum quadratorum eorundem, patet 14400. esse quadratum numeri 120. qui fit ex mutuo ductu basium trium triangulorum expositorum, nempè 3. 5. 8. similiter 518400. est quadratus numeri 720. qui continetur sub perpendiculis 4. 12. 15. vnde cùm tandem $\frac{120}{720}$ Q. æquentur vnitati, & euidens sit vt solutio contingat rationalis oportere ipsum $\frac{120}{720}$. esse quadratum, hoc est 120. ad 720. rationem esse debere quæ quadrati ad quadratum: Rectè infert Diophantus rem eò deductam esse, vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub basibus ad solidum sub perpendiculis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Tertiò lemma propositum sic absoluimus propositione vndecima libri tertij porismatum. Exponatur quodlibet triangulum rectangulum 3. 4. 5. & effingantur alia duo triangula ab hypotenusa expositi trianguli, & à quolibet laterum circa rectum modo quem tradidimus quinta tertij porismatum, fiet à 5. & 4. triangulum 9. 40. 41. At verò à 5. & 3. formabitur triangulum 16. 30. 34. Tria ergo hæc triangula satisfacient proposito, nam solidus sub perpendiculis 3. 9. 16. puta 432. ad 4800. solidum sub basibus rationem habet quàm 9. ad 100. Licétque vt monuimus in scholio vndecimæ tertij porismatum, loco cuiuslibet inuentorum triangulorum, sumere aliud simile: vt loco ipsius 16. 30. 34. sumi potest 8. 15. 17. quod sanè cum aliis duobus propositum absoluit.

Denique his inuentis triangulis sic explicatur quæstio Diophanti, diuido quadratos basium per quadratos perpendiculorum, & quotientibus addo notam Q. fiunt quæsiti numeri $\frac{9}{16}$ Q. $\frac{81}{1690}$ Q. & $\frac{64}{225}$ Q. & solidus sub iis contentus, puta $\frac{46656}{576000}$ C C. æquatur 1 Q. & tandem $\frac{46656}{576000}$ Q Q. æquatur 1. ac proinde & latus lateri æquale est, hoc est $\frac{216}{2400}$ Q. seu in minimis $\frac{9}{100}$. æquatur vnitati. Quare fit 1 N. $\frac{10}{3}$. sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. quorum mutuo ductu fit solidus $\frac{100}{9}$. cui si addantur figillatim ipsi quadrati, fiunt rursus quadrati $\frac{625}{36}$. $\frac{1681}{144}$. $\frac{1156}{81}$. quorum latera $\frac{25}{6}$. $\frac{41}{12}$. $\frac{34}{9}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Methodum Diophanti quam non percipit Bachetus ita restituo, & explico. Quoniam primum triangulum est 3. 4. 5. & rectangulum sub lateribus 12. eò deuentum est, inquit Diophantus, vt inueniantur duo triangula vt productus ex lateribus circa rectum, producti ex lateribus circa rectum sit duodecuplus (& ratio est quia tunc productum ex lateribus vnius in productum ex lateribus alterius producet numerum qui erit planus similis 12 atque ideo eorum mutuâ multiplicatione fiet quadratus, quod vult propositio) sequitur Diophantus, proinde & area areæ 12. quod per se clarum est. Deinde (si autem 12 & 3) quia diuidendo 12. per quadratum 4 fit 3. & semper in multiplicatione oritur quadratum, nam quadratum diuisum per quadratum facit quadratum. Reliqua Diophanti non præstant propositum, sed ita restituemus. In hoc casu fingatur triangulum abs 7. & 2. alterum vero abs 5. & 2. & primum triangulorum erit triplum ad secundum, & duo proposito satisfacient. Regula autem generalis inueniendi duo triangula rectangula in ratione datâ hæc est. Sit data ratio R. ad S. maioris ad minus, maius triangulum formabitur abs R bis + S & R. − S. Minus vero abs R. + S. bis & R. − S. aliter. Formetur primum triangulum abs R bis − S & R + S. secundum abs S bis − R. & R + S. aliter. Formetur

primum triangulum abs R sexies Et R bis — S, secundum abs R quater + S & R quater — S. bis, aliter formetur primum triangulum abs R + S. quater & R bis — S quater, secundum abs S. sexies & R — S bis, Ex iam dictis deduci potest methodus inueniendi tria triangula rectangula in proportione trium datorum numerorum modo duo dati numeri reliqui sint quadrupli, sint v. g. dati tres numeri R S. T & sint ipsi R. T. simul quadrupli S. formabuntur sic tria triangula.

Primum abs R + S. quater & R bis — S quater, secundum abs S. sexies & R — S bis, tertium abs S quater + T & S quater — T bis. sumpsimus autem R esse maiorem T.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula rectangula numero quorum areæ constituant triangulum rectangulum, eò enim deducetur quæstio vt inueniatur triangulum cuius basis & hypotenusa sint quadrupla perpendiculi. Hoc autem est facile & erit triangulum simile huic 17. 15. 8 tria verò triangula sic formabuntur, primum abs 49. & 2. secundum abs 47. & 2. tertium abs 48 & 1.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula quorum areæ sint in ratione trium quadratorum datorum quorum duo sint quadrupli reliqui ac proinde poterunt eâdem viâ inueniri tria triangula eiusdem areæ.

Imò & infinitis modis possumus construere duo triangula rectangula in data ratione ducendo vnum ex terminis aut vtrumque in quadrata data &c.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐπ τούτων στερεὸς λείψας ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δ^{υ} ᾶ. καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων. ἑνὸς μὲν ις^{ες}. τοῦ δὲ ἑτέρου κε ρξθ^{ες}. τοῦ δὲ ξδ^{ους} τπθ. τάσσω αὐτοὺς ἐν δυνάμει, καὶ μιᾷ ἡ δ^{υ} ᾶ λείψει ἑκάστου αὐτῶν ποιοῦσα τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι τὸν ἐπ τῶν τειῶν στερεὸν ἰσῶται δωδάμει ᾶ. καὶ ἔστιν ὁ ἐπ τ τειῶν στερεὸς κυβοκύβων β. ,εχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,απε. ταῦτα ἴσα δωδάμει ᾶ. ℂ πάντα τὰ δυνάμεις μίαν γίνεται δ^{υ} δ^{υ} β. ,εχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,απε. ἴσα μ^{ᾶ} ᾶ. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχουσα τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ δ^{υ} δ^{υ} β. ,εχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,απε. εἶναι τετράγωνον, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ δύρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐπ τ καθετῶν στερεὸς πολλαπλασιαθεὶς ὅτι τὸν ἐπ τ ὑποτεινουσῶν στερεὸν, ποιῇ τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, ✻ καὶ ἐὰν πάντα τὰ δὶς βάλωμεν τὰ τὸν τῆς ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἑνὸς τ ὀρθογωνίων, δεήσει τῶν ὑποτεινουσῶν καὶ καθέτων τῆς ὑποτεινούσης, ℂ καθέτου πολλαπλασιαθέντα καὶ τὸν ὑποτεινούσης ℂ καθέτου ὀρθογώνου τινὸς, ἔστω τὸ ἓν τ ὀρθογώνιον γ. δ. ε. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ δύρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου τῆς ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου ἡ κ. εἰδὲ κ. καὶ ε. καὶ ἔστι ῥάδιον, καὶ ἔστι τὸ μὲν μεῖζον ε. ιβ. ιγ.

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quolibet ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur solidus sub ipsis contentus 1 Q. & rursus quadrati qui quæruntur, sumantur ex triangulis rectangulis, vnus à $\frac{16}{15}$. alter à $\frac{25}{169}$. tertius à $\frac{64}{225}$. statuo eos in quadratis, & manet 1 Q. quolibet ipsorum detracto, faciens quadratum. Supereſt vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. est autem solidus ille $\frac{25600}{1221025}$ C C. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt $\frac{25600}{1221025}$ QQ. æqualia 1. Est autem vnitas quadratus, latus habens quadratum. Ergo oportebat etiam $\frac{25600}{1221025}$ QQ. esse quadratum latus habentem quadratum. Rursus itaque res eò est reducta vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub hypotenusis faciat quadratum, qui latus habeat quadratum ✻. Et si omnia diuidamus per productum ex hypotenusa in perpendiculum vnius rectangulorum, oportet oriatur qui fit ex producto hypotenusæ in perpendiculum, alicuius rectanguli, in productum ex hypotenusa in perpendiculum alterius, esto vnum rectangulorum 3. 4. 5. Eò itaque deuentum est, vt inueniantur duo triangula rectangula, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi,

numeri hypotenusæ & perpendiculi sit 20. si autem 20. & 5. & est facile, quippe maius est 5. 12. 13. minus 3. 4. 5. Ab his ergo quærenda sunt alia duo, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi sit 6. est autem maioris hypotenusa $6\frac{1}{2}$. perpendiculum 60. Minoris autem hypotenusa $2\frac{1}{2}$. qui verò in vno rectangulorum 12. & accipientes minima similium, recurrimus ad propositum initio, & ponimus solidum sub tribus contentum 1 Q. ipsorum autem quadratorum alterum 16 Q. alterum 576 Q. tertium $\frac{1}{281961}$ Q. superest vt solidus sub tribus, æquetur 1 Q. & omnia in 1 Q. latusque lateri æquetur, & inuenietur 1 N. 65. Ad positiones. *

τὸ δὲ ἐλάττον γ̄. δ̄. ε̄. ζητητέον οὖν ἀπὸ ζύτων ἕτερα δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἢ μ̊ ς̄. ἔστι δὴ τῶ μὲν μείζονι ὑποτείνουσα μ̊ ς̄. ᾱ ᶜ ᶜ. ἡ δὲ κάθετος ξ̄. τῷ δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μ̊ β̄. ᾱ ᶜ ᶜ ὁ δὲ ἐν τῇ ᾱ. τ̄ ὀρθογώνων ιβ̄. καὶ λαβόντες τὰ ἐλάχιστα τ̄ ὁμοίων ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τ̄ ἐκ τ̄ τειῶν στερεὸν δ̄ ᾱ. αὐτῷ δὴ τῷ τετραγώνων ὧν μὲν δ̄ ις̄. ὧν δὲ δ̄ φος̄. ὧν δὴ δ̄ ᾱ. ἐν μερίῳ β̄. ηφξᾱ. λοιπὸν ὄστ τὸν ἐκ τ̄ τειῶν στερεὸν ἰσῶσαι δ̄ ᾱ. ☾ πάντα ὡδὶ δυναμιν καὶ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ. καὶ διρισθεται ὁ ς̊ ξε̄. ὅπερ τὰς ὑποθέσεις. *

IN QVAESTIONEM XXV.

EODEM ferè logismo vtitur hîc Diophantus, ac in præcedente. Nam vt inueniat tres quadratos qui ab vnitate sigillatim detracti quadratum relinquant, sumit tria triangula rectangula vt prius, & diuidit quadratum perpendiculi cuiuslibet trianguli per quadratum hypotenusæ. Verbi gratia sumpto triangulo 3. 4. 5. diuidit 16. per 25. vnde fit $\frac{16}{25}$. quadratus qui ab vnitate hoc est à $\frac{25}{25}$. detractus relinquit quadratum $\frac{9}{25}$. cuius rei ratio ex adnotatis ad præcedentem satis innotescit. Hinc ergo patet solidum sub tribus huiusmodi quadratis contentum, fieri ex solido sub quadratis à tribus perpendiculis, diuiso per solidum sub quadratis à tribus hypotenusis. Quamobrem latus quadratum huiusmodi solidi constat ex solido sub ipsis perpendiculis diuiso per solidum sub hypotenusis; vt ergo latus hoc sit quadratus numerus vt requiritur, necesse est inueniri tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub hypotenusis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Quomodo autem inueniantur tria huiusmodi triangula, non satis mihi constat ex corruptissimis Diophanti verbis; sed illorum iacturam æquo animo ferre possumus, quandoquidem problema istud perfectè à nobis demonstratum est propositione decimaquarta libri tertij porismatum, vbi tradidimus illius constructionem hoc pacto. Expositio quolibet triangulo 5. 4. 3. Ita vt 8. duplum baseos sit maius perpendiculo 3. inueniatur per duodecimam tertij porismatum aliud triangulum vt planus sub perpendiculis vtriusque trianguli, superet planum sub basibus quadrato numero, erit illud 13. 5. 12. Iam à duobus triangulis 5. 4. 3. 13. 5. 12. effingatur tertium per decimam tertij porismatum. Cuius hypotenusa 65. fiet ex mutuo ductu hypotenusarum 13. & 5. Basis autem 63. erit summa productorum ex basi cuiuslibet trianguli in perpendiculum alterius. Denique perpendiculum 16. erit differentia productorum ex basi in basim, & ex perpendiculo in perpendiculum. Sic habebimus tria triangula; quæsita puta 5. 4. 3. 13. 5. 12. 65. 63. 16. Nam planus sub perpendiculis est 576. planus sub hypotenusis 4225. quorum vterque quadratus cùm sit, eorum vtique ratio est quæ quadrati ad quadratum.

Hoc expedito lemmate facilè soluitur quæstio Diophanti. Sit enim solidus sub quæsitis quadratis contentus 1 Q. Ipsi verò quadrati statuantur ij qui fiunt diuidendo quadratum perpendiculi cuiuslibet inuentorum triangulorum per quadratum hypotenusæ, puta $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q $\frac{256}{4225}$ Q. fitque solidus sub ipsis contentus $\frac{33177^6}{1785^0625}$ C C. æqualis 1 Q. seu $\frac{33177^6}{1785^0625}$ Q Q æquatur 1. Quare & latus lateri, hoc est $\frac{576}{4225}$ Q. æquatur 1. & fit 1 N. $\frac{65}{24}$. Ad positiones. Erunt quæsiti quadrati $\frac{1^{69}}{6^4}$. $\frac{25}{4}$. $\frac{4}{9}$. solidus sub iis contentus est $\frac{4225}{576}$. à quo si quilibet eorum auferatur, remanent quadrati $\frac{169}{36}$. $\frac{625}{576}$. $\frac{441}{64}$. quorum latera $\frac{13}{6}$. $\frac{25}{24}$. $\frac{21}{8}$.

OBSERVATIO D. P. F.

AD elucidationem & explicationem quæstionis 25. iuxta methodum Diophanti quam Bachetus similiter prætermisit quærenda sunt duo triangula rectangula vt productum sub hypotenusa & perpendiculo vnius ad productum sub hypotenusa & perpendiculo alterius habeat rationem datam.

Quæ sanè quæstio diù nos torsit & verò difficillimam quilibet tentando experietur, sed tandem patuit generalis ad ipsius solutionem methodus.

Quærantur duo triangula vt rectangulum sub hypotenusa vnius & perpendiculo, rectanguli sub hypotenusa alterius & perpendiculo sit duplum.

Fingatur vnum ex triangulis ab A & B. alterum ab A & D. Rectangulum sub hypotenusa prioris & perpendiculo erit B in A cubum bis + B cub. in A. bis, rectangulũ verò sub hypotenusa posterioris & perpendiculo erit D. in A.C. bis + D.C. in A bis, cum igitur B in A.C. bis + B.C. in A. bis sit duplũ rectanguli D in A.C. bis + D.C. in A. bis, ergo B in A.C. + B.C. in A. æquabitur D. in A.C. bis + D.C. in A. bis & omnibus abs A diuisis fiet B in A. quadratum + B.C. æquale D. in A. Q. bis + D.C. bis & per antithesin D. C. bis − B. C. æquabitur B. in A Q. − D. in A. Q. bis, si igitur D.C. − B. bis C. diuisum per B − D bis æquetur quadrato soluta erit quæstio.

Quærendi igitur duo numeri loco ipsorum B & D eâ conditione vt duplum cubi vnius − alio diuisum vel multiplicatum (eodem enim res recidit) per duplum posterioris primo faciat quadratum, ponatur vnus esse 1 N + 1. Alter 1 cubus duplus prioris − cubo à posteriore facit 1 + 6 N + 6 q + 2 C duplus autem posterioris − priore facit 1 − 1 N. ergo si ducas 1 − 1 N in 1 + 6 N + 6 q − 2 C fiet quadratus, productũ illud æquatur 1 + 5 N − 4 C − 2 qq. Quod æquandũ quadrato ab $\frac{5}{2}$ N − 1 − $\frac{25}{8}$ q. & omnia statim constabũt, propositio autem ad omnes rationes extendetur si loco vnius ex quærendis numeris ponatur A + excessus maioris rationis termini supra minorem, & loco alterius ille ipse excessus vt iam à nobis in ratione dupla est factum. Hac quippe ratione semper vnitatum numerus euadet quadratus & æquatio erit procliuis. Hoc peracto inuenientur duo numeri qui ipsos B & D representabunt & ad primam quæstionem fiet reditus. Retractanti quæ hucusque ad 25 quæstionem scripsimus visum erat statim omnia delere quia abductio ad problema quod perfecimus non conuenit quæstioni nostræ. quia tamen quæstionem aliam ad quam malè præsens problema adduxeramus rectè construximus, non tam operam perdidimus, quam malè collocauimus, & ideo maneat scriptura marginalis intacta.

Quæstionem ipsam Diophantæam nouo iterum examini subiicientes & methodum nostram sedulò consulentes tandem generaliter soluimus. Exemplum tantum subiiciemus confisi numeros ipsos satis indicaturos non sorti, sed arti solutionem deberi. in propositione Diophanti quærenda duo triangula rectangula ea conditione vt productum sub hypotenusa vnius & perpendiculo ad productum sub hypotenusa & perpendiculo alterius habeat rationem quam 5 ad 1. En duo illa triangula, primum cuius hypotenusa 48543669109. basis 36083779309. perpendiculum 32472275580. secundum cuius hypotenusa 42636752938. basis 41990695480. perpendiculum 7394200038.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνοις ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δ̄ ᾱ. αὐτοὶ δὲ ἀφ' οἵων δήποτε τριῶν ὀρθογωνίων. καὶ πάλιν ἀπάγεται καὶ ἐνταῦθα εἰς τὰ ζητούμενα ἐν τῇ πρὸ ταύτης προτάσει. εἰ χρώμεθα οὖν καὶ ἐν ταύτῃ τοῖς αὐτοῖς ὀρθογώνοις, καὶ τάσσωμεν τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὃν μὲν * δ̄ κε̄. ὃν δὲ δ̄ χκε̄. ὃν δὲ δυνάμεις α. δψπδ̄. καὶ πάλιν μένει ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῶν τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπ' αὐτῶν στερεὸν ἰσῶσαι δυνάμει μιᾷ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς̄ μείζων η̄. καὶ μένει. *

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, detractus ab vnoquoque ipsorum, faciat quadratum. Rursus solidus sub ipsis contentus statuatur 1 Q. ipsi autem à quibusvis rectangulis petantur. Et rursus hîc res deuoluitur ad ea quæ in præcedente fuerunt quæsita. Si igitur in hac iisdem vtamur rectangulis, & ponamus eorum qui quæruntur quadratorum * vnum 25 Q. alterum 625 Q. tertium 14784 Q. Et rursus solidus sub tribus contentus detractus à quolibet, facit quadratum. Superest vt solidus ille æquetur 1 Q. vnde inuenitur 1 N. maior quàm 8. & constat. *

IN QVAESTIONEM XXVI.

SATIS apparet ex lemmate ad præcedentem explicato pendere quæstionis huius solutionem, nam vt prius inuenienda sunt tria triangula rectangula ; vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub perpendiculis habeat rationem quadrati ad quadratum. Et sicut ibi ponebantur quæsiti quadrati $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q. $\frac{256}{1225}$ Q. ita vt auferendo quemlibet ab 1 Q. remanerent quadrati, puta $\frac{16}{25}$ Q. $\frac{25}{169}$ Q. $\frac{289}{225}$ Q. Ita hic numeratoribus in denominatores mutatis, & è conuerso, statuuntur quæsiti quadrati $\frac{25}{9}$ Q. $\frac{169}{144}$. $\frac{1225}{256}$ Q. vt à quotlibet auferendo 1 Q. remaneant quadrati $\frac{16}{9}$ Q. $\frac{25}{144}$ Q. $\frac{3969}{256}$ Q. fitque solidus sub tribus quæsitis contentus $\frac{27850625}{331776}$ C C. æquales 1 Q. & tandem $\frac{4225}{576}$ Q. æquatur vnitati. Vnde fit 1 N. $\frac{24}{65}$. Sunt ergo quæsiti numeri. $\frac{64}{169}$. $\frac{4}{25}$. $\frac{2}{4}$. Nam solidus sub iis contentus est $\frac{176}{4225}$. quem auferendo sigillatim à quolibet ipsorum, remanent quadrati $\frac{1024}{4225}$. $\frac{4}{169}$. $\frac{35721}{169000}$. quorum latera $\frac{32}{65}$. $\frac{2}{13}$. $\frac{189}{130}$.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione adscita vnitate faciat quadratum. Et quoniam quæro productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, omnia ducantur in tertium qui est quadratus. Itaque oportebit productum ex primo in secundum, ductum in tertium, hoc est solidum sub tribus contentum, cum tertio facere quadratum, sicut etiam cum primo & secundo. Id autem ante demonstrauimus. Igitur illi numeri hanc quoque soluunt quæstionem.

ΕΤΡΕΙΝ ζεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μ̄ ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητῶ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μ̄ μονάδος ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. παντὸς δὴ τὸν τρίζον ὄντα τετράγωνον. ὥστε δεήσει τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου δὴ τὸν τρίτον, τουτέστι τὸν ἐκ τ̄ τειῶν στερεὸν μ̄ τῷ τρίζου ποιεῖν τετράγωνον. ὡς ἡ μ̄ τῷ πρώτου ἡ δευτέρου, τοῦτο γὰρ προεδείξαμεν. ὥστε ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι ☾ τοῦτο τὸ ζητημα.

IN QVAESTIONEM XXVII.

REFERTVR hæc propositio ad vigesimam quartam, & iidem prorsus numeri vtramque quæstionem soluunt, vt rectè infert Diophantus, quod tamen vt euidentius fiat, sic demonstro.

A $\frac{25}{4}$. B $\frac{9}{16}$. C $\frac{256}{81}$. D $\frac{225}{64}$. G $\frac{289}{64}$.

Sint tres quadrati A B C. soluentes vigesimam quartam, ita vt solidus sub ipsis contentus quolibet adiecto quadratum faciat; dico eum qui fit à duobus quibuslibet addita vnitate fore quadratum. Ducto enim A in B fiat D. cui addita vnitate fiat G. probandum est G esse quadratum. Itaque quia ex hypothesi ducto D in C. & producto addendo ipsum C. fit quadratus. At ducere D in C & producto addere C. idem est atque ducere C in numerum vnitate maiorem ipso D, hoc est in ipsum G, sequitur ex C in G. fieri quadratum. [1] Ergo C & G sunt plani similes. [2] Quare cùm C. sit quadratus ex hypothesi, oportet & ipsum G quadratum esse. Quod demonstrandum erat.

[1] 4. noni. [2] 24. octaui.

Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. Nam ex binorum mutuo ductu fiunt numeri $\frac{225}{64}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{1600}{81}$ quibus addendo sigillatim vnitatem, fiunt quadrati $\frac{289}{64}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{1681}{81}$. quorum latera sunt $\frac{17}{8}$. $\frac{5}{3}$. $\frac{41}{9}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE tres quadratos vt productus ex binorum multiplicatione detracta vnitate, faciat quadratum. Omnia in tertium. Itaque productus ex primo in secundum ductus in tertium, hoc est solidus sub tribus contentus, detracto tertio quadratum facit; sicut & idem solidus sub tribus contentus, facit quadratum detracto secundo & tertio. Hoc autem supra demonstratum est. Igitur illi numeri hoc quoque præstant.

ΕΤΡΕΙΝ ζεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας μ̄ ᾱ. ποιῇ τετράγωνον παντὸς δὴ τὸν τρίτον. ὥστε ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου δὴ τὸν τρίτον τουτέστι ὁ ἐκ τ̄ τειῶν στερεὸς λείψας τὸν τρίτον ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε καὶ ἑκάτερον τὸν τε πρῶτον ☾ τὸν δεύτερον λείψας ὁ ἐκ τ̄ τειῶν στερεὸς ποιεῖ τετράγωνον. τοῦτο δ̄ προδέδεικται. ἐκεῖνοι οὖν οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι ☾ τοῦτο.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

HÆc etiam refertur ad vigesimam quintam & iidem numeri vtramque soluunt quæstionem. Nam à solido sub tribus quadratis contento auferre, verbi gratia, tertium idem est atque ducere planum sub primo & secundo vnitate multatum, in ipsum tertium. Quare cùm solidus sub tribus contentus, detracto tertio sit quadratus, necesse est & planum sub primo & secundo detracta vnitate esse quadratum, alioquin eo ducto in tertium qui quadratus est, non posset fieri quadratus. Soluitur ergo hæc quæstio per quadratos inuentos per vigesimam quintam, nempe per quadratos $\frac{169}{64}$. $\frac{25}{4}$. $\frac{4}{9}$. Etenim plani sub binis contenti sunt $\frac{4225}{256}$. $\frac{25}{9}$. $\frac{169}{144}$. A quibus auferendo sigillatim vnitatem, remanent quadrati $\frac{3969}{256}$. $\frac{16}{9}$. $\frac{25}{144}$. quorum latera $\frac{63}{16}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{5}{12}$.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀφαιρεθεὶς ὑπὸ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦντες τὸν ὑπὸ δύο ὁπωιωνοῦν ἀρθέντα ὑπὸ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν πάντα ποιήσωμεν ὅπι τὸν τρίτον. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ δύρειν ξεῖς ἀριθμὸς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν τερεὸς ἀρθεὶς ὑπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδειξαμεν.

INVENIRE tres quadraros, vt productus ex binorum multiplicatione detractus ab vnitate, faciat quadratum. Rursus quærentes eum qui à duobus quibuslibet fit sublatum ab vnitate, facere quadratum, si omnia ducamus in tertium; rursum eò deducimur vt inueniamus tres numeros, è quibus confectus solidus si tollatur à quouis, relinquat quadratum. Hoc autem suprà est demonstratum.

IN QVAESTIONEM XXIX.

PENDET rursus hæc propositio à vegesima sexta, & iidem quadrati vtrique quæstioni satisfaciunt. Ratio est, quia solidus sub tribus contentus detractus, verbi gratia, à tertio relinquit quadratum per vegesimam sextam. At idem quadratus fit si planus sub primo & secundo detrahatur ab vnitate, & residuum ducatur in tertium. Ergo necesse est planum ex primo in secundum detractum ab vnitate relinquere quadratum, vt scilicet eo in tertium qui quadratus est, ducto, fiat quadratus. Quod autem si planus ex primo in secundum detrahatur ab vnitate, & residuum ducatur in tertium, idem fiat numerus, atque si solidus sub tribus auferatur à tertio, ne quis scrupulus maneat, sic demonstro. Sint tres quicunque numeri A B C. & solidus sub ipsis D. quem auferendo à tertio C. remaneat K. Tum ducto A in B fiat G quo detracto ab vnitate relinquatur H. Dico si H. ducatur in C fieri K. Quia enim D. est solidus sub tribus contentus, & G planus, sub duobus A B. patet ducto C in G. fieri solidum D. At duo G H æquantur vnitati ex constructione. Quare cùm ducendo C in vnitatem, fiat ipse C. producti ex C in ipsos G H. puta D K simul æquantur ipsi C. At ex C in G fit D vt ostensum est. Ergo ex C in H fiet K. Quod erat ostendendum.

D $\frac{1}{24}$.
A $\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{3}$. C $\frac{1}{4}$.
G $\frac{1}{6}$. H $\frac{5}{6}$. K $\frac{5}{24}$.

Itaque sumptis quadratis $\frac{64}{169}$. $\frac{4}{25}$. $\frac{9}{4}$ per vigesimam sextam inuentis, ex binorum mutuo ductu fient $\frac{256}{4225}$. $\frac{9}{25}$. $\frac{144}{169}$. quos auferendo sigillatim ab vnitate, remanent quadrati $\frac{3969}{4225}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{25}{169}$. quorum latera $\frac{63}{65}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{13}$.

Cæterùm hæ tres quæstiones paulò vniuersalius proponi possunt, quod exemplo vigesimæ septimæ docuisse sufficiat.

Inuenire tres quadratos, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, addito quouis quadratoquadrato, faciat quadratum.

Datus quadratoquadratus esto 16.

Sumo quadratos soluentes vigesimam septimam, puta $\frac{25}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{256}{81}$. quos sigillatim multiplico per latus quadratum ipsius 16. puta per 4. & fiunt quæsiti quadrati 25. $\frac{9}{4}$. $\frac{1024}{81}$. quos satisfacere proposito perspicuum est. Nam primo quadratos eos esse constat, quia fiunt ex quadrato 4. in tres quadratos sigillatim ducto, idemque semper eueniet, quia latus quadratum cuiuslibet quadratoquadrati, quadratus est. Deinde cùm sint quadrupli priorum quadratorum at ex quadruplo numeri in quadruplum alterius, fiat sedecuplum producti ex numero in numerum, patet productos ex binorum multiplicatione esse sedecuplos priorum productorum. Quare si his addatur 16. puta sedecuplum vnitatis, fient numeri sedecupli ad quadratos qui fiunt si numeri per vigesimam septimam inuenti bini inter se multiplicentur, & productis addatur vnitas. Ac proinde cùm ex eo quadrato in quadratum fiat quadratus, patet propositum.

QVÆSTIO XXX.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini ſumpti, adſcitoque dato numero, faciant quadratum. Eſto datus 15. & ſit vnus quæſitorum 9. Quærendi ſunt ergo alij duo, vt quilibet illorum cum 24. faciat quadratum, & ambo ſimul cum 15. faciant quadratum. Oportet ergo quærere duos quadratos, quorum vterque cum 24. faciat quadratum. Sumamus numeros qui metiantur 24. & ſint latera circa rectum trianguli rectanguli. Eſto ſecundum $\frac{4}{1N}$. oppoſitus, erit 6 N. vtriuſque horum ſemiſſis eſt $\frac{2}{1N}$. & 3 N. Rurſus eſto ſecundum $\frac{3}{1N}$. oppoſitus erit 8 N. vtriuſque ſemiſſis eſt $1\frac{1}{2}$ & 4 N. Sit ergo vnius quadratorum latus ab interuallo $\frac{2}{1N}$. & 3 N. alterius verò latus ab interuallo $1\frac{1}{2}$. & 4 N. ſic enim vterque quadratorum cum 24. faciet quadratum. Reſtat vt & ambo iuncti cum 15. faciant quadratum. Fit autem $\frac{6\frac{1}{4}}{1Q} + 25\ Q. - 9.$ Igitur $25\ Q. + \frac{6\frac{1}{4}}{1Q} - 9.$ æquantur quadrato. Eſto quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Ad poſitiones.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ τρεῖς δυνατοὺς ζητεῖς τετραγώνους, ὅπως σὺν δυσὶ λαμβανομένοις οἱ τετράγωνοι, καὶ προσλαβόντες τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ῑε̄. ☾ ἔστω εἷς ζητουμένων μ̄ Ϛ̄. ζητητέον οὖν ἕτεροις δυσὶ, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μ̄ μ̄ κδ̄ ποιῇ τετράγωνον. συναμφότερος δὲ μ̄ μ̄ ῑε̄. ποιῇ τετράγωνον δεῖ οὖν ζητεῖν δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μ̄ μ̄ κδ̄. ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνομεν τοὺς μετροῦντας μ̄ κδ̄. ☾ τετράκις ὀρθογωνίου πλευρὰς τὰς περὶ τὴν ὀρθήν. [ἔστω κ̄ ἀριθμοστὸν δ̄ ϛ̄ ᾱ. ὁ ἀνπκείμενος ϛ̄ ϛ̄ ϛ̄. συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοστὸν β̄ ϛ̄ ᾱ. καὶ ἀριθμοὶ γ̄. πάλιν] ἔστω κ̄ ἀριθμοστὸν γ̄ ϛ̄ ᾱ. ὁ ἀνπκείμενος ϛ̄ ϛ̄ η̄. συναμφοτέρου τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοστὸν α̅. α̅ ϛ̄. καὶ ϛ̄ ϛ̄ δ̄. ἔστω ἡ τοῦ ἑνὸς πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ β̄. καὶ ϛ̄ γ̄. [ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ α̅. α̅ ϛ̄. καὶ ϛ̄ δ̄.] καὶ μένει ἑκάτερος αὐτῶν μ̄ μ̄ κδ̄. ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι καὶ συναμφότεροι μ̄ μ̄ ῑε̄ ποιοῦσι τετράγωνον. γίνεται δὲ συναμφοτέρου ϛ̄. α̅ δ̄. καὶ δ̄ κε̄ τῶν μ̄ Ϛ̄ συναμφοτέρων ἄρα κε̄ [καὶ συναμφοτέρου ϛ̄. α̅ δ̄.] τῶν μ̄ θ̄. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω δ̄ κε̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄ ϛ̄. ὅθεν τὰς ὑποϛάσεις.

OBSERVATIO D. P. F.

HVius quæſtionis beneficio, ſequentis quæſtionis ſolutionem dabimus quæ alioquin difficillima ſane videretur.

Dato numero, quatuor inuenire numeros quorum bini ſumpti adſcitoque dato numero faciant quadratum. Sit datus numerus 15 *& primum per hanc quæſtionem reperiantur tres quadrati quorum bini ſumpti adſcitoque dato numero faciant quadratum. Et ſint illi tres quadrati* 25. $\frac{1}{100}$. $\frac{529}{225}$.

Ponatur primus quatuor numerorum quæſitorum $1\ Q. + 15.$

Secundus $10\ N + 25.$ *(quia* 25. *eſt vnus ex quadratis,* $10\ N$ *autem eſt duplum lateris in* $N.$ *)*

Tertius eâdem ratione ponatur $\frac{1}{9}\ N + \frac{1}{100}$, *quartus denique* $\frac{46}{15}\ N + \frac{529}{225}$. *Ita quippe inſtitutis poſitionibus tribus propoſitis partibus ſatisfit, quilibet enim numerum vnâ cum primo adſcito* 15 *facit quadratum. Supereſt vt ſecundus & tertius addito* 15, *item tertius & quartus addito* 15, *denique ſecundus & quartus, eodem addito* 15 *faciant quadratum & oritur triplicata æqualitas cuius ſolutio in promptu cum ex conſtructione cuius artificium ab hac quæſtione deſumpſimus in quolibet termino æquando reperiantur vnitates tantum quadratæ & numeri. Recurrendum igitur ad ea quæ diximus ad quæſtionem vigeſimamquartam libri ſexti.*

IN QVAESTIONEM XXX.

SVBTILITER Diophantus posito vno quadratorum ad placitum, puta 9. inuestigat reliquos. Cùm enim 9. additus dato numero 15. faciat 24. certum est reliquorum quemlibet adsumpto 24. debere conficere quadratum, quia quilibet ipsorum addito 9. & 15. debet esse quadratus. Sed & vterque simul adscito 15. debet facere quadratum. Reliquum ergo est vt duo quadrati reperiantur, quorum quilibet cum 24. faciat quadratum, & eorum summa adsumens 15. sit quadratus. Hìc sanè mirabili artificio ponit latera quadratorum $3\,N. - \frac{2}{1N}$ & $4\,N. - 1\frac{1}{2}\frac{1}{1N}$. vnde fiant quadrati $9\,Q. - 12 + \frac{4}{1Q}$ & $16\,Q. - 12 + \frac{9}{4}\frac{}{1Q}$. quorum vterque adsumens 24. quadratum facit, puta $9\,Q. + 12 + \frac{4}{1Q}$ & $16\,Q. + 12 + \frac{9}{4}\frac{}{1Q}$. à lateribus $3\,N. + \frac{2}{1N}$. & $4\,N. + 1\frac{1}{2}\frac{1}{1N}$. Equidem certum est si quadrati duo fingatur ab aliquo binomio, & à residuo quod ei respondet, interuallum quadratorum fore quadruplum plani sub partibus comprehensi, vt quadratorum à lateribus $1\,N. + 3.$ & $1\,N. - 3.$ interuallum est $12\,N.$ quadruplum producti ex $1\,N.$ in 3. Quare Diophantus quærens quadratum cui addendo 24. fiat quadratus, ponit pro latere residuum tale, vt planus sub partibus sit quadrans de 24. puta 6. Id vt consequatur sumit duos numeros quorum mutuo ductu fiat 24. puta 6. & 4. & vtriusque semissem capit, puta 3. & 2. nam ex semissi in semissem fit quadrans producti ex toto numero in totum numerum. Formandum ergo est residuum à 3. & 2. ponendo scilicet alterum cum signo N. puta $3\,N.$ ex altero verò formando fractionem numericam, puta $\frac{2}{1N}$. & fit residuum $3\,N. - \frac{2}{1N}$. in quo patet planum sub partibus esse $- 6.$ atque adeo duplum illius esse $- 12.$ *cui addendo 24.* fit $+ 12.$ sola signorum mutatione facta. Eadem arte fingit latus tertij quadrati, sumendo 8. & 3. quorum mutuo ductu fit 24. & capiendo semisses eorum, puta 4. & $1\frac{1}{2}$. vnde formatur residuum $4\,N. - 1\frac{1}{2}\frac{1}{1N}$ vbi etiam contingit planum sub partibus esse $- 6.$ eadem de causa.

Porrò non temerè sumendi sunt duo cuicunque numeri mutuo ductu producentes 24. quales sumpsit author 6. & 4. & rursus 8. & 3. sed tales esse debent, vt duo 6. & 8. Itemque 4. & 3. constituant latera circa rectum trianguli rectanguli, vt infrà docebimus. Ideò sumit Diophantus duos quoscunque numeros 3. & 4. qui sint latera circa rectum trianguli rectanguli, & per eos diuidendo
1. 3. *poris.* 24. nascitur alios duos 8. & 6. qui sunt etiam latera circa rectum trianguli rectanguli, quia eorum eadem est proportio, quæ ipsorum 3. & 4. vt constat per decimam nonam septimi. Vnde etiam sequitur & horum semisses, puta $1\frac{1}{2}$. & 2. Itemque 4. & 3. constituere latera circa rectum trianguli rectanguli ob identitatem rursus proportionis.

Necesse est autem huiusmodi numeros constituere latera circa rectum trianguli rectanguli, vt summa quadratorum ab ipsis ortorum sit quadratus numerus, quia oportet summam quadratorum fictitiorum adscito 15. puta $25\,Q. - 9 + \frac{25}{4}\frac{}{1Q}$ esse trinomium cuius quælibet pars constet quadrato numero. At $25\,Q.$ est summa quadratorum à lateribus $3\,N.$ & $4\,N.$ & rursus $\frac{25}{4}\frac{}{1Q}$ est summa quadratorum à lateribus $1\frac{1}{2}\frac{1}{1N}$. & $\frac{2}{1N}$. vnde patet oportere vt $3\,N.$ & $4\,N.$ Itemque $1\frac{1}{2}\frac{1}{1N}$ & $\frac{2}{1N}$. sint latera circa rectum trianguli rectanguli. Vnitates verò $- 9.$ æquantur quadrato qui positus est pro primo quæsitorum, vt patet.

Ingeniosa itaque laterum fictione assequutus est Diophantus, vt quælibet pars trinomij quadrato æquandi, constet quadrato numero, quod ni foret, qua quæso ratione æquaretur quadrato $25\,Q. - 9 + \frac{25}{4}\frac{}{1Q}$? Sanè si velis fingere illius latus $5\,N. +$ vel $-$ certo vnitatum numero, nil efficies, neque si ponas latus illud $\frac{5}{1N}$. plus vel minus certo Numerorum numero, nam vtroque modo vel incides in absurdum, vel in complexam æquationem, talemve ex qua non prodeat solutio rationalis. Itaque huiusmodi æquatio ritè nequit explicari, nisi æquando propositum numerum, vel cum $25\,Q.$ vel cum $\frac{25}{4}\frac{}{1Q}$. sic enim ablatis vtrimque æqualibus remanebunt 9. æquales vel $\frac{25}{4}\frac{}{1Q}$. vel $25\,Q.$ & res optimè succedet, quia vtrumque extremum æquationis reperitur quadratus. Posuit Diophantus $25\,Q.$ æquales $25\,Q. - 9 + \frac{25}{4}\frac{}{1Q}$. Quare tandem 9. æquantur $\frac{25}{4}\frac{}{1Q}$ & omnia per $1\,Q.$ fiunt $9\,Q.$ æquales $\frac{25}{4}$. Quare $1\,N.$ est $\frac{5}{6}$. Ad positiones sunt latera quadratorum $\frac{1}{10}$ & $\frac{23}{15}$. Sunt ergo tres quæsiti quadrati 9. $\frac{1}{100}$. $\frac{529}{225}$. nam bini adsumpto 15. faciunt quadratos $\frac{2401}{100}$. $\frac{5929}{225}$. $\frac{625}{36}$. quorum latera $\frac{49}{15}$. $\frac{77}{15}$. $\frac{25}{6}$.

Quod si ponas $25\,Q. - 9 + \frac{25}{4}\frac{}{1Q}$ æquari $\frac{25}{4}\frac{}{1Q}$. fient 9. æqualis $25\,Q.$ & erit $1\,N.\ \frac{1}{3}$. eadem tamen quæ prius continget solutio, quia tunc concipiendum erit latera quadratorum fuisse $\frac{2}{1N} - 3\,N.$ & $1\frac{1}{2}\frac{1}{1N} - 4.\,N.$ quæ per valorem Numeri resoluta, erunt vt suprà $\frac{23}{15}$ & $\frac{1}{10}$.

QVÆSTIO

QVÆSTIO XXXI.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini sumpti detracto dato numero, faciant quadratum. Esto datus 13. Ponatur rursus quæsitorum quadratorum vnus 25. Quærendi ergo alij duo, vt vterque sigillatim cum 12. faciant quadratum, ambo verò simul detractis 13. faciant quadratum. Rursum sumimus dimensionem secundum numeros 3. & 4. fitque prioris quadrati latus ab interuallo inter $1\frac{1}{2}$ N. & $\frac{2}{1N}$. alterius verò ab interuallo inter 2 N. & $1\frac{1}{2}$. Sic enim vtriusque quadratus adscito 12. facit quadratum. Superest vt ambo simul detracto 13. faciant quadratum. Fit autem $6\frac{1}{4} + 6\frac{1}{4}Q. - 25$. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto ipsis $6\frac{1}{2}$. & fit 1 N. 2. Ad positiones.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀειθμῷ πεπσδυρεῖν ξεὶς τετεαγώνους, ὅπως σωὶ δύο λαμβανόμενοι ϲ λείψαντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τεξάγωνον. ἔϛω ὁ δοθεὶς μ° ιγ̄. πτάχθω πάλιν εἷς τῶν ζητουμένων τετεαγώνων μ° κε. ζητητέον σωὶ ἕτεεος δύο, ὅπως ἑκατεεος μὸ ἀυτῶν μῆ μ° ιβ̄. ποιῇ τεξάγωνον. σωαμφότεεος δὲ λείψας μ° ιγ̄. ποιῇ τεξάγωνον. πάλιν λαμβάνομεν τὼ μέξησιν κῆ ἀειθμὲς ξεὶς καὶ δ̄. γίνεται ἡ μὸ τῦ πεφότου πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ϛ̄ α̅. α̅ ϛ̄. κὴ ἀειθμος ιβ̄. ἡ δὲ τῦ ἑτέρου ἀπὸ διαφορᾶς ιϛ̄ β̄. κὴ ἀειθμος ιβ̄ α̅. α̅ ϛ̄. κὴ μένει ὁ ἀπὸ τῦ ἑκατέρα τεξάγωνος μῆ μ° ιβ̄. ποιῶν τεξάγωνον. λοιπὸν δεῖ σωαμφοτέρους λεῖψει μ° ιγ̄. ποιεῖν τετράγωνον γίνεται δὲ δυναμοσὸν ϛ̄. α̅ δ̄. δ̄ ϛ̄ α̅ δ̄. λείψει μ° κε̄. ἵνα τετεαγώνῳ. ἔϛω δυναμοσῷ ϛ̄. α̅ δ̄. κὴ γίνεται ὁ ϛ̄ μ° β̄. ὅθεν τὰς ὑποϛάσεις

OBSERVATIO D. P. F.

QVo artificio in superiore quæstione vsi sumus vt quatuor numeros inueniremus quorũ bini sumpti adscito dato numero conficerent quadratũ, simili in hac quæstione vti possumus, vt inueniãtur quatuor numeri quorum bini sumpti detracto dato numero conficiant quadratum. Ponendus enim primus 1 Q. + *numero dato. Secundus quadratus primus ex inuentis in hac quæstione vna cum duplo ab ipsius latere in N. & reliqua patent.*

IN QVAESTIONEM XXXI.

EX dictis ad præcedentem satis intelligitur hæc quæstio. Ponit primum quadratum 25. vnde cùm auferendo 13. à 25. supersit 12. patet quærendos duos quadratos, quorum vterque adscito 12. faciat quadratum, ita vt amborum summa detracto 13. faciat etiam quadratum. Inuenit autem duos quadratos, quorum vterque adscito 12. faciat quadratum eodem artificio quo vsus est in præcedente, & fingit eorum latera à lateribus circa rectum trianguli rectanguli, quorum mutuo ductu fiat 3. quadrans ipsius 12. Et ponit vnum latus 2 N. $- 1\frac{1}{2}$ alterum $1\frac{1}{2} - 2$ N. vnde quadratorum summa detractis 13. fit $\frac{25}{4}$ Q. $- 25 + \frac{25}{4}$ æquanda quadrato, puta $\frac{25}{4}$. Quare tandem $\frac{25}{4}$ Q. æquantur 25. & fit 1 N. 2. sunt ergo latera quadratorum quæsitorum 2. & $\frac{13}{4}$. & fiunt tres quadrati quæsiti 25. 4. $\frac{169}{16}$. quorum bini detracto 13. relinquunt quadratos 16. $\frac{25}{16}$. $\frac{361}{16}$.

Cæterùm moneo & hanc & præcedentem infinitas recipere solutiones ex duplici capite. Primò enim primus quadratus poni potest quilibet vnitatum numerus quadratus. Deinde latera secundi & tertij variè fingi possunt, à diuersis scilicet numeris qui sint latera circa rectum diuersorum triangulorum rectangulorum non similium. Verbi gratia loco ipsorum 3. & 4 sumi poterant 8. & 15. vel 5. & 12. & alij infiniti, vt in hac quæstione si libeat vti numeris 5. & 12. sumo numeros oppositos qui scilicet in hos ducti producunt 12 hi sunt $\frac{12}{5}$ & 1. & omnium capio semisses, puta $\frac{6}{5}$. 6. $\frac{6}{5}$. $\frac{1}{2}$. fingo ergo latera quadratorum $\frac{5}{2}$ N. $- \frac{6}{5}$. & 6 N. $- \frac{1}{2}$. & patet quemlibet quadratorum adscito 12. facere quadratum. Restat vt eorum summa detractis 13. faciat quadratum, facit autem $\frac{169}{4}$ Q. $- 25 + \frac{169}{100}$. hoc ergo æquetur $\frac{169}{100}$. fiet $\frac{169}{4}$ Q. æqualis 25. vnde fit 1 N. $\frac{10}{13}$ suntque quadratorum latera $\frac{118}{325}$. & $\frac{1031}{269}$. Itaque tres quæsiti quadrati sunt

25. $\frac{13924}{105625}$. $\frac{1062961}{67600}$. quorum bini detracto 13. faciunt quadratos $\frac{1181424}{105625}$. $\frac{1874161}{67600}$. $\frac{48268089}{1690000}$. quorum latera $\frac{1133}{1325}$. $\frac{1369}{260}$. $\frac{2197}{1300}$. videtur autem hîc omissa huiusmodi quæstio.

Inuenire tres quadratos, quorum bini detracti à dato numero relinquant quadratum.

Sed hanc vt nimis facilem prætermisit Diophantus. Sit enim datus 21. patet nil aliud postulari quàm vt 21. diuidatur in tres quadratos, quales sunt 16. 4. 1. euidens quippe est si bini auferantur à 21. relinqui tertium.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω δὴ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν δ̄ α̅. ὁ δὲ μ̄ δ̄. ὁ δὲ μ̄ ϛ̅. ϗ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. δυναμοδυνάμεως μιᾶς μ̄ ιϛ̅. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δ̄ α̅. λείψει μ̄ ι̅. ϗ γίνονται λοιπαὶ δ̄ ι̅. ἵνα μ̄ γ̅. ϗ εἰ ἴσῳ ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος λελυμένου ἂν ἴσ τὸ ζητούμενον, ϗ ἀπάγει εἰς τὸ δύρεῖν δύο τετραγώνους, ϗ ἀριθμόν τινα ὅπως ὁ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνος λείψας τὰς ἀπὸ τῶν ζητουμένων τετραγώνους ποιῇ ἀριθμόν τινα, ὃς ποιεῖ τὸν διπλάσιον τῷ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμῶ λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι, ὃς μὲν δ̄ α̅. ὃς δὲ μ̄ δ̄. ϗ ὁ τυχὼν ἀριθμὸς δ̄ α̅ μ̄ δ̄. ϗ ἀπὸ τούτου τετράγωνος, ἐὰν λείψῃ τὰς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους, καταλείπει δ̄ η̅. θέλομεν ταῦτα πρὸς τ̀ δὶς δ̄ α̅ μ̄ δ̄. τουτέστι πρὸς δ̄ β̅ μ̄ η̅. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. ϗ παντὸς τὸ ἥμισυ. ὥστε ϗ δυνάμεις δ̄ πρὸς δ̄ α̅ μ̄ δ̄. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. ϗ εἰσὶν αἱ δυνάμεις δ̄ τετράγωνος, ὥστε ϗ δ̄ α̅ μ̄ δ̄. ἴσαι τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ α̅ μ̄ α̅. ὅθεν ὁ ς̄ μ̄. α̅. α̅ ς̄. ἔστω τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὁ μὲν μ̄ β̅. α̅ δ̄. ὁ δὲ μ̄ δ̄. ὁ δὲ τυχὼν μ̄ κε̅ δ̄. ϗ πάντα τετράκις. γίνεται ὁ μὲν μ̄ ϟ̅. ὁ δὲ μ̄ ιϛ̅. ὁ δὲ τυχὼν μ̄ κε̅. ἀνατρέχομεν ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς, ϗ τάσσομεν τ̀ τελῶν τετραγώνων. ἓν μὲν δ̄ α̅. ὃν δὲ μ̄ ϑ̅. ὃν δὲ μ̄ ιϛ̅. ϗ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δ̄ δ̄ α̅ μ̄ τλζ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δ̄ α̅. λείψει μ̄ κε̅. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς μ̄ ιβ̅ ϛ̅. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres quadratos, vt compositus ex ipsorum quadratis, faciat quadratum. Statuatur quæsitorum vnus 1 Q. alter 4. alter 9. & fit compositus ex eorum quadratis 1 QQ. + 97. æqualis quadrato à latere 1 Q. — 10. & fiunt reliqui 20 Q. æquales 3. & si horum multiplicatione quadratus fieret, soluta esset quæstio. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo quadrati, & numerus quidam, vt qui ab eo fit quadratus, detractis quadratis duorum quæsitorum quadratorum, numerum faciat, qui ad duplum numeri ab initio sumpti rationem habeat quæ est quadrati ad quadratum. Ponantur quæsiti quadrati vnus 1 Q. alter 4. & arbitrarius numerus sit 1 Q. + 4. & huius quadratus detractis illorum quadratis, relinquit 8 Q. Hoc volumus ad duplum 1 Q. + 4. hoc est ad 2 Q. + 8. rationem habere quadrati ad quadratum. Omnium semissis sumatur. Igitur & 4 Q. ad 1 Q. + 4. rationem habebit quadrati ad quadratum. Sunt autem 4 Q. quadratus. Proinde & 1 Q. + 4. æquantur quadrato à latere 1 N. + 1. Vnde fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. erit ergo quæsitorum quadratorum, alter $2\frac{1}{4}$. alter 4. oblatus numerus $\frac{5}{4}$. & omnia quater. Erit alter 9. alter 16. arbitrarius 25. Recurramus ad propositum initiò, & statuamus trium quadratorum vnum 1 Q. alterum 9. tertium 16. & fit compositus ex ipsorum quadratis 1 QQ. + 337. Hæc æquantur quadrato à latere 1 Q. — 25. vnde fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Reliqua sunt manifesta.

OBSERVATIO D. P. F.

CVr autem non quærat duo quadratoquadrata quorum summa sit quadratus. Sanè hæc quæstio est impossibilis, vt nostra demonstrandi methodus potest haud dubie expedire.

IN QVAESTIONEM XXXII.

SVBTILITER Diophantus ſoluit propoſitum lemma quo quærit duos quadratos, & præterea numerum à cuius quadrato auferendo quadratos duorum quæſitorum quadratorum, reſiduum ad duplum eiuſdem numeri ſit in ratione quadrati ad quadratum. Etenim ponit quæſitum numerum 1 Q. + 4. At quæſitos quadratos 1 Q. & 4. ſic enim auferendo horum quadratos, a quadrato illius numeri ſupereſt 8 Q. qui ad 2 Q. + 8. debet eſſe in ratione quadrati ad quadratum; quare & horum ſemiſſes, puta 4 Q. & 1 Q. + 4. erunt rurſus in ratione quadrati ad quadratum, cùm non mutetur proportio. Ac proinde cùm 4 Q. ſit quadratus, oportet & 1 Q. + 4. eſſe quadratum, cuius latus eſto 1 N. + 1. fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt ergo quæſiti quadrati $\frac{9}{4}$ & 4. at quæſitus numerus $\frac{25}{4}$. & ad vitandas fractiones, omnia per 4. multiplicantur, fiuntque quæſiti quadrati 9. & 16. quæſitus numerus 25. Statuentes ergo alterum quadratorum 1 Q. alterum 9. tertium 16. fit ſumma compoſiti ex eorum quadratis 1 QQ. + 337. æqualis quadrato à latere 1 Q. − 25. & fit 1 N. $\frac{12}{5}$. Sunt itaque quæſiti quadrati $\frac{144}{25}$. 9. 16. ſumma quadratorum ab ipſis ortorum eſt $\frac{231361}{625}$. quadratus vtique à latere $\frac{481}{25}$.

Porrò animaduerſione dignum eſt quadratos, qui per aſſumptum lemma quæruntur eſſe ſemper quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli, & numerum quæſitum eſſe ſemper quadratum hypotenuſæ, ſeu ſummam eorundem quadratorum, vt vides in hypotheſi Diophantæa quadratos reperiri 9. & 16. At quæſitum numerum eſſe 25. Et tres huiuſmodi quadratos ſemper ſoluere lemma propoſitum ſic demonſtrabitur. Sint quadrati A B. quorum ſumma C. ſit etiam quadratus. Et à quadrato ipſius C. auferantur quadrati ipſorum A B. & ſuperſit G. ſumatúrque H. duplus ipſius C. dico G. ad H. habere rationem quadrati ad quadratum. Sit enim D. productus ex A. in B. eritque D. quadratus cùm fiat ex quadrato in quadratum. Itaque quia C. æquatur ipſis A B. ſimul, [1] erit quadratus ipſius C. æqualis quadratis ipſorum A B. & duplo ipſius D. Quare cùm auferendo quadratos ipſorum A B. à quadrato ipſius C. ſuperſit G. erit G. duplus ipſius D. Ergo cùm & H. ſit duplus ad C. erit G. ad H. ſicut D. ad C. ſed D. & C. ſunt quadrati. Igitur ratio G. ad H. eſt ratio quadrati ad quadratum. Quod oſtendendum erat.

G. 288. H. 50.
A 9. B 16. C 25.
D 144.

4. *ſecundi.*

Hinc elicitur Canon facillimus ad ſoluendum propoſitam quæſtionem.

Sume pro duobus quæſitorum quadratorum, quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli.
Tum diuide productum mutuo ductu eorundem, per quadratum hypotenuſæ; orietur tertius.

Verbi gratia, expoſito triangulo rectangulo 5. 12. 13. Erunt duo ex quæſitis quadratis 25. & 144. & quia ducto 25 in 144. fit 3600. diuiſo eo per quadratum hypotenuſæ, puta per 169. fit tertius quæſitorum $\frac{3600}{169}$. & ſoluta eſt quæſtio. Nam trium quadratorum quadrati ſimul faciunt $\frac{623051521}{28561}$. quadratum à latere $\frac{24961}{169}$.

QVÆSTIO XXXIII.

ΟΚΤΑΔΡΑΧΜΟΥΣ καὶ πενταδράχμους χόεας τὶς ἔμιξε,
Τοῖς προπολοῖσι πιεῖν χρῆς' ἀποταξάμενος.
Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον,
Τὰς ἐπιταχθείσας δεξάμενον μονάδας,
Καὶ ποιοῦντα πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον,
Κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα τῶν χόεων.
Ὥστε διάστειλον, τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν,
Καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους παῖ λέγε πενταδράχμους.

DRACHMARVM quinque, & drachmarum miſcuit octo
Quis choeas, famulis vina bibenda ſuis.
Pro cunctis pretium, numerum præbens tetragonum,
Qui præfinitas ſuſcipiens monadas
Diuerſum dat quadratum. Sed ſumma choarum
Illius exæquat conſtituitque latus.
Dic age quot choeas drachmarum comparat octo,
Drachmarum choeas, dic age, quinque, puer.

Το σημαῖνον διὰ τῆς ὑπογράμματος ὅδε τοιοῦτον. ἠγόρασέ τις δύο ἀνὴ οἶνου. ἐκ μὲν τοῦ ἑνὸς τ χόα δραχμῶν η. ἐκ δὲ τοῦ ἑτέρου τὸν χόα δραχμῶν ε. καὶ ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τιμὴν τετράγωνον ἀριθμόν, ὃς μετὰ μ̊ ξ̃. ἐποίει τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τὸ πλῆθος τ χοέων. διάφειλον δὲ τοὺς ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους. ἔστω τὸ πλῆθος τῶν χοέων ς̊ α̃. ὥστε ἡ τιμὴ ξυήσει δ̊ α̃. λείψει μ̊ ξ̃. λοιπὸν δεῖ δ̊ α̃ ρ μ̊ ξ̃. ποιεῖν ἴσον τετραγώνῳ. καὶ δεῖ τάσσειν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς̊ α̃. λείψει μ̊ ὅπων δήποτε. ἀλλὰ ἐπεὶ ἡ δ̊ α̃. λήψασα μ̊ ξ̃. σύγκειται ἐκ δύο τινῶν ἀριθμῶν τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, καὶ τὸ πέμπτον τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τ πενταδράχμων, τὸ δ᾽ ὄγδοον τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τ ὀκταδράχμων. καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν χοέων συντεθέντων ποιεῖ ς̊ α̃. γέγονεν ἀνὴ τὸν δ̊ α̃. λείψει μ̊ ξ̃. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τοῦ ἑνὸς πέμπτον, καὶ τὸ τοῦ ἑτέρου ὄγδοον ποιῇς α̃. καὶ τοῦτο δ᾽ ἀεὶ παντοτε δύναμαι, εἰ μὴ κατασκευάζοι ὁ ς̊ μείζων μὲν τοῦ ὀγδόου δ̊ α̃. λείψει μ̊ ξ̃. ἐλάσσων δὲ τοῦ πέμπτου δ̊ α̃. λείψει μ̊ ξ̃. ἔσται ἄρα δ̊ λείψει μ̊ ξ̃. μείζων ς̊ ε̃. ἐλάσσων δὲ ς̊ η̃. ἐπεὶ οὖν δ̊ α̃. λείψει μ̊ ξ̃. μείζων ὀγδὼν ς̊ ε̃. κοιναὶ προσκείσθωσαν μ̊ ξ̃. ὥστε καὶ δ̊ α̃. μείζων ὀγδὼν ς̊ ε̃. μ̊ ξ̃. ὥστε καὶ δύναμις α̃. ἴση ὀγδὼν ς̊ ε̃. καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι μ̊ ξ̃. ὥστε δεήσει τὸν ἀριθμὸν μείζονα εἶναι, ἢ μὴ ἐλάσσονα μ̊ ια. πάλιν ἐπεὶ ἡ δύναμις α̃. λείψει μ̊ ξ̃. ἐλάσσων ὀγδὼν ς̊ η̃. κοιναὶ προσκείσθωσαν μ̊ ξ̃. ὥστε δ̊ α̃. ἴση ὀγδὼν ς̊ η̃. καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάττονι μ̊ ξ̃. ὅθεν δεῖ τὸν ς̊ διορίσασθαι μὴ μείζονα μ̊ ιβ. ἐδείχθη δὲ καὶ μὴ ἐλάττονα μ̊ ια. ὥστε δεήσει τὸν ς̊ διρεῖν μείζονα μὲν μ̊ ια. ἐλάσσονα δὲ μ̊ ιβ. ἐὰν δὲ ζητῶμεν δ̊ α̃ λείψει μ̊ ξ̃. ἴσα τετραγώνῳ πλάσομεν τὴν τοῦ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς̊ α̃. λείψαντος μοναδάς τινας, καὶ γίνεται ὁ ς̊ ἐκ τινος ἀριθμοῦ ἐφ᾽ ἑαυτὸν γνωμένου, καὶ προσλαβόντος μ̊ ξ̃. καὶ προβληθέντος πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ, καὶ ἀπάγει εἰς τὸ δίρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὅπως ὁ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετράγωνος προσλαβὼν μ̊ ξ̃. καὶ προβληθεὶς πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ, τὴν προβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν μ̊ ια. ἐλάσσονα δὲ μ̊ ιβ. καὶ ἐὰν τάξωμεν

QVOD significatur hoc epigrammate tale est. Quidam emit duos cados vini: vnius quidem choam drachmis 8. alterius verò choam drachmis quinque, & pro omnibus pretium persoluit numerũ quadratum, cui addẽdo 60. fit quadratus latus habens multitudinem choarum. Distingue nunc choas octo drachmarũ, à chois quinque drachmarũ. Esto choarum multitudo 1 N. Ergo pretium erit 1 Q — 60. Restat vt 1 Q — 60. æquetur quadrato, & oportet huius quadrati latus ponere 1 N. cum defectu aliquot vnitatum. Sed quoniam 1 Q — 60. componitur ex duobus numeris, pretij scilicet choarum quæ cõstant octo drachmis, & pretij choarum quæ constant quinque drachmis, & huius pretij quinta pars, facit multitudinem choarum constantium quinque drachmis; sicut illius pretij octaua pars facit multitudinem choarum constantium octo drachmis; at multitudo omnium choarum est 1 N. Oportet 1 Q — 60. diuidere in duos numeros, ita vt vnius quintans cum alterius octante faciat 1 N. Atqui hoc fieri non potest nisi 1 N. inueniatur maior octante de 1 Q — 60. minor autem quintante eiusdem 1 Q — 60. Erit ergo 1 Q — 60. maior quàm 5 N. minor quam 8 N. Quia igitur 1 Q — 60. maior est quàm 5 N. adiiciantur vtrimque 60. Igitur 1 Q. maior est quàm 5 N + 60. Proinde 1 Q. æquatur 5 N. & numero alicui maiori quàm 60. Quare oportet 1 N. maiorem esse, vel saltem non minorem quàm 11. Rursum quoniam 1 Q — 60. minor est quàm 8 N. addantur vtrimque 60. Ergo 1 Q. æqualis est 8 N. & numero alicui minori quàm 60. Vnde oportet 1 N. reperiri non maiorem quàm 12. At demonstratum est non minorem esse debere quàm 11. Oportet igitur 1 N. inueniri maiorem quàm 11. minorem quàm 12. si autem velimus 1 Q — 60. æquare quadrato, fingemus quadrati latus 1 N. cum defectu aliquot vnitatum, & fiet 1 N. ex aliquo numero in se ducto, & adsumente 60. & per sui duplum diuiso. Eò itaque res deducta est, vt inueniendus sit numerus, cuius quadratus si adsciscat 60. & summa per duplum ipsius numeri diuidatur, fiat

quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. & si quæsitum statuamus 1 N. oportebit 1 Q + 60. diuidentes per 2 N. facere quotientem maiorẽ quàm 11. minorem quàm 12. Oportet ergo 1 Q. + 60. diuiso per 2 N. quotientem fieri maiorem quàm 11. Quare 1 Q + 60. maior sit oportet quàm 22 N. Proinde 22 N. æquales sunt 1 Q. & numero alicui minori quàm 60. Quare non debet 1 N. minor esse quàm 19. Rursus oportet 1 Q + 60. diuidentes per 2. N. quotientem fieri maiorem quàm 12. Quare 1 Q + 60. minor est quàm 24 N. Proinde 24 N. æquantur 1 Q. & numero alicui maiori quàm 60. Vnde oportet 1 N. minorem esse quam 21. Sed & ostensum est maiorem esse debere quàm 19. Oportet ergo quadratum æqualem 1 Q − 60. parantes, latus statuere 1 N − 20. Vnde inuenitur 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. Quadratus eius 132 $\frac{1}{4}$. Tollo 60. relinquuntur 72 $\frac{1}{4}$. Oportet ergo diuidere 72 $\frac{1}{4}$. in duos numeros, vt prioris quintans, cum octante posterioris faciat 11 $\frac{1}{2}$. Esto quintans prioris 1 N. Erit ergo posterioris octans 11 $\frac{1}{2}$ − 1 N. Ipsi ergo erunt, alter 5 N. alter 92 − 8 N. Hæc simul æquantur 72 $\frac{1}{4}$. & fit 1 N. $\frac{29}{112}$. Multitudo ergo choarum constantium quinque drachmis erit $\frac{29}{112}$. At multitudo choarum constantium octo drachmis erit $\frac{29}{112}$. Et reliqua sunt manifesta.

τὸν ζητούμενον ς^{ν} ᾱ. δεῖ δ^{υ} ᾱ. μ^{ο} ξ̄. μερίζοντας ὡδὶ ς^{ς} β̄ τῷ ὡδὶ βολῷ ποιεῖν μείζονα μῷ μ^{ο} ιᾱ. ἐλάσσονα ὃ μ^{ο} ιβ̄. δεῖ οὖν δ^{υ} ᾱ. μ^{ο} ξ̄. μερίζοντας ὡδὶ ς$^{ς υ}$ β̄ ὡδὶ βολῷ ποιεῖν μείζονα μ^{ο} ιᾱ. ὥστε δ^{υ} ᾱ. μ^{ο} ξ̄. μείζων ὀφείλουσιν εἶ) ς^{ς} κβ̄. ὥστε ς$^{ς ι}$ κβ̄ ἴσοι εἰσὶν δ^{υ} ᾱ. ☾ ἀριθμῷ τινι ἐλάσσονι μ^{ο} ξ̄. ὥστε ὁ ς^{ς} ἀπ ὀφείλει εἶ) ἐλάσσων μ^{ο} ιϑ̄. πάλιν δεῖ δ^{υ} ᾱ. μ^{ο} ξ̄. μερίζοντας ὡδὶ ἀριθμῷ β̄. τὸν ς^{ν} διρεῖν ἐλάσσονα μ^{ο} ιβ̄. ὥστε δύναμις ᾱ μ^{ο} ξ̄. ἐλάσσους εἰσὶν ἀριθμῶν κδ̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄. ἴσοι εἰσὶν δ^{υ} ᾱ. ☾ ἀριθμῷ τινι μείζονι μ^{ο} ξ̄. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς ὀφείλει ἐλάσσων εἶ) μ^{ο} κᾱ. ἀλλὰ καὶ μείζων μ^{ο} ιϑ̄. ὥστε δεῖ διωάμει ᾱ. λείψει μ^{ο} ξ̄. ἴσον τετράγωνον ποιοῦντα τάσειν τῷ τετραγώνου πλευρᾷ ἀπὸ ς^{ν} ᾱ. λείψει μ^{ο} κ̄. ὅθεν διρήσεται ὁ ς^{ν} μ^{ο} ιᾱ. ᾱ ς^{ν}. ὁ τετράγωνος ρλβ̄. ᾱ δ^{υ} ἀἐρσ μ^{ο} ξ̄. λοιπαὶ μ^{ο} οβ̄. ᾱ δ^{υ}. δεῖ οὖν τὰς μονάδας οβ̄. ᾱ δ^{υ}. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ τῦ πρώτου πέμπτον, μετὰ τῦ δευτέρου ὀγδόου ποιῇ μ^{ο} ιᾱ. ἀ ς^{ν}. ἔστω τὸ τῦ πρώτου πέμπτον μέρος ς^{ν} ᾱ. τὸ ἄρα τῦ δευτέρου ὄγδοον ἔσται μ^{ο} ιᾱ. ᾱ ς^{ν}. λείψει ς^{ν} ᾱ. αὐτοὶ ἄρα ἔσονται, ὁ μὲν ς^{ς} ε̄. ὁ δὲ μ^{ο} ιβ̄. λείψει ς^{ς} η̄. ταῦτα ἴσα οβ̄. ᾱ δ^{υ}. ἔσαι ὁ ς^{ν} μ^{ο} οϑ̄ ι^{ν}. τὸ ἄρα πλῆθος τῶν πενταδράχμων χρέων ἔσαι οϑ̄ ι^{ν}. τὸ δὲ τῶν ὀκταδράχμων χρέων νζ̄ ι^{ν}. ☾ τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

QVOT mendas hinc sustulerimus æquo lectori æstimandum relinquo, qui nostram cum versione Xilandri contulerit. Sanè vt omittam reliqua, vbi legebatur in codice manu exarato, τοῖς ὀβολοῖς ποιεῖν χρησὸν ὀπιτεταγμένῳ, reposuimus flagitante sententia & lege metri, τοῖς ϖρωτολοῖσι ποιεῖν χρησὸν ὀποταξάμενῳ, & vbi legebatur τὰς ὀκταδράχμους ποιήσουν, emendauimus τὰς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν. Vtrumque ex sententia Salmasij nostri. Porrò emendato textu, non magna hîc est difficultas, quæ tamen animaduersione digna censeo, hæc sunt.

Primò, quod ait Diophantus 1 Q − 60. non posse diuidi in duas partes, ita vt alterius quintans cum alterius octante faciat 1 N. nisi 1 N. statuatur maior octante, minor autem quintante ipsius 1 Q − 60. perspicuum est ex adnotatis ad quintam primi, cuius hîc auxilium implorare cogimur, & cui huiusmodi conditionem præscripsit author.

Secundò ritè infert. Si quintans de 1 Q − 60. est maior quàm 1 N. ipse 1 Q. − 60. maior est quàm 5 N. & rursus si octans de 1 Q − 60. est minor quàm 1 N. ipse 1 Q. − 60. minor est quàm 8 N. Vt ergo inueniantur termini intra quos consistere debet valor numeri, vtendum artificio quo ad quadragesimã quintam quarti, & alibi sæpè vsi sumus. Etenim quia 1 Q − 60 maior est quàm 5 N. addendo vtrimque 60. fit 1 Q maior quàm 5 N. + 60. & tandem fit 1 N. maior quàm ℞ 66 $\frac{1}{4}$ + 2 $\frac{1}{2}$. seu per approximationem maior quàm 11. Similiter si 1 Q. − 60 statuatur minor quàm 8 N. fiet 1 N. minor quàm ℞ 76 + 4. seu per approximationem minor quàm 12. Concludit ergo Diophantus 1 N. cadere debere inter 11. & 12. Quod non ita accipiendum est, vt 11. & 12, exactissimi termini censeantur, cùm enim non possint in rationalibus præscribi exactè huiusmodi termini, satis habuit Diophantus tales præscribere intra quos ritè sumi possit valor numeri. Cæterùm si exactiores requirantur, assignari poterunt 10 $\frac{3}{4}$. & 12 $\frac{2}{3}$. Malè autem assignaueris 10. & 13. cùm inter eos cadant infiniti numeri, qui nequaquam sumi possunt pro valore numeri.

Denique cum fingendo latus quadrati 1 Q − 60. fiat valor numeri, cuidam quadrato addendo 60. & ſummam diuidendo per duplum lateris illius, patet quærendum eſſe numerum per cuius duplum diuidendo quadratum ipſius, auctum numero 60. fiat quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. Poſito ergo tali numero 1 N. fit vtique $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{60}{1}$ N maior quàm 11. minor quàm 12. & omnia ducendo in 2 N. fit 1 Q + 60. maior quàm 22 N. minor quàm 24. N. Et vtraque æquatione per approximationem reſoluta, conſtat quæſitum numerum maiorem eſſe debere quàm 19. minorem quàm 21. Quare ſumit Diophantus 20. & ponit quadrati 1 Q. − 60. latus 1 N − 20. vnde fit 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. ſumma ſcilicet choarum. Ergo totum pretium eſt quadratus 72 $\frac{1}{4}$. Quare ſupereſt vt diuidamus 72 $\frac{1}{4}$ in duas partes, ita vt quintans vnius cum octante alterius faciat 11 $\frac{1}{2}$. Hoc exequitur Diophantus per operationem quintæ primi, & reliqua ſunt manifeſta.

Porrò quod terminos ſtatuit 19. & 21. intra quos ſumi debet vnitatum numerus in latere fictitio ponendus, non ſic etiam accipiendum eſt, quod putet exactiſſimos eos eſſe, nam ſi libet exactiores præſcribentur 18 $\frac{1}{4}$ & 22 $\frac{1}{3}$. Quare huiuſmodi numerus poni poterat 19. atque etiam 21. vel 22. vel quilibet alius intra præſcriptos limites. Nequaquam autem 18. vel 23. vt & ratio & experientia dictat.

Quoniam verò argutum epigramma, incertum an ab ipſo confictum, vel ab alio quopiam mutuatum, nobis exhibuit Diophantus, placet hoc loco elegantiſſima aliquot epigrammata proferre, non iniucundas quæſtiones de rebus arithmeticis continentia, quæ nondum edita fuerunt, quæque pridem è codice probatiſſimo Palatino excerpta tradidit nobis vir eruditiſſimus Claudius Salmaſius, clariſſimum Burgundiæ noſtræ lumen. His ſubiiciemus verſionem noſtram totidem verſibus exaratam, feliciter, an ſecus iudicent Muſarum alumni. Tum breuiter quæſtiones ipſas explicabimus. Cætera quæ vel ad Græci ſermonis ornatum ſpectant, vel reconditæ quid ſapiunt eruditionis Salmaſio noſtro relinquemus, qui breui, vt ſtudioſos ſperare iubeo, Anthologiam innumeris auctam Epigrammatis, magno reipublicæ literariæ incremento, in lucem proferet. Vnum eſt quod moneam, maximam horum epigrammatum partem Metrodoro tribui, quibuſdam verò, alia nomina eſſe præfixa, quædam denique incertos habere authores.

I.

Ολβιε Πυθαγόρη Μουσέων Ελικώνιον ἔρνος
Εἰπέ μοι εἰρομένῳ ὁπόσοι σοφίης κατ' ἀγῶνα
Σεῖο δόμοισιν ἔασιν, ἀεθλεύοντες ἄριστα.
Τοὶ χὸ ἐγὼν ἐθέλω Πολύκρατες. ἡμίσεες μὲν
Ἀμφὶ καλὰ στεῦνται μαθήματα. τέτρατοι αὖτε
Ἀθανάτου φύσεως πεπονήαται. ἑβδομάτοις δὲ
Σιγὴ πᾶσα μέμηλε, & ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι.
Τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι, Θεανὼ δ' ἔξοχος ἄλλων.
Τόσσους Πιερίδων ὑποφήτορας αὐτὸς ἀείνως.

Dic Heliconiadum decus ô ſublime ſororum
Pythagora, tua quot tyrones tecta frequentent
Qui ſub te Sophiæ ſudant in agone magiſtro.
Dicam, tuque animo mea dicta Polycrates hauri.
Dimidia horum pars præclara mathemata diſcit
Quarta immortalem naturam noſſe laborat.
Septima ſed tacitè ſedet, atque audita reuoluit.
Tres ſunt fœminei ſexus; At prima Theano.
Pieridum arcanis tot vates imbuo ſacris.

Hic perſpicuum eſt numerum quæri, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{7}$. ſimul adſumpto ternario ipſum quæſitum numerum conſtituant. Ponatur is 1 N. ergo $\frac{1}{2}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{7}$ N. & præterea 3. hoc eſt $\frac{25}{28}$ + 3. æquantur 1 N. vnde fit 1 N. 28. quæſitus numerus diſcipulorum. Nam eius $\frac{1}{2}$ eſt 14. At $\frac{1}{4}$ eſt 7. Demum $\frac{1}{7}$. eſt 4. quorum ſumma 25. adſciſcens 3. conficit ipſum 28. vt requirebatur. Quoniam verò multæ quæſtiones eiuſdem naturæ deinceps proponentur, ad eas ſoluendas eſto vniuerſalis Canon.

Sume minimum numerum qui habeat datas partes, tum illius datas partes ſimul aufer ab eodem numero, per reſiduum diuide datum numerum in ipſa expreſſum quæſtione, quotientem ducito in ſumptum ab initio numerum, fiet quæſitus numerus.

Vt in propoſita quæſtione, minimus numerus qui habeat $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. eſt 28. à quo aufer $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. illius, puta 25. relinquitur 3. per quem diuide 3. numerum in quæſtione expreſſum, fit quotiens 1. quem ducito in ipſum 28. fit quæſitus numerus 28.

II.

Α Κύπρις ἡ Ερωτα καταφιόωντα προσήυδα.
Τίπτέ τοι ὦ τέκος ἄλγος ἐπέχραεν; ὃς δ' ἀπάμειπτο.
Πιερίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη
Αἰνύμεναι κόλποιο, τὰ δὴ φέρον ἐξ Ελικῶνος.
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε; δωδέκατον δὲ
Εὐτέρπη; ἀτὰρ ὀγδοάτῳ λάχε δῖα Θάλεια.
Μελπομένη δ' εἰκοστὸν ἀπαίνυτο. Τερψιχόρητε
Τέβδατον. ἑβδομάτῳ δ' Ερατὼ μετεκίαθε μοίρῃ.
Η δὲ τεικόντων με Πολύμνια νόσφισε μήλων.
Οὐρανίη δ' ἑκατόν τε ἠὲ εἴκοσι. Καλλιόπη δὲ
Βειθυμένη μήλοισι τεικοσίοισι βέβηκε.
Σοὶ δ' ἄρα κουφοτέρῃσιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἰκάνω
Πεντήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θεάων.

Talibus aggreditur mœrentem Cypris Amorem.
Ecquis, nate, animo dolor insidet? Ille ita contrà.
Diripuere sinu *Libethrides* vndique adortæ
Decerpta ex Helicone sacro quæ mala ferebam.
Clio malorum quintante, duodecimaque
Euterpe, octaua sed gaudet parte Thalia.
Melpomenæ cessit vicesima; Nomen habentì
A me, septima. Terpsichore quadrante potitur.
Triginta me multauit Polyhymnia malis.
Vranie centum viginti. Calliopeque
Improbior, raptis discessit onusta tricenis.
Ecce tibi manibus vacuis occurro, dearum
Relliquias, quinquaginta vix mala reportans.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{4}$. simul, adsumptis numeris 30. 120. 300. 50. conficiant ipsum quæsitum numerum. Quare per Canonem supra traditum sumo minimum qui habeat datas partes, puta 840. suntque illius partes datæ 168. 70. 105. 42. 120. 210. quarum summa 715. qua detracta de 840. manet 125. per quem diuido summam datorum numerorum 30. 120. 300. 50. puta 500. fit quotiens 4. quo ducto in sumptum numerum 840. fit quæsitus numerus 3360. malorum scilicet multitudo.

III.

Αἱ Χάριτες μήλων καλάθοις φέρον, ἐν δ' ἑκάστῃ
Ισον ἔλω πλῆθος. Μῶσαι σφίσιν ἀντεβόλησαν
Εννέα, τὴ μήλων σφέας ἤτεον. αἱ δ' ἄρ' ἔδωκαν
Ισον ἑκάστῃ πλῆθος, ἔχον δ' ἴσα ἐννέα τῇς.
Εἰπὲ πόσον δῶκαν, ὅπως δὴ ἴσα πᾶσαι ἔχεσκον.

Mala ferunt calathis Charites, æqualia cuique
Mala insunt calatho. Musarum his obuia turba
Mala petunt: Charites cunctis æqualia donant.
Tunc æqualia tres contingit habere, nouemque.
Dic quantum dederint, numerus sit vt omnibus idem.

Sensus est. Singulæ Charites habent eundem seu æqualem malorum numerum, & quælibet tradit singulis musarum æqualem numerum, hacque demum contributione facta, quælibet Charis & quælibet Musa, eundem reperitur habere numerum. Soluitur autem quæstio si iungas numerum

Charitum atque Musarum, puta 3. & 9. vnde fit 12. Quare dicendum quamlibet Charitum ab initio habuisse mala 12. vel numerum quemlibet malorum qui sit multiplex ad 12. hac tamen lege vt si sumas 12. quælibet Charis cuilibet Musæ tribuat malum vnum; si sumas 24. quælibet Charis tribuat cuilibet Musæ mala duo, & sic deinceps. Verbi gratia Ponamus. Charitum quamlibet habuisse ab initio mala 24. & dare singulis Musis mala 2. Ergo quælibet Charis tribuet Mala 18. quia sunt nouem musæ, ac proinde cuilibet Chariti relinquentur mala 6. At quælibet musa accipiens Mala 2. à qualibet Charite, habebit etiam mala 6. vt euidens est. Quare patet propositum.

IV.

Τοῦξόν μοι σέφανον, χρυσὸν, χαλκόντε κεράσας,
Κασίτερόν δ' ἅμα τοῖσι, πολύκμητόν τε σίδηρον
Μνᾶς ἑξήκοντα. χρυσὸς δ' ἐχέτω μὲν χαλκᾶ
Δεκὰ μέρη τεσσῶν. χρυσὸς θ' ἅμα, κασίτερός τε
Τεσσὰ μέρη τετόρων. χρυσὸς δ' ἅμα ἠ δὲ σίδηρος
Τόσσα μέρη πρὼ πέντε. πόσον δ' ἄρα δεῖ σε κεράσαι
Λέξον τᾶ χρυσᾶ, χαλκᾶ πόσον, ἀλλ' ἔτι λέξον
Κασιτέροιο πόσον, λοιπᾶ πόσον εἰπὲ σιδήρου
Ὡστε σε τὸν σέφανον τεύξαι μνᾶν ἑξήκοντα.

Æs, ferrum, stannum miscens, aurique metallum
Sexaginta minas pensantem finge coronam.
Æs aurumque duos simul efficiunto trientes.
Ternos quadrantes stanno mixtum impleat aurum.
At totidem quintas auri vis addita ferro.
Ergo age dic fului quantum tibi coniicis auri
Miscendum, dic quantum æris stannique requiras,
Dic quoque sufficiant duri quot pondera ferri
Præscriptam vt valeas rite efformare coronam.

Esto quantitas auri 1 N. Quia ergo aurum & æs simul sunt $\frac{2}{3}$ de 60. puta 40. erit æris quantitas $40-1$ N. eadem de causa, erit stanni quantitas $45-1$ N. & ferri quantitas $36-1$ N. Quantitas ergo quatuor metallorum simul, erit $121-2$ N. æqualis 60. vnde fit 1 N. $30\frac{1}{2}$. quantitas scilicet auri, at quantitas æris est $9\frac{1}{2}$. stanni $14\frac{1}{2}$. ferri $5\frac{1}{2}$.

V.

Τὸ τρίτον ἀργυρόποιε παρεμβαλε καὶ τὸ τέταρτον
Τῆς φιάλης εἰς ἓν, & τὸ δυωδέκατον.
Εἰς ᾧ κάμινον ἔλαυνε βαλὼν, & πάντα κυκήσας
Ἔξελε μοι βῶλον, μιᾶν ᾗ μοι ἐλκυσάπω.

Sume tibi Phialæ faber ingeniose trientem
Quartamque, & partem sume duodecimam,
Iniice fornaci simul omnia mixta; sed inde
Prodeat vnam æquans pondere massa minam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. simul conficiant 1. Esto is 1 N. ergo $\frac{1}{3}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{12}$ N. simul, hoc est $\frac{2}{3}$ N. æquantur vnitati, vnde fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. quot minas pendebat Phiala.

VI.

Ἐχω τὸν ἕξης, καὶ τὸ τᾶ τρίτου τρίτον.
Κἀγὼ τὸν ἕξης, καὶ τὸ τᾶ πρώτου τρίτον.
Κἀγὼ δέκα μνας, καὶ τὸ τᾶ πρώτου τρίτον.

Æquo sequentem cum triente tertij.
Æquat sequens me, iunctus & primi triens.
Supero trientem primi ego decem minis.

Tres

Tres poſtulantur numeri, vt primus, contineat ſecundum & $\frac{1}{3}$ tertij. Secundus contineat tertium & $\frac{1}{3}$ primi. Tertius contineat 10. & $\frac{1}{3}$ primi. Statuatur tertius 1 N. + 10. ergo triens primi erit 1 N. ac proinde primus ipſe 3 N. Quia verò ſecundus continet tertium & $\frac{1}{3}$ primi, ſi tertio puta 1 N. + 10. addas $\frac{1}{3}$ primi, puta 1 N. fiet ſecundus 2 N. + 10. Reſtat vt primus æquetur ſecundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{3}$ N. + 10. addas $\frac{1}{3}$ primi, puta 1 N. fiet ſecundus 2 N. + 10. Reſtat vt primus æquetur ſecundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{3}$ N. + 13 $\frac{1}{3}$. & fit 1 N. 20. Sunt igitur quæſiti numeri 60. 50. 30.

VII.

Τοὺς χιλίους ϛατῆρας οὓς ἐκπσάμλω
Λαβεῖν κελδύω τὰς ἐμὰς παῖδας δύο.
Πλὴν γνησίου τὸ πέμπλον ἠυξήθω δέκα
Μέρος τετάρτου τῷ λαχόντων τῷ νόθῳ.

Quos poſſidere mille ſtateras datum eſt
Sic partiantur præcipio nati duo.
Ex coniuge orti quinta pars, addat ſuper
Quadranti eorum quos nothus ſumet, decem.

Senſus eſt Volo legitimum filium de mille nummis tot accipere, vt eorum quinta pars ſuperet numero 10. quadrantem eorum quos ſumet Nothus. Ergo numerus 1000. diuidendus eſt in duas partes, ita vt quinta pars vnius ſuperet denario quadrantem alterius. Eſto pars vna 1 N. altera 1000 − 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. + 10. æquari debet quintæ parti de 1000 − 1 N. hoc eſt 200 − $\frac{1}{5}$ N. æquatur $\frac{1}{5}$ N. + 10. & fit 1 N. 422 $\frac{2}{9}$. pars quæ notho cedit. Quare pars quæ legitimo competit, eſt 577 $\frac{7}{9}$.

VIII.

Ἐξ μνᾶν, ἓξ φιάλας Κροῖσος βασιλευς ἀνέθηκεν
Δραχμῇ τλω ἑτέραν μείζονα τῆς ἑτέρας.

Mnarum ſex, Phialas ſex Crœſus dedicat, atque
Eſt maior drachma quæque priore ſequens.

Cùm quælibet minea contineat drachmas 100. minæ ſex ſunt 600. drachmæ. Quare numerus 600. diuidendus eſt in ſex partes per continuam vnitatis additionem progredientes. Eſto prima 1 N. erit ſecunda 1 N. + 1. tertia 1 N. + 2. quarta 1 N. + 3. quinta 1 N. + 4. ſexta 1 N. + 5. fit omnium ſumma 6 N. + 15. æqualis 600. vnde fit 1 N. 97 $\frac{1}{2}$. prima pars, ſunt ergo aliæ 98 $\frac{1}{2}$ 99 $\frac{1}{2}$ 100. $\frac{1}{2}$. 101 $\frac{1}{2}$. 102 $\frac{1}{2}$.

IX.

Ωρονόμων ὄχ' ἄειϛε, πόσον παρελήλυθεν ἠους ;
Οσσον ἀποιχομένοιο δύο τρίτα, δὶς τόσα λείπει.

Dic quota nunc hora eſt ? ſuperat tantum ecce diei,
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Antiquorum more diem diuidentes in duodecim partes æquales, ſeu in horas 12. quas Gnomonici Planetarias vocant; Ponamus numerum tranſactarum horarum eſſe 1 N. ergo reliquus horarum numerus vſque ad noctem erit ex quæſtionis lege $\frac{1}{3}$ N. & fiet omnium horarum ſumma $\frac{7}{3}$ N. æqualis 12. Eſt ergo 1 N. 5 $\frac{1}{7}$ numerus ſcilicet horarum tranſactarum, & ſuperſunt vſque ad finem diei horæ 6 $\frac{6}{7}$.

X.

Τίπτέ με τῷ καρύων ἕνεκεν πληγῆσι πέζεις
Ω μῆτερ, τὰ δὲ παντα καλα διεμοιρήσανϛο
Παρθενοι. ἡ γὰ ἐμεῖο Μελίασιον ἕβδομα δοιά.
Η δὲ δυωδέκαϛον Τιτανὶη λάβεν. ἕκτον ἔχουσι
Καὶ τρίτον Ασυόχη φιλοπαίγμονες, ἡ ὃ Φίλιννα.
Εἴκοσι δ' ἁρπάζασα Θέτις λάβε. δώδεκα Θίσβη.

Ην ὅρα καὶ δὲ γελᾶ Γλαύκη παλάμῃσιν ἔχουσα
Ενδεκα τοῦτο δὲ μοι κάρυον περιλείπεται οἷον.

Quid mihi pro nucibus minitaris verbera mater?
Has pulchræ inter se dispertiuere puellæ.
Septima pars flauæ cessit geminata Melissæ.
Ipsa duodecimam Titane sibi sumpsit, habentque
Sextantem Astyoche, festiua Philinna trientem,
Viginti Thetis, at rapuit Thisbe improba bix sex.
Abstulit & ridens Glauce totidem minus vnâ.
Sed numero ex omni nux hæc mihi denique restat.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$. simul adsumentes 20. 12. 11. 1. faciant ipsum quæsitũ numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 84. cuius partes datæ simul additæ, faciunt 73. quo ablato de 84. superest 11. per quem diuido summam ipsorum 20. 12. 11. 1. puta 44. fit quotiens 4. quo ducto in sumptum numerum 84. fit quæsitus numerus 336. Nam eius datæ partes sunt 96. 28. 56. 112. quorum summa 292. cui si addas summam datorum numerorum, puta, 44. fit rursus 336. vt postulabatur.

X I.

Ποῦσοι μῆλα βέβηκεν ἐμὸν τέκος; ἕκτα μὲν Ινὼ
Δοιὰ, καὶ ὀγδοάτην μοῖραν ἔχει Σεμέλη.
Αὐτονόη δὲ τέταρτον ἀφήρπασεν. αὐτὰρ Αγαύη
Πέμπτον ἐμῶν κόλπων οἴχετ' ἀπαινυμένη.
Σοὶ δ' αὐτῇ δέκα μῆλα φυλάσσεται. αὐτὰρ ἔγωγε,
Ναί μα φίλην Κύπριν, ἓν τόδε μοῦνον ἔχω.

Dic vbi, Nate, reposta tibi sunt mala? Trientem
Ino habet, octantem possidet at Semele.
Quadrantem Autonoë sumpsit, properauit Agaue
Quintantem è nostro diripuisse sinu.
Mala decem seruantur adhuc tibi. Testis amica.
Sed Venus, hoc vnum iam superesse mihi.

Inueniendus est numerus, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. simul adsumpto 11. conficiant ipsum quæsitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 120. cuius partes datæ simul faciunt 109. quo sublato de 120. superest 11. per quem diuido datum numerum 11. fit quæsitus numerus 120. & manifesta est solutio.

XII.

Δρεψαμένη πότε μῆλα φίλαις διεδάσσατο Μυρτώ.
Χρυσίδι μὲν μήλων πέμπτον πόρε, τέτρατον Ηροί.
Εννεακαιδέκατον Ψαμάθῃ δέκατον Κλεοπάτρῃ.
Αὐτὰρ ἐεικοστὸν δωρήσατο Παρθενοπείῃ.
Δώδεκα δ' Εὐάδνῃ μοῦνον πόρεν. αὐτὰρ ἐς αὐτὴν
Ηλυθον ἐκ πάντων ἕκατον καὶ εἴκοσι μῆλα.

Dilectis Myrto diuisit mala puellis.
Heronem quarta, sed donat Chrysida quintâ.
Dat decimam nonam Psamathæ, decimam Cleopatræ.
Pars munus cedit vicesima Parthenopææ.
Bis sex Euadne capit. Ipsi denique tanto
De numero, centum viginti mala supersunt.

Quærendus est numerus cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{19}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{20}$. simul adsciscentes 12. & 120. seu 132. faciant ipsum quæsitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 380. cuius datæ partes simul faciunt 248. quo detracto ab ipso 380. remanet 132. vnde liquet ipsum 380. esse quæsitum numerum.

XIII.

Αντομένοις ποτε μῆλα φίλαις διεμοιρήσαντο
Ινὼ καὶ Σεμέλη δώδεκα παρθενικαῖς.
Καὶ ταῖς μὲν Σεμέλη πόρεν ἄρτια, ταῖς δὲ περισσὰ
Δῶκε κασιγνήτη, μῆλα δ' ἔχεν πλέονα.
Η μὲν γὰρ τρισσῇσι τρὶ ἕβδομα δῶκεν ἑταίραις,
Ταῖς δὲ δύω πάντων πέμπτον ἔδωκε λάχος.
Ενδεκα δ' Αστυνόμη μιν ἀφείλατο, καὶ οἱ ἔλειπεν
Μοῦνα Κασιγνήταις μῆλα δύω φερέμεν.
Η δ' ἑτέρη πισύρεσσι πόρεν δύο τέτραδα μήλων.
Πέμπτῃ δ' ἑκταίην μοῖραν ἔδωκεν ἔχειν.
Τέσσαρα δ' Εὐρυχόρῃ δῶρον πόρε. τέξασι δ' ἄλλοις
Μήλοισιν Σεμέλη μίμνεν ἀγαλλομένη.

Bis senis Ino quondam Semeleque puellis
Pignus amicitiæ mala dedere suæ.
Parcior & Semele paria istis tradidit. Illis
Imparia exhibuit pluraque mala soror.
Quintam malorum partem dedit ista duabus.
Est data virginibus septima trina tribus.
Astynomeque decem, sed & vnum sumit. At Ino
Germanis retinet bina ferenda suis.
Altera bis geminas gemino quadrante puellas
Donat, sextantem quinta puella capit,
Quatuor Eurychore. Solido Semele quoque gaudet
Quatuor è numero mala relicta sibi.

Hic duo quæruntur numeri. Nam primum Ino mala sua sex puellis ita distribuit, vt duabus simul det $\frac{1}{5}$. malorum, tribus verò $\frac{3}{7}$. sextæ autem 11. mala, quo facto remanent ei mala 2. Quare cùm minimus qui habeat datas partes sit 35. à quo si auferas $\frac{1}{5}$. & $\frac{3}{7}$. puta 22. remanet 13. qui æquatur reliquis malis, patet ipsum 35. esse numerum malorum quæ habuit Ino. Deinde Semele quatuor puellis simul dat duos quadrantes seu $\frac{1}{2}$ suorum malorum, quintæ dat $\frac{1}{6}$. sextæ mala 4. quo facto remaneat ei mala 4. Quare sumpto 12. minimo qui habet datas partes, aufero ab eo datas partes, puta 8. remanet 4. per quem diuido reliqua mala in quæstione expressa, puta 8. fit quotiens 2. quo ducto in sumptum numerum 12. fit 24. numerus malorum Semeles. Accidit etiam primum numerum 35. esse imparem, secundum verò 24. esse parem & minorem primo, vt requirebat quæstio.

XIV.

Η καρύη πολλοῖσιν ἐβεβρίθει καρύοισιν
Νῦν δὲ τις ἐξαπίνης μιν ἀπέθρισεν. ἀλλά τι φησὶν.
Εκ μὲν ἐμεῦ καρύων πέμπτον λάβε Παρθενόπεια.
Ογδοάτον δὲ Φίλιννα φέρει λάχος; ἡ δ' Αγανίππη
Τέξατον, ἑβδομάτῳ δ' ἐπιτέρπεται Ωριθυῖα
Εκτὴν δ' Εὐρυνόμη καρύων ἐδρέψατο μοῖραν.
Τρισσαὶ δ' ἓξ ἑκατὸν Χάριτες διεμοιρήσαντο.
Εννάκι δὲ ἐννέα Μοῦσαι ἐμοῦ λάβον. ἑπτὰ δὲ λοιπὰ
Δήεις ἀκρεμόνεσσιν ἐφημένα τηλοτέροισιν.

Quæ ſucciſa iacet, multo nux ardua quondam
Pollebat fœtu, numerumque hac arte recenſet.
Noſtris ex nucibus quintam ſibi Parthenopæa.
Octauamque Philinna capit, quartamque Aganippe.
Septima formoſæ conceditur Orithyiæ.
Eurynome ſextam è numero ſibi vendicat omni.
Centenas ternæ Charites ſenaſque tulere.
Demum Pierides nouies ſumpſere nouenas.
Summis in ramis ſeptem tamen ecce ſuperſunt.

Oportet inuenire numerum cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{6}$. ſimul vnà cum ſumma numerorum 106. 81. 7. puta cum 194. faciant ipſum numerum qui quæritur. Minimus habens partes datas eſt 840. à quo ſi auferas compoſitum ex datis partibus, puta 743. remanet 97 per quem ſi diuidas datum numerum 194. fit quotiens 2. quo ducto in ſumptum numerum 840. fit quæſitus numerus 1680.

XV.

Επτάλοφον ποτὶ ἄστυ Γαδειρόθεν, ἕκτον ὁδοῖο
Βαίτιος εὐμύκοις ἄχρις ἐς ἠϊόνας.
Κεῖθεν δ' αὖ πέμπτον Πυλάδου μὴν φώκιον ὕδας
Ταύρη χθὼν βοέης ὄνομ' ἀπ' εὐετίης.
Πυρήνην δὲ τοι ἔνθεν ἐπ' ὀρθόκραιρον ἰόντι
Οἶδοον, ἡ δὲ μιῆς δωδέκατον δεκάδος.
Πυρήνης δὲ μεσηγὺ καὶ Αλπιος ὑψικαρήνου
Τέτρατον Αὐσονίης αἶψα δυωδέκατον
Αρχομένης, ἤλεκτρα φαείνεται Ηριδάνοιο
Ω μάκαρ ὃς διασὰς ἤνυσα χιλιάδας
Πρὸς δ' ἔτι πέντ' ἐπὶ ταῖς ἑκατοντάδας ἔνθεν ἐλαύνων
Η γὰρ Ταρπαίη μέμβλετ' ἀνακτορίη.

Quiſquis adire cupis Romanam Gadibus vrbem,
Sextans ad ripam Bætidis vſque viæ eſt.
Quintantem hinc numera Phocenſis ad arua coloni
A multa regio quæ boue nomen habet.
Inde Pyrenæi præcelſa ad culmina montis
Octans eſt, decimæ parſque duodecima.
Quarta Pyrenæos, gelidas iacet inter & Alpes.
Parte duodecima hinc incipit Auſonia.
Quâ Phaëtontiades ſudant electra ſorores.
Sed tamen vlterius millia perge duo.
Reſtabunt quingenta tibi tum denique, donec
Tarpeio poſſis ſiſtere colle gradum.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{120}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. ſimul vnà cum 2500. conficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 120. & illius datæ partes ſimul faciunt 100. quo ablato de 120. remanet 20. per quem diuidendo 2500. fit quotiens 125. quo ducto in ſumptum numerum 120. fit quæſitus 15000. numerus ſcilicet ſtadiorum quæ inter Gades & vrbem Romanam numerat Epigrammatarius.

XVI.

Εὐβλεφάροιο δίκης ἱερὰ κρήδεμνα μιήας
Οφρα σε πανδαμάτωρ χρυσὲ βλέποιμι τόσον.
Οὐδὲν ἔχω, πίσρασυγὸ ἐπ' οὐκ ἀγαθοῖσι ταλάντων

Οιωνοῖσι, μάτην δῶκα φίλοις δεκάδας.
Ημισυ δ' αὖ, τρίτατον ᾗ ϛ ὄϛδοον (ὦ πολύμορφοι
Ανθρρώπων κῆρες) ἐχθρὸν ἔχοντα βλέπω.

Iustitiæ sacras ausus conuellere leges
Vt turgens auro cuncta domante forem,
Nil iam possideo, infidis quia nuper amicis,
Læua mente quater dena talenta dedi.
Nunc quoque semissem, simul octantem, atque trientem
(O duram sortem) barbarus hostis habet.

Quærendus est numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{3}$. simul cum 40. efficiant ipsum quæsitum numerum. Minimus habens datas partes est 24. cuius datæ partes simul faciunt 23. quo detracto de 24. superest 1. per quem diuidendo 40. fit 40. quo ducto in 24. fit 960. quæsitus numerus.

XVII.

Πέμπτόν μοι κλήρου παῖ λάμβανε. δωδέκατον δὲ
Δέξο δάμαρ. πίσυρες δ' υἱέες οἰχομένου
Παῖδος, ἀδελφειοίτε δύω, ϛ ἀγάστονε μῆτερ
Ενδεκάτην κλήρου μοῖραν ἕκαστος ἔχε.
Αὐτὰρ ἀνεψιοὶ δύο ϗ δέκα δέχθε τάλαντα.
Εὔβουλος δ' ἐχέτω πέντε τάλαντα φίλος.
Πιστοτάτοις δμώεσσιν ἐλευθερίην ϗ ἄποινα
Μισθὸν ὑπηρεσίης, τοῖς ᾗ δίδωμι τάδε.
Ωδὶ λαμβανέτωσαν, Ονήσιμος εἴκοσι πέντε
Μνᾶς ἐχέτω. Δᾶος δ' εἴκοσι μνᾶς ἐχέτω.
Πεντήκοντα Σύρος, Συνετὴ δεκα, Τίβιος ὀκτὼ.
Επτὰ ᾗ μνᾶς Συνέτῳ παιδὶ δίδωμι Σύρου.
Εκ ᾗ τριηκόντων κοσμήσατε σῆμα ταλάντων
Ρέζετε δ' οὐδαίῳ ζανὶ θυηπολίην.
Δισσῶν ἐς δὲ πύρην, ϛ ἄλφιτα, ϗ τελαμῶνας,
Εἰκαίην δοιὼν σῶμα χάριν λαβέτω.

Assis habe quintam, fili; charissima coniux
Sume duodecimam. Quatuor alterius
Natorum nati, fratres bini, optima mater
Vndecimam partem quilibet accipiat.
Ferte talenta decem patrueles aucta duobus
Noster & Eubulus quinque talenta ferat.
Fidis libertas famulis conceditor, hæcque
Sint longi merces munera seruitij.
Vicenas quinas sibi sumat Onesimus; atqui
Vicenas sinitor Dauus habere minas.
Quinquaginta Syrus, capiat quoque Tibius octo:
At Syneto septem sint, Syneteque decem.
Triginta totis tumulum exornate talentis,
Debitaque inferno sacra parate Ioui.
Bina pyræ, cum fasciolis, dapibusque supremis
Artubus vngendis bina talenta dico.

Hic exprimuntur partes $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{7}{11}$. & talenta 12. 5. 30. 2. 2. ac præterea minæ 25. 20. 50. 8. 7. 10. seu

minæ 120. quæ valent talenta duo, quare talentorum expressorum numerus est 53. Porrò minimus qui habeat datas partes est 660. atque idem est numerus qui quæritur, quia si ab eo abstuleris datas illius partes, puta 607. remanet 53.

XVIII.

Τύμβος ἐγὼ, κεύθω δὲ πολύστονα τέκνα Φιλίννης,
Τοῖον μαψιτόχων καρπὸν ἔχων λαγόνων.
Πέμπτον ἐν ἠϊθέοις, τρίτατον δ' ἐνι παρθενίκῃσι.
Τρεῖς δὲ μοι ἀρτιγάμους δῶκε Φίλινα κόρας.
Λοιποὶ δ' ἠελίοιο πανάμμοροι ἠδὲ καὶ αὐδῆς
Τέσσαρες ἐκ λαγόνων εἰς Αχέροντα πέσον.

Marmore clauditur hoc proles numerosa Philinnæ,
Frustrà maternis edita visceribus.
Quintantem iuuenes complent; geminumque puellæ
Sextantem; nuptas tres tegit iste lapis.
Quatuor haud viso ceciderunt sole sub orcum
Translati ex vtero, proh dolor! in tumulum.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. simul cum 7. faciant ipsum quæsitum numerum, & statim per Canonem traditum inuenitur numerus 15.

XIX.

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ἆ μέγα θαῦμα
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Εκτὴν κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην.
Δοδεκάτῃ δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν.
Τῇ δ' αρ' ἐπ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
Εκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἴ αἴ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
Τοῦ δὲ καὶ ἡ κρυερὸς μέξον ἑλὼν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
Τῇ δὲ πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Hunc Diophantus habet tumulum, qui tempora vitæ
Illius, mira denotat arte tibi.
Egit sextantem iuuenis; lanugine malas
Vestire hinc cœpit parte duodecima.
Septante vxori post hæc sociatur, & anno
Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquàm attigit ille paternæ
Infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
Cogitur, hinc annos illius assequere.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{2}$. simul adsumentes 5. & 4. seu 9. faciant ipsum quæsitum numerum. Is ex tradito Canone inuenietur esse 84.

XX.

Πάντος ὅσον βεβίωκε χρόνου, παῖς μὲν τὸ τέταρτον
Διμοχάρης βεβίωκε; νεηνίσκος δὲ τὸ πέμπτον.

Τὸ τρίτον εἰς ἄνδρας. πολιὸν δ' ὅτ' ἀφίκετο γῆρας
Εζησεν λοιπὰ ξεῖς ϗ δέκα γήραος οὐδῷ.

Quadrantem ætatis puerilibus egit in annis
Quintantem iuuenis decurrit, virque trientem
Demochares, cana demum accedente ſenecta
Bis quinos reliquum vixit treſque inſuper annos.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{3}$. adſumentes 13. faciunt ipſum quæſitum numerum. Is inuenietur per vſitatum Canonem 60.

XXI.

Οἷον ἀδελφειός με βιήσατο, πέντε τάλαντα
Οὐχ ὁσίῃ μοίρῃ πατρικὰ δασσάμενος.
Επτὰ κασιγνήτοιο τοῦ ἑνδεκάτων πολύδακρυς
Πέμπτον ἔχω μοίρης. Ζεῦ βαθὺν ὕπνον ἔχεις.

Vim frater facit, in partes nec diuidit æquas
Quæ nobis liquit quinque talenta pater.
Nam multum lachrymans ſeptem illius vndecimarum
Quintam habeo partem. Iupiter iſta vides?

Numerus 5. diuidendus eſt in duas partes, vt prioris quinta pars de $\frac{7}{11}$. ſeu $\frac{7}{55}$. æquentur poſteriori. Eſto prior 1 N. poſterior 5 − 1 N. ergo $\frac{7}{55}$ N. æquantur 5 − 1 N. & fit 1 N. 4 $\frac{27}{62}$. prior pars. Igitur poſterior eſt $\frac{35}{62}$.

XXII.

Εἶπε κυβερνητῆρι, πλατὺν πόρον Αδριακοῖο
Τέμνων νηὶ, ἁλὸς πόσα λείπεται εἰσέτι μέτρα.
Τὸν δ' ἀπαμείβετο. ναῦτα μέσον κριοῖο μετώπου
Κρηταίου, Σικελῆς τε Πελωρίδος, ἑξάκι μέτρα
Χίλια, δοιῶν δ' αὖτε παροιχομένοιο δρόμοιο
Πέμπτων διπλάσιον Σικελὴν ἐπὶ πορθμίδα λείπει.

Adriacas dum findit aquas, è puppe magiſtrum
Nauta rogat, quantum pelagi iam reſtet arandum.
Ille refert. Creten inter Siculumque Pelorum
Millia ſex numerant, exhauſti iamque profundi
Bis gemini nobis quintantes ecce ſuperſunt
Sicania donec remos lentemus in vnda.

Numerus 6000. ſecandus eſt in duas partes, vt prioris $\frac{4}{5}$. æquentur poſteriori. Eſto prior 1 N. ergo poſterior 6000 − 1 N. Quare $\frac{4}{5}$. N. æquantur 6000 − 1 N. & fit 1 N. 3333 $\frac{2}{3}$. prior pars. Igitur poſterior relinquitur 2666. $\frac{2}{3}$. Quot ſtadia reſtabant vſque ad Pelorum.

XXIII.

Τῶν πισύρων κρουνῶν ὁ μὲν ἥματι πλῆσεν ἅπασαν
Δεξαμενὴν, δύο δ' εἶσι, ὅδ' ἐν τρισὶν ἥμασιν εἶσι,
Τέτρατος ἐν τετόρεσσι. πόσῳ πλήσουσιν ἅπαντες;

Totum implere lacum tubulis è quatuor, vno
Eſt potis iſte die, binis hic & tribus ille,
Quatuor at quartus. Dic quo ſpatio ſimul omnes.

Pone quatuor tubos ſimul implere totum lacum in 1 N. dierum. Et dic per regulam trium ſi primus tubus vna die implet totum lacum, ſeu vnum lacum, quantum implebit in 1 N. diei, inuenies 1 N. eadem ratione reperies ſecundum tubum implere $\frac{1}{2}$ N. tertium $\frac{1}{3}$ N. quartum $\frac{1}{4}$ N. Quare omnes ſimul implebunt $\frac{25}{12}$ N. Quare $\frac{25}{12}$ N. æquantur vnitati, & fit 1 N. $\frac{12}{25}$. Quare omnes tubi ſimul implebunt lacum in $\frac{12}{25}$. diei.

Hinc porro ad ſoluendas huiuſmodi quæſtiones formabimus huiuſmodi Canonem.

Diuide vnitatem ſigillatim per denominatores rationum datarum, rurſus per ſummam quotientum diuide vnitatem, orietur quæſitus numerus.

Vt in propoſita quæſtione, quia denominatores rationum datarum ſunt 1. 2. 3. 4. diuide vnitatem, ſigillatim per 1. 2. 3. 4. fient 1 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. quorum ſumma $\frac{25}{12}$ per quam rurſus diuide vnitatem, fit $\frac{12}{25}$ numerus quæſitus.

XXIV.

Οἶγέ με, καὶ πισύρεσσιν ἐνιπλήσω παρεοῦσαν
Δεξαμενὴν ὥραις, κρουνὸς ἅλις προρέων.
Δεξιτερὸς δ' ἀρ ἐμεῖο τόσαις ἀπολείπεται ὥραις
Οφρα μιν ἐμπλήσει. δὶς δὲ τόσαις ὁ τρίτος.
Εἰ δ' ἄμφω σὺν ἐμοὶ προχέειν ῥοὸν ἐς μιὰν οἴγοις
Εἰν ὀλίγῃ μοίρῃ πλήσομεν ἡματίῃ.

Me reſera, & lymphas profundens quatuor horis
Subiectum implebo protinus ipſe lacum.
Æquali dexter ſpatio, duploque ſiniſter
Quando fluit, vitreis hunc tubus implet aquis.
Parte ſed implemus longè breuiore diei
Vno ſi mecum tempore vterque fluat.

Per Canonem ſuprà traditum diuide ſigillatim vnitatem per numeros 4. 4. 8. fient quotientes $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. quorum ſumma $\frac{5}{8}$. per quam ſi diuidas rurſus vnitatem fit $\frac{8}{5}$ quæſitus horarum numerus, quibus tres tubi ſimul lacum implebunt.

XXV.

Κύκλωψ ὦ Πολύφημος ὁ χάλκεος, οἷα δ' ἐπ' αὐτῷ
Τεῦξε τὶς ὀφθαλμὸν, καὶ στόμα, καὶ παλάμην.
Κρουνοῖς συζεύξας, στάζοντι δὲ πάμπαν ἔοικεν
Η δ' ἔτι καὶ βλύζων φαίνετ' ἀπὸ στόματος.
Κρουνῶν δ' οὔτις ἄτακτος. ὁ μὲν παλάμης τρισὶ μούνοις
Ημασιν ἐμπλήσει δεξαμενὴν προρέων.
Ημάτιος γλήνης, στόμα δ' ἥματος ἐν δύο πέμπτοις.
Τὶς κ' ἐνέποι τρισσοῖς ἰσαθέοντα χρόνον.

Æreus hic Cyclops Polyphemus. Reſpice quali
Arte, quis os, oculum finxerit, atque manum.
Occultos parti ſalientes cuilibet aptans
Effecit gelidas vt iaculentur aquas.
Ordine ſed tali. Plenus tribus ecce diebus
Eſt lacus, è dextræ ſi fluat vnda tubo.
Vna dies oculo; geminatus ſufficit ori
Quintans. Quod ſpatium ſufficit ergo tribus?

Ex lege traditi Canonis diuide ſigillatim vnitatem per 3. 1. $\frac{2}{5}$. fient quotientes $\frac{1}{3}$. 1. $\frac{5}{2}$. quorum ſumma $\frac{23}{6}$. per quam ſi diuidas rurſus vnitatem, fit quæſitus numerus $\frac{6}{23}$. pars diei qua tres tubi ſimul lacum impleturi ſunt.

XXVI.

XXVI.

Ὡς ἀγαθὸν κρητῆει θεοὶ κερόωσι ῥέεθρον
Οἱ ἦ δύω ποταμοὶ, κὴ Βρομίοιο χάεις.
Ισος δ' ἀ πάντεσι ῥόου δρόμος, ἀλλά μιν οἶθ'
Νεῖλος μὴν θερέων ἡμάθθ κορέσῃ,
Τόσσον ὕδωρ μαζῶν ἀπερεύγεϑ. ἐκ δ' ἄρα Βάκχε
Θυρσὸς ἐνὶ τελεσοῖς ἤμασιν οἶνον ἰεὶς.
Σὸν ἦ κέρας Αχελῶε δύ' ἤμασι. νυὶ δ' ἅμα πάντες
Ρεῖτε, κὴ εἰν ὥρας πλήσετε μὶν ὀλίγας.

Vt miſcent pariter dulcem in Cratere liquorem
Hinc gemini fluuij, Liber & inde pater.
At non æquali ſpatio tamen influit humor
Vno namque potes nile replere die.
Tantum fundis aquæ è mammis. Tribus ecce diebus
Quod Thyrſo præbes implet Iacche merum.
Binos cornu Acheloë dies fluis. At ſimul omnes
Ite, breui Crater tempore plenus erit.

Diuide ſigillatim vnitatem per 1. 3. 2. fient quotientes 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. quorum ſumma $\frac{11}{6}$. per quam diuide rurſus vnitatem, fit quæſitus numerus $\frac{6}{11}$. pars ſcilicet diei qua tres tubi ſimul craterem implebunt.

XXVII.

Ω γύναι ὡς πενίης ἐπελήσαο. ἦδ' ὀπίκειται
Αἰὲν ἀναγκαίη κέντρα φέρουσα πόνων.
Μναῦ ἐρίων νήθεσκες ἐν ἤματι. πρεσβυτέρη δὲ
Θυγατέρων, κὴ μνῆαν κὴ τρίτον εἵλκε κρόκης.
Οπλοτέρη ἦ μιῆς φέρεν ἥμισυ. νυῦ δ' ἅμα πάσαις
Δόρπον ἐφοπλίζει μναῦ ἐρύσας ὁ κανών.

Te tua paupertas mulier latet? Attamen vrget
Et duri ſtimulos ipſa laboris habet.
Quotidie vnam tu: ſed maior nata ſolebat
Lanæ cum toto nere triente minam.
Nebat nata minor ſemiſſem. Nunc tribus autem
Ex vna vobis cœna parata mina eſt.

Senſus eſt. Mater quotidie nebat minam vnam lanæ. Maior natarum $\frac{4}{3}$. vnius minæ. Minor nata $\frac{1}{4}$ vnius minæ. Nunc tres ſimul nent minam vnam tantum quotidie, quæritur quantum quælibet neat eadem ſeruata proportione. Hoc ergo nil aliud eſt quàm diuidere vnitatem in tres partes ſeruantes eaſdem rationes quas habent inter ſe 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. Quare per Canonem ſecundæ primi adde ſimul 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. fit ſumma $\frac{17}{6}$. per quam diuide vnitatem, fit quotiens $\frac{6}{17}$ quem ducito ſigillatim in ipſos 1. $\frac{4}{3}$. $\frac{1}{2}$. fient quæſiti numeri $\frac{6}{17}$, $\frac{8}{17}$. $\frac{3}{17}$.

XXVIII.

Οἱ ἦ λοεξοχόοι ξεῖς ἔσαυλμ ἐνθάδ' ἔοντες
Καλλιρόᾳ πέμποντες ἐπ' ὀὐρίπιδι λοετρὰ·
Δεξιτερὸς μὴν ἐλώγε, ταυσπέρύγων ὑπὸ ταρσῶν
Ημισυ σκιαίῃ μοίρῃ ἐνὶ τὸν δὲ κορέσσω.
Λαιὸς δ' αὖ πισύρεσσιν ἀπ' ἀμφιφορῆος ἐν ὥρῃς.
Εκ δ' ὁ μέσος τόξοιο καθ' ἥμασς αὐτὸ τὸ μέσον.

Φράζεο δ' ὡς ὀλίγῃ κεν ἐνιπλήσαιμεν ἐν ὥρῃ
Εκ πτερύγων, τόξου τε, ἐς ἀμφιφορῆος ἱέντες.

Qui iaculamur aquas tres hîc adſtamus Amores.
Sed variè liquidas Euripo immittimus vndas.
Dexter ego, ſummis & quæ mihi manat ab alis
Ipſum Lympha replet ſolo ſextante diei.
Quatuor aſt horis læuus verſa influit vrna
Dimidiatque diem medius dum fundit ab arcu.
Dic age quàm paucis Euripum implebimus horis
Ex arcu ſimul, atque alis, vrnaque fluentes?

Diem conſtituentes ex 12. horis, erunt quatuor horæ $\frac{1}{3}$. diei. Quare per Canonem ſuprà traditum diuidemus vnitatem ſigillatim per $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. fient quotientes 6. 3. 2. quorum ſumma 11. per quam diuidendo vnitatem fit $\frac{1}{11}$ quæſita pars diei, qua tres Amores ſimul fluentes Euripum implebunt.

XXIX.

Πλινθουργοὶ μάλα τοῦτον ἐπείγομαι οἶκον ἐγεῖραι
Ημαρ δ' ἀννέφελον τόδε σήμερον. ἠδ' ἔτι πολλῶν
Χρηΐζω, πᾶσαν δὲ τριηκοσίῃσι δέουσαν
Πλίνθον ἔχω. σὺ δὲ μοῦνος ἐν ἤματι τόσσον ἔτευχες.
Παῖς δὲ τοι ἐκ καμάτοιο διηκοσίαις ἀπέληγεν.
Γαμβρὸς δ' αὖ τόσσῃσι καὶ εἰσέτι πεντήκοντα.
Τρισσαῖς συζυγίαις πόσσαις τόδε τεύχεται ὥραις.

Fictores laterum ceſſerunt nubila cœlo
Indulgete operi; domus vt mea perficiatur
Non multi deſunt lateres, finxiſſe tricenos
Sufficiet. Tantum ſolus formare ſolebas
Qualibet ipſe die: ſed centum, filius. Atqui
Illo quinquaginta minus gener edere ſuetus.
Quos peto tres pariter quot conſummabitis horis?

Cùm pater vna die conficiat 300. lateres, filius 100. gener 50. tres ſimul vna die conficiunt 450 Dic ergo per regulam trium. Si 450. lateres conficiuntur vna die quo tempore fient 300. Inuenies $\frac{2}{3}$. diei, ſeu horis octo, ſi diem 12. horarum conſtituas.

XXX.

Δακρὺ παραστάξαντες ἀμείβετε. οἱ δὲ γὰρ ἡμεῖς
Οὓς τόδε δῶμα πεσὸν ὤλεσεν Αντιόχου
Δαιτυμόνας, οἷσιν γε θεὸς δαιτός τε τάφου τε
Τὸν δ' ἔπορεν χῶρον. τέσσαρες ἐκ Τεγέης
Κείμεθα. Μεσσήνης δὲ δυώδεκα. ἐκ δέ τε πέντε
Αργεος. ἐκ Σπάρτης δ' ἥμισυ δαιτυμόνων.
Αὐτὸς δ' Αντίοχος. πέμπτου δὲ τε πέμπτον ὅλοντο
Κεκροπίδαι. σὺ δ' Υλαν κλαῖε Κόρινθε μόνον.

Carpe viator iter lacrymans. Hîc namque iacemus
Quos domus vna cadens obruit Antiochi
Queis epulas inter crudeli occumbere letho
Fata tulere. Iacent quatuor ex Tegea
Eis ſex Meſſene; clarum quinque edidit Argos.
Dimidium Sparte Martis amica tulit.

Occidit Antiochus. Quintam quintantis Athenæ
Lugent; extinctum fletque Corinthus Hylam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{23}$. simul adsumentes 23. (nam tot conuiuæ numerantur) efficiant ipsum quæsitum numerum. Reperietur ergo per Canonem sæpè vsitatum, numerus 50.

XXXI.

Νικαρέτη παίζουσα σὺν ἡλικιώτισι πέντε
Ων εἶχεν καρύων Κλειτ' ἔπορεν τὸ τρίτον.
Καὶ Σαπφοῖ τὸ τέταρτον. Αριστοδίκῃ δ' τὸ πέμπτον.
Εἰκοστὸν Θεανοῖ, καὶ πάλι δωδέκατον.
Εἰκοστὸν τέτρατον δ' Φιλιννίδι, καὶ περιῶν δὲ
Πεντήκοντ' αὐτῇ Νικαρέτη κάρυα.

Mittens Nicarete sociabus dona, suarum
Impertit Cliten læta triente nucum.
Sappho quarta datur. Vigesima facta Theanûs
Atque duodecima est; Quintaque Aristodices.
Pars tibi cùm cessit vigesima quarta Philinni
Quinquaginta sibi Nicarete retinet.

Quæritur numerus, talis, vt illius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{24}$. simul additæ, & adsumentes 50. conficiant ipsum qui quæritur numerum. Minimus qui habeat datas partes est 120. cuius datæ partes simul conficiunt 115. quo ablato de 120. superest per quem diuidendo 50. fit quotiens 10. quo ducto in 120. fit quæsitus numerus 1200.

XXXII.

Γνωμονικῶν Διόδωρε μέγα κλέος, εἰπέ μοι ὥρην
Ηνικ' ἀπ' ἀντολίης πόλον ἥλατο χρύσεα κῆλα
Ηελίου; τοῦ δ' ἤτοι ὅσον τρία πέμπτα δρόμοιο
Τεξάκι τόσσον. ἔπειτα μεθ' ἑσπερίην ἅλα λείπει.

Dic quota iam effluxit pars ô Diodore diei.
Auratis ex quo radiis sol gnomona tangit
Quantum decursi tres quintæ temporis, inde
Est tantum quater, hesperiis dum se occulat vndis.

Hic numerus 12. diuidendus est in duas partes, ita vt posterior contineat quater $\frac{3}{5}$. seu $\frac{12}{5}$ prioris; vel quod idem est 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 5. ad 12. Quare per Canonem secundæ primi addo simul 5. & 12. fit 17. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{17}$. quem duco sigillatim in 5. & in 12. fiunt quæsitæ partes $\frac{60}{17}$. & $\frac{144}{17}$. Itaque transactum tempus est horarum $3\frac{9}{27}$. reliquum verò est horarum $8\frac{9}{27}$.

XXXIII.

Ζεῦ μάκαρ, ἦρά τοι ἦρα τὰ δ' εὔαδεν, οἷα γυναῖκες
Θεσσαλικαὶ παίζουσι; μαραίνεται ὄμμα Σελήνης
Εκ μερόπων, ἴδον αὐτὸς, ἔην δ' ἔτι νυκτὸς ἐπ' ἠῷ
Δὶς τόσον ὅσσα δὺ ἕκτα καὶ ἕβδομον οἰχομένοιο.

Proh superûm pater, ista placet quæ Thessala cantu
Molitur maga? Cùm Phœbe pudibunda lateret
Vidi ego. Bis tantum solis restabat ad ortum
Tertia transactæ quantum & pars septima noctis.

Numerus 12. rurſus diuidendus eſt in duas partes, ita vt poſterior contineat $\frac{2}{3}$. & $\frac{2}{7}$. ſeu $\frac{20}{21}$. prioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 21. ad 20. Ergo per Canonem ſecundæ primi addo ſimul 21. & 20. fit 41. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{41}$. quem duco ſigillatim in 21. & in 20. fiunt quæſitæ partes $\frac{252}{41}$. & $\frac{240}{41}$. Itaque quando Eclipſis lunæ facta eſt, tranſierant horæ noctis 6 $\frac{6}{41}$. Reſtabant autem vſque ad ſolis ortum, horæ 5 $\frac{35}{41}$.

XXXIV.

Απλανέων ἄστρων παρόδους δ' ἐπὶ τοῖσιν ἀλήτῳ
Εἰπέ μοι ἥνικ' ἐμοὶ χθιζὸν ἔτικτε δάμαρ.
Ημαρ ἔην ὅσσόν τε δὶς ἕβδομον ἀντολιήθεν
Εξάκι τόσσον ἔην ἑσπερίην ἐς ἅλα.

Fixorum coitus Aſtrorum, vnaque vagantum
Dic age cùm pareret vxor amata mihi.
Lux erat, & quantum ſeptans geminatus ab ortu
Tantum bis ter erat ſolis ad occubitum.

Numerus 12. denuò diuidendus eſt in duas partes, ita vt poſterior contineat ſexies $\frac{2}{7}$. id eſt $\frac{12}{7}$ prioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 7. ad 12. Addo ſimul 7. & 12. fit 19. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{19}$. quem duco ſigillatim in 7. & in 12. fiunt quæſitæ partes $\frac{84}{19}$. & $\frac{144}{19}$. Itaque tempore partus tranſierant horæ diei 4 $\frac{8}{19}$. Reſtabant autem vſque ad noctem horæ 7 $\frac{11}{19}$.

XXXV.

Εγρεσθ' ἠριγένεια παρέδραμε πέμπτον ἔριθοι
λειπομένης τρισσῶν οἴχεται ὀγδοάτων.

Surgite lanificæ, lux eſt, reliquæque diei
Octantum effluxit portio quinta trium.

Numerus 12. diuidendus eſt quoque in duas partes, ita vt prior contineat quintam partem de $\frac{3}{8}$ ſeu $\frac{3}{40}$ poſterioris. Quare 12. ſecandus eſt in duas partes ſeruantes rationem quam habet 3. ad 40. addo 3. ad 40. fit 43. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{43}$. quo ducto ſigillatim in 3. & in 40. fiunt quæſitæ partes $\frac{36}{43}$ & $\frac{480}{43}$. Itaque iam effluxerant horæ vnius $\frac{36}{43}$. reſtabant autem horæ 11 $\frac{7}{43}$.

XXXVI.

Σύρτιος ἐν τενάγεσσι πατὴρ θανέν, ἐκ δ' ἄρ' ἐκείνης
Πέντε τάλαντα φέρων ἤλυθε ναυτιλίης
Οὗτος ἀδελφειῶν προφερέστατος, ἦ γὰρ ἔμοιγε
Δῶκεν ἑῆς μοίρης διπλάσιον τριτάτων
Δοιῶν, ἡμετέρης δὲ δὺ ὄγδοα μητέρι μοίρης
Ωπασεν, οὐδὲ δίκης ἤμβροτεν ἀθανάτων.

Syrtibus in medijs pater occidit; Attamen inde
Incolumis rediit quinque talenta ferens
Optimus hic fratrum: Gemini mihi namque trientis
Duplum conceſſit ſortis habere ſuæ.
At charam noſtræ partis quadrante parentem
Donauit, certus non violaſſe deos.

Numerus 5. diuidendus eſt in tres partes, ita vt ſecunda contineat $\frac{4}{3}$ primæ. At tertia contineat $\frac{1}{4}$ ſecundæ. Hoc eſt 5. diuidendus eſt in tres partes ſeruantes eaſdem rationes, quas ſeruant 3. 4. 1. Horum ergo ſumma eſt 8. per quam diuido 5. fit $\frac{5}{2}$ quo ducto ſigillatim in ipſos 3. 4. 1. fiunt quæſitæ partes $\frac{15}{6}$. $\frac{20}{8}$. $\frac{5}{8}$. Habuit igitur primus frater talentum 1. & $\frac{7}{8}$. ſecundi talenta 2 $\frac{1}{2}$. Mater verò $\frac{5}{8}$ vnius talenti, vel ſi placet talentum vnum, minas reſoluere in minas 60. & minam in drachmas 100.

habuit primus frater talentum 52. drachmas 50. secundus frater habuit talenta 2. minas 30. mater denique minas 37. drachmas 50.

XXVII.

Α βάσις ἂν πατέω σων ἐμοὶ βάρος ἀλίκον ἕλκει
Χ' ἁ κρηπὶς σων ἐμοὶ τόσσα τάλαντα φέρει.
Αλλ' ἐγὼ οἷος ἅπας ταν σαν βάσιν ἐς δὶς ἀνέλκω.
Κηγὼ μοῦνος ἐὼν σαν βάσιν ἐς τρὶς ἄγω.

Quam calco basis, hæc mecum pondus trahit ingens.
Mecum æquale trahit pondus & ista basis.
Solus at ipse tuæ baseos sum pondere duplus.
Sum triplus baseos solus & ipse tuæ.

Hæc quæstio non vnam recipit solutionem, sed infinitas. Nam quæritur Numerus qui bis ita diuidatur in duas partes, vt maior priori diuisionis sit dupla ad maiorem posterioris diuisionis. At maior posterioris diuisionis sit tripla ad minorem prioris. Omnem autem numerum ita diuidi posse bis in duas partes, docuit abundè Diophantus quæstione duodecima libri primi. Satuamus verbi gratia quamlibet statuam cum sua base pendere talenta 100. Diuidetur ergo 100. in partes quæsitas per operationem Diophanti loco citato, vel per Canonem à nobis ibidem traditum, & erunt partes prioris diuisionis 80. & 20. At partes posterioris 40. & 60. quæ propositum implent.

XXXVIII.

Δός μοι δέκα μνᾶς, ἵ τρίπλους σοι γίνομαι.
Καγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ πενταπλους.

Minas decem da, triplus vt fiam tui.
At tu decem da, quintuplus fiam vt tui.

Quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 10. à secundo, sit triplus eius quod relinquitur secundo. At secundus accipiens 10. à primo, sit quintuplus ad residuum primi. Similem quæstionem tractauit Diophantus lib. 1. quæstione 15. sic autem solvitur. Esto primus 1 N. + 10. hic ergo cùm dederit 10. secundo remanebit 1 N. & erit tunc secundus 5 N. à quo si auferas 10. quæ accepit à primo, erit secundus ab initio 5 N. − 10. Restat vt primus accipiens 10. à secundo, sit triplus ad residuum secundi. Quare 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. æquatur 15 N. − 60. & fit 1 N. $5\frac{5}{7}$. sunt ergo quæsiti numeri $15\frac{5}{7}$. & 18. $\frac{4}{7}$.

XXXIX.

Δός μοι δύο μνᾶς, ἡ δίπλους σοι γίνομαι.
Καγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ τετράπλους.

Minas duas da, duplus vt fiam tui.
At tu duas da, quadruplus fiam vt tui.

Hæc quæstio eiusdem est naturæ atque præcedens. Esto primus 1 N. + 2. hic ergo cùm dederit 2. secundo, remanebit 1 N. eritque tunc secundus 4 N. & ab eo si auferas 2. quæ accepit à primo, erit secundus ab initio 4 N. − 2. qui si dederit 2. primo fiet primus 1 N. + 4. duplus ad residuum secundi, puta ad 4 N. − 4. Quare 1 N. + 4. æquatur 8 N. − 8. vnde fit 1 N. $1\frac{3}{7}$. sunt igitur quæsiti numeri $5\frac{5}{7}$. & $4\frac{6}{7}$.

XL.

Ομηρος Ησιόδῳ ἐρωτήσαντι πόσον τὸ τῶν Ελλήνων
πλῆθος καὶ τῆς Ιλίου στρατεῦσαν.

Επτ' ἔσσαν μαλεροῦ πυρὸς ἐχάραι, ἐν ᾗ ἑκάστῃ
Πεντήκοντ' ὀβελοὶ, ἀφὶ ᾗ κρέα πεντήκοντα.

Τρίς τε τριηκόσιοι περὶ ἓν κρέας ἦσαν Αχαιοί.

Homerus Hesiodo interroganti quanta fuisset Græcorum
multitudo aduersus Troiam militantium.

Septeni luxere foci, sed quemlibet antè
Quinquaginta caro verubus confixa tremebat,
Nongentisque veru Danaïs data fercula ab vno.

Per solam multiplicationem bis repetitam soluitur quæstio, ducito 7. in 50. fit 350. quem rursus ducito in 900. fit numerus Græcorum militum 315000. extat hoc epigramma in agone Homeri & Hesiodi Græcè edito, sed corruptum, nam initium primi versus sic legitur.

Πεντήκοντ' ἦσαν πυρὸς ἐσχάραι.

Vnde non immeritò Agonis illius author incredibilem quæ inde colligitur militum multitudinem miratur, sic enim fieret eorum numerus 2250000.

His quæ nondum edita erant Epigrammatis, subiicere libet quinque sequentia cum nostra interpretatione, ne quid ad hanc materiam pertinens hîc deesse sinamus, quamuis olim hæc edita circumferantur in Anthologia.

XLI.

Παλλὰς ἐγὼ χρυσὴ σφυρήλατος. αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
Ημισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος; ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις. καὶ δεκάτην μοίραν ἔδωκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων. τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Εννέα, καὶ τέχνη δῶρον Αριστοδίκου.

Aurea Pallas ego. Musis sed amica iuuentus
Materiam docto præbuit artifici
Octauam Thespis, partemque Charisius auri
Dimidiam, decimam contulit ipse Solon.
A Themisone data est vigesima. Terna talenta
Et sena, ipse opifex præstat Aristodicus.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{20}$. simul, adsumentes 9. conficiant ipsum quæsitorum numerum. Minimus habens datas partes est 40. idemque quæsitus numerus, vt constat ex Canone iam sæpè à nobis vsurpato.

XLII.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Αλκίδαο
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος. ὃς δ' ἀπάμειπτο.
Αμφὶ μὲν Αλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶν δε.
Μοίρη δ' ὀγδοάτη ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτη δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' οὖρον.
Αμφὶ δ' ἄρ' Ηλίδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Αρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα.
Λοιπὰς δ' αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

Augæam rogat Alcides, quot pascua circûm
Errarent armenta sibi. Cui retulit ille.
Pascitur Alphæi rapidas semissis ad vndas.
Pars octaua sacro Saturni in colle vagatur.
Pone Taraxippi tumulum sextantis oberrat

Dimidium; decimæ ſemiſſem detinet Elis.
Denique in Arcadicis trigeſima ſubſtitit oris.
Quadraginta vides tamen hîc armenta relinqui.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}.\frac{1}{8}.\frac{1}{12}.\frac{1}{20}.\frac{1}{30}$. ſimul cum numero 50. efficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 120. cuius datæ partes ſimul efficiunt 95. quo ablato de 120. ſupereſt 25. per quem diuide 50. fit 2. quo ducto in 120. fit 240. quæſitus armentorum numerus.

XLIII.

χάλκεός εἰμι λέων, κρωσσοὶ δέ μοι ὄμματα δοιὰ,
Καὶ σῶμα, σωὶ δὲ θέναρ δεξιτερῆο ποδὸς.
Πλήθει ᾧ κρατῆρα μὺ ἥμισυ δεξιὸν ὄμμα.
Καὶ λαίον τειαοῖς, ᾧ πιτύρεσσι θέναρ.
Ἀρκιον ἐξ ὥρεις πλῆσαι σῶμα. νωῖ δ' ἅμα πάντα
Καὶ σῶμα, ᾧ γλήνῃ, ᾗ θέναρ, εἰπὲ πόσον;

Æreus adſto leo, tubuli mihi lumina bina
Oſque etiam, dextri ſic quoque planta pedis.
Binis dextro oculo, ternis lacus iſte diebus,
Impletur læuo ſed pede bis geminis.
Ori ſufficiunt ſex horæ. Dic ſimul ergo
Quo ſpatio os, oculi, peſque replere valent.

Sumendo diem artificialem 12. horarum, cuius 6. horæ ſunt $\frac{1}{2}$. erunt numeri exprimentes rationes datas 2. 3. 4. $\frac{1}{2}$. per quos ſigillatim diuiſa vnitate fiunt quotientes $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.2$. quorum ſumma $\frac{37}{12}$ per quam rurſus diuidendo vnitatem fit quæſita pars diei $\frac{12}{37}$. ſeu horæ $3\frac{33}{37}$.

XLIV.

Ἀμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἔλκομεν
Ζῆθός τε χ' ὠ ξύναιμος, ἰω' δὲ μου λάβῃ
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τῶ δ' Ἀμφίονϑ
Ἐξ παντ' ἀνδρῶν, μητρὸς ὑρήσεις σαθμόν.

Viginti vterque pendimus ſimul minas
Zethus ego, fraterque. Attamen ſi ceperis
Mei trientem, cum quadrante Amphionis
Senæ, parentis pondus, exibunt minæ.

Soluit ſimilem quæſtionem Diophantus lib. 1. quæſt. 5. Nam numerus 20. diuidendus eſt in duas partes, vt $\frac{1}{3}$. prioris, & $\frac{1}{4}$. poſterioris ſimul efficiant 6. Eſto poſterioris $\frac{1}{4}$. 1 N. ipſa ergo pars poſterior eſt 4 N. At triens prioris eſt 6 − 1 N. ipſa prior pars 18 − 3 N. At duarum partium ſumma fit 18 + 1 N. æqualis 20. Ergo 1 N. eſt 2. Igitur quæſitæ partes de 20. ſunt 12. & 8. & ſatisfaciunt propoſito.

XLV.

Ἡμίονϑ ᾧ ὄνϑ φορέουσαν οἶνον ἔβαινον.
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄλθεϊ φόρτου ἑοῖο.
Τλῶ ᾧ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ὀπίη.
Μῆτερ τὶ κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠῦτε κούρη;
Εἰ μέτρον ἔμοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἐν ἀϋπλάβοις, παύεσϑ ἰσόσπα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέξον ἄειστε γεωμετρίης ὑπίστρ.

Vnà cum mulo vinum portabat aſella,
Atque ſuo grauiter ceu pondere preſſa gemebat
Talibus at dictis mox increpat ille gementem.
Mater quid luges teneræ de more puellæ?
Dupla tuis, ſi des menſuram, pondera geſto,
At ſi menſuram capias, æqualia porto.
Optime menſuras diſtingue Geometer iſtas.

Hæc etiam quæſtio ſoluitur per decimam quintam primi. Nam quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 1. à ſecundo ſit duplus ad reſiduum ſecundi; at ſecundus accipiens 1. à primo ſit æqualis reſiduo primi. Eſto primus 1 N. + 1. Ergo dando 1. ſecundo, remanebit primus 1 N. & tunc ſecundus erit 1 N. Quare auferendo ab eo vnitatem quam accepit à primo, fit ſecundus, vt erat ab initio 1 N. − 1. Iam ſi ab eo primus accipiat 1. fiet primus 1 N. + 2. & reſiduum ſecundi erit 1 N. − 2. Itaque 1 N. + 2. duplus eſt ad 1 N. − 2. & tandem 1 N. + 2 æquatur 2 N. − 4. Vnde fit 1 N. 6. Sunt ergo quæſiti numeri 7. & 5.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER SEXTVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenusa subtracto alterutro laterum circa rectum, faciat cubum. Esto quæsitum triangulum effictum à duobus numeris, & sit alter 1 N. alter 3. fit igitur hypotenusa 1. Q. + 9. perpendiculum 6 N. Basis 1 Q. − 9. Et hypotenusa dempto vno laterum circa rectum, hoc est 1 Q. − 9. facit 18. qui non est cubus. Vnde autem prouenit 18? Quadratus est de 3. bis sumptus. Oportet igitur inuenire numerum aliquem, vt illius quadratus bis sumptus faciat cubum. Esto quæsitus numerus 1 N. & fiunt 2 Q. æquales cubo. Esto 1 C. & fit 1 N. 2. Rursus formo triangulum ab 1 N. & non à 3. sed à 2. & fit hypotenusa 1 Q. + 4. Perpendiculum 4 N. Basis 1 Q. − 4. & manet hypotenusa detracta basi faciens cubum. Superest vt & perpendiculum quod est 4 N. detractum ab hypotenusa faciat cubum. Fit autem 1 Q. + 4 − 4 N. æquale cubo. Est autem quadratus à latere 1 N. − 2. si ergo æquemus cubo 1 N. − 2. soluemus quæstionem. Esto æquale 8. fit 1 N. 10. Itaque formabitur triangulum à 10. & 2. & fit hypotenusa 104. Perpendiculum 40. Basis 96. & constat.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ κύβον. ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον πεπλασμένον ἀπὸ δύο ςς. καὶ ἔστω ὁ μὲν ς^{ου} α̅. ὁ δὲ μ^{ο} γ̅. γίνεται οὖν ἡ μὲν ὑποτείνουσα δ^{ου} α̅. μ^{ο} θ̅. ἡ δὲ κάθετος ςς ϛ̅. ἡ δὲ βάσις δ^{ου} α̅. λείψει μ^{ο} θ̅. καὶ ἡ ὑποτείνουσα ἐὰν λήψῃ ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τουτέστι δ^{ου} α̅. λείψει μ^{ο} θ̅. γίνεται μ^{ο} ιη̅. καὶ οὐκ ἔστι κύβος. πόθεν ὁ ιη̅. ὁ ἀπὸ τοῦ Γ̅ ἐστὶν τετράγωνος, δὶς γενόμενος. δεῖ οὖν εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὅπως ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος δὶς γενόμενος ποιῇ κύβον. ἔστω ὁ ζητούμενος ς^{ου} α̅. καὶ γίνονται δ^{ου} β̅. ἴσαι κύβῳ. ἔστω κ^{ο} α̅. καὶ γίνεται ὁ ς^{ο} μ^{ο} β̅. πάλιν πλάσσω τὸν τρίγωνον ἀπὸ ἀριθμοῦ α̅. καὶ οὐκ ἔτι μ^{ο} γ̅. ἀλλὰ μ^{ο} β̅. καὶ γίνεται ἡ ὑποτείνουσα δυνάμεως α̅. μ^{ο} δ̅. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμῶν δ̅. ἡ δὲ βάσις δ^{ου} α̅. λείψει μ^{ο} δ̅. καὶ μένει ἡ ὑποτείνουσα λείψασα τὴν ἐν τῇ βάσει τουτέστι δ^{ου} α̅. λείψει μ^{ο} δ̅. ποιοῦσα κύβον. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν κάθετον οὖσαν ςς δ̅. λειφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ποιεῖν κύβον. γίνεται δὲ δ^{ου} α̅. μ^{ο} δ̅. λείψει ςς δ̅. ἴσον κύβῳ. καὶ ἔστι τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ς^{ου} α̅. λείψει μ^{ο} β̅. ἐὰν οὖν ἀριθμὸν α̅ λείψει μ^{ο} β̅. ἰσώσωμεν κύβῳ, λύσομεν τὸ ζητούμενον. ἔστω ἴσον μ^{ο} η̅. καὶ γίνεται ὁ ς^{ο} μ^{ο} ι̅. ὥστε πλασθήσεται τὸ τρίγωνον ἀπὸ μ^{ο} ι̅. καὶ μ^{ο} β̅. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑποτείνουσα ρδ̅. ἡ δὲ κάθετος μ^{ο} μ̅. ἡ δὲ βάσις μ^{ο} ϛς̅. καὶ μένει.

In VI. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est, in qua tamen nonnulla occurrunt animaduersione digna. Quare primò aduerte à duobus numeris formari triangulum rectangulum, modo quem demonstrauimus propositione quinta tertij porismatum. Et fit hypotenusa summa quadratorum, basis interuallum eorundem, perpendiculum verò duplum multiplicationis laterum. Hinc apparet cur ab hypotenusa detracto perpendiculo, relinquatur quadratus. [4. 2. poris.] Etenim à summa quadratorum auferendo duplum producti laterum, remanet quadratus interualli laterum. Sic in priore positione detractis 6 N. ab 1 Q. + 9. fit quadratus 1 Q. + 9 − 6 N. à latere 1 N. − 3. quod est interuallum numerorum 1 N. & 3. à quibus formatur triangulum. At in secunda positione detractis 4 N. ab 1 Q. + 4. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N. à latere 1 N. − 2. quod est interuallum ipsorum 1 N. & 2. à quibus effictum est triangulum.

Secundò aduerte lemma quo quæritur cubus quadrati duplus infinitas recipere solutiones, & turpiter allucinari Xilandrum, qui ad sequentem quæstionem asserit nullum alium cubum præter 8. assignari posse quadrati duplum, neque in fractis, cum infiniti tales cubi assignari possint & in integris, & in fractis. Nam vt patet 2 Q. æquari possunt cuilibet cuborum numero cubico. Verbi gratia ponantur 2. Q. æquales $\frac{1}{8}$ C. fiet 1 N. 16. eritque cubus 512. duplus quadrati 256. Rursus ponantur 2 Q. æquales 8 C. fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. Et inuenietur cubus $\frac{1}{8}$. duplus quadrati $\frac{1}{16}$. & sic de allijs. Immò eodem prorsus artificio inuenies cubos infinitos qui ad aliquos quadratos datam habeant rationem, & hinc formatur Canon vniuersalis.

Diuide denominatorem rationis datæ, per cubum aliquem, orietur latus quadrati quæsiti.

Vt si velis cubum qui sit quadrati triplus, diuide 3. per cubum aliquem, puta per 1. vel per 8. vel per 27. fient 3. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{9}$. quorum quadrati 9. $\frac{9}{64}$. $\frac{1}{81}$. quorum tripli, puta 27. $\frac{27}{64}$. $\frac{1}{27}$. sunt cubi, vt requiritur.

Tertiò aduerte cùm quadratus 1 Q. + 4 − 4 N. sit æquandus cubo, rectè Diophantum æquare cubo latus illius, puta 1 N. − 2. Constat enim si latus quadrati sit cubus, & ipsum quadratum fore cubum, quia ex cubo in cubum producitur cubus per tertiam & quartam noni Euclidis. Porro hac etiam ex parte infinitas solutiones quæstio recipit, nam 1 N. − 2. cuilibet vnitatum numero cubico æquari potest, æquauit Diophantus cubo 8. sed si æquasset cubo 1. fuisset 1 N. 3 & fingendo triangulum à 2. & 3. facta essent latera 13. 12. 5. quæ soluunt quæstionem, nam auferendo sigillatim vtramque laterum circa rectum ab hypotenusa, supersunt cubi 1. & 8. Hinc etiam elicitur huiusmodi Canon.

Sume numerum aliquem, ita vt quadratus illius sit semissis cubi; sumpto numero adde cubum quemlibet, tum ab hac summa, & à sumpto numero finge triangulum.

Verbi gratia sume $\frac{1}{4}$ cuius quadratus $\frac{1}{16}$. est semissis cubi $\frac{1}{8}$. Adde cubum 8. ad $\frac{1}{4}$ fiet $\frac{33}{4}$. tum finge triangulum ab $\frac{1}{4}$ & $\frac{33}{4}$. fient latera trianguli $\frac{545}{8}$. $\frac{33}{8}$. $\frac{544}{8}$. quæ soluunt quæstionem, nam sublato vtrouis laterum circa rectum ab hypotenusa, supersunt cubi 8. & 1.

Cæterùm inuento triangulo quæstionem soluente, si singula illius latera diuidas vel multiplices per aliquem eundem cubum, fiet aliud triangulum æquè proposito satisfaciens. Vt si triangulum à Diophanto inuentum 104. 40. 96. diuidas per 8. fiet aliud triangulum 13. 5. & 12. æquè benè proposito congruens, & ratio est euidens, nam interualla quibus hypotenusa 13. superat latera 5. & 12. fiunt diuidendo per 8. interualla quibus hypotenusa 104. superat latera 40. & 96. Quare cùm hæc interualla sint cubi ex hypothesi, & cubo per cubum diuiso, oriatur cubus, patet & illa interualla quibus 13. superat 5. & 12. fore cubos, quod est propositum.

QVÆSTIO II.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν ὑποτεινούσῃ προσλαβὼν τὴν ἑκατέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν πιῇ κύβον. ἐαν πλάσωμεν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ἀριθμοῦ δύο, ὡς ἡ περὶ τοῦτου. γίνεται ζητεῖν τετράγωνον τινα ὅπως ὁ διπλάσιος αὐτοῦ ᾖ κύβος, ἧς ἐστιν ὁ ἀπὸ πλευρᾶς μ̄ β̄. πλάσωμεν ἐν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ς̄ α̃.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenusa adsumens alterutrum laterum circa rectum, faciat cubum. Si formemus quæsitum triangulum à duobus numeris vt in præcedente, quærendus erit quadratus cuius duplum sit cubus, est autem is à latere 2. Fingemus er-

go triangulum ab 1 N. & à 2. & fiet similiter hypotenusa 1 Q. + 4. vnum autem laterum circa rectum 4 N. alterum denique 4 − 1 Q. Supereſt vt hypotenusa adſcito priore latere faciat cubum; ſed & neceſſe eſt vt cum ad poſitiones veniemus 1 Q. inueniatur minor quàm 4. Proinde 1 N. minor eſt quam 2. Eò itaque redacti ſumus vt inueniamus cubum minorem quàm 4. maiorem quàm 2. Eſt autem $\frac{27}{8}$. Quamobrem 1 N. + 2. æqualis eſto $\frac{27}{8}$. & fit 1 N. $\frac{11}{8}$. Erit ergo hypotenusa $\frac{377}{64}$. laterum circa rectum alterum $\frac{135}{64}$. alterum $\frac{352}{64}$. & conſtat.

κὴ μ° β̄. κὴ γίνε͂ται ὁμοίως ἡ μὲν ὑποτείνουσα δ͂ ῦ α̃. μ° δ̄. μία ἧς τ͂ ῶ͂ι τὴ ὀρθίῳ ς͂ δ̄. ἡ δὲ λοιπὴ μ° δ̄. λείψει δ͂ ῦ α̃. λοιπόν ἐστι τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ περιλαβόντα τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῇ τ͂ῶ͂ι τὴ ὀρθίῳ ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ κὴ διελθόντας εἰς τὸν ὑπόστασιν δύρεῖν τὸν δύναμιν ἐλάσσονα μ° δ̄. ὁ ἄρα ς° ἐλάσσων ἐστὶ μ° β̄. κὴ ἀπάγεται εἰς τὸ δύρεῖν κύβον ἐλάσσονα μ° δ̄. μείζονα δὲ μ° β̄. κὴ ἔστι μ° κζ͂ ᾱ̃. κὴ ἔστω ς° α̃ μ° β̄. ἴσος μ. κζ͂ ᾱ̃. κὴ γίνεται ὁ ς° ιᾶ ᾱ̃. ἔσται ἄρα ἡ μὲν ὑποτείνουσα τοζ͂ ξδ͂. τῇ δὲ ἧς τ͂ῶ͂ι τὴ ὀρθίῳ, ἡ μὲν ρλε͂ ξδ͂. ἡ δὲ τνβ͂ ξδ͂. κὴ μέμει.

IN QVAESTIONEM II.

HIc multa infeliciter adnotauit Xilander. Primò enim aſſerit cubum quadrati duplum nullum eſſe præter 8. & nullum quadrati triplum præter 27. &c. quod ad præcedentem abunde confutauimus. Deinde putat alterum laterum circa rectum poni debere, vt in præcedente 1 Q. − 4. quod eſt abſurdum, nam ob talem poſitionem cogitur ſimul & ſemel æquare cubo, tum 2 Q. tum 1 N. + 2. Quare deueniendum ei ad duplicatam æqualitatem, quæ quomodo reſolui poſſit, cùm ſcilicet duo numeri ſunt ſimul æquandi cubo, nec ipſe docere potuit, nec vſquam docuit Diophantus. Denique non ſatis aperit cauſam cur 1 N. + 2. æquari debeant cubo alicui maiori quàm 2. minori quàm 4. Quamobrem vt omnia ſigillatim elucidemus.

Aduerte primò cur ſumatur numerus cuius quadratus ſit ſemiſſis cubi, & ponatur baſis trianguli 4 − 1 Q. quæ in præcedente ponebatur 1 Q. − 4. cauſam eſſe, quia vult Diophantus per huiuſmodi poſitionem ſatisfieri vni parti poſtulati, nam hypotenuſæ 1 Q + 4. addendo baſim 4 − 1. Q. fit vtique cubus 8. Poſſe autem baſim poni 4 − 1 Q. æquè benè ac 1 Q. − 4. patet, quia baſis debet eſſe interuallum quadratorum 1 Q. & 4. Quare cùm ignoretur vter eorum maior ſit, poteſt eorum interuallum eſſe 1 Q. − 4. vel 4 − 1 Q.

Aduerte ſecundò hypotenuſæ 1 Q + 4. addendo perpendiculum 4 N. fieri quadratum 1 Q + 4 N + 4. Quia hypotenuſa eſt ſumma quadratorum, at perpendiculum eſt duplum plani ſub lateribus, vnde patet hypotenuſæ & perpendiculi ſummam [1] æquari quadrato ſummæ laterum 1 N. + 2. Quare ſicut in præcedente reſtat vt æquemus cubo 1 N. + 2. quia ſi latus hoc ſit cubus, erit & quadratus illius cubus; [2] quandoquidem ex cubo in ſeipſum producitur cubus.

1. *ſecundò.*

2. *quoniã.*

Aduerte tertiò 1 N + 2. æquari debere cubo qui ſit maior quàm 2. minor quàm 4. primum patet, nam à cubo illo auferendo 2. reſiduum æquari debet 1 N. ſecundùm ſic probatur. Quia baſis poſita eſt. 4 − 1 Q. oportet 4. maiorem eſſe quàm 1 Q. Ergo 2. maior eſſe debet quàm 1 N. fit autem 1 N. vt dictum eſt, ab aliquo cubo auferendo 2. Oportet ergo talem eſſe cubum illum, vt ab eo auferendo 2. reſiduum ſit minus quàm 2. ac proinde oportet cubum huiuſmodi, minorem eſſe quàm 4. Porrò qua ratione inueniendus ſit cubus maior quàm 2. minor quàm 4. non docet hîc Diophantus. Sed id facilè conſequemur eodem artificio quo ad decimam tertiam quinti reperit author quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. Reducantur enim 2. & 4. ad fractionem cubicam eiuſdem denominationis, puta ad octauas, fient $\frac{16}{8}$. & $\frac{12}{8}$. Inter quos cadit cubus $\frac{27}{8}$. propoſito ſatisfaciens. Sic infinitos hujuſmodi cubos reperies, & quo maior erit denominator ad quem fit reductio, eò plures cubi cadent inter numeros propoſitos, vt ſi reducas 2. & 4. ad milleſimas, fient $\frac{2000}{1000}$. & $\frac{4000}{1000}$. inter quos cadunt tres cubi propoſito apti, puta $\frac{2197}{1000}$. $\frac{2744}{1000}$. $\frac{3375}{1000}$. & ſic de alijs.

Aduerte denique hîc contingere vt multiplicando vel diuidendo latera inuenti trianguli, per eundem cubum, fiat aliud triangulum ſoluens quæſtionem. Sic loco laterum quæ inuenit Diophantus, puta $\frac{377}{64}$. $\frac{135}{64}$. $\frac{352}{64}$. ducendo omnia in 64. ſumi poſſunt 377. 135. 352. quod facile eſt demonſtrare.

Cæterùm ratio diuerſitatis in ſolutione & operatione, ex duplici capite ortum habet. Primò enim vt docuimus 1 N. + 2. æquari poteſt infinitis cubis maioribus quàm 2. minoribus quàm 4. quales ſunt $\frac{27}{8}$. $\frac{64}{27}$. $\frac{343}{125}$. &c. Deinde triangulum ipſum ab initio fingi poteſt ab 1 N. & quotlibet vnitatibus, quarum quadratus ſit ſemiſſis cubi, quales infinitos numeros dari, quicquid dicat Xilander, ad præcedentem oſtendimus. Verbi gratia fingatur ab 1 N. & $\frac{1}{4}$. erit hypotenuſa 1 Q. + $\frac{1}{16}$. Baſis $\frac{1}{2}$ N. perpendiculum $\frac{1}{16}$ − 1 Q. hocque addito ad hypotenuſam, fit cubus $\frac{1}{8}$. At baſi addita eidem hypotenuſæ fit quadratus 1 Q. + $\frac{1}{16}$. + $\frac{1}{2}$ N. cuius latus 1 N. + $\frac{1}{4}$. æquandum eſt cubo

maiori quàm $\frac{1}{4}$. minori quàm $\frac{1}{3}$. quales sunt $\frac{8}{27}$. $\frac{27}{64}$. aliique infiniti. Et vniuersaliter. Cubus quo cum fit vltima æquatio debet esse maior vnitatibus, à quibus cum 1 N. formatum est triangulum, & minor duplo earundem. Quamobrem hinc facilè est elicere Canonem.

Sume quemlibet numerum, cuius quadratus sit semissis cubi, quem aufer ab aliquo cubo qui sit maior ipso, & minor duplo eiusdem; A residuo & à sumpto numero formabis quæsitum triangulum.

Verbi gratia sume 2. quem aufer à cubo $\frac{343}{125}$. remanet $\frac{93}{125}$. à quo & à 2. forma triangulum, vel reducendo ad integros, forma triangulum à 93. & à 250. fient latera 71149. 53851. 46500. & hypotenusa adsumens basim, tum perpendiculum, facit cubos 125000. & 117649. quorum latera 50. & 49.

Quoniam verò in mentem alicui venire posset cur non proposuerit Diophantus inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa adsumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratum. Vel cuius hypotenusa detracto quolibet laterum circa rectum relinquat quadratum, non abs re fuerit monere, omissas esse huiusmodi quæstiones, quod sint impossibiles. Id autem, nequis temerè dictum putet, sic demonstrabitur. Esto triangulum rectangulum A B C. dico siue hypotenusæ A addantur sigillatim latera B. C. siue adimantur, non posse simul fieri duos quadratos. [1] Etenim cùm hypotenusa A componatur ex duobus planis similibus, sint ij D major, & E minor; erit ergo B duplum medij proportionalis inter D & E cadentis. At C erit interuallum ipsorum D E. Porro ipsi D E vel quadrati sunt, vel quadratorum similes. Ponantur primò quadrati. Cùm ergo A sit summa duorum quadratorum D E. & C sit eorundem interuallum, [2] patet compositum ex duobus A C. esse duplum maioris quadrati D. Ergo si compositus ex A C ponatur quadratus, sequitur ex binario in quadratum D. produci quadratum. Quod est impossibile, cùm binarius non sit quadratus, vt ostendit Clauius ad secundam noni. Rursus si ab A qui est summa quadratorum D E. auferatur C. eorundem interuallum, [3] residuum duplum erit minoris quadrati E. Quare si hoc residuum ponatur quadratus, sequitur rursus ex binario in quadratum E. produci quadratum. Quod eadem de causa est impossibile. Quare in hoc casu patet propositum.

D 4. E 1.
A 5. B 4. C 3.
F 15. G 12. H 9.
K 12. L 3.

4. 3. *poris.*

23. 1. *poris.*

23. 1. *poris.*

Iam verò esto triangulum rectangulum F G H. & plani similes K L. ex quibus hypotenusa F componitur, non sint quadrati; dico nihilominus sequi propositum. Nam K L. cùm sint plani similes, [4] habent rationem quadrati ad quadratum; habeant ergo rationem quam quadratus D ad quadratum E. Igitur cùm sint proportionales D. E. K. L. & ab ipsis D E formetur triangulum A B C. ab ipsis K L formetur triangulum F G H, [5] erunt hæc triangula similia. Itaque cùm sit A ad F. vt B. ad G [6] erit summa duorum A B ad summam ipsorum F G. vt A ad F. Quia verò A est summa quadratorum D E. & B est duplum plani sub lateribus, [7] patet summam ipsorum A B esse quadratum, ac proinde si & summa ipsorum F G ponatur quadratus, erit A ad F vt quadratus ad quadratum. Sed vt A ad F sic est C ad H ob similitudinem triangulorum, ac proinde vt A ad F, [8] sic est summa antecedentium A C. ad summam consequentium F H. Igitur [9] si summa ipsorum F H sit quadratus, oportet & summam ipsorum A C esse quadratum. Quod impossibile est, vt suprà ostendimus. Deinde quia est A ad B vt F ad G. & rursus B ad C vt G. ad H. patet argumentando per conuersionem rationis, tum per rationem permutatam esse interuallum ipsorum A B ad interuallum ipsorum F G. itemque interuallum ipsorum A C. ad interuallum ipsorum F H. sicut A ad F. Cùm igitur interuallum quo A summa quadratorum superat B duplum plani sub lateribus, sit quadratus, [1] si & interuallum ipsorum F G ponatur quadratus, erit vtrumque interuallum quadratus. Quare & interuallum ipsorum A C. ad interuallum ipsorum F H erit in ratione quadrati ad quadratum, ac proinde si interuallum ipsorum F H ponatur quadratus [2] erit & interuallum ipsorum A C quadratus. Quod ostensum est esse impossibile. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

26. *octaui.*

9. 3. *poris.*
12. *septimi.*
4. *secundi.*

12. *septimi.*
24. *octaui.*

4. 2. *poris.*
24. *octaui.*

Eadem quoque ratio est de cæteris omnibus potestatibus quadratis, vt pote quadratoquadratis, cubocubis, &c. Etenim inueniri non potest triangulum rectangulum, cuius hypotenusæ addendo vel adimendo vtrumlibet latus fiat quadratoquadratus, vel cubocubus. Hoc enim si daretur sequeretur dari quadratum duplum quadrati. Quod est impossibile; Alijs autem potestatibus omnibus quæ quadratæ non sunt, quales sunt cubi, quadratocubi, quadratoquadratocubi, &c. ritè applicabitur quæstio, vt exemplo quadratocuborum facile est demonstrare.

Sit ergo propositum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa adsumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratocubum. Patet si sequamur ductum operationis Diophanti, eò nos adigi, vt inueniamus quadratocubum duplum quadrati, & quia omnis quadratoquadratus est quadratus, soluetur lemma si inueniamus quadratocubum duplum quadratoquadrati. Esto quadratoquadratus 1 Q Q. ergo 2 Q Q. æquantur quadratocubo, esto 1 Q C. fit 1 N. 2. estque quadratoquadratus 16. quadratocubus 32. sumentes igitur latus quadratum ipsius 16. puta 4. effingamus triangulum ab 1 N. & à 4. erit hypotenusa 1 Q. + 16. Basis 16 — 1 Q. Perpendiculum 8 N. & constat addendo basim hypotenusæ fieri quadratocubum 32. Restat vt eidem hypotenusæ addendo per-

pendiculum fiat quoque quadratocubus. Fit ergo 1 Q. + 16. + 8 N. æqualis quadratocubo. Ergo latus quadratum ipsius 1 Q. + 16 + 8 N. puta 1 N. + 4. æquabimus quadratocubo, sic enim consequemur intentum, quia ex quadratocubo in quadratocubum fit quadratocubus, vt demonstrauimus in Elementis. Porro 1 N. + 4. sic æquari debet quadratocubo, vt is sit maior quàm 4. minor quàm 8. ob causas supra explicatas. Quare cum reducendo 4. & 8. ad fractionem quodratocubicam, fiant $\frac{128}{32}$. & $\frac{256}{32}$. & inter eos cadat quadratocubus $\frac{243}{32}$. huic æquabimus 1 N. + 4. fietque 1 N. $\frac{115}{32}$. Igitur effingemus quæsitum triangulum à 4. & à $\frac{115}{32}$ vel vtroque ad eandem denominationem redacto & communi abiecto denominatore à 128. & à 115. fietque triangulum 29609. 29440. 3159. quod soluit quæstionem: nam hypotenusæ addendo sigillatim latera, fient quadratocubi 59049. & 32768. quorum latera 9. & 8.

Eadem arte & quæstio præcedens extendetur ad huiusmodi potestates. Nam sit propositum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa multata quolibet laterum circa rectum, relinquat quadratocubum. Effingemus vt prius triangulum ab 1 N. & à 4. & erit hypotenusa 1 Q. + 16. basis 1 Q. − 16. Perpendiculum 8 N. sic enim satisfit vni parti propositionis. Restat vt 1 Q. + 16. − 8 N. æquetur quadratocubo. Quare latus 1 N. − 4. æquandum est quadratocubo, esto is 32. fiet 1 N. 36. formetur ergo triangulum à 4. & à 36. erunt latera 1312. 1280. 288. & soluta est quæstio. Nam hypotenusa multata quolibet laterum, relinquit quadratocubos 32. & 1024. à lateribus 2. & 4.

QVÆSTIO III.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ eius numerus adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 5. & ponatur triangulum datum specie 3 N. 4. N. 5 N. & fit area adscito 5. 6 Q. + 5. æqualis quadrato. Esto ipsi 9. & auferantur à similibus similia, relinquuntur 3 Q. æquales 5. & oportet speciem ad speciem, rationem habere quæ est quadrati numeri ad quadratum numerum, sed & multitudinem ad multitudinem. Itaque eò deuentum est, vt oporteat inuenire triangulum rectangulum, & quadratum numerum, vt quadratus area trianguli multatus, faciat quintam partem quadrati, quia datus est 5. Formetur triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{4N}$. & fit area 1 Q. − $\frac{1}{16Q}$. Esto quadrati latus 1 N. & fractio numerica tot vnitatum, quantus est duplus dati numeri, hoc est $\frac{10}{4N}$. & fit quadratus 1 Q. + $\frac{100}{16Q}$. + 20. & si ab eo detrahamus aream, hoc est 1 Q. − $\frac{1}{16Q}$. relinquitur $\frac{101}{16Q}$. + 20. Hæc quinquies, fit $\frac{505}{16Q}$. + 100. æquale quadrato. Et omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 100 Q. + 505. æquales quadrato. Esto latus eius 10 N. + 5. Inuenitur 1 N. $\frac{24}{5}$. Ad positiones. Formabitur ergo triangulum à $\frac{24}{5}$ & $\frac{5}{24}$. Erit autem quadrati latus $\frac{413}{60}$. si ergo triangulum statuamus in numeris, & aream ipsius adscito 5. æqualem faciamus $\frac{17569}{3600}$ Q. reliqua fient manifesta.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ὑπὸ περιλαβὼν τὴν δοθεῖσαν ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̊ ε̄. καὶ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ἀριθμῷ γ̄. ἀριθμῷ δ̄. ἀριθμῷ ε̄. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μ̄ μονάδων ε̄. δ̄ ς̄. μ̊ ε̄. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δ̄ θ̄. καὶ ἀπὸ τῶν ὁμοίων τὰ ὅμοια. λοιπαὶ δ̄ γ̄. ἴσαι μ̊ ε̄. ἡ δὲ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὀφείλει καὶ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ δύρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ τετράγωνος λήψας τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ τῆ τριγώνου ποιῇ πέμπτον τετραγώνου. ἐπεὶ δήπερ ὁ δοθεὶς μ̊ ε̄. δεῖ. πεπλάσθω τὸ ζητούμενον ἀπὸ ς̄ ᾱ. καὶ ᾱ ς̄ Μ̄. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ δ̄ ᾱ. λείψει ᾱ δ̄ Μ̄. ἔστω ἡ τῆ τετραγώνου πλευρὰ ς̄ ᾱ. καὶ ἀριθμοσὸν μονάδων τοσούτων ὅσων δεῖν ὁ διπλάσιος τῆ δοθέντος ἀριθμῆ τουτέστιν ῑ ς̄ Μ̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ ᾱ. ρ̀ δ̄ Μ̄. μ̊ κ̄. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀρωμεν τὸ ἐμβαδὸν, τουτέστι δ̄ ᾱ. λείψει ᾱ δ̄ Μ̄. λοιπὸν γίνεται ρὰ. δ̄ Μ̄. μ̊ κ̄. ταῦτα πεντάκις γίνεται φε̄ δ̄ Μ̄. μ̊ ρ̄. ἴσον τετραγώνῳ, καὶ πάντα ὅπη δύναμιν ᾱ. γίνονται δυνάμεις ρ̄. μ̊ φε̄. ἴσαι τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ἀριθμῷ ῑ μ̊ ε̄. ὅθεν διρίσκεται ὁ ἀριθμὸς μ̊ κδ̄ Μ̄. ὅπη τὰς ὑποστάσεις, πλάσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ κδ̄ Μ̄. καὶ ε̄ κδ̄ Μ̄. ἡ δὲ τῆ τετραγώνου πλευρὰ υιγ̄ ξ̄ Μ̄. ἐὰν οὖν τὸ ὀρθογώνιον τάξωμεν ἐν ἀριθμοῖς. καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἀπὸ μ̄ μονάδας ε̄. ποιῶμεν ἴσον δυνάμεσι ιζ̄. φξθ̄ γχ̄ Μ̄. ἔσται ἡμῖν τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM III.

AD quæstiones omnes huius libri reliquas nihil adnotauit Xilander, earum tum difficultate, tum insigni deprauatione deterritus. Sed & summi vir ingenij Franciscus Vieta cùm hanc ipsam quæstionem pertractandam suscepisset, Zetetico nono libri quinti parum feliciter eam explicauit; etenim methodum Diophanti minimè percipiens, aliamque viam inire coactus, quod ille vniuersalissimè proposuerat de quolibet numero ad aream trianguli addendo, ipse ad solos numeros è duobus quadratis compositos, restrinxit. Itaque nobis ob integram tot pulcherrimorum subtilissimorumque problematum enodationem, solida relicta est gloria. Quàm vt non immeritò consequamur, circa hanc quæstionem.

Aduerte primò triangulum datum specie vocari à Diophanto, illud cuius laterum proportio data est tantùm, ipsorum laterum quantitate indefinita manente, quod à tertia definitione datorum Euclidis depromptum est. Verè enim triangula omnia quæ latera habent proportionalia eiusdem speciei censeri possunt, tum ob laterum similitudinem, tum ob angulorum æqualitatem, vnde & similia vocantur ab Euclide. Idcirco Diophantus huiusmodi triangula non exhibet in vnitatibus, quia verbi gratia si exponatur triangulum 3. 4. 5. Id iam non in specie, sed in indiuiduo exhibitum erit. Cùm autem proportio laterum dabitur, sed ipsa laterum quantitas manebit indefinita, exhibendo scilicet triangulum in Numeris, vt facit Diophantus sicut 3 N. 4 N. 5 N. verè & propriè exhibitum erit triangulum in specie, cùm hæ positiones, ob numeri indeterminationem, applicari possint lateribus cuiuslibet trianguli huius speciei.

Aduerte secundò. Cùm per primam operationem reperiatur 6 Q. + 5. æqualis quadrato, æquandum eum esse cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 6. puta 9 Q. 16 Q. &c. Quare oportet talem deligi quadratorum numerum vt ab eo auferendo 6. residuum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Proinde cùm 6. sit numerus areæ expositi trianguli, patet quærendum aliud triangulum, cuius area si auferatur ab aliquo quadrato, residuum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Vnde apparet necessitas secundæ operationis, qua Diophantus huiusmodi triangulum & quadratum inuestigat.

Aduerte tertiò subtiliter fingi triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. vnde fit hypotenusa 1 Q. + $\frac{1}{1Q}$. perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Basis verò 2. Quare ducto dimidio basis in perpendiculum fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. Quadrati verò latus fingitur 1 N. + $\frac{10}{1N}$. Et primò pars illius ponitur 1 N. vt eius quadratus puta 1 Q. elidatur ab 1 Q. qui est in area, cùm area subtrahetur à quadrato. Deinde pars altera ponitur $\frac{10}{1N}$ vt eius quadratus $\frac{100}{1Q}$. fit eiusdem denominationis cum − $\frac{1}{1Q}$. qui reperitur in area, vnde commodissimè hic ab illo subtrahetur per solam additionem 1. ad 100. ob signi diuersitatem, communi retento denominatore, & relinquetur $\frac{101}{1Q}$. Quod si diuersi essent harum fractionum denominatores facta subtractione, relinquerentur vtique cubi, vel quadratoquadrati, vel aliæ potestates, à quibus sese expedire difficillimum esset. Tertio in hac secunda lateris parte ponuntur vnitates 10. duplum scilicet dati numeri 5. vt in quadrato reperiantur 20. vnitates duplum scilicet ipsius 10. ac proinde quadruplum ad 5. Quare cùm $\frac{101}{1Q}$. + 20. debeat ad 5. habere rationem quadrati ad quadratum, ac proinde vno in alterum ducto oporteat gigni quadratum, patet productum ex 20. in 5. esse quadratum quia ob rationem quadruplam 20. & 5. sunt plani similes. Porrò $\frac{505}{1Q}$. + 100. (seu omnia ducendo in 1 Q. vt tollatur fractio) 505 + 100 Q. nulla ratione posset æquari quadrato nisi 100. esset quadratus. Vnde colligas in hac secunda lateris parte loco 10. poni posse quemlibet numerum qui sit semissis alterius qui ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Ac proinde ex hoc capite quæstionem varias recipere solutiones. Verbi gratia ponatur latus quadrati 1 N. + $\frac{40}{1N}$. fiet quadratus 1 Q. + $\frac{1600}{1Q}$. + 80. vnde auferendo aream puta 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. remanet $\frac{1601}{1Q}$. + 80. qui ad 5. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altero in alterum ducto fit $\frac{8005}{1Q}$. + 400. æqualis quadrato, & omnia in 1 Q. fit 8005 + 400 Q. æquandus quadrato. Quod facilè fiet, quia 400. est quadratus. Denique omissam à Diophanto solutionem quæstionis afferre non pigebit. Cùm sit 1 N. $\frac{24}{5}$. formatur triangulum à $\frac{24}{5}$. & à $\frac{5}{24}$. fitque hypotenusa $\frac{332401}{14400}$. perpendiculum $\frac{33}{14}\frac{1151}{400}$. basis 2. latus autem quadrati est $\frac{673}{65}$. quadratus $\frac{17069}{3600}$. vel in eadem denominatione $\frac{682276}{14400}$. Itaque ponantur latera quæsiti trianguli $\frac{332401}{14400}$ N. $\frac{331151}{14400}$. N. 2 N. area adsumens 5. fit $\frac{33}{14}\frac{1151}{400}$ Q. + 5. æqualis quadrato $\frac{682276}{14400}$ Q. & auferendo vtrimque æqualia, manent $\frac{14015}{576}$. æqualia 5. fitque 1 Q. $\frac{576}{809}$. At 1 N. $\frac{24}{53}$. Erunt ergo latera quæsiti trianguli $\frac{332401}{31800}$. $\frac{331151}{31800}$. $\frac{48}{53}$. fitque area $\frac{33}{70}\frac{1151}{225}$. cui addendo 5. fit quadratus $\frac{682275}{702225}$. cuius latus $\frac{826}{265}$.

Quoniam verò hinc fortè venit in mentem Francisco Vietæ quæstionem applicari posse solis numeris, qui è duobus quadratis componuntur, quia Diophantus in sua hypothesi sumpserat 5. è duobus quadratis compositum; quamuis ex ipso ductu analyseos Diophantææ satis constet, ad quemlibet numerum extendi problema, ne quis tamen supersit dubitandi locus, placet id etiam experientia comprobare. Sit ergo inueniendum triangulum, cuius area adsumens 6. qui minimè

compositus est è duobus quadratis, faciat quadratum, Itaque prius quærendum est triangulum, itemque quadratus, vt area trianguli de quadrato sublata, supersit numerus qui ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Fingatur triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{N}$. erit vt prius area 1 Q. $-\frac{1}{10}$. sit autem latus quadrati 1 N. $+\frac{12}{10}$. erit quadratus 1 Q. $\frac{144}{100}$. $+$ 24. à quo auferendo aream supradictam, supereſt $\frac{145}{100}$ Q. $+$ 24. quo ducto in 6. & omnia ducendo in 1 Q. fit tandem 144 Q. $+$ 870. æqualis quadrato. Fingatur latus illius 12 N. $+$ 10. fiet 1 N. $\frac{7}{24}$. & latus quadrati $\frac{1274}{1848}$. Formetur igitur triangulum abs $\frac{77}{24}$. & $\frac{25}{77}$ & constituatur in Numeris, erunt latera illius $\frac{3548817}{341504}$ N. $\frac{248212}{341504}$. N. 2 N. fiet area adsumens 6. $\frac{3482265}{341504}$ Q. $+$ 6, æqualis quadrato à latere suprapositio, hoc est quadrato $\frac{2648912}{341504}$ Q. vnde tandem fit valor quadrati $\frac{2049624}{1300700}$. vel in minimis $\frac{5919}{37636}$. ac proinde 1 N. est $\frac{77}{194}$. per quam resoluendo hypostases, inueniuntur latera quæsiti trianguli, nimirum $\frac{27323309}{66253017}$. $\frac{26812374}{66253017}$. $\frac{77}{97}$. fitque area $\frac{1064552801}{1285306544}$. cui addendo 6. fit quadratus $\frac{977640403049}{1285308544}$. cuius latus $\frac{988757}{358512}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Error Vietæ indè haud dubiè oritur. Supposuit vir clarissimus differentiam duorum quadratoquadratorum vt 1 qq. — 1. æquari areæ cui adjiciendo quintuplum quadrati fiat quadratus, si 5. numerus datus diuidatur in duos quadratos poterit inueniri quintuplum quadrati à quo demptâ vnitate supersit quadratus.

Ponatur igitur latus quadrati quintuplicandi esse 1. *N.* $+$ 1. *aut alius quiuis numerorum numerus* $+$ 1. *quintuplum quadrati illius erit* 5 ♎ $+$ 10. *N.* $+$ 5 *cui si adiitias aream* 1 ♎♎ — 1 *fiet* 1 ♎♎ $+$ 5 ♎ $+$ 10. *N* $+$ 4. *quæ summa debet æquari quadrato, hoc autem non est operosum. Cum numerus vnitatum ex hypothesi adjectâ problemati sit quadratus. Non vidit Vieta quæstionem perinde resolui posse si loco* 1 ♎♎ — 1 *sumpsisset pro aream* 1 — 1 ♎♎. *eo enim deducenda statim quæstio vt datus numerus* 5 *vel* 6. *vel alius quilibet in quadratum ductus adjectâ vnitate conficiat quadratum quod generaliter est facillimum cum vnitas sit quadratus.*

Nos peculiari methodo quæstionem hanc & duas proximas resoluimus, cuius beneficio dum quærimus triangulum cuius area vnâ cum 5 *v. g. conficiat quadratum triangulum in minimis exhibemus* $\frac{9}{3}\frac{40}{3}\frac{41}{3}$ *cuius area* 20 *addito* 5 *facit quadratum* 25. *sed de ratione & vsu nostræ huius methodi non est huius loci plura addere, non sufficeret sanè marginis exiguitas, multa enim habemus huc referenda.*

QVÆSTIO IV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus multatus dato numero faciat quadratum. Datus esto 6. & ponatur triangulum datum specie 3 N. 4. N. 5 N. & ob hypothesin 6 Q. — 6. æquantur quadrato. Esto ipsi 4 Q. Et rursus res eò deducitur, vt inueniendum sit triangulum rectangulum, & quadratus numerus, quo de area trianguli sublato, si reliquum sexies sumatur, fiat quadratus. Formetur rursus triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{2N}$. At latus quadrati sit 1 N. cum defectu fractionis numericæ tot vnitatum, quantus est semissis dati numeri. Hoc est $\frac{1}{2}$. & fit quadratus 1 Q. $+\frac{1}{10}$. $+$ 6. Hunc si ab area detrahamus, hoc est ab 1 Q. $-\frac{1}{10}$. relinquitur 6 — $\frac{1}{10}$. & omnia sexies, & in 1 Q. ducantur. Fiunt 36 Q. — 60. æquales

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῶ λήψας τὸ δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῆ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ^{ος} ς̄. ☾ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ς̄ς̄ γ̄. ς̄ς̄ δ̄. ς̄ς̄ ε̄. ☾ διὰ τὸν ὑποθεσιν δ^{ου} ς̄ ἴσαι εἰσὶ τετραγώνῳ. ἔστω δ^{ου} δ̄. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ δύρειν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ἢ τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅπως ὁ ὑπὸ τῶ ἐμβαδῶ ἁρθεὶς τετράγωνον, ἢ τὰ λοιπὰ ἑξάκις γνώμονα ποιῆ τετράγωνον. πεπλάσθω πάλιν τὸ τρίγωνον ὑπὸ ς^{ος} ᾱ. ἢ ἢ τῶ τετραγώνου πλευρὰ ς^{ος} ᾱ. λείψει ἀριθμοῖς μονάδων τοσούτων ὅσων ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῶ πλήθους τῶ δοθέντος ἀριθμῶ, τουτέστι γ̄ $^{\text{κα}\cdot\alpha^{ον}}$. ἢ γίνεται ὁ τετράγωνος δ^{ου} ᾱ. ϑ δ^{ου} $^{\alpha^{ον}}$. γ μ^{ος} ς̄. ἢ ἐὰν αὐτὸν ἀφέλω ὑπὸ τῶ ἐμβαδῶ, τουτέστιν ὑπὸ δ^{ου} ᾱ. λείψει ᾱ δ^{ου} $^{\alpha^{ον}}$ λοιπὸς γίνεται μ^{ος} ς̄. λείψει ῑ δ^{ου} $^{\alpha^{ον}}$. ἢ ταῦτα ἑξάκις, ἢ ϖϑ δύναμιν γίνεται δ^{ου} λς̄,

λείψει μ^{ο} ξ̄. ἴσον τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ς̄ ε̄. λείψει μ^{ο} β̄. ὅθεν δύρίσκεται ὁ ς^{ος} μ^{ο} ιη γ̄. πλάσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ ιη γ̄. καὶ γ̄ ιη̄. ἡ ὑ τῆ τετραγώνου πλευρᾶ λζ̄. καὶ δύρὼν τὸ τρίγωνον τάσσω ἐν ς̄ς̄^{οις}. καὶ ἀκολουθήσας τῇ προτάσει, δύρήσω τὸν ς^{ον} ῥητὸν, & μῦρίσει.

quadrato. Esto latus eius 6 N. + 2. inuenietur 1 N. $\frac{8}{3}$ Formabitur ergo triangulum à $\frac{8}{3}$ & $\frac{1}{3}$. Eritque quadrati latus $\frac{37}{24}$. & cùm inuenero triangulum, statuam illud in numeris, secutusque propositionem, inueniam numerum rationalem. Et constat.

IN QVAESTIONEM IV.

EX dictis ad præcedentem, omnia quæ hîc peraguntur fiunt perspicua. Apparet sanè fingi quadratum à latere 1 N. − $\frac{1}{1N}$. Vt in quadrato reperiantur vnitates − 6. vnde omnia per 6. multiplicando, fiat quadratus 36. Alioquin enim numerus 36 Q. − 60. quadrato æquari non posset, si 36. non esset quadratus. Quamobrem etiam patet, loco ipsius 3. in latere poni potuisse quemlibet alium vnitatum numerum, cuius duplum ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Verbi gratia 12. fieretque latus 1 N. − $\frac{12}{1N}$. & sic de alijs.

Portò non in pigebit tyronum gratiam integram apponere quæstionis solutionem quam prætermisit Diophantus. Cùm fiat 1 N. $\frac{8}{3}$ & latus quadrati $\frac{37}{24}$. formetur triangulum ab $\frac{8}{3}$ & $\frac{1}{3}$ & latera statuantur in numeris, fient $\frac{4277}{576}$ N. $\frac{4015}{576}$. N. 2 N. Est ergo area multata numero 6. $\frac{4015}{576}$ Q. − 6. æqualis quadrato à latere $\frac{37}{24}$ N. puta quadrato $\frac{1369}{676}$ Q. Vnde fit valor quadrati $\frac{625}{49}$. ac proinde valor numeri $\frac{8}{7}$ per quem resoluendo hypostases, fiunt quæsiti trianguli latera $\frac{4277}{504}$. $\frac{4015}{504}$. $\frac{16}{7}$. Estque area $\frac{4015}{441}$. vnde anferendo datum numerum 6. supereſt quadratus $\frac{1369}{441}$. à latere $\frac{37}{21}$.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῆ ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τῆ δοθέντος ἀριθμῆ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ^{ο} ι. καὶ πάλιν τετάχθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ς̄ς̄ γ. ς̄ς̄ δ. ς̄ς̄ ε̄. γίνεται μ^{ο} ιβ. ϛ δ^{ῦ} ε̄ ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ποιῶ μὲν ἴσας δυνάμεσι τετραγωνικαῖς. ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ δύρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ὅπως ὁ τετράγωνος περιλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ δεκατὸν τετραγώνου. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ α̅ ^{εῖ}. καὶ ς^{ν} α̅. ἡ ὑ τῆ τετραγώνου πλευρᾶ α̅ ^{εῖ}. & ς̄ς̄ ε̄. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ὁν τῷ ἐμβαδῷ & τῇ τετραγώνου δι^{ῦ} κς̄. μ^{ο} ι. ταῦτα δεκάκι, γίνεται δ^{ῦ} τξ̄. μ^{ο} ρ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ τὰ τέταρτα, γίνονται δ^{ῦ} ξε̄. μ^{ο} κε̄. ἴσαι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μ^{ο} ε̄. ς̄ς̄ η̄. ὅθεν δύρίσκεται ὁ ς^{ος} μ^{ο} π̄. ὅπερ τὰς ὑποστάσεις. καὶ ὁμοίως τοῖς πρὸ τούτου δύρήσομεν.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ detractus à dato numero faciat quadratum. Esto datus 10. & rursum statuatur triangulum abs 3 N. 4 N. 5 N. fiunt 10 − 6 Q. æquales quadrato, & si æquales faciamus numero quadratorum quadrato, eò rursus deuentum est, vt inueniatur triangulum rectangulum & quadratus numerus, ita vt quadratus adsumpto areæ numero faciat decimam partem quadrati. Formetur triangulum abs $\frac{1}{1N}$. & 1 N. At quadrati latus esto $\frac{11}{1N}$. + 5 N. & fit compositus ex area, & ex quadrato 26 Q. + 10. Hæc decies, fiunt 260 Q. + 100. æqualia quadrato, & quadrans horum 65 Q. + 25. æquatur quadrato. Cujus latus esto 5 + 8 N. vnde inuenitur 1 N. 80. Ad positiones. Et inueniemus vt in præcedentibus.

IN QVAESTIONEM V.

HIC fingens triangulum Diophantus ab 1 N. & $\frac{1}{1N}$. ponit hypotenusam 1 Q. + $\frac{1}{1Q}$. At perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. basim 2. vnde fit area 1 Q. − $\frac{1}{1Q}$. tum fingit quadratum à latere $\frac{1}{1N}$. + 5 N. fitque quadratus $\frac{1}{1Q}$ + 25 Q. + 10. cui addendo aream, fit 26 Q. + 10. quo ducto in 10. fit 260 Q. + 100. æquandus quadrato. Vnde patet cur in quadrati latere posuerit 5. vt scilicet in quadrato reperiatur 10. qui ad datum numerum 10. sit in ratione quadrati ad quadratum. Fecit autem idem latus $\frac{1}{1N}$. + 5 N. non sicut in præcedentibus 1 N. + $\frac{1}{1N}$. vt latera & aream trianguli retineret eadem quæ priùs. Nam si posuisset latus quadrati 1 N. + $\frac{5}{1N}$. ponendum fuisset perpendiculum

perpendiculum trianguli $\frac{1}{10}$. — 1 Q. vt etiam area fieret $\frac{1}{10}$. — 1 Q. res tamen æquè benè succederet, & inueniretur 1 N. $\frac{1}{80}$. alter scilicet numerorum, à quo formari debet triangulum, cùm per operationem Diophanti alter reperiatur puta 80. Omisit autem hîc etiam Diophantus integram quæstionis solutionem labori se subtrahens, ob molestas fractiones; sed hunc laborem suscipere non grauabimur. Cùm 1 N. sit 80. & latus quadrati $\frac{32001}{80}$. formetur triangulum abs 80. & $\frac{1}{80}$. & statuantur latera in numeris, fient $\frac{4096001}{6400}$ N. $\frac{409599}{6400}$ N. 2 N. fitque area $\frac{409599}{6400}$ Q. qua detracta de numero 10 fit $10 - \frac{409599}{6400}$ Q. æqualis quadrato, esto quadrato à latere $\frac{32001}{80}$ N. puta quadrato $\frac{1024064001}{6400}$ Q. fient tandem 10. æquales $\frac{10665024000}{6400}$ Q. vnde fit valor quadrati $\frac{6400}{10665024000}$. seu in minimis $\frac{1}{16641}$ vnde 1 N. est $\frac{1}{129}$. Ad positiones erunt latera quæsiti trianguli. $\frac{4096001}{825600}$. $\frac{409599}{825600}$. $\frac{2}{129}$. est area $\frac{409599}{10650240}$. qua detracta de 10. remanet quadratus $\frac{1024064001}{10650240}$. à latere. $\frac{32001}{10320}$.

Non adeo molestos numeros habebimus si numeri 65 Q. + 25. latus statuamus 5 + 5 N. Nam fiet 1. N. $\frac{5}{4}$. latus quadrati $\frac{141}{20}$. Quare formabitur triangulum à $\frac{5}{4}$. & $\frac{4}{5}$. eruntque latera in Numeris $\frac{881}{400}$ N. $\frac{369}{400}$ N. 2 N. & area detracta de 10. fit $10. - \frac{369}{400}$ Q. æqualis quadrato $\frac{19881}{400}$. Q. vnde fit tandem 1 Q. $\frac{16}{881}$. At 1 N. $\frac{4}{9}$. per quem resoluendo hypostases, fiunt latera trianguli quæsiti $\frac{881}{900}$. $\frac{369}{900}$. $\frac{3}{5}$. Area est in minimis $\frac{41}{225}$. quam auferendo à 10. remanet quadratus $\frac{2209}{225}$. à latere $\frac{47}{15}$.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adsumens vnum laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 7. statuatur rursus triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & fiunt 6 Q. + 3 N. æquales 7. & oportet semissem numerorum in se ductum adsumere quadratos per 7. multiplicatos, & facere quadratum. Non facit autem. Oportet igitur inuenire triangulum rectangulum, vt quadratus semissis vnius laterum circa rectum adsumens septuplum areæ, faciat quadratum. Esto vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fiunt $3\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. & omnia quater, fiunt 14 N. + 1. æqualia quadrato. Vt autem etiam triangulum rectangulum rationale constituamus, oportet, & 1 Q. + 1. æquari quadrato. Horum interuallum est 1 Q. — 14 N. mensuratio 1 N. secundum 1 N. — 14. Istorum interualli semissis in se facit 49. quod æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{24}{7}$. Ad positiones. Pono igitur vnum laterum circa rectum trianguli $\frac{24}{7}$. alterum 1. & omnia septies & in numeris, fiet illud 24 N. hoc verò 7 N. At hypotenusa 25 N. & fit area adsumens latus secundum 84 Q. + 7 N. Hoc æquatur 7. vnde 1 N. inuenitur $\frac{1}{4}$. suntque latera trianguli 6. $\frac{7}{4}$. & $\frac{25}{4}$. & constat.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ προσλαβὼν τὸ ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ζ̄. τετάχθω πάλιν ὁ τρίγωνος δεδομένῳ τῷ εἴδει ς̄ γ̄. ς̄ δ̄. ς̄ ε̄. καὶ γίνονται δ̄ ῡ. ς̄ γ̄. ἴσα μ̄ ζ̄. καὶ δεῖ τὴν ἀριθμὸν τῷ ἡμίσει ἐφ' ἑαυτῷ προσθεῖναι τὰς δυνάμεις ἑπτάκις γιγομένας καὶ ποιεῖν τετράγωνον. οὐ ποιεῖται δὲ, ὥστε δεῖσαι δεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ἡμίσεως μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, προσλαβὼν τὸν ἑπταπλάσιον τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀριθμὸς ᾱ. ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ μ̄ ᾱ. καὶ γίνονται ἀριθμοὶ γ̄. α ς̄. μ̄ ᾱ δ̄ᵛ. καὶ πάντα τετράκις γίνονται ς̄ᵛ ιδ̄ μ̄ ᾱ. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἵνα τὸ ὀρθογώνιον ῥητὸν καταστοιβάσωμεν δεῖ καὶ δύναμιν ᾱ μονάδα ᾱ. ἴσας εἶ τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ γίνεται δ̄ᵛ ᾱ λείψει ς̄ς̄ ιδ̄. ἡ μέτρησις ἀριθμὸς ᾱ κ̄ᵛ ς̄ᵛ ᾱ λείψει μ̄ ιδ̄. τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μ̄ μθ̄. ἵπται τῷ ἐλάσσονι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κδ̄ ζ̄. ὅτι τὰς ὑποτεινούσης. τάσσω οὖν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ τριγώνου κδ̄ ζ̄. τὴν δὲ ἑτέραν μ̄ ᾱ. καὶ πάντα ἑπτάκις καὶ ἐν ἀριθμοῖς γίνεται ἡ μὲν ἀριθμὸς κδ̄. ἡ δὲ ἀριθμὸς ζ̄. ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἀριθμὸς κε̄. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μ̄ δευτέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δ̄ᵛ πδ̄ ς̄ᵛ ζ̄. ταῦτα ἴσα μ̄ ζ̄. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς δύρισκεται ᾱ δ̄ᵛ. αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ μ̄ ε̄. μ̄ ζ δ̄ μ̄ κε δ̄ᵛ. καὶ μένει.

OBSERVATIO D. P. F.

HAec propositio & sequentes aliter fieri possunt fingatur triangulum in hac propositione abs dato numero & vnitate & plana lateribus similia applicentur ad summam vnitatis & numeri dati, orietur quæsitus triangulus.

IN QVAESTIONEM VI.

HIc deuenitur ad regulas compositas, vt liquet tum ex prima operatione, in qua 6 Q. + 3 N. æquantur 7. tum ex secunda, in qua 84 Q. + 7 N. æquantur 7. has autem æquationes resoluit Diophantus modo sibi familiari quem explicauimus ad trigesimam tertiam primi, sumendo scilicet quadratum semissis numeri Numerorum, (qui numerus est vnum laterum circa rectum sumpti trianguli) & huic quadrato addendo productum ex dato numero 7. in numerum quadratorum, qui est numerus areæ. Quamobrem rectè infert. Inueniendum esse triangulum, vt quadratus semissis vnius laterum circa rectum, adsumens septuplum areæ, faciat quadratum. Huius trianguli latera circa rectum ingeniosè ponuntur 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cuius septuplum $3\frac{1}{2}$ N. cui addendo quadratum semissis secundi lateris, fit $3\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato, & omnia in 4. ad tollendas fractiones, fit 14 N. + 1. æqualis quadrato. Porrò vt tria latera trianguli sint rationalia, cum latera circa rectum posita sint 1 N. & 1 oportet vt eorum quadrati simul faciant quadratum hypotenusæ. Quare oportet vt 1 Q. + 1. sit æqualis quadrato. Iam ergo duplicata occurrit æqualitas, cùm æquandi sint quadrato tum 14 N. + 1. tum 1 Q. + 1. Reliqua sunt manifesta. Cur in lemmatis solutione adiiciantur denominatores, ratio est quia inuento triangulo soluente lemma propositum, si sumatur quodlibet aliud simile, id æquè benè proposito satisfaciet, vt demonstrare in promptu est. Sint A B latera circa rectum trianguli rectanguli, & sit D. quadratus semissis ipsius A. sitque E area trianguli, &. datus numerus C. quo ducto in E fiat F. additisque simul F D. fiat G. quadratus. Tum sumantur H K latera circa rectum alterius trianguli similis priori, cuius area sit M. qua ducta in C. fiat N. & sit L. quadratus semissis ipsius H. additisque L N. fiat P. dico P. esse quadratum. Quia enim vt A ad H. sic est semissis ipsius A. ad semissem ipsius H. [1] At quadrati D L. sunt in duplicata ratione laterum, patet D ad L. duplicatam esse rationem rationis A ad H. [2] sed & ob similitudinem triangulorum area E ad aream M. est in duplicata ratione lateris A ad latus H. est ergo D ad L. vt E ad M. Quia verò idem C ductus in E & in M. producit F & N. [3] est F ad N. vt E ad M. ergo est etiam F ad N. vt D ad L. Quamobrem [4] & antecedentium summa puta G. est ad summam consequentium P. sicut vnus antecedentium D ad vnum consequentium L. sed D L sunt quadrati. Ergo G ad P. habet rationem quadrati ad quadratum, [5] ac proinde cùm G sit quadratus ex hypothesi, erit & P. quadratus. Quod erat demonstrandum.

F 2352. G 2401.
D 49. E 336.
A 14. B 48.
C 7

11. *octaui.* H 28. K 96.

2. 3. *Poris.* L 196. M 1344. N 9408. P 9604.

17. *septimi.* 12. *septimi*

24. *octaui.*

Facile quoque est examinare an numeri à Diophanto inuenti soluant quæstionem sunt enim latera trianguli 6. $\frac{7}{4}$. $\frac{25}{4}$. est autem area $\frac{21}{4}$. cui si addas alterum latus, puta $\frac{7}{4}$. fit vtique præscriptus numerus 7.

QVÆSTIO VII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ὑπὸ τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸ ἕνα πρὸς τῇ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τὸ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̊ ζ. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, ἀπάξει εἰς τὸ δύρειν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως μιᾶς τῆς πρὸς τῇ ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ πολύμενον, καὶ προσλαβὸν τὸν ἐπιπλάπον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ εὑρητε, ὁ ὢν ζ. κε. τάσσω οὖν ἑνς. καὶ τὸ ἐμβαδὸν λείψας τὸν ἕνα πρὸς τῇ τὴν ὀρθὴν γίνονται δυνάμεις πδ. λείψει ἀριθμοῦ ζ. ταῦτα ἴσα μ̊ ζ. καὶ γίνεται ὁ ς̊ ᾱ γ̊. ὅπερ τὰς ὑποσάσεις.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus vno laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 7. Et rursum si statuamus triangulum datum specie, res eò deducitur vt inueniendum sit triangulum rectangulum, vt vnius laterum circa rectum semissis in se ductus, & adsumens septuplum areæ faciat quadratum. Et inuentum est, nempe 7. 24. 25. statuo ergo in numeris, & area multata vno laterum circa rectum facit 84 Q − 7 N. Hæc æquantur 7. & fit 1 N. $\frac{2}{3}$ Ad positiones.

OBSERVATIO D. P. F.

FIngatur triangulum abs dato numero & vnitate & plana lateribus similia applicentur ad differentiam dati numeri & vnitatis, hæc quæstio per viam quâ hujusmodi duplicatas æqualitates infinitis modis resoluimus infinitas recipit solutiones. Modum autem quo vtimur tetigimus & explicauimus infra ad quæstionem 24.

Imò & ſolutiones illæ infinitæ aptantur 4. Sequentibus quæſtionibus, quod nec Diophantus nec Bachetus animaduertit. Cur autem neque Diophantus neque Bachetus ſequentem quæſtionem addiderunt? Inuenire triang. rectang. vt vnum ex lateribus areâ multatum faciat datum numerum. Certè hanc videntur ignoraſſe quia non ſtatim ſe prodit in reſolutione duplicatæ æqualitatis. Verum ex noſtrâ methodo facilè poteſt inueniri, ſimiliter in ſequentibus quæſtionibus tertius hic caſus ſuppleri poteſt.

IN QVAESTIONEM VII.

EX dictis ad præcedentem hîc omnia fiunt manifeſta, cùm ab eodem lemmate pendeat ſolutio quæſtionis. Fit autem 1 N. $\frac{1}{3}$. ac proinde quæſiti trianguli latera ſunt $\frac{7}{1}$. 8. $\frac{25}{3}$. Area eſt $\frac{28}{3}$. vnde ſi auferas alterum latus, puta $\frac{7}{1}$. remanet vtique datus numerus 7.

QVÆSTIO VIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt area adſumens vtrumque laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 6. Et rurſum ſtatuatur triangulum datum ſpecie. Et rurſum eo res deducitur vt inueniatur triangulum rectangulum, vt ſummæ laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum. Ponamus denuo vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fit vt quæramus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualia quadrato, & omnia quater. Fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquale quadrato. Sed & 1 Q. + 1. æquari debet quadrato. Horum interuallum eſt 14 N. menſuratio 2 N. ſecundum 7. Iſtorum interualli ſemiſſis in ſe facit 1 Q. + 12 $\frac{1}{4}$ — 7 N. æquale 1 Q. + 1. & fit 1 N. $\frac{45}{28}$. eſt ergo triangulum $\frac{45}{28}$. 1. & $\frac{53}{28}$. & omnia per 28. fit igitur triangulum 45 N. 28 N. 53 N. & fit area adſumens vtrumque latus circa rectum 630 Q. + 73 N. quod æquatur 6. & fit 1 N. rationalis. Ad poſitiones.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτὸ περιλαβὼν τὸν ἐν σωαμφοτέραις τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̊ ϛ̄. καὶ πάλιν πεπάχθω δεδομένος τῷ εἴδει, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως σωαμφοτέρας τὰς περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ μῆ τὸ ἑξαπλασίου τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. καὶ πάλιν ὑποκείσθω μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς̱ α̅. ἡ δὲ ἑτέρα μ̊ α̅. καὶ γίνεται ζητεῖν δ̊ α̅ δ̂. ςς̊ ς̂ ς̃. μ̊ α̅ δ̂ ς̃. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ παντὰ τετράκις, γίνεται δύναμις α̅. ςς̊ ιδ̂. μ̊ α̅. ἴση τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ ςς̱ ιδ̂. ἡ μέτρησις ς̱ β̅. καὶ μ̊ ζ̃. τῆς πρώτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται δύναμις α̅. μ̊ ιβ̅. α̅ δ̂. λείπει ἀριθμῷ ζ̅. ἴσοι δυνάμει α̅. μ̊ α̅. καὶ γίνεται ὁ ς̊ μ̊ μὲ κ̃. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον μ̊ μὲ κ̃. μ̊ α̅. μ̊ νγ̅ κ̃. καὶ παντὰ εἰς κη̅. γίνεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀριθμῷ με̅. ἀριθμῷ κη̅. ἀριθμῷ νγ̅. καὶ γίνεται τὸ ἐμβαδὸν μῆ σωαμφοτέρας τὰς περὶ τὴν ὀρθὴν δυνάμεων χλ̅. ἀριθμῷ ογ̅. ἴση μ̊ ϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̊ ῥητός. ὅπερ ἦν δεῖξαι.

IN QVAESTIONEM VIII.

RVRSVS ex adnotatis ad ſextam, operationis Diophanti ratio ſatis innoteſcit, ne tamen illius breuitas, tyronibus pariat obſcuritatem, age paulò fuſius eam explicemus. Quærentes triangulum, vt quadratus ſemiſſis ſummæ laterum adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum ponimus latera circa rectum 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cujus ſextuplum 3 N. At ſemiſſis ſummæ ſuprapoſitorum laterum eſt $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. cuius quadratus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo 3 N. fit $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. & omnia quadruplicando fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquandus quadrato. Sed etiam vt hypotenuſa ſit rationalis oportet 1 Q. + 1. æquari quadrato. Ergo duplicata occurrit æqualitas. Interuallum itaque numerorum eſt 14 N. & numeri quorum mutuo ductu id fit ſumuntur 2 N. & 7. cautè, qualia multa fieri animaduertimus paſſim libro tertio. vnde tandem fit 1 N. $\frac{45}{28}$. alterum laterum circa rectum, nam alterum poſitum eſt 1. Quare hypotenuſa erit $\frac{53}{28}$. & abjectis denominatoribus conſtituitur triangulum ſpecie, 45 N. 28 N. 53 N.

fitque area 630 Q. cui addendo ſummam laterum circa rectum, fit 630 Q. + 73 N. æqualis 6. vnde fit 1 N. $\frac{1}{18}$. ſunt ergo latera circa rectum quæſiti trianguli $\frac{14}{9}$. & $\frac{53}{18}$. hypotenuſa $\frac{53}{18}$. vnde ſit area $\frac{105}{54}$. cui addendo ſummam laterum circa rectum, fit $\frac{324}{54}$. ſeu 6. vt requirebatur.

QVAESTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀπὸ λήψας τὸν ἐν σωαμφοτέρᾳ τῇ ὑποτεινούσῃ καὶ μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς $\bar{ε}$. καὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει, γίνεται ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως σωαμφοτέρας τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν τὸν ἑξαπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται. καὶ ἔστιν $\overline{κη}$. $\overline{με}$. $\overline{νγ}$. τάσσω οὖν αὐτὰ ἐν ἀριθμοῖς. καὶ πάλιν γίνεται δυνάμεις $\overline{χλ}$. λείψει $\overline{ςς}$ ογ̃. ἴσαι $\overline{μ^ο}$ $\overline{ε}$. ὅθεν διορίσεται ὁ ἀριθμὸς $\overline{μ^ο}$ $\overline{ε}$ $\overline{λ^ν}$. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus ſumma laterum circa rectum faciat datum numerum. Eſto datus 6. Et rurſus ſi ſtatuamus quæſitum triangulum datum ſpecie, fit vt quærendum ſit triangulum rectangulum, vt ſummæ laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſextuplum areæ, faciat quadratum. Hoc autem iam antè eſt demonſtratum, & eſt 28. 45. 53. Pono itaque hæc in numeris, & fit tandem 630 Q. — 73 N. æquale 6. vnde inuenitur 1 N. $\frac{6}{35}$. Ad poſitiones.

OBSERVATIO D. P. F.

ADdi poteſt ex noſtra methodo ſequens quæſtio; Inuenire triangulum rectangulum vt ſumma laterum multata areâ conficiat datum numerum.

IN QVAESTIONEM IX.

EX præcedentium explicatione, ſatis hæc fit dilucida. Integram ſolutionem omiſit Diophantus, quæ talis eſt. fit 1 N. $\frac{6}{35}$. Quare latera quæſiti trianguli reperiuntur $\frac{24}{5}$ $\frac{54}{7}$ & $\frac{318}{35}$. Area verò eſt $\frac{648}{35}$. vnde ſi detrahas ſummam laterum circa rectum, remanet $\frac{210}{35}$. ſeu 6. vt poſtulabatur.

QVAESTIO X.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀπὸ πολλαπλασιασθὲν τὸν ἐν σωαμφοτέρᾳ, τὴν ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα $\overline{ς}$. ἔστω ὁ δοθεὶς $\overline{μ^ο}$ $\overline{δ}$. καὶ πάλιν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει. ἀπάγει πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως σωαμφοτέρας τὴν τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν τὸν τετραπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ τετράγωνον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ $\overline{ς^ν}$ $\overline{α}$. καὶ ἀπὸ $\overline{ς^ν}$ $\overline{α}$. $\overline{μ^ο}$ $\overline{α}$. ☾ ποιεῖ σωαμφοτέρας τὴν τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ $\overline{δ^υ}$ $\overline{δ^υ}$ $\overline{α}$ $\overline{κ^υ}$ $\overline{δ^υ}$. $\overline{δ^υ}$ $\overline{ς^ν}$. $\overline{ςς^{ους}}$ $\overline{δ}$. $\overline{μ^ο}$. $\overline{α}$. ὁ ἢ τετραπλασίων τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ $\overline{κ^υ}$ $\overline{η}$. $\overline{δ^υ}$ $\overline{ιβ}$. $\overline{ςς}$ $\overline{δ}$. ὥστε δεῖσθαι ζητεῖν $\overline{δ^υ}$ $\overline{δ^υ}$ $\overline{α}$. $\overline{κ^υ}$ $\overline{ιβ}$. $\overline{δ^υ}$ $\overline{ιη}$. $\overline{ςς^{ους}}$ $\overline{η}$. $\overline{μ^ο}$ $\overline{α}$. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς $\overline{δ^υ}$ $\overline{α}$. $\overline{ςς}$ $\overline{ς}$. ϛ $\overline{μ^ο}$ $\overline{α}$. καὶ γίνεται ὁ $\overline{ς^ν}$ $\overline{ε}$ $\overline{δ^ν}$. πλάσει ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ $\overline{ε}$ $\overline{δ^ν}$. καὶ $\overline{θ^ν}$ $\overline{δ^ν}$. καὶ ἅπαντα τετράκις πλα-

INVENIRE triangulum rectangulum vt areæ numerus adſumens ſummam hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 4. Rurſus ſtatuemus triangulum datum ſpecie, & eo reducimur, vt inueniamus triangulum rectangulum, vt numerorum hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum ſummæ ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens quadruplum areæ faciat quadratum. Formetur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. & ſummæ hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum ſemiſſis in ſe, fit 1 Q Q. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. Quadruplum autem areæ eſt 8 C. + 12 Q. + 4 N. Itaque oportet quærere 1 Q Q. + 12 C. + 18 Q. + 8 N. + 1 æqualia quadrato. Eſto latus eius 1 Q. + 6 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. formabitur ergo trian-

gulum abs $\frac{5}{4}$. & $\frac{2}{4}$. & omnia quater. Formabitur rursum triangulum à 9. & 5. & sumens minima similium, statuo ipsum in numeris, fit 28 N. 45 N. 53 N. Et est numerus areæ adsumens summam hypotenusæ & alterius laterum circa rectum 630. Q. + 81 N. æqualis 4. & fit 1 N. $\frac{4}{105}$. Ad positiones.

θήσεϑ) πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ ϛ. ϰϑ ε. ϛ λαβὼν τὰ ἐλάσσονα τ̃ ὁμοίων τάσσω αὐτὸν ἐν ϛϛ^{οις}. γίνεται ϛϛ ϰη. ϛϛ με. ϛϛ νϑ. ϰϑ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἑμβαδῷ μϑ σωαμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης ϛ μιᾶς πϑ περὶ τὸν ὀρθὸν, δ^{ας} χλ ϛϛ πα. ἴσος μ^{ῳ} δ̄. ϰϑ γίνεται ὁ ϛ^{ὸς} δ^{ας} ϛ^{ας}. ὅπ̀ ταῖς ὑποστάσ̃ς.

IN QVAESTIONEM X.

IMPRIMIS monendus est lector, hanc & sequentem propositionem in codice Xilandri malè ordinem immutare, cùm sequens statuatur ibi decima, & hæc vndecima. Rectius in codice regio suum quemque obtinet locum, in quo vno codex ille nobis hucusque fuit auxilio, in reliquis omnibus nimis infeliciter cum codice Xilandri consentiens. Sed & euidens est Diophantum in sequente quæstione vndecima, supponere totam fere decimæ huius constructionem, vt de harum propositionum ordine nullus supersit dubitandi locus. Hic porro cùm inueniendum sit triangulum, vt quadratus semissis compositi ex hypotenusa, & ex altero laterum circa rectum, adsumens quadruplum areæ faciat quadratum, formatur triangulum ab 1 N. & ab 1 N. + 1. fitque hypotenusa 2 Q. + 2 N. + 1. basis 2 N. + 1. perpendiculum 2 Q. + 2 N. Area verò est 2 C. + 3 Q. + 1 N. cuius quadruplum 8 C. + 12 Q. + 4 N. summa autem hypotenusæ & baseos est 2 Q. + 4 N. + 2. cuius semissis 1 Q. + 2 N. + 1. cuius quadratus fit 1 QQ. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. cui addendo quadruplum areæ, fit 1 QQ. + 12. C. + 18 Q. + 8 N. + 1. æquandus quadrato. Huius autem latus cur ponatur à Diophanto 1 Q. + 6 N. − 1. satis superque docuimus ad vigesimam nonam quarti, nimirum hac ratione tolluntur quadratoquadrati, cubi & vnitates, manetque æquatio inter duas proximas species quadratos & numeros. Nam fiunt 16 Q. æquales 20. N. vnde fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Quare formandum est triangulum à $\frac{5}{4}$. & $\frac{3}{4}$ & omnia per 4. multiplicando, fingitur triangulum à 5. & 9. suntque latera 106. 56. 90. quæ diuidendo per 2. vt habeatur nimirum triangulum eiusdem speciei in integris, fiunt 53. 28. 45. cuius rei ratio ex demonstratis ad sextam satis liquet. Ponuntur ergo latera quæsiti trianguli 53 N. 28. N. 45 N. & est area 630 Q. cui addendo summam hypotenusæ 53 N. & lateris 28 N. fit 630 Q. + 81 N. æqualis 4. vnde fit 1 N. $\frac{4}{105}$ per quem resoluendo hypostases, fiunt latera quæsiti trianguli $\frac{212}{105}$. $\frac{16}{15}$. $\frac{13}{7}$. Area est $\frac{96}{105}$. cui si addas summam hypotenusæ & primi lateris fit $\frac{420}{105}$. seu 4. vt requirebatur.

Cæterùm eodem prorsus artificio soluetur quæstio quæ à Diophanto prætermissa est, cùm tamen ad hanc tractationem pertineat nimirum.

Inuenire triangulum rectangulum, vt areæ numerus adsumens hypotenusam datum faciat numerum. Esto datus 4.

Patet quærendum prius triangulum, vt quadrato semissis hypotenusæ addendo quadruplum areæ, fiat quadratus. Fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. erit semissis hypotenusæ 1 Q. + 1 N. + $\frac{1}{2}$. cujus quadratus 1 QQ. + 2 C. + 2 Q. + 1 N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo quadruplum areæ, puta 8 C. + 12 Q. + 4 N. fit 1 QQ. + 10 C. + 14. Q. + 5 N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato. Ponatur latus illius 1 Q. + 5 N. − $\frac{1}{2}$. fient tandem 10 N. æquales 10. Q. Quare 1 N. est 1. & fingendum est triangulum ab 1. & à 2. fiuntque latera 5. 3. 4, quæ si statuantur in numeris, fiet area cum hypotenusa 6 Q. + 5 N. æqualis 4. vnde fit 1 N $\frac{1}{2}$. sunt ergo quæsiti trianguli latera 2 $\frac{1}{2}$. 2. 1 $\frac{1}{2}$. fitque area 1 $\frac{1}{2}$ cui si addas hypotenusam fit numerus 4. vt postulabatur.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus summa hypotenusæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 4. Rursum si statuamus triangulum datum specie, eò ducimur vt inueniamus triangulum rectangulum, vt quadruplum areæ additum quadrato semissis

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἑμβαδῷ αὐτ̃ λήψας τὸν ἐν σωαμφοτέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης, ϰαὶ μιᾶς πϑ περὶ τὸν ὀρθὸν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μονάδες δ. ϰαὶ πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδιπλ̃ον τῷ εἴδει, ἀπάξ) εἰς τὸ ὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀπὸ τετράκι γ̣ομέν@ πρὸς σωαμ-

φοτέρων τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιῆ τετράγωνον. καὶ δειχθήσεται ὅτι ὄξιν κη. με. νγ. τάσσω αὐτὸν ἐν ϛς^ις καὶ γίνονται δ^ῦ χλ. λείψει ϛς^ις πα^ᾶ. ἴσα μ^ῖ δ^ᾶ. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ὸ α^ᾶ ξ^ᾶ. ὅπερ τὰς ὑποϛάσεις.

summæ ex hypotenusa, & altero laterum circa rectum, faciat quadratum, & demonstratum est esse 28. 45. 53. Pono illud in numeris, & fiunt 630 Q. — 81 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{1}{6}$. Ad positiones.

IN QVAESTIONEM XI.

HVIVS quæstionis solutio pendet omnino à lemmate ad præcedentem assumpto. Nam inuento triangulo vt quadruplum areæ additum quadrato semissis compositi ex hypotenusa & altero laterum, faciat quadratum, constituitur in Numeris, puta 53 N. 28 N. 45 N. & fiunt tandem 630 Q. — 81 N. æquales 4. vnde 1 N. fit $\frac{1}{6}$. Quare quæsiti trianguli latera reperiuntur $\frac{53}{6}$ $\frac{14}{3}$. $\frac{25}{2}$. Area est $\frac{105}{6}$ vnde auferendo summam hypotenusæ & baseos, puta $\frac{81}{6}$. remanet $\frac{24}{6}$. seu 4. vt postulabatur.

Eodem etiam artificio soluetur hæc quæstio.

Inuenire triangulum rectangulum, vt area, detracta hypotenusa, faciat datum numerum.

Datus esto 4. Quæretur triangulum, vt prius, vt quadruplum areæ additum quadrato semissis hypotenusæ, faciat quadratum, quale inuentum est ad præcedentem 5. 4. 3. statuatur ergo in Numeris, & sint quæsiti trianguli latera 5 N. 4 N. 3 N. fient ergo 6 Q. — 5 N. æquales 4. vnde fit 1 N. $\frac{4}{3}$. Ad hypostases. Sunt quæsiti latera trianguli $\frac{20}{3}$. 4. $\frac{16}{3}$. Estque area $\frac{32}{6}$. vnde si auferas hypotenusam, remanet $\frac{12}{3}$ seu 4. vt postulabatur.

OBSERVATIO D. P. F.

ADdi potest ex nostra methodo sequens quæstio; Inuenire triangulum rectangulum vt summa hypotenusæ & alterius lateris circa rectum multata aream faciat datum numerum imo & sequens addi potest Bacheti commentarijs; Inuenire triangulum vt hypotenusa detractâ aream faciat datum numerum.

QVÆSTIO XII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ἡ ὑποτείνουσα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ ὁ ἐν τῇ μείζονι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἡ τετράγωνος. ἔτι δὲ ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῶν μὴ ἐλάσσονος τοῦ περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω τρίγωνος ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, καὶ ὑποκείσθω ἡ μείζων τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γνωμὼν οὐκ τῶν δὶς ὑπ' αὐτῶν. δεῖ οὖν εὑρεῖν δύο ϛς^ους ὅπως ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. καὶ ἡ ὑποτείνουσα ᾖ ὑπερέχει τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν τῆς ὑποτεινούσης τῶν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνον, ποιῇ τετράγωνον. τότε ἂν ἐν πᾶσι δυσὶν ἀριθμοῖς, ὅταν ὁ μείζων τῶν ἐλάσσονος ᾖ διπλασίων. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ϛ^ης α. καὶ ϛς^ους βκ καὶ λύεται δύο τῶν ὁπταγωνίων, λοιπὸν ζητῆσαι τὸ ἐμβαδὸν τῶν τειγώνου μὴ τὴν ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται ἂν δ^ῦ λ^ῦ ϛ^ᾶ. δ^ῦ Γ. καὶ πάντα τῶν δὰ δύναμιν, γίνεται δ^ῦ ϛ^ᾶ. μ^ὸ γ^ὸν, ἴσα τετραγώνῳ. ζητήσομεν ἄρα ἀριθμόν τινα, ὅπως οἱ ἐξ ἀπ' αὐτῶν τετραγωνοὶ μὴ μ^ὸ γ^ὸν. ποιῶσι τετράγωνον. ἔστι δὴ μονὰς α. καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί. ὥστε τὸ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt & interuallum laterum circa rectum, & ipsum maius latus, sit quadratum. Et præterea area cum minore laterum circa rectum, faciat quadratum. Formetur triangulum à duobus numeris, & supponatur maius laterum circa rectum fieri ex duplo producti multiplicationis ipsorum. Oportet ergo inuenire duos numeros, vt duplum multiplicationis eorum sit quadratus, & excessus dupli multiplicationis eorum super interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, faciat quadratum. Hoc autem accidit duobus quibusuis numeris, quando maior minoris est duplus. Formetur ergo triangulum abs 1 N. & 2 N. & satisfit duabus propositi partibus. Superest vt videamus an area trianguli cum minore laterum circa rectum faciat quadratum fit autem 6 QQ. + 3 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur. Fiunt 6 Q. + 3. æqualia

quadrato. Quæremus igitur aliquem numerum, cuius ſex quadrati adſumpto ternario faciant quadratum. Hujuſmodi autem eſt 1. & alij infiniti numeri. Ergo quæſitum triangulum rectangulum formabitur ab 1. & 2.

ζητύμενον ὀρθογώνιον ἔσαι πεπλασμένον ὑπὸ μ° ᾱ. καὶ μ° β̄.

Lemma.

Duobus datis numeris, quorum ſumma ſit quadratus. Inuenientur infiniti quadrati, quorum quilibet ductus in vnum datorum & adſumens alterum, faciet quadratum. Sint duo dati numeri 3. & 6. & oporteat inuenire quadratum, qui ductus in 3. & adſumens 6. faciat quadratum. Eſto quæſitus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. & fiunt 3 Q. + 6 N. + 9. æqualia quadrato, & ſolui poteſt infinitis modis, quia vnitates ſunt quadratæ. Eſto igitur latus quadrati 3 − 3 N. & fit 1 N. 4. erit igitur quadrati latus 5. & alij infiniti inuenientur.

Λῆμμα.

Δύο δοθέντων ἀριθμῶν ὧν τὸ συνθεμα ποιῇ τετράγωνον. εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι, ὧν ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ὑπὸ ἕνα τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δύο ὅτε γ̄. καὶ ὁ ϛ̄. καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν τετράγωνον. ὃς πολλαπλασιασθεὶς ὑπὸ τὸν γ̄. καὶ προσλαβὼν τὸν ϛ̄. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος. δ° ᾱ. ϛ̄ β̄. μ° ᾱ. καὶ γίνονται δ° γ̄. ϛ° ϛ̄. μ° θ̄. ἴται τετραγώνῳ, καὶ δυνατόν ὄϛι ἀπειραχῶς εὑρεῖν διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶ) τετραγωνικάς. ἔστω οὖν τῶν ὑπὸ πλευρᾶς μ° γ̄. λείψει ϛ̄ γ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ° μ° δ̄. ἔσαι ἄρα ἡ τῶ τετραγώνου πλευρὰ μ° δ̄. καὶ ἕτεροι ἄπειροι εὑρίσκονται.

IN QVAESTIONEM XII.

SVPPONIT in primis Diophantus huiuſmodi Theorema.

Si fuerint duo numeri in proportione dupla, tam duplum producti eorum multiplicatione, quàm exceſſus eiuſdem dupli producti ſuper interuallum quadratorum, quadratus eſt.

Quod ita demonſtratur. Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum G. dico tum duplum producti ex A in B. tum exceſſum eiuſdem dupli producti ſuper G. eſſe quadratum, etenim quia B eſt duplus ad A patet D eſſe quadruplum ipſius C. eo quod quadrati ſunt in duplicata ratione laterum. Sed productum ex A in ſuum duplum B æquatur duplo quadrati ipſius A. ac proinde duplum producti ex A in B. æquatur quadruplo quadrati ipſius A. hoc eſt quadruplo ipſius C. Igitur quadratus D. eſt duplum producti ex A in B. Quod erat primo probandum. Deinde patet ex hypotheſi exceſſum D ſuper G eſſe ipſum quadratum C. Quare ex omni parte conſtat propoſitum. Idcirco Diophantus fingit triangulum ab 1 N. & 2 N. vt duabus propoſiti partibus ſatisfiat; nam latera circa rectum ſunt 4 Q. & 3 Q. quorum maius eſt quadratus vt patet; exceſſus verò illius ſuper minus, eſt etiã quadratus puta 1 Q. Reſtat ergo vt area minore latere adſumpto faciat quadratum, facit autem 6 QQ. + 3. Q. æquale quadrato, & omnia per 1 Q. diuidendo, fit 6. Q. + 3. æquandus quadrato.

A 3. B 6.
C 9. D 36.
G 27.

Hìc ſanè Diophantus non vſitata prius ratione, quadrato æquat numerum ex duabus ſpeciebus non proximis compoſitum, quales ſunt quadrati & vnitates, quamuis neutra ipſarum numero exprimatur quadrato. Vt autem hoc fieri poſſit, quærendus eſt quadratus quo per 6. multiplicato, & producto addendo 3. fiat quadratus. Quod quidem poſſibile eſt, quia 6. & 3. ſimul conficiunt quadratum, & res abſoluitur per aſſumptum lemma. Quia verò vnitas quadratus eſt, & non mutat numerum quem multiplicat, ſequitur ex eo quod 6. & 3. conficiunt quadratum 9. vnitatem ſumi poſſe loco quadrati quæſiti. Vnde fit etiam 1 N. 1. Quamobrem fingitur triangulum ab 1. & 2. & fiunt latera 5. 4. 3. quæ ſoluunt quæſtionem.

Porrò facilè eſt auxilio lemmatis aſſumpti alias reperire ſolutiones. Ponamus enim quadratum quæſitum 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 6. & producto addendo 3. fit vtique 6 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus cùm infinitis modis fingi poſſit, quia vnitatum numerus quadratus eſt, patet infinitas reperiri poſſe ſolutiones. Verbi gratia ponatur latus hoc 3 − 3 N. fiet 1 N. 10. Quamobrem quæſitus quadratus eſt 121. quo ducto in 6. fit 726. cui addendo 3. fit 729. quadratus

à latere 27. Quare si 6 Q. + 3. æquemus quadrato 729. fiet 1 N. 11. Ac proinde fingatur triangulum ab 11. & 22. eruntque latera 605. 484. 363. quæ soluunt quæstionem, nam maius laterum circa rectum puta 484. est quadratus à latere 22. & illius excessus super 363. est 121. quadratus à latere 11. Area verò addito minore latere facit 88209. quadratum à latere 297. Itaque notandus est modus iste, quo æquabimus quadrato quemlibet quadratorum & vnitatum numerum, quamuis neuter sit quadratus, dummodo vterque simul conficiat quadratum.

Et vt aliquid addamus Diophanto, aio æquationem quoque explicari posse quamuis quadratorum, & vnitatum numeri simul non conficiant quadratum, dum reperiatur quadratus aliquis qui ducto in numerum quadratorum, & producto addendo numerum vnitatum fiat quadratus, quod sanè perficiemus per huiusmodi lemma.

Datis duobus numeris, si altero per quadratum multiplicato, altero ad productum addito fiat quadratus, inuenientur alij quadrati idem præstantes.

Sint dati 5. & 16. Nam ducto quadrato 4. in 5. & producto addendo 16. fit quadratus 36. Quærendus ergo est alius quadratus quàm 4. qui hoc idem præstet. Esto latus illius 2 + 1 N. fiet quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 36 + 20 N. + 5 Q. æqualis quadrato. Hîc autem infinitæ dari possunt solutiones, quia vnitatum numerus est quadratus. Fingatur verbi gratia latus huius quadrati $6-3$ N. fiet 1 N. 14. eritque quæsiti quadrati latus 16. ipse quadratus 256. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 1296. quadratus à latere 36.

Immò quod de multiplicatione dictum est, intelligendum quoque de diuisione, & scias eadem arte solui huiusmodi lemma.

Datis duobus numeris, si altero per quadratum diuiso, & altero ad quotientem addito fiat quadratus, inuenientur alij infiniti quadrati idem præstantes.

Sint dati numeri 96. & 12. Nam diuiso 96. per quadratum 4. fit quotiens 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quærendus ergo alius quadratus quàm 4. qui præstet *idem* ponatur eius latus vt prius 2 + 1 N. erit quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{96}{4+4N+1Q}$. & huic addendo 12. fit $\frac{144+48N+12Q}{4+4N+1Q}$. æqualis quadrato. Est autem denominator quadratus. Quare supereſt vt numerator 144. + 48 N. + 12 Q. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia 144 est quadratus, & fingetur latus illius $12-6$ N. & fiet 1 N. 8. Quare latus quæsiti quadrati est 10. ipse quadratus 100. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{24}{25}$. cui addendo 12. fit $\frac{324}{25}$. quadratus à latere $\frac{18}{5}$. Quòd autem 144. necessariò sit quadratus, patet, ex eo quòd 144. fit addendo ad 96. productum ex 4 in 12. Quare cùm ex hypothesi 24. & 12. simul faciant quadratum 36. si vterque per aliquem quadratum multiplicetur, erit & summa productorum quadratus. Atqui ducto 4. in 24. fit 96. & ducto eodem 4. in 12. fit 48. Igitur summa ipsorum 96. & 48. puta 144. quadratus est, ille scilicet qui fit ducto 4. in 36.

Hoc autem lemmate mirificè juuatur operatio Diophanti, quæ aliter fortuita videatur. Nam si finxisset triangulum ab aliquibus alijs numeris in ratione dupla constitutis, puta à 2 N. & 4 N. fuissent latera 20 Q. 16 Q. 12 Q. vbi laterum quidem circa rectum interuallum, itemque maius ipsorum, quadratus est, sed area minore assumpto. Fit 96. QQ + 12' Q. & omnia diuidendo per 1 Q. fit 96 Q. + 12. æqualis quadrato. Atqui 96. & 12. simul non conficiunt quadratum. Quare per ea quæ tradit author, non constat quomodo 96 Q. + 12. possit æquari quadrato, & eius lemma hîc vsui esse non potest. Per nostrum autem lemma facilè res *expedietur*, nam si diuidas 96. per quadratum 4. fit 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quare per allatum lemma inuenientur infiniti quadrati ab ipso 4. diuersi qui præstabunt idem, & infinitas exhibebunt solutiones. Nam inuento verbi gratia quadrato 100. per quem diuidendo 96. fit $\frac{24}{25}$. quo addito ad 12. fit quadratus $\frac{324}{25}$. æquabimus 96 Q. + 12. quadrato $\frac{324}{25}$. vnde fiet 1 N. $\frac{7}{10}$. Quare formabitur triangulum ab $\frac{7}{5}$. & $\frac{3}{5}$. & erunt latera circa rectum $\frac{3}{25}$. $\frac{4}{25}$. quorum maius, itemque interuallum ipsorum quadratus est. Area verò est $\frac{6}{625}$. cui addendo minus latus $\frac{3}{25}$. fit quadratus $\frac{81}{625}$. à latere $\frac{9}{25}$.

Tota tamen hæc operatio, adhuc labare videtur, nisi probetur aream trianguli sic diuidi posse per aliquem quadratum, vt quotienti addendo, minus laterum circa rectum, fiat quadratus. Quamobrem ne hîc scrupulus hæreat, sic pronuncio.

Si à datis duobus numeris in proportione dupla formetur triangulum rectangulum, eius area per quadratum minoris datorum diuisa, fit quotiens, quo addito minori laterum circa rectum, conflatur quadratus noncuplus ad priorem quadratum.

A 2. B 4.
C 4. D 16.
E 96. F 12.
G 24.

Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum F. ergo cum vt probatum est in adnotatis ad initio D sit duplum producti ex A in B. sunt D F latera circa rectum trianguli. Quare ducto semisse ipsius D in F fiat area E. qua diuisa per C. sit quotiens G. dico summam duorum F G esse quadratum noncuplum ad ipsum C. Etenim quia vt probatum est ab initio D quadruplus est ad C. sequitur subtracto C ab ipso D. residuum F esse triplum ad C. Quare cùm semissis ipsius D ducitur in

F. ducitur

F. ducitur duplum ipsius C in triplum eiusdem. Igitur E continet sexies quadratum ipsius C. itaque diuidendo E per C. quotiens G est sextuplus ad C. cui si addatur F. triplus ad eundem C. fiet vtique summa ipsorum F G noncupla ad C. ac proinde quadratus, cùm sit noncuplum quadrati C. Quod demonstrandum erat.

Superest vt moneam, verba illa postrema quæ virgulis inclusimus, γίνεται δὲ δ̄ δ̄ &c. à nobis suffecta esse in locum istorum quæ in codice manu exarato corruptissima leguntur. γίνεται δὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆ δ̄. ς̄. τῆς ἀπὸ τῆ ς̄ δ̄ δ̄. ὅ ἐν τῇ τὸν τ̄ ἐκ τειῶν τὸν ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος τετράγωνον, καὶ πάντα ὁμοῦ τὸν ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος τετράγωνον. A quibus tamen si quis commodum sensum elicere potuerit, per me licet, vt nostra deleat, & meliora reponat.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adsumens alterutrum laterum circa rectum, faciat quadratum. Statuatur triangulum datum specie 5 N. 12 N. 13 N. & fit 30 Q. + 12 N. æquandus quadrato, esto quadrato 36 Q. & fit 1 N. 2. & cùm 1 N. sit 2. oportebit vt etiam 30 Q. + 5 N. sit quadratus. At non est. Itaque eo compellimur, vt inueniamus quadratum aliquem quo multato numero 30. & per residuum diuiso 12. & quotientis quadrato per 30. multiplicato, & adsumente quintuplum sui lateris fiat quadratus. Esto quæsitus quadratus 1 Q. & si inde auferatur 30. & per residuũ diuidatur 12. fit 12. denominatione partis 1 Q. − 30. cuius quadratus est 144. denominatione partis 1 QQ. + 900 − 60 Q. Hoc tricies cum quintuplo sui lateris, facit 60 Q + 2520. sub denominatione partis 1 Q Q. + 900 − 60 Q. æquale quadrato, & est pars quadratus. Oportet igitur & 60 Q. + 2520. quadratum esse, hoc est oportet quadratum aliquem ductum in 60. & adsumentem 2520. facere quadratum. Si ergo formantes rectangulum, curauissemus vt 60. adscito 2520. faceret quadratum, soluta esset quæstio. Fit autem 60. ex mutuo ductu laterum circa rectum. At 2520. est solidus contentus sub majore laterum circa rectum, & sub interuallo laterum circa rectum, & sub area. Eoque res rediit, vt inueniendum sit triangulum rectangulum, vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum, interuallo eorundem, & area contento, faciat quadratum. Et si constituamus maius laterum circa rectum, quadratum numerum, & omnia per ipsum diuida-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῆ περιεχόμενος τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ις̄ ε̄. ις̄ ιβ̄. ις̄ ιγ̄. καὶ γίνεται δ̄ λ̄. ις̄ ρ̄ ιβ̄. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ἔστω δ̄ λς̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ β̄. καὶ τῆ ς̄ ὄντος μ̄ β̄. δεήσει καὶ δ̄ λ̄. ις̄ ρ̄ ε̄. εἶναι τετράγωνον. ἀλλ' ἔστι ἅ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τετράγωνόν τινα ὃς λείψας τὸν λ̄. ἀριθμὸν, ποιεῖ τὸν λοιπὸν μερισθὲν ὁ ιβ̄. καὶ ὁ γεγονὼς ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτὸν τεσσαρακοντάκις καὶ πεσὼν λαβὼν τὸ πενταπλάσιον τῆ πρώτου ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος δ̄ ᾱ. καὶ ἐὰν λείψῃ τὸν λ̄. καὶ πάλιν τὸν λοιπὸν μερισθὲν ὁ ιβ̄. γίνεται μ̄ ιβ̄. ἐν μορίῳ δυνάμεις ᾱ. λείψει μ̄ λ̄. ὁ τετράγωνος γίνεται ρμδ̄. ἐν μορίῳ δ̄ δ̄ ᾱ. μ̄ π̄. λείψει δυνάμεων ξ̄. ταῦτα τεσσαρακοντάκις μῆ τῆ πενταπλασίονος τῆς ἑαυτῆ πλευρᾶς γίνεται δ̄ ξ̄. μ̄ βφκ̄. ἐν μορίῳ δ̄ δ̄ ᾱ. μ̄ π̄. λείψει δ̄ ξ̄. ἴσον τετραγώνῳ. καὶ δεῖ τὸ μόριον τετράγωνος. καὶ δεήσει ἄρα δυνάμεις ξ̄. μ̄. βφκ̄. εἶναι τετράγωνον. τουτέστιν δεῖ τετράγωνόν τινα ἑξηκοντάκις γεμόμενον, καὶ προσλαβόντα μ̄ βφκ̄. ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν οὖν πλάσαντες τὸ ὀρθογώνιον κατασκευάσωμεν τὸν ξ̄. μῆ τῆ βφκ̄. ποιεῖν τετράγωνον. λύσομεν τὸ ζητούμενον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ξ̄. ἐκ τῆ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν. ὁ δὲ βφκ̄. ἐκ τῆ στερεῆ περιεχομένου ἐκ τῆς μείζονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑποχῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆ ἐμβαδῆ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως, ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτὸ, προσλαβὼν τὸν στερεὸν, τὸν περιεχόμενον ἐκτὸς τῆς μείζονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆ ἐμβαδῆ αὐτῆ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν μείζονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἅπαντα ὁμοῦ πάρ αὐτήν, ζητήσομεν τὸν ἐν τῇ ἐλάσσονι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, μῆ τῆ

ὑπὸ τῶ ἐμβαδῶ καὶ τῆς ὑποχῆς τ περὶ τὴν ὀρθὴν, τετράγωνον. ✻ ἀπάγεται εἰς τὸ δύο ἀριθμῶν δοθέντων τότε ἐμβαδῶ, καὶ τῆς ἐλάσσονος τ περὶ τὴν ὀρθὴν, ✻ αὐτὸς ζητεῖν τετράγωνόν πνα, ὃς πολλαπλασιαθεὶς ὅλῃ ἕνα τ δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τ ἕτερον ποιῇ τετράγωνον. ταῦτα δ λήμματα προειλείχθη. καὶ ἔστ τὸ ὀρθογώνιον γ̄. δ̄. ε̄. τάσσω αὐτὸν ἐν ϛς^{οις}, καὶ γίνεται ζητεῖν δ^{ῦ} ε̄. ϛς^{ις} δ̄. ἴσοις τετραγώνῳ. καὶ δ^{ῦ} ε̄. ϛς^{ις} γ̄. ἴσοις τετραγώνῳ, καὶ πάλιν ἐὰν ἀπολύσωμεν τ μείζονα ἰσότητα γίνεται ὁ ϛ^{ὸς} μ^{ῶν} δ̄. ἐν μορίῳ δ^{ῦ} ὰ γ̀ μ^{ῶν} ε̄. ἡ ἄρα δύναμις γίνεται μ^{ῶν} ις̄. ἐν μορίῳ δ^{ῦ} δ^{ῦ} ὰ μ^{ῶν} λε̄ λείψει δ^{ῦ} ιβ̄. ἔσται ἄρα δυνάμεως ἑξαπλασίων μ^{ῦ} ϛς̄ τειῶν. δ^{ῦ} ιβ̄. μ^{ὸς} κδ^{ου}. ἐν μορίῳ δ^{ῦ} δ^{ῦ} ὰ. μ^{ὸς} λε̄ γ̀ δ^{ῦ} ιβ̄. δυνάμεις ἄρα ιβ̄ μ^{ὸς} κδ̄. ὀφείλουσι ἵνα ἓν τετραγώνῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ δύο εἶν τετράγωνον, ὃς πολλαπλασιαθεὶς ὅλῃ τὸν ἐλάσσονα τ δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. ἔστ δὲ ὁ κε̄. ὥστε ἡ δύναμις γίνεται μ^{ὸς} κε̄. ὁ ἄρα ϛ^{ὸς} ἔσται μ^{ὸς} ε̄. ζητοῦντες οὖν δ^{ῦ} ε̄ ϛς^{ις} δ̄. ἰσῶσαι τετραγώνῳ. πεπλήρωται ὁ δ^{ῦ} κε̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ^{ῦ} ^{ιθ}. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον ιβ^{ου} ^{ιθ}. ις̄ ^{ιθ}. κ̀ ^{ιθ}. καὶ μένει.

mus, quæremus minus laterum circa rectum additum plano sub area & interuallo laterum circa rectum contento, esse quadratum. Oportet igitur datis duobus numeris, areæ scilicet, & minoris laterum circa rectum, ipsis adinuenire quadratum aliquem, qui ductus in vnum datorum, & adsumens alterum, faciat quadratum. Hæc autem lemmata suprà sunt demonstrata. Et est rectangulum 3. 4. 5. statuo id in numeris, fitque vt quæram 6 Q. + 4 N. æquales quadrato, & 6 Q. + 3 N. æquales quadrato. Et rursum si absoluamus maiorem æqualitatem, fit 1 N. 4. denominatione partis 1 Q. − 6. ergo quadratus erit 16. denominatione partis 1 Q Q. + 36 − 12 Q. Quamobrem sextuplum quadrati adscitis 3. N. erit 12 Q. + 24. denominatione partis 1 Q Q + 36 − 12 Q. Proinde 12. Q. + 24. æquari oportet quadrato. Et res eò rediit vt inueniatur quadratus, qui ductus in minorem datorum, & adsumens maiorem faciat quadratum. Est autem 25. Quare 1 Q. est 25. & 1 N. 5. Igitur quærentes æquare quadrato 6 Q. + 4 N. æquabimus quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{12}{19}$. Est ergo triangulum $\frac{12}{19}$. $\frac{16}{19}$. $\frac{20}{19}$. & constat.

OBSERVATIO D. P. F.

VNius tantum speciei triangula Diophantus exhibet propositum adimplentia, Sed ex nostrâ methodo suppetunt infinita diuersæ speciei triangula quæ ex Diophantæo per ordinem deriuantur.

Sit igitur inuentum triangulum 3. 4. 5. cuius hæc est proprietas vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum interuallo eorundem, & areâ contento faciat quadratum. Ab eo deducendum aliud eiusdem proprietatis, sit maius ex lateribus circa rectum trianguli quæsiti 4. minus vero 3 + 1 N. Rectangulum sub lateribus circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum interuallo eorundem & areâ contento, facit 36 − 12 N. − 8 Q. quæ ideo debent æquari quadrato. Cum autem latera 4 & 3 + 1 N. sint latera circa rectum trianguli rectanguli, debent etiam eorum quadrata iuncta æquari quadrato. Quadrata illa iuncta faciunt 25 + 6 N + 1 Q. quæ idcircò etiam æquanda quadrato. Et oritur duplicata æqualitas, nam 36 − 12. N − 8 Q. & etiam 25 + 6 N + 1 Q. debent æquari quadrato. Eius æquationis duplicatæ solutio est in promptu.

IN QVAESTIONEM XIII.

MVLTA sunt hîc obseruatu digniſſima. Sed cùm tres operationes instituat Diophantus, eas sigillatim percurrendo, omnia dilucidabimus.

In prima operatione sumit quemlibet triangulum datum specie, puta 5 N. 12 N. 13 N. fitque area 30 Q. cui addendo sigillatim latera circa rectum, fiunt 30 Q. + 12 N. & 30 Q. + 5 N. simul æquandi quadrato. Non est autem locus duplicatæ æqualitati, quoniam quadratorum numerus 30.

non est quadratus. Quamobrem alio, & sanè mirabili artificio vtitur Diophantus. Sumit enim alterum numerorum quadrato æquandorum, puta 30 Q. + 12 N. quem facit quadrato æqualem. Id autem facillimum est sumendo quemlibet quadratorum numerum quadratum, maiorem quàm 30. vt 36 Q. vnde fit 1 N. 2. & sanè per hunc Numeri valorem resoluendo 30 Q. + 12 N. fit quadratus. Sed vt valida sit æquatio, oportet vt per eundem valorem Numeri resoluendo quoque 30 Q. + 5 N. fiat quadratus. Quod non accidit, nam cùm 1 N. sit 2. quadratus est 4. atque adeo 30 Q. sunt 120. cui addendo 5 N. seu 10. fit 130. qui neutiquam quadratus est.

Necessitas ergo secundæ operationis hinc innotescit. Nam vt æquemus quadrato 30 Q. + 12 N. sumimus aliquem quadratum maiorem quàm 30. à quo auferendo 30. & per residuum diuidendo 12. fit valor Numeri. Quare vt alter numerus 30 Q. + 5 N. sit æqualis quadrato, oportet vt quotientis illius quadratus tricies sumptus, adscito quincuplo eiusdem quotientis, fiat quadratus. Ponit itaque quæsitum quadratum 1 Q. vnde auferendo 30. fit 1 Q. − 30. per quem diuidendo 12. fit quotiens $\frac{12}{1Q-30}$. huius quadratus est $\frac{144}{1QQ-60Q+900}$. cuius trigecuplum est $\frac{4320}{1QQ-60Q+900}$. cui addendo quincuplum ipsius lateris $\frac{150}{1Q-30}$. puta $\frac{60}{1Q-30}$. fit $\frac{60Q+2520}{1QQ-60Q+900}$. fit autem hæc additio reducendo $\frac{60}{1Q-30}$. ad denominationem alterius numeri cui additur, nempe ducendo 60. in 1 Q. − 30. vnde fit 60 Q. − 1800. quo addito ad 4320. fit numerator fractionis quæ est summa numerorum additorum, puta 60 Q. + 2520. manetque idem denominator, puta 1 Q Q. − 60 Q. + 900. Igitur vt consequamur quod hac secunda operatione intenditur, oportet vt $\frac{60Q+2520}{1QQ-60Q+900}$. æquetur quadrato, & quidem denominatorem satis constat esse quadratum, cùm factus sit à latere 1 Q. − 30. Numerator autem restat æquandus quadrato, quod quidem optimè fieret per lemmata ad præcedentem tradita, si summa ipsorum 60. & 2520. esset quadratus, vel si reperiretur quadratus per quem multiplicando vel diuidendo 60. & producto, quotientive addendo 2520. fieret quadratus. Quod cùm fieri non possit, apparet necessitas tertiæ operationis. Sed prius considerandum est vnde proueniant 60. & 2520. & quidem manifestum est 60. produci ex mutua multiplicatione laterum circa rectum, nempe ex 12. in 5. At 2520. ait Diophantus esse solidum sub maiore laterum circa rectum, sub ipsorum interuallo laterum, & sub area contentum, quod quidem ita se habere non statim apparet. Quare id demonstrandum est. Hoc autem nil aliud est, quàm huiusmodi Theorema.

Datis duobus numeris inæqualibus, & tertio quocunque, si tertius ducatur in quadratum maioris duorum datorum, fit numerus æqualis solido sub tribus datis contento, & solido sub maiore duorum datorum, interuallo eorundem, & tertio dato.

Sint dati numeri A maior & B minor, & tertius quicunque C. ipsorum autem A B. interuallum esto D. & ipsius A quadratus sit E. Quo ducto in C fiat F. Tum ducatur A in B & fiat K. quo ducto in C. fiat G. solidus sub tribus C A B. Ducto autem C in A fiat H. quo ducto in D. fiat L. solidus sub tribus C A D. dico F æqualem esse duobus solidis G L. Nam sumptis tribus numeris A bis, & C semel idem fiet numerus, quouis ordine ij inter se ducantur. At ex A in A fit E. quo ducto in C fit F. ergo idem F fiet ducendo A in C. & productum H in A. Quare ex H in A fit F. solidus item G. sub tribus C A B contentus, fiet ducendo C in A & productum H in B. Quare G fit ex H in B. At ex constructione ex eodem H in D fit solidus L. Cùm ergo B D. simul æquentur ipsi A. numeri G L. producti ex H in ipsos B D. æquabuntur producto ex H in ipsum A. At ex H in A producitur F. vt ostensum est. Igitur solidi G L simul æquantur ipsi F. quod erat demonstrandum.

F 4320. E 144. D 7. C 30. A 12. B 5. G 1800. H 360. K 60. L 2520.

3. 1. *porism.*

1. *secundi.*

Hinc porrò sequi quod ait Diophantus manifestum est, si operatio illius diligenter consideretur & A B statuantur latera circa rectum trianguli, & C ponatur area. Itaque in tertia operatione quærendum est triangulum rectangulum, vt planus contentus sub lateribus circa rectum, adiecto solido sub maiore laterum, interuallo eorundem laterum, & area contento, fit quadratus. Sic autem ratiocinatur Diophantus. Si concipiamus tam planum, quàm solidum supradictum diuidi per maius latus, orietur inde minus latus, hinc verò planus sub area & interuallo laterum contentus. quare si maius latus ponatur quadratus, sufficiet vt summa minoris lateris, & plani sub interuallo & area contenti, fit quadratus, sic enim ex quadrato in quadratum, fiet quadratus. Igitur oportet constituere triangulum rectangulum, ita vt maius laterum circa rectum sit quadratus, & præterea planus sub interuallo laterum & area contentus, adscito minore latere faciat quadratum, vel certè (quod omisit Diophantus) idem planus per aliquem quadratum diuisus, det quotientem cui adiiciendo minus latus, fiat quadratus. Id autem præstabit, quoduis triangulum per præcedentem inuentum, nam & maius laterum, circa rectum erit quadratus, & ipsum interuallum laterum, quadratus erit; & area adscito minore latere faciet quadratum. Quare cùm planus sub area & interuallo laterum contentus, diuidetur per quadratum illum qui est interuallum laterum, quotiens fiet ipsa

area quæ adſciſcens minus latus faciet quadratum ex hypotheſi; ac proinde per lemma quod vltimum attulimus ad præcedentem, planus ſub area & interuallo laterum contentus, adſciſcens minus latus, infinitis modis æquari poterit quadrato.

Hæc ad integram quæſtionis huius intelligentiam dicta ſufficerent. Sed libet præterea in tyronum gratiam, tertiam Diophanti operationem, quam ille breuiter perſtrinxit, fuſius explicare. Sumo triangulum per præcedentem inuentum, & conſtituo illud in Numeris, puta 5 N. 4 N. 3 N. fitque area 6 Q. cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt 6 Q. + 4 N. & 6 Q + 3 N. æquandi quadrato. Quare per ea quæ diximus de neceſſitate ſecundæ operationis, oportet inuenire quadratum, à quo auferendo 6. & per reſiduum diuidendo 4. fiat quotiens, cuius quadratus ſexies ſumptus, & adſumens triplum ſui lateris faciat quadratum. Quadratus ille eſto 1 Q. hic dempto 6. & per reſiduum diuidendo 4. fit $\frac{4}{1Q-6}$. cuius quadratus $\frac{16}{1Q\overline{Q}+36-12Q}$. cuius ſextuplum $\frac{96}{1Q\overline{Q}+36-12Q}$. cui addendo triplum lateris, puta $\frac{12}{1Q-6}$. vel ſub eadem denominatione $\frac{12Q-72}{1Q\overline{Q}+36-12Q}$. fit vtique ſumma $\frac{12Q+24}{1Q\overline{Q}+36-12Q}$. quam æquare oportet quadrato, & cùm denominator ſit quadratus, ſupereſt vt æquemus quadrato numeratorem 12 Q. + 24. Quod facilè fit quia 12. & 24. ſimul efficiunt quadratum 36. & vtendum lemmate quod ad precedentem attulit Diophantus. Quia enim quadratus quæſitus debet eſſe maior quàm 6. (vt æquari poſſit 6. Q. + 4 N.) oportet quærere quadratum maiorem quàm 6. qui ductus in 12. & adſumens 24. faciat quadratum ſit eius latus 1 N. + 1. fiet quadratus ductus in 12. & adſumens 24. 12 Q. + 24 N. + 36. cuius cuius latus eſto 6 + 3 N. fit 1 N 4. Ergo latus quadrati eſt 5. ipſe quadratus 25. Quare 6 Q. + 4 N. æquantur 25 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{19}$. eſtque triangulum quæſitum $\frac{12}{19}$. $\frac{16}{19}$. $\frac{20}{19}$. fitque area $\frac{96}{361}$. cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt quadrati $\frac{324}{361}$. & $\frac{400}{361}$. à lateribus $\frac{18}{19}$. & $\frac{20}{19}$. Poſſunt autem infinitæ dari ſolutiones, vtendo eodem triangulo 3. 4. 5. Quia per lemma præcedentis loco 25. inueniri poſſunt alij infiniti quadrati, verbi gratia ſi numeri 12 Q. + 24 N. + 361. ponas latus 6 − 4 N. fiet 1 N. 18. eritque latus quadrati 19. ipſe quadratus 361. Quare 6 Q. + 4 N. æquabitur 361 Q. & fiet 1 N. $\frac{4}{355}$. erunt igitur latera trianguli $\frac{18}{355}$. $\frac{16}{355}$. $\frac{20}{355}$. Area $\frac{96}{126025}$. cui addendo latera circa rectum, fiunt quadrati $\frac{4356}{126025}$. & $\frac{5776}{126025}$. à lateribus $\frac{66}{355}$. & $\frac{76}{355}$.

Ceterùm moneo, caſu accidere in hypotheſi Diophanti, vt planus ſub lateribus, puta 12. adſumens 24. ſolidum ſub maiore laterum, interuallo laterum & area contentum, faciat quadratum, quod accidit quia interuallum laterum 3. & 4. eſt vnitas; ſed ſi aliud ſumatur triangulum *præcedenti* ſatisfaciens, id non continget. Quare vt vniuerſalis reddatur operatio Diophanti, in alio triangulo libet rem experiri. Sumatur triangulum per præcedentem inuentum 363 N. 484 N. 605 N. fiet area adſumens ſigillatim latera circa rectum 87846 Q. 484 N. & 87846 Q. + 363 N. & vtrumque oportet æquare quadrato. Quare inueniendus eſt quadratus à quo detrahendo 87846. & per reſiduum diuidendo 484. fiat quotiens, cuius quadratum ducendo in 87846. & producto addendo quod fit ex eodem quotiente in 363. fiat quadratus. Et vt rem compendio abſoluam, eò redactus ero vt æquem quadrato 175692 Q. + 5144613144. & numerus quadratorum eſt planus ſub lateribus circa rectum 484. & 363. contentus. At numerus vnitatum eſt ſolidus ſub maiore latere 484. ſub interuallo laterum 121. & ſub area 87846. contentus. Porro vtriuſque numeri ſumma minimè quadratum facit. Sed quia quadrato per quadratum diuiſo fit quadratus, diuido vtrumque numerum per maius laterum circa rectum, puta per 484. qui quadratus eſt ex lege præcedentis, & fit 363 Q. + 10629366. æquandus quadrato. Vbi quoque quadratorum & vnitatum numeri ſimul additi non conficiunt quadratum. Sed quia quadratorum *numerus 363. eſt minus laterum circa rectum*, at vnitates 10629366. conficiunt planum ſub area 87846. & ſub interuallo laterum 121. (qui quadratus eſt ex lege præcedentis) & ſumma areæ & minoris lateris, conficit etiam quadratum, ex eiuſdem præcedentis lege. Patet cùm 363. & 87846. ſimul faciant quadratum, ſi quadratus 121. ducatur in vtrumque, & productorum ſummam fore quadratum, at ex 121. in 87846. fit 10629366. vt dictum eſt. Igitur ſi & 121. ducatur in 363. & producto adiiciatur 10629366. fit quadratus. Quare per lemma præcedentis à nobis ampliatum 363 Q. + 10629366. infinitis modis æquari poterit quadrato, ſic autem æquari debet quadrato, vt valor quadrati excedat 87846. quia quadratus ille æquari debet 87846 Q. + 484 N. Ponatur ergo quadrati latus 1 N. + 11. fiet ipſe 121 + 22 N. + 1 Q. Quo ducto in 363. & producto addendo 10629366. fit 10673289 + 7986 N. + 363. Q. æquandus quadrato, & facilè fit, quia vnitates ſunt quadratæ. Ponatur ergo latus illius 3267 + 19 N. fiet 1 N. 58080. cui addendo 11. fit latus quadrati 58099. ipſe quadratus 3374564281. Igitur 87846 Q. + 484 N. æquabimus 3374564281 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{27888235}$. per quem reſoluendo latera trianguli quæ poſita erant 363 N. 484 N. 605 N. fiet quæſitum triangulum $\frac{1452}{27888235}$. $\frac{1936}{27888235}$. $\frac{2420}{27888235}$. eius area eſt $\frac{1407636}{777753651415225}$. Quæ adſumens ſigillatim latera circa rectum, facit quadratos $\frac{4049511127236}{777753651415225}$. & $\frac{5299302849616}{777753651415225}$. quorum latera $\frac{201234}{27888235}$. & $\frac{232364}{27888235}$.

Supereſt vt moneam loco verborum quæ primò aſteriſcis incluſimus, legi in codice manuſcripto; ἢ ἔστιν ὁ ξ ἐπὶ τετραγώνου τινὸς δυνάμει ἑξακοντάκις γενόμενον, ἢ προσλαβόντα μονάδας ϛφη. ἢ ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν ἐλάσσω τοῦ ὀρθογωνίου κατασκευάσωμεν, &c. Secundo verò

loco legebatur, ἀπάγεται εἰς τὸ β̄. ἀεὶ θμὸς ὄντας τῆ ἐμβαδῷ, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τὸν τ̄ αὐτῆς ζητεῖν, &c.

QVÆSTIO XIIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus alterutro laterum circa rectum, faciat quadratum. Rursum si constituamus id datum specie sicut in præcedente, eò res redit vt inueniendum sit triangulum rectangulum simile huic 3.4.5. Ponatur ergo in numeris, & fit 3 N. 4 N. 5 N. Et 6 Q. — 4 N. æquantur quadrato. Et si statuamus quadratum minorem quàm 6. fiet 1 N. 4 sub denominatione partis excessus quo 6. superat quadratum aliquem. Et si ponamus quadratum 1 Q. opus erit tali existente numero, æquare etiam quadrato 6 Q. — 3 N. & 1 Q. sexies sumptus est 96. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 — 12. Q. lateris autem triplum est 12. sub denominatione partis 6. — 1 Q. hoc est 72 — 12 Q. sub denominatione partis eiusdem, & si hoc auferamus à 96. sub denominatione eiusdem partis, relinquuntur 12 Q. + 24. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 — 12 Q. & est pars quadratus. Proinde oportet æquare quadrato 12 Q. + 24. & est 1 N. 1. Pono igitur 6 Q. — 4 N. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erunt igitur quæsiti rectanguli latera $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. & si nolis vti vnitate, statue quadrati latus 1 N. + 1. Itaque triplum quadrati adscito 6. fit 3 Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato. Hoc autem facile est, & inuenietur 1 N. non maior quàm $\frac{12}{9}$. At quadrati latus quod est 1 N. + 1. non erit maius quàm $\frac{21}{9}$. Et inde ortus quadratus sublatus de 6. faciet numerum rationalem.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῆ λήψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῇ περὶ τὸν ὀρθὸν ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐαν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἶδει ὁμοίως πρὸς τοῦτο ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅμοιον τῷ γ̄. δ̄. ε̄. τετάχθω οὖν ἐν ἀριθμοῖς, καὶ γίνεται ἀριθμοὶ γ̄. ἀριθμοὶ δ̄. ἀριθμοὶ ε̄. καὶ δ^υ ς̄. λείψει ςς̄ δ̄. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἐαν τάξωμεν τὸν τετράγωνον, ἐλάττονα δυνάμεων ς̄. ἔρχεται ὁ ς^ο μ^ο δ̄. ἐν μορίῳ τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει ὁ ς̄. τετραγώνου τινός. καὶ ἐαν τάξωμεν τ̄ τετράγωνον δ^υ ᾱ γίνεται τηλικούτου ὄντος τῶ ς^ῳ δ^υ ς̄ γ̄. ς̄ γ̄. ποιεῖν ἵνα τετραγώνῳ. ἡ μὲν δύναμις ἑξάκις ὄζει μ^ο ιϛ̄. ἐν μορίῳ δ^υ δ^υ ᾱ μονάδες λς̄ λείψει δ^υ ιβ̄. τῆς δὲ πλευρᾶς τετραπλασίων μ^ο ιβ̄. ἐν μορίῳ μ^ο ς̄. λείψει δ^υ ᾱ. τουτέστι μ^ο οβ̄. λείψει δ^υ ιβ̄ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ καὶ ἐαν ταῦτα αἴρεσιν ἀπὸ μ^ο ιϛ̄. ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ λοιπαὶ εἰσὶ δ^υ ιβ̄. μ^ο κδ̄. ἐν μορίῳ δ^υ δ^υ ᾱ. μ^ο λς̄. λείψει δ^υ ιβ̄. καὶ ὄζει τὸ μόριον τετράγωνον. ὥστε καὶ δεῖ δ^υ ιβ̄. μ^ο κδ̄. ἰσῶσαι τετραγώνῳ καὶ ὄζειν ὁ ς^ο μ^ο ᾱ. τάσσω ἓν δ^υ ς̄. λείψει ςς̄ δ̄. ἴσον δ^υ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς^ο μ^ο δ̄ ᾱ. ἔσονται οὖν τῆ ζητουμένου ὀρθογωνίου πλευραὶ ιβ̄ ιϛ̄ δ̄. καὶ ἐαν μὴ θέλῃς χρήσασθαι μονάδι. τάξον τὸν τῆ τετραγώνου πλευραὶ ς^ι ᾱ. μ^ο ᾱ. ὥστε ὁ τετράγωνος ἓξ, καὶ μονάδες ς̄. ποιῶσι δ^υ γ̄. ςς^ι ς̄. μ^ο ϑ̄. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ὄζει, καὶ εὑρεθήσεται ὁ ς^ο ὁ μείζων ιγ̄ ϑ̄. ἢ τετραγώνου πλευρὰ, ἣ ὄζει ς^ι ᾱ. μ^ο ᾱ ἔσται ὁ μείζων κβ̄ ϑ̄. καὶ ὁ ἀπὸ τούτων τετράγωνον ἀρθεὶς ἀπὸ μ^ο ς̄. ποιεῖ ς^ιι ῥητόν.

IN QVAESTIONEM XIV.

EX adnotatis ad præcedentem, omnium quæ hîc aguntur rationem reddere facillimum est. Mirum fortasse alicui videre possit, cùm in hac quæstione vtendum sit subtractione loco additionis qua vtendum erat in præcedente, cur tamen ad extremum maneat idem numerus 12. Q. + 24. æquandus quadrato. Huius autem symptomatis causa est, contrarietas additionis & subtractionis vnâ cum admixtione contrariorum signorum pluris & minoris. Nam in præcedente oportebat addere 12 Q. — 72. ad 96. in hac autem oportet de 96. subtrahere 72 — 12 Q. Quare euidens est, & summam illam, & hoc residuum, eundem efficere numerum, puta 12 Q. + 24. vnde satis apparet demonstrationes ad præcedentem allatas, & hîc locum habere.

Cæterùm cùm ad æquandum quadrato 12 Q. + 24. oporteat quærere quadratum qui ductus in 12. & adsumens 24. faciat quadratum, sumit Diophantus pro huiusmodi quadrato vnitatem, quod

fieri posse docuimus ad duodecimam, quia 12. & 24. simul conficiant quadratum, & quia talis quadratus sumendus est minor quàm 6. vt æquari possit 6 Q. – 4 N. sic posito quod 6 Q. – 4 N. æquentur 1 Q. fit 1 N. $\frac{4}{5}$. & sunt latera quæsiti trianguli $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. estque area $\frac{96}{25}$. vnde auferendo figillatim latera circa rectum, superstunt quadrati $\frac{576}{25}$. & $\frac{256}{25}$.

Quod autem ad extremum, ait Diophantus, loco vnitatis, sumi posse alium quadratum, verum est implorando auxilium lemmatis ad duodecimam allati. Id tamen cautè agendum, quia quadratus ille debet esse minor quam 6. Quare sic ratiocinatur Diophantus. Imprimis loco 12 Q. + 24. sumit 3 Q. + 6. cuius rei duplex assignari potest causa. Prima est quod ipsius 12 Q. + 24. sumit quadrantem 3 Q. + 6. suo more, vt rem in minimis conficiat, & euidens est si 3 Q. + 9. æquetur quadrato, fore vt & eius quadruplum 12 Q. + 24. sit quadratus. Secunda causa, quæ mihi magis arridet pendet ex dictis ad duodecimam. Quia enim 12. est planus sub lateribus trianguli per duodecimam inuenti, at 24. est solidus sub maiore laterum, sub interuallo eorundem, & sub area contentus, diuidendo vtrumque per maius laterum circa rectum, puta 4. (qui est quadratus ex lege duodecimæ) fiunt numeri 3. & 9. Quorum prior est minus laterum circa rectum, posterior est planus sub area & interuallo laterum, quare hoc diuiso per interuallum laterum (quod etiam æquatur quadrato ex lege duodecimæ) oritur ipsa area, quæ rursus per duodecimam adscito minore latere facit quadratum. Quamobrem ex vltimo lemmate quod ibidem attulimus, constat 3 Q. + 6. æquari posse infinitis modis quadrato. Ponatur eius latus 1 N. + 1. erit quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 3. & producto addendo 6. fit 3. Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus fingetur 3 – certo Numerorum numero, sed quia quæsitus quadratus debet esse minor quàm 6. cùm latus proximum ipsius 6. sit $\frac{22}{9}$. oportet latus quadrati quæsiti esse minus quàm $\frac{22}{9}$. Quare cùm ponatur hoc latus 1 N. + 1. si à $\frac{22}{9}$. auferas vnitatem, remanet $\frac{13}{9}$. quo patet minorem esse debere 1 N. Proinde cùm æquando quadrato 3 Q. + 6 N. + 9. debeat fieri valor Numeri, à quodam quadrato multato ternario, diuidente sextuplum sui lateris auctum senario, si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. fiet $\frac{6 \text{ N.} + 6}{1 \text{ Q.} + 3}$. minor quàm $\frac{13}{9}$. & tandem fit 54 N. + 54. minor quàm 13 Q. Qua æquatione, vt par est, per approximationem resoluta, fit 1 N. maior quàm 5 $\frac{5}{13}$. Quare numerus Numerorum in latere fictitio ponendus excedere debet 5 $\frac{5}{13}$. Ponatur verbi gratia latus illud 3. – 6 N. fiet 1 N. $\frac{14}{11}$. Quare latus quadrati quæsiti, quod positum erat 1 N. + 1. erit $\frac{25}{11}$. ipse quadratus $\frac{625}{121}$. Proinde 6. Q. – 4 N. statuemus æqualem $\frac{625}{121}$ Q. & fiet 1 N. $\frac{484}{101}$. Quamobrem erit quęsitum triangulum $\frac{1452}{101}$. $\frac{1936}{101}$. $\frac{2420}{101}$. fit area $\frac{1405536}{10201}$. vnde auferendo figillatim latera circa rectum, manent $\frac{1258884}{10201}$. & $\frac{121000}{10201}$. quadrati à lateribus $\frac{1122}{101}$. & $\frac{1100}{101}$.

Quod si lubeat vti triangulo 363 N. 484 N. 605 N. fient æquales quadrato 87846 Q. – 484 N. & 87846 Q. – 363 N. & ductum Diophanti sequentes, tandem inueniemus 175692 Q. + 5144613144. æqualem quadrato, & omnia diuidendo per 484. maius laterum circa rectum, quod est quadratum, fiet 363 Q. + 10629366. æqualis quadrato. Quod fieri potest infinitis modis, quia ducendo in 363. quadratum 121 (interuallum scilicet laterum circa rectum) & producto addendo 10629366. fit quadratus. Quia verò oportet quadratum quæsitum minorem esse quàm 87846. sumemus ipsum 121. vel inueniemus alium eodem quo suprà artificio. Quod si sumamus 121. fiet 87846 Q. – 484 N. æqualis 121 Q. vnde fit 1 N. $\frac{4}{725}$. Sunt ergo quæsiti trianguli latera $\frac{1452}{725}$. $\frac{1936}{725}$. $\frac{2420}{725}$. estque area $\frac{1405536}{525625}$. à qua detrahendo figillatim latera circa rectum, manent quadrati $\frac{357696}{525625}$. & $\frac{1936}{525625}$. quorum latera $\frac{594}{725}$. & $\frac{44}{725}$.

OBSERVATIO D. P. F.

EX nostrâ Methodo soluetur sequens quæstio alioquin difficillima. Inuenire triangulum rectangulum vt alterutrum laterum circa rectum multatum aream faciat quadratum.

QVÆSTIO XV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀπὸ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρα τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ τρίγωνον διαρμῶν τῶν εἰδ ει ἀριθμῶν γ̄. ἀριθμῶν δ̄. ς̄ ε̄. καὶ πάλιν γίνεται ζητεῖν δ̄ ῡ ϛ̄ γ̄ ς̄ ε̄. ἵνα τετράγωνῳ. κὴ δ̄ ῡ ϛ̄ λείψει ς̄ γ̄. ἵνα τετραγώνῳ. κὴ ἐὰν ποιήσω δ̄ ῡ ϛ̄ γ̄ ς̄ γ̄ ἵνα τετραγώνῳ. γίνεται ὁ ς̄ μ̄ γ̄. ἐν μορίῳ μ̄ ϛ̄ γ̄ δ̄ ᾱ. κὴ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenusa quàm altero laterum circa rectum detracto, faciat quadratum. Esto triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & rursus oportet quærere 6 Q. – 5 N. æqualia quadrato, & 6 Q. – 3 N. æqualia quadrato. Et si fecero 6 Q. – 3 N. æqualia quadrato, fit 1 N. 3. sub denominatione partis 6 – 1 Q. & tali

inuento numero, 6 Q fiunt 54. ſub denominatione partis 1 QQ. + 36 — 12 Q. & oportet à 54. ſub denominatione partis 1 QQ. + 36 — 12 Q. auferre 90 — 15 Q. ſub denominatione eiuſdem partis, & reliqua æqualia facere quadrato. Et pars quidem quadratus eſt. Ergo etiam 15 Q. — 36. æquanda ſunt quadrato. Atque hæc quidem impoſſibilis eſt æquatio, quia 15. in duos non diuiditur quadratos. Non autem omnino impoſſibile eſt quod initiò erat propoſitum. Oportet ergo determinare de triangulo. Facti ſunt enim 15 Q. ex quodam quadrato minore quàm areæ numerus, ducto in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum. At quæ deſunt vnitates 36. fiunt ex ſolido contento ſub area, & vno laterum circa rectum, & interuallo quo hypotenuſa ſuperat idem latus. Eò itaque res deducta eſt, vt prius oporteat inueniri triangulum rectangulum, & quadratum numerum minorem area, vt quadratus ductus in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum, detracto ſolido contento ſub area, prædicto latere, & interuallo quo hypotenuſa ſuperat idem latus, faciat quadratum. * Factum eſſe ex duplo producti eorum, & omnia diuidamus per productum ex hypotenuſa in prædictum latus, quæremus rurſus alium quendam quadratum, quo ducto in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum in primum latus interualli quadratum. * Et ſi ſtatuamus eos à quibus triangulum effingetur, planos ſimiles, diſſoluemus quæſtionem. Formetur triangulum abs 4. & 1. At quadratus, vt minor ſit numero areæ, eſto 36. & formans triangulum ſtatuo illud in numeris 8 N. 15 N. 17 N. & fit numerus areæ detracto vno laterum circa rectum 60 Q. — 8 N. Hæc æquantur 36 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad poſitiones. Erit triangulum $\frac{8}{2}$. $\frac{15}{2}$. $\frac{17}{2}$ & manet.

πιέπου ὑρεθέντες αἱ δυνάμεις ἐξ γίνονται μ̊ νδ̃ ἐν μορίῳ δ̃ δ̃ α̃ μ̊ λς̃ ϛ δ̃ ιβ̃. ☾ δεῖ ὑπὸ μ̊ νδ̃. ἐν μορίῳ δ̃ δ̃ α̃. μ̊ λς̃ ϛ δ̃ ιβ̃ ἀφῃρῆν μ̊ ϛ̃ ϛ δ̃ ιε̃ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ, ἡ τὰ λειπὰ ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. ἡ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνος. ὥστε ☾ δ̃ ιε̃ λείψει μ̊ λς̃. ἴσοι τετραγώνῳ. ☾ αὐτὴ μὴν ἡ ἰσότης ἀδύνατός ὅτι διὰ τὸ τ̃ ιε̃ μὴ διαιρεῖσθαι εἰς δύο τετραγώνους. οὐ παντὸς δ' τὸ ἐξ ἀρχῆς ἀδύνατόν ὅτι. δέον οὖν διορίζεσθαι πρὸς τὸ ζητούμενον. γεγόνασι γὰρ αἱ μὲν δυνάμεις ιε̃. ἕκλινος τετράγωνος ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, πολλαπλασιαθέντος ὅτι τ̃ ὑπὸ τ̃ ὑποτεινούσης, ἡ μιᾶς τ̃ πρὸς τ̃ ὀρθίου. αἱ δὲ ἐν λείψει μ̊ λς̃. ἐκ τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου ἕκτε τοῦ ἐμβαδοῦ, ἡ μιᾶς τ̃ πρὸς τ̃ ὀρθίου, ἡ τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ἡ ὑποτεινουσα τ̃ εἰρημένης τ̃ ὀρθῶν. ἡ ἁπῆκται εἰς τὸ πρότερον δύρειν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ ἐμβαδοῦ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιαθεὶς ὅτι τὸν ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τ̃ πρὸς τ̃ ὀρθίου λείψει τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου ἕκτε τοῦ ἐμβαδοῦ, ☾ τῆς εἰρημένης τ̃ πρὸς τ̃ ὀρθίου, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ἡ ὑποτεινουσα τ̃ εἰρημένης τ̃ πρὸς τ̃ ὀρθίου, ποιῇ τετράγωνον * γεγενῆσθαι ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἡ πάντα πολλαπλάσια τῶν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης ἡ τῆς προειρημένης μιᾶς τ̃ ζητήσωμεν πάλιν ἄλλόν τινα τετράγωνον πολλοῦ ὅτι τὸν ὑπ' τ̃ ὑποτεινούσης, ἡ μιᾶς τ̃ πρὸς τοῦ ἐμβαδοῦ. ὅτι τ̃ πρώτην τ̃ ὑπεροχῆς τετράγωνον. * ἡ ἐὰν τάξωμεν τὰς πλάσοντας τὸ ὀρθογώνιον ὁμοίους εἶναι ὅπερ ἔδει ποιῆσαι διαλύσωμεν τὸ ζητούμενον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ὑπὸ μ̊. δ̃. ☾ μ̊ α̃. ὁ δὴ τετράγωνος ἔστω, ἵνα ἐλάσσων ᾖ τοῦ ἐμβαδοῦ, μ̊ λς̃. ☾ πλάσαν τὸ τρίγωνον, πλάσω αὐτὸ ἐν ϛ̃ς̃ῖ̃. ἔσαι ϛ̃ϛ̃. ῆ̃. ϛ̃ϛ̃ ιε̃. ϛ̃ϛ̃ ιζ̃. ἡ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ λείψας τ̃ ἕνα τῆς πρὸς τοῦ ὀρθίου δ̃ ξ̃. λείψει ϛ̃ϛ̃ ῆ̃. ταῦτα ἴσα δ̃ λς̃. ἡ γίνεται ὁ ϛ̃ μ̊ α̃ γ̃ῦ. ὅτι τὰς ἴσος ἀσφ. ἔσαι ἄρα τὸ τρίγωνον ῆ̃. γ̃ῦ. ιε̃ γ̃ῦ ιζ̃ γ̃ῦ. ἡ μένει.

IN QVAESTIONEM XV.

Hic quod attinet ad primam operationem, cùm ea ſimilis ſit omnino operationi duarum præcedentium, nihil eſt quod nos moretur. Quod autem ait Diophantus 36. eſſe ſolidum contentum ſub area, vno laterum circa rectum, & interuallo inter hoc & hypotenuſam, idem eſt prorſus cum theoremate ad decimam tertiam demonſtrato. Denique quod ait 15 Q. — 36. æquari non poſſe quadrato quia 15. non diuiditur in duos quadratos, pendet ab iis quæ mox oſtenſuri ſu-

mus. Neceſſitas autem ſecundæ operationis euidenter colligitur ex defectu prioris. Nam ad hoc vt 15 Q.−36. poſſit æquari quadrato, oportet inuenire quadratum quo ducto in 15. & à producto auferendo 36. maneat quadratus. Et cùm quadratus inueniendus æquari debeat 6 Q.−4 N. curandum eſt, vt ſit minor numero areæ 6. Quia ergo 15. eſt planus ſub hypotenuſa & altero laterum, at 36. eſt ſolidus ſub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenuſam, euidens eſt quærendum eſſe triangulum, & quadratum minorem area trianguli, vt quadrato ducto in productum ex hypotenuſa in vnum laterum circa rectum, fiat numerus à quo detrahendo ſolidum ſub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenuſam, relinquatur quadratus.

Equidem triangulum fingendum eſſe ait Diophantus à duobus numeris qui ſint plani ſimiles; ſed qua ratione id colligat, & vnde ſumendus ſit quadratus, non conſtat ex corruptiſſimis illius verbis quæ idcirco aſteriſcis incluſimus more noſtro. Quorum tamen defectum vt ego ſuppleam, pronuncio, quadratum illum, eum eſſe qui fit ex quadrato interualli dictorum planorum ſimilium, in quadratum qui fit ex mutua eorundem multiplicatione. Quod vt demonſtrem, & ſimul rei obſcuriſſimæ lucem afferam, aliqua prius ſuppono.

Primùm ſuppono, in quolibet triangulo effecto per methodum à Diophanto traditam, quamque demonſtrauimus propoſitione quinta lib. tertij poriſm. hypotenuſam ſuperare quadrato numero, latus illud quod fit bis ex mutua multiplicatione numerorum à quibus effectum eſt triangulum. Quod euidens eſt, quia hypotenuſa eſt ſumma quadratorum, à qua ſi auferatur duplum multiplicationis laterum, ſupereſt quadratus interualli laterum per quartam ſecundi poriſmatum.

Secundo ſuppono, interuallum duorum quadratorum eſſe maius quadrato interualli laterum, quod ipſum iam demonſtrauimus ad ſextam ſecundi.

Tertiò ſuppono, in triangulo effecto à duobus planis ſimilibus, ſi exceſſus hypotenuſæ ſuper latus illud quod æquatur interuallo laterum, ducatur in alterum latus, fieri quadratum. Sint enim plani ſimiles A B. quorum quadrati C D. quorum ſumma E. interuallum F. tum ex A in B fiat H. cuius duplum G. [1] eritque E F G. triangulum rectangulum. Sit ergo K exceſſus E ſuper F. & ducto K in G. fiat L. dico L eſſe quadratum. Quia enim A B ſunt plani ſimiles, [2] erit H quadratus. Et quia E eſt ſumma duorum C D. At F. eſt eorundem interuallum, detracto F ex E. [3] reliquus K erit duplus ipſius D. Cùm ergo G. K. ſint dupli quadratorum H D. ſequitur G ad K habere rationem quadrati ad quadratum, [4] ac proinde G K ſunt plani ſimiles, [5] & productus ex eorum mutuo ductu, puta L. quadratus eſt. Quod demonſtrandum erat.

H 16.
A 8. B 2.
C 64. D 4.
E 68. F 60. G 32.
K 8. L 256.

5. 3. *poriſm.*
1. *noni.*
23. 1. *poriſm.*
26. *octaui.*
1. *noni.*

His poſitis, totum quod ſupponitur à Diophanto, ſic demonſtrabitur. Sint plani ſimiles A B. à quibus fingatur triangulum C D E. ita vt E ſit duplum quadrati K. qui fit ex A in B. At D ſit interuallum quadratorum ab ipſis A B. Ductoque K in D. fiat area M. Rurſus interuallum ipſorum C E. ſit G. quadratus per primum ſuppoſitum. quo ducto in quadratum K fiat quadratus H. Item ducto C in E fiat L. quo ducto in H fiat P. & rurſus ducto E in M. fiat R. quo ducto in G. fiat Q. Dico ſi Q. ſolidus ſub area M. altero laterum circa rectum E, [1] & ſub G interuallo inter idem latus & hypotenuſam, auferatur ab ipſo P. qui fit ex quadrato H in L planum ſub hypotenuſa C & prædicto latere E contentum, reſiduum eſſe quadratum, & ipſum quadratum H eſſe minorem area M. ac denique ipſum L componi ex duobus quadratis. Primùm ſic oſtendo. Ex E in D producatur N. & ex interuallo ipſorum C D in E. fiat F quadratus per tertium ſuppoſitum. Tum conſideratis tribus numeris D E K. Quia ex D in K fit M. quo ducto in E fit R. [6] fiet idem R. ſi E ducatur in D. & productus N in K. Igitur R fit ex N in K. Rurſus eadem de cauſa conſideratis tribus G K N. Quia ex K in N. fit R vt oſtenſum eſt, & ex R in G fit ſolidus Q. idem Q. fiet ducto K in G. & producto H in N. Igitur Q. producitur ex H in N. At per conſtructionem ex eodem H in L. fit P. Ergo P. ſuperat Q. numero qui fit ex H in interuallum ipſorum L N. Atqui cùm ex eodem E in ipſos C D. fiant L N. patet etiam L ſuperare N. numero qui fit ex E. in interuallum ipſorum C D. hoc eſt quadrato F. Igitur P. ſuperat Q. producto ex H in F. ſed hic productus eſt quadratus, cùm vterque H F quadratus ſit. Ergo P. ſuperat Q. quadrato numero; quod erat intentum. Deinde quadratum H minorem eſſe area M. probatur. Etenim cùm ex eodem K in ipſos G D. producantur H M, & D ſit maior quàm G per ſecundum ſuppoſitum, conſtat & ipſum M maiorem eſſe quàm H. Quod erat propoſitum.

A 4. B 1.
F 16.
C 17. D 15. E 8.
G 9. H 36. K 4.
L 136. M 60. N 120.
P 4896. Q 4320. R 480.

3. 1. *poriſ.*

Denique L componi ex duobus quadratis conſtat ex ſeptima tertij poriſmatum, quia ſcilicet producitur ex C in E quorum vterque componitur ex duobus quadratis, puta C ex quadratis ipſorum A B. At E ex duplo quadrati K. vnde etiam per Scholium propoſitionis citatæ apparet ipſum L. componi tantum ſemel ex duobus quadratis, quia E non componitur ex quadratis inæqualibus. Sunt autem quadrati ex quibus L componitur, ipſe H qui fit ex K in G. & quadratus qui fit ex eodem K in quadratum ſummæ amborum A B.

Ex

Ex his sanè quæ cum incredibili labore commenti sumus, causa omnium quæ peragit Diophantus fit manifesta. Reliqua operatio nil habet difficultatis, cùm sit penitus similis operationi duarum præcedentium. Eam tamen in studiosorum gratiam non pigebit adiicere. Formatur triangulum à 4. & 1. & constituitur specie, puta 17 N. 15 N. 8 N. fit area multata tum hypotenusa, tum latere tertio 60 Q. – 17 N. & 60 Q. – 8 N. Quare vtrumque æquare oportet quadrato, quod si 60 Q. – 8 N. æquemus quadrato, quærendus erit quadratus quem auferendo à 60. & per residuum diuidendo 8. fiat quotiens cuius quadratum ducendo in 60. & à producto auferendo quod fit ex 17. in supradictum quotientem, remaneat quadratus. Esto quæsitus quadratus 1 Q. hunc auferendo à 60. & per residuum diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{60-1Q}$ cuius quadratus $\frac{64}{3600-120Q+1QQ}$. quo ducto in 60. fit $\frac{3840}{3600-120Q+1QQ}$. vnde si auferas productum ex 17. in $\frac{8}{60-1Q}$. puta $\frac{136}{60-1Q}$. seu sub eadem denominatione $\frac{8160-136Q}{3600-120Q+1QQ}$. remanet $\frac{136Q-4320}{3600-120Q+1QQ}$. æquandus quadrato. Quare cum denominator sit quadratus, superest vt numerator 136 Q. – 4320. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia ex supra demonstratis quadrato 36. ducto in 136. & à producto auferendo 4320. remanet quadratus. Est ergo 1 Q. 36. Quamobrem 60 Q. – 8 N. æqualis erit 36 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$. erunt igitur trianguli latera $\frac{8}{3}$. $\frac{15}{3}$. $\frac{17}{3}$. fit area $\frac{60}{9}$. vnde auferendo tum $\frac{8}{3}$. tum $\frac{17}{3}$. remanent quadrati $\frac{35}{9}$. seu 4. & $\frac{9}{9}$. seu 1.

Cæterùm quæstio infinitas recipit solutiones, tum quia loco ipsorum 4. & 1. sumi possunt quilibet alij plani similes à quibus effingatur triangulum. Tum quia sumptis iisdem 4 & 1. inueniri possunt infiniti quadrati loco ipsius 36. vel minores ipso 36. vel etiam maiores, qui tamen non excedant aream 60. quibus ductis in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus, vt docebimus ad sequentem.

QVÆSTIO XVI.

DATIS duobus numeris, si aliquo quadrato in vnum eorum ducto, & altero de producto subtracto, fiat quadratus; inuenietur & alius quadratus maior quadrato prius sumpto, qui hoc idem præstet. Dentur duo numeri 3. & 11. & quadrato aliquo, puta à latere 5. ducto in 3. & à producto detracto 11. fiat quadratus à latere 8. Oporteat inuenire alium quadratum maiorem quàm 25. qui hoc ipsum præstet. Esto latus quadrati 1 N. + 5. fit quadratus 1 Q. + 10 N. + 25. Huius triplum dempto 11. fit 3 Q. + 30 N. + 64. æquale quadrato; sit eius latus 8 – 2 N. & fit 1 N. 62. Est ergo latus 67. quadratus 4489. qui præstat imperata.

Δυο ἀριθμοὺς δοθέντων, ἐαν τετράγωνός τις πολλαπλασιάσῃ ὅπου ἕνα αὐτῶν ἢ λείψας τι ἕτερον, ποιῇ τετράγωνον. δυρίσκειν ἢ ἕτερος τετράγωνος μείζων τοῦ προειρημένου τετραγώνου, ὃς τὸ αὐτὸ ποιῇ. δεδόσθωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅτε γ̄. ἢ ὁ ιᾱ. ἢ τετράγωνός τις ὁ ὑπὸ τοῦ ε̄. πολλαπλασιασθεὶς ὅπου τὸν γ̄. ἔλειψας τὸν ιᾱ. ποιείτω τετράγωνον, τὸν ὀνᾱ ὑπὸ πλευρὰς μ̄ η̄. δέον ἔστω ζητεῖν ἕτερον τετράγωνον μείζονα τοῦ κε̄. τὸ αὐτὸ ποιοῦντα. ἔστω ἡ τετραγώνου πλευρὰ ς̄ α̅ μ̄ ε̄. ὁ τετράγωνος γίνεται δ̄ α̅ ς̄ ι̅ μ̄ κε̄. ταῦτα τρὶς γ̄ μ̄ ιᾱ. γίνονται δ̄ γ̄ ς̄ λ̄ μ̄ ξδ̄. ἵνα τετραγώνῳ ὑπὸ πλευρὰς μ̄ η γ̄ ς̄ β̄. ἢ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ξβ̄. ἔσαι ἄρα ἡ πλευρὰ μ̄ ξ̄ζ̄. ὁ τετράγωνος ,δυπ̄ϝ̄. ἢ ἔστι ποιοῦν τὸ ὑποκείμενον.

IN QVAESTIONEM XVI.

HÎc omnia sunt perspicua. Cæterùm quod vult Diophantus quadratum quæsitum maiorem esse quadrato expositio, id agit ob sequentem quæstionem, in qua tale quid postulatur, & ad quem hæc est veluti lemma. Sed hoc non est sic accipiendum, quasi verò simili fere operatione, non possimus etiam inuenire quadratum minorem. Sint enim iidem 3. & 11. dati numeri, & quadratus 25. ductus in 3. faciat 75. vnde auferendo 11. superfit quadratus 64. volo reperire alium quadratum minorem ipso 25. qui hoc idem præstet. Pono latus eius 5 – 1 N. erit quadratus 25 – 10 N. + 1 Q. quo ducto in 3. & ex producto auferendo 11. superest 64 – 30 N. + 3 Q. æqualis quadrato. cuius latus ita fingendum est, vt fiat 1 N. minor quàm 5. fiet autem 1 N. ponendo latus fictitium 8 – tot Numeris, de quorum quadrato auferendo 3. per residuum diuidetur sedecuplum ipsorum Numerorum multatum numero 30. Quare si ponatur quæsitus Numerorum numerus 1 N. fiet $\frac{16N-30}{1Q-3}$. minor quàm 5. & tandem 16 N. minores quàm 5 Q + 15. quod per se manifestum est, quia quadratus semissis numeri numerorum puta 64. minor est quàm productus ex quadratis in vnitates, puta quàm 75. vnde patet nulla hîc opus esse Numeri determinatione, sed poni potest latus fictitium 8 – quotlibet Numeris, quorum quadratus excedat 3. Ponatur 8 – 2 N. fiet 1 N. 2. Quare latus quadrati quæsiti quod positum erat 5 – 1 N. erit 3. & satisfacit proposito. nam eius quadrato 9. ducto in 3. fit 27. vnde si auferatur 11. remanet quadratus 16.

Hac ratione, vt iam monui, applicabis hoc lemma præcedenti quæstioni. Nam primo expositis numeris 136. & 4320. quorum altero ducto in quadratum 36. altero de producto sublato, relinquitur quadratus 576. inuenies alium quadratum minorem quàm 36. qui præstet idem. Esto latus illius $6-1$ N. huius quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fit $576-1632$ N. $+$ 136 Q. æquandus quadrato. Verùm latus quæsiti quadrati non solùm debet esse minus quàm 6. sed etiam quia quadratus talis esse debet vt eo ducto in 136. à producto possit auferri 4320. cùm diuiso 4320. per 136. fiat 31. $\frac{13}{17}$. cuius latus ferè est $5\frac{1}{4}$. oportet vtique latus quadrati non esse minus quàm $5\frac{1}{2}$. at illud positum est $6-1$ N. quare cùm auferendo $5\frac{1}{4}$ à $6-1$ N. supersit $\frac{1}{4}-1$ N. curandum est vtique vt 1 N. sit minor quàm $\frac{1}{4}$. Igitur numeri $576-1632$ N. $+$ 136 Q. latus ita fingendum est vt prodeat 1 N. minor quàm $\frac{1}{4}$. Quamobrem si modo sæpè alias à nobis vsitato, determinationem quæras numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus fingi debere $24-$ tot numeris qui sint plus quàm 34. Ponatur ergo $24-62$ N. fiet 1 N. $\frac{122}{309}$. quo detracto à 6. manet latus quæsiti quadrati $\frac{1742}{309}$. Ipse ergo quadratus est $\frac{3034564}{95481}$. quo ducto in 136. fit $\frac{412707904}{95481}$. vnde si auferas 4320. vel sub eadem denominatione $\frac{412477920}{95481}$. manet quadratus $\frac{229784}{95481}$. à latere $\frac{472}{309}$.

Deinde si velis adhuc quadratum maiorem quàm 36. sed minorem quàm 60. pone latus illius $6+1$ N. quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fiet $576+1632$ N. $+$ 136 Q. æquandus quadrato. Sed quia valor quadrati debet esse minus quàm 60. cùm latus proximum ipsius 60. sit $7\frac{11}{15}$. & ab hoc auferendo latus quadrati quæsiti quod positum est $6+1$ N. supersit $1\frac{11}{15}-1$ N. patet 1 N. minorem esse debere quàm $\frac{26}{15}$. Quare si quæras determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus illud fingi debere $24-$ tot Numeris qui excedant $49\frac{1}{2}$. Ponatur ergo $24-56$ N. fiet 1 N. $\frac{32}{25}$. Quare latus quadrati quod positum est $6+1$ N. erit $\frac{186}{25}$. ipse quadratus $\frac{34596}{625}$ qui vtique minor est quàm 60. eoque ducto in 139. & de producto auferendo 4320. remanet quadratus $\frac{2005056}{625}$. à latere $\frac{1416}{25}$.

QVÆSTIO XVII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῷ περιεχομένων τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, πάλιν ἔρχεται ἡμῖν, διορίζεσθαι καὶ ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν μείζονα ὄντα τῶν ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, λείψει τῷ στερεῷ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐν τῷ ἐμβαδῷ, καὶ τῆς περιεριημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ἡ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς περιεριημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω οὖν τὸ τρίγωνον ἀπὸ μ̊ δ̅. καὶ μ̊ α̅. ὁ δὲ τετράγωνος μ̊ λς̅. καὶ ἔτι μείζων τῶν ἐμβαδῶν. ἔχομεν δὴ δύο ἀριθμοὺς, τόν τε μήκη, τόν τε ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, τουτέστι μ̊ ρλς̅. τὸν δὴ λοιπὸν, τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐμβαδῶν, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ τῆς περιεριημένης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸν δτκ̅. ἐπεὶ οὖν τετράγωνός τις ὁ ὢν μ̊ λς̅. πολλαπλασιασθεὶς ὑπὸ τῆς ρλς̅. καὶ λείψας τὸν δτκ̅. ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶμεν ὁπόταν τὸ τετράγωνον μείζονα ᾖ τοῦ λς̅. ἐὰν δὴ τάξωμεν αὐτὸν δ̊ α̅ ϛϛ̊ιβ μ̊ λς̅ καὶ ἀκολουθήσωμεν τῇ προδεδειγμένῃ ἀποδείξει εὑρήσομεν ἀπείρους ποιοῦντας

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenusæ quàm alterius laterum circa rectum numero adscito, faciat quadratum. Si statuamus illud datum specie, rursum cogimur determinare, & quærere triangulum rectangulum, & quadratum numerum maiorem areæ numero, vt quadratus ductus in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, detracto solido contento sub area, & prædicto latere circa rectum, & interuallo hypotenusæ suprà prædictum latus, faciat quadratum. Formetur ergo triangulum à 4. & 1. & sit quadratus 36. Sed is non est maior areæ numero. Habemus igitur duos numeros, alterum quidem qui fit ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, nempe 136. alterum verò, solidum contentum sub area, vno laterum circa rectum, & excessu hypotenusæ suprà prædictum latus, nempe 4320. Quoniam igitur quadratus aliquis, puta 36. multiplicatus in 136. & detracto 4320. facit quadratum, quærimus autem quadratum maiorem esse quàm 36. si statuamus ipsum 1 Q. $+$ 12 N. $+36$. & superiorem sequamur demonstrationem, inueniemus infinitos quadratos quæstionem soluentes. Quorum vnus erit

676. Statuamus ergo triangulum rectangulum 8 N. 15 N. 17 N. & fiunt 60 Q. + 8 N. æquales 676 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{77}$. Ad positiones.

τὸ πρόβλημα, ὧν εἷς ἔσαι ὁ ὢν μ° χος̄. τάξομεν δὲ τὸ ὀρθογώνιον ςς̄ η̄. ςς̄ ιε̄. ςς̄ ιζ̄. καὶ γίνονται δ^υ ξ̄ μ° η̄. ἴσαι δ^υ χος̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ο α̿ °ξ̄. ὅπὶ ταὶς ὑποσάσ(ς.

OBSERVATIO D. P. F.

TEntetur beneficio noſtræ methodi ſequens quæſtio alioquin difficillima. Inuenire triangulum rectangulum vt tam hypotenuſa quam vnum ex lateribus detractâ areâ faciant quadratum.

IN QVAESTIONEM XVII.

EX adnotatis ad duas præcedentes, omnium quæ hîc aguntur cauſa fit manifeſta. Quare ſufficiet integram ſubiicere operationem. Ponatur triangulum datum ſpecie 8 N. 15 N. 17 N. fiet area 60. Q. cui adiiciendo tum hypotenuſam 17 N. tum latus 8 N. fiunt 60 Q. + 17 N & 60 Q. + 8 N. æquandi quadrato. Quod ſi inſtituamus æquationem reſpectu 60. Q. + 8 N. vt etiam valor Numeri alteri numero ritè applicari poſſit, opportebit inuenire quadratum à quo auferendo 60. & per reſiduum diuidendo 8. fiat quotiens, cuius quadratus ſexageſies ſumptus, adſcito latere ſuo decies & ſepties, faciat quadratum. Eſto quadratus quæſitus 1 Q. detracto 60. fit 1 Q. − 60. per quem diuidendo 8. fit $\frac{8}{1\,Q.\,-\,60}$. cuius quadratus $\frac{60}{1\,Q.\,Q.\,-\,120\,Q.\,+\,3600}$. qui ſi ducatur in 60 fit $\frac{2840}{1\,Q.\,Q.\,-\,120\,+\,3600}$. cui ſi addatur decies & ſepties $\frac{8}{1\,Q.\,-\,60}$. hoc eſt ſub eadem denominatione $\frac{120\,Q.\,-\,8160}{1\,Q.\,Q.\,-\,120\,Q.\,+\,3600}$. fiet vtique $\frac{136\,Q.\,-\,4520}{1\,Q.\,Q.\,-\,120\,Q.\,+\,3600}$. æquandus quadrato. Quare cùm denominator ſit quadratus, reſtat, vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato. Quod facilè fit cùm ex demonſtratis ad decimam quintam quadrato 36. ducto in 136. & de producto auferendo 4320. ſuperſit quadratus. Verùm quadratus 36. hîc vſui eſſe non poteſt, quia non eſt maior quàm 60. quod neceſſe eſt, cùm quæramus quadratum æquandum cum 60 Q. + 8 N. Igitur implorandum eſt auxilium præcedentis lemmatis, & inueniendus quadratus maior quàm 36. immò quàm 60. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus. Ponatur latus quæſiti quadrati 6 + 1 N. fiet quadratus 36 + 12 N. + 1 Q. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. fit 576 + 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Quia autem quadratus quæſitus debet eſſe maior quàm 60. ſumpto quadrato proximè maiore quàm 60. puta 64. cuius latus 8. à quo auferendo 6. remanet 2. patet ita fingendum latus quadrati; vt 1 N. non ſit minor quàm 2. Quare ſi quæras Numeri determinationem inuenies latus fictitium poni debere 24 + tot numeris, qui non excedant 21. ita tamen vt eorum quadratus excedat 136. quales ſunt omnes numeri à 12. vſque ad 21. incluſiuè. Ponatur ergo 24 + 16 N. fiet 1 N. 20. Quare latus quadrati eſt 26. Ipſe quadratus 676. æquemus ergo 676 Q. cum 60 Q. + 8 N. fiet 1 N. $\frac{1}{77}$. & latera quæſiti trianguli erunt $\frac{8}{77}$. $\frac{85}{77}$. $\frac{17}{77}$. Area fit $\frac{60}{5929}$. cui ſi adiiciatur tum hypotenuſa, tum primum latus, fiunt quadrati $\frac{1360}{5929}$. & $\frac{196}{5929}$. quorum latera $\frac{37}{77}$. & $\frac{14}{77}$.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt acutis eius angulis bifariam ſciſſis. numerus angulum ſecantis ſit rationalis, Ponatur ſecans angulum bifariam 5 N. vnum verò ſegmentum baſis 3 N. ergo cathetus erit 4 N. Statuatur itaque ab initio baſis vnitatum quotcunque quæ trientem habeant. Ac ſit 3. erit igitur reliquum baſis ſegmentum 3 − 3 N. ſed quoniam angulus bifariam ſectus eſt, & cathetus ad abſciſſam partem eſt ſeſquitertia, erit & hypotenuſa ad reliquum baſis ſegmentum, ſeſquitertia. At poſitum eſt reliquum baſis ſegmentum 3 −

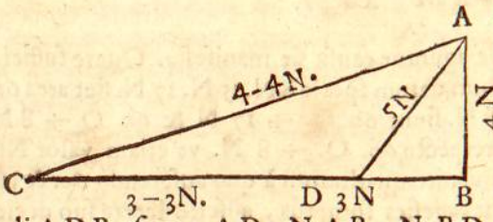
ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ὑπὸ ὀξειῶν αὐτοῦ γωνίων τεμνθείσων δίχως. ὁ τὴν τεμνούσης τὼν γωνίαν ἀριθμὸς ἦ ῥητός. τετάχθω ἡ ὑπὸ τέμνουσα γωνίαν δίχως ςς̄ ε̄. ἡ δὲ μὰ τομὴ τ̄ βάσεως ἀριθμῶν γ̄. ἡ ἄρα κάθετος ἔσαι ςς̄ δ̄. τετάχθω δὴ ἀπ' ἀρχῆς βάσις μονάδων ὁσων δήποτε ἐχουσῶν τρίτον. ἔστω δὴ μ° γ̄. ἔσαι δὴ τὸ λοιπὸν τμῆμα τ̄ βάσεως μ° γ̄ λείψει ςς̄ γ̄. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ γωνία δίχως ἐτμήθη, ᾗ ἔσιν ἡ κάθετος ἀποτομῆς ὁπὶ τειτος, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα τῆ λοιπῆ τ̄ βάσεώς ἐσιν ὁπίτειτος. ᾗ τέτακται τὸ λοιπὸν τμῆμα τ̄ βάσεως μ° γ̄ τ̄ ςς̄ γ̄. ἡ ἄρα ὑποτείνουσά ἐσι μ° δ̄. λείψει ςς̄ δ̄. λοιπόν ἐσι

τὸν ἀπὸ ταύτης τετράγωνον. τουτέστι δ͞υ ις͞ μ͞ο ις͞ ʃ ς͞ς λβ͞. ἰσωθήσεται τοῖς ἀπὸ τ͞ῶν ἀπὸ τ͞ῆς ὀρθῆς τετραγώνοις. τουτέστιν δ͞υ ις͞ μ͞ο ϑ͞. κ͞ὴ ἴσεται ὁ ς͞ μ͞ο ζ͞ λ͞ς͞. τὰ λοιπὰ δ͞ῆλα. καὶ ἐὰν πάντα λβ͞. ποιήσω, ἔσαι ἄρα ἡ ὑφ' κάθετος μ͞ο κ͞η. ἡ δὲ βάσις μ͞ο ϛ͞ς. ἡ δὲ ὑποτείνουσα μ͞ο ρ͞. ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν μ͞ο λ͞ε.

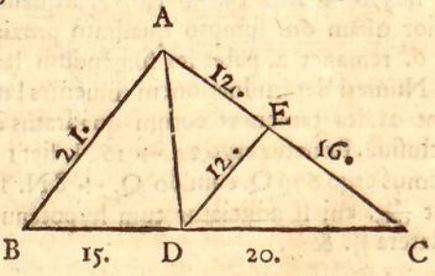
3 N. Igitur hypotenusa erit 4–4 N. Restat vt huius quadratus, nempe 16 Q. + 16 – 32 N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc est 16 Q. + 9. & fit 1 N. $\frac{7}{32}$. & reliqua sunt manifesta. Et si omnia ducam in 32. erit vtique cathetus 28. Basis 96. Hypotenusa 100. At secans angulum 35.

IN QVAESTIONEM XVIII.

Hîc nulla ferè est difficultas. Nam quod ait Diophantus Cathetum ad alterum baseos segmentum eandem habere rationem, quam habet hypotenusa ad alterum eiusdem baseos segmentum, id manifestè infertur ex tertia sexti Euclidis. Sit enim triangulum rectangulum A B C. & ducatur A D secans angulum acutum A bifariam. Quia ergo, vt ostendit Euclides loco citato, se habet A B ad A C. vt B D ad D C. erit & permutando A B ad B D, sicut A C ad C D. Quod est propositum. Itaque sumit Diophantus latera trianguli rectanguli 5. 4. 3. & constituens illud datum specie, applicat lateribus trianguli A D B. fitque A D 5 N. A B 4 N. B D 3 N. Necesse est autem A B statui maiorem quàm B D. quia enim est A B ad B D. vt A C ad C D. sed A C maior est quàm C D. immò quàm tota C B. erit & A B maior quàm B D. Tum verò tota basis C B ponitur quilibet vnitatum numerus qui habeat trientem ad vitandas fractiones, puta 3. Quare fit reliquum segmentum C D. 3 – 3 N. At hypotenusa A C 4 – 4 N. cuius quadratum æquando quadratis laterum circa rectum fit 1 N. $\frac{7}{32}$. Quare A B est $\frac{28}{32}$. B C $\frac{96}{32}$. A C $\frac{100}{32}$. secans verò A D $\frac{35}{32}$. & si omnia multiplices per 32. fient 28. 96. 100. 35. hoc enim licere constat ex prima tertij porismatum. Quod si loco trianguli 5. 4. 3. sumas aliud non simile, aliam reperies solutionem, & in altera proportione inuenies latera triangulorum A C B. A D B. vt manifestum est.



Cæterùm non docet Diophantus quomodo inueniri possit triangulum rectangulum, vt numerus angulum rectum secantis bifariam sit rationalis, quia id est impossibile. Quod sic demonstratur. Esto triangulum rectangulum A B C. rationale, & ducatur A D diuidens angulum rectum A bifariam. Dico A D non esse rationalem. Ducatur enim ab angulo D linea D E. perpendicularis ad latus A C hæc sanè cadet intra triangulum A D C quoniam anguli D A C. D C A sunt acuti. Itaque [3. sexti.] quoniam est B A ad A C. sicut B D ad D C erunt & componendo B A. A C. simul ad A C. sicut tota B C ad D C. sed A B. A C sunt rationales, & tota B C rationalis ex hypothesi, ergo & quarta proportionalis D C rationalis est. [4. sexti.] Quoniam verò triangula A B C. D E C sunt æquangula, cùm in vtroque sit angulus rectus, & angulus C communis, [32. primi.] erit B C ad C A. sicut D C ad C E. Quare cùm B C. C A. D C. sint rationales, erit & quarta C E rationalis, ac per consequens & reliqua E A. Quia verò ex hypothesi angulus D A E est semirectus, & angulus E rectus, [5. primi.] est & reliquus A D E semirectus. Quare cùm anguli D A E. A D E sint æquales, [47. primi.] sunt & æquales lineæ A E. E D. Ac proinde quadratus ipsius A D [4] duplus est quadrati ipsius A E quare cùm A E ostensa sit rationalis, non erit A D rationalis, alioquin dabitur in numeris quadratus quadrati duplus. Quod est impossibile. Vel cùm A D sit diameter quadrati à latere A E, & A E sit rationalis, non erit A D rationalis per vltimam decimi. Quod erat demonstrandum.



Si libet in numeris rem experiri, ponatur A C 28. A B 21. B C 35. reperietur per regulam trium B D 15. D C 20. & rursus C E 16. A E 12. Quamobrem & D E erit 12. Quadratus ergo angulum secantis A D. erit 288. & ipse A D. ℞ 288.

Quoniam verò pleraque non inuiucunda problemata proponi possunt ad inueniendum quotlibet triangulum in rationalibus, ita vt vel perpendicularis à quolibet angulo in latus oppositum ducta, vel etiam linea diuidens basim vel angulum bifariam, sit rationalis, opere pretium fore duxi, ea hoc loco explicare. Equidem aliqua horum iam tentauit vir doctissimus Christophorus Clauius ad duodecimam, & ad decimam tertiam secundi Elementorum, sed præterquàm de sola egit perpendiculari, in vnica tantum proportione propositum absoluit, nec vllam profert demonstrationem. Nos autem & vniuersaliorem methodum proferemus, & omnia demonstrando persequemur, & non solùm de perpendiculari, sed & delinea basim vel angulum secante bifariam nondum vulgata pro

blemata ſubiiciemus. Sed quoniam, vt profeſſi ſumus, nihil quod ab Euclide demonſtratum non ſit ſupponere nobis propoſitum eſt, ne aliò lectorem amandemus, demonſtranda ſunt in primis lemmata quæ ſequuntur.

LEMMA PRIMVM.

In omni triangulo ſi duæ perpendiculares à quibuſlibet angulis ducantur ad oppoſita latera, erit vt latus ad latus, ita reciprocè perpendicularis ad perpendicularem.

Eſto triangulum A B C. & ab angulis C A ducantur in latera oppoſita A B. C B. perpendiculares C D. A E. dico eſſe vt latus A B ad latus B C. ita reciprocè perpendicularem A E ad perpendicularem C D. Nam vel vtraque perpendicularis cadit intra triangulum vt in prima figura; vel altera cadit intra, altera extra, vt in ſecunda figura. Vel vtraque cadit extra vt in tertia figura. Vel ſecunda perpendicularis cadit in ipſum angulum, vnde demittitur prima, vt in quarta figura, & in duobus prioribus caſibus vnica eſt demonſtratio. Quia enim triangula C D B A E B ſunt æquangula, cùm in vtroque ſit angulus rectus, & angulus B communis, [6] erit A B ad A E. 4. *ſexti.*
ſicut C B ad C D. & permutando, erit A B latus, ad latus C B. ſicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quod erat propoſitum. At in tertio caſu, quoniam etiã triangula C D B. A E B. ſunt æquiangula, eo quod in vtroque ſit angulus rectus, [r] & anguli 15. *primi.*
ad verticem C B D. A B E. ſint æquales, ſequitur vt prius eſſe A B ad A E. ſicut C B ad C D. Quare & permutando erit A B latus ad latus C B. ſicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quamobrem patet propoſitum.

Denique ſi perpendicularis A C. cadat in ipſum angulum C. vnde demiſſa eſt perpendicularis C D. vt accidit in triangulo rectangulo; erit ob ſimilitudinem triangulorum C A B. C A D. vt latus C B ad latus B A, ſic perpendicularis C D. ad perpendicularem C A. & Rurſus ob ſimilitudinem triangulorum C A B. C D B. erit vt latus C A ad latus A B. ſic perpendicularis C D ad perpendicularem C B. Quod ipſum etiam demonſtratum eſt ab Euclide octaua ſexti. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur ſi omnia trianguli latera ſint rationalia, & vna perpendicularium rationalis, & reliquas perpendiculares à reliquis angulis demiſſas, fore rationales.

Quia cùm quatuor proportionalium, tres ſint rationales, neceſſe eſt & quartam eſſe rationalem.

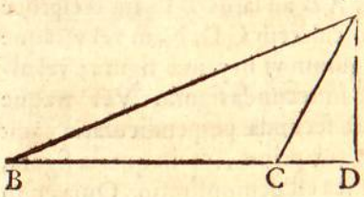
LEMMA SECVNDVM.

Si à quouis angulo trianguli demittatur in baſim perpendicularis, interuallum quadratorum à lateribus angulum comprehendentibus, æquale eſt rectangulo ſub tota baſi & interuallo ſegmentorum baſis; vel ſub tota baſi & aggregato ſegmentorum baſis contento.

In triangulo A B C ſit demiſſa in baſim B C. perpendicularis A D. quæ primò cadat intra triangulum, dico interuallum quadratorum à lateribus A B. A C. æquale eſſe rectangulo ſub tota B C. & interuallo ſegmentorum B D. D C. comprehenſo. Quia enim [z] quadratus ipſius A B. 47. *primi.*
æquatur quadratis ipſarum A D. D B. & quadratus ipſius A C. æquatur quadratis ipſarum A D. D B. erit exceſſus quadrati A B ſuper quadratum A C. æqualis exceſſui quadratorum ab ipſis A D. D B. ſuper quadratos ab ipſis A D. D C. & auferendo vtrimque communem quadratum ipſius A D.

erit interuallum quadratorum ab ipsis B D. D C. æquale interuallo quadratorum ab ipsis A B. A C.
3. 2. poris. Porro interuallum quadratorum ab ipsis B D. C D. [1] æquatur rectangulo sub tota B C. & interuallo ipsorum B D. C D. Igitur & interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquatur rectangulo sub tota B C. & sub interuallo ipsarum B D. C D. Quod erat propositum.

Deinde cadat perpendicularis A D. extra triangulum. Dico interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquari rectangulo sub basi B C. & sub aggregato segmentorum B D. C D. Nam vt prius, quia [2] quadratus A B. æquatur quadratis ipsarum B D. A D. & quadratus A C. æquatur quadratis
47. primi. ipsarum A D. C D. ablato vtrimque communi quadrato ipsius A D. interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquale est interuallo quadratorum ab ipsis B D. C D. At interuallum quadratorum ab ipsis B D. C D.
3. 2. poris. [3] æquatur rectangulo sub B C. interuallo ipsarum B D. C D. & sub aggregato earundem B D. C D. Igitur interuallum quadratorum ab ipsis A B. A C. æquatur rectangulo sub basi B C. & aggregato segmentorum B D. C D. Quod demonstrandum erat.



SCHOLIVM.

Neminem moueat quod in huius propositionis demonstratione citetur tertia secundi porismatum, quam in solis numeris, non autem in lineis proposuimus. Nam vt euidens est, propositio illa æquè benè lineis competit, atque ipsis numeris; cùm illius demonstratio solis propositionibus libri secundi Euclidis innitatur.

Sane ex hoc lemmate pulchra elicitur regula ad inuenienda segmenta basis à perpendiculari facta, si omnia trianguli latera data sint. Sit enim in primo casu A B 30. & A C 26. B C 28. Sumo interuallum quadratorum ab ipsis 30. & 26. puta 224. quem diuido per basim 28. fit quotiens 8. interuallum segmentorum B D. D C. Quare cùm eorundem aggregatum sit 28. Per Canonem primæ primi Diophanti facilè inuenientur singula segmenta. Nam addendo & adimendo 8. ipsi 28. fient 36. & 20. quorum semisses 18. & 10. sunt ipsa segmenta B D. D C.

Sit autem in secundo casu A B 30. A C 15. B C 25. sumo interuallum quadratorum ab ipsis 30. & 15. puta 675. quod diuido per 25. prouenit 27. aggregatum segmentorum B D. C D. Quare cum eorum interuallum sit 25. addendo & adimendo 52. ipsi 27. fiunt 52. & 2. quorum semisses 26. & 1. sunt segmenta B D. C D. Ipsa autem operatio pulchrè docet an perpendicularis cadat intra triangulum vel extra. Nam si diuidendo interuallum quadratorum per basim, fiat quotiens minor basi, perpendicularis cadit intra triangulum. Sed si fiat quotiens maior basi, perpendicularis cadit extra triangulum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestè sequitur si omnia latera trianguli sint rationalia, & segmenta quoque basis à perpendiculari facta, esse rationalia.

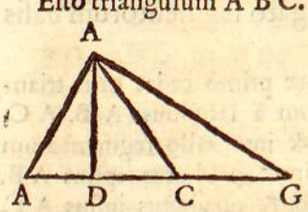
Nam cùm latera angulum comprehendentia erunt rationalia, erit & interuallum quadratorum ab ipsis, rationalis numerus, quo diuiso per basim rationalem, prodibit vel interuallum, vel aggregatum segmentorum basis rationale. Quare & ipsa segmenta rationalia erunt.

LEMMA TERTIVM.

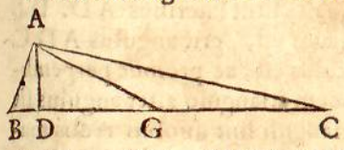
Si ab angulo acuto demittatur intra triangulum perpendicularis in basim, erit minor proportio cujuslibet segmenti baseos ad perpendicularem, quàm perpendicularis ad aliud segmentum. Sed si ab angulo obtuso demittatur perpendicularis, erit maior proportio cujuslibet segmenti ad perpendicularem, quàm perpendicularis ad aliud segmentum.

Esto triangulum A B C. & angulo acuto B A C. demittatur intra triangulum perpendicularis A D. dico minorem esse proportionem B D. ad D A. quàm D A. ad D C. & è conuerso minorem quoque esse proportionem D C. ad D A. quàm D A ad D B. Ducatur enim ad B A. perpendicularis A G. quæ sanè cadet extra triangulum, quia angulus B A C. ponitur acutus. Tum ob triangulum rectangulum, [4] erit B D. ad D A. sicut D A. ad D G. sed eadem D A. ad [5] maiorem D G. habet minorem proportionem, quàm ad minorem D C. Igitur & B D. ad D A. minorem habet rationem quàm D A. ad D C. similiter quia est D G. ad D A. vt D A. ad D B. & D C. minoris, ad D A. minor est proportio, quàm D G. maioris ad eandem D A. erit & minor proportio D C. ad D A quam D A ad D B. Quod est propositum.

8. sexti.
8. quinti.



Sit autem angulus B A C. obtusus, dico maiorem esse rationem B D. ad D A. quàm D. A ad D C. & è conuerso. Nam ducta ad B A. perpendiculari A G. ea quidem cadet intra triangulum ob angulum rectum B A G. minorem obtuso B A C. sed tamen cadet inter D. & C. quia scilicet angulus B A D. acutus est, ac proinde minor recto B A G. Hoc autem posito eadem est prorsus demonstrandi ratio. Quia enim est [1] B D. ad D A. vt D A. ad D G. sed D A. ad D G. [2] maior est proportio, quàm D A. ad D C. erit & B D. ad D A. maior proportio quam D A. ad D C. similiter quia est & D G. ad D A. sic D A. ad D B. sed D C. ad D A. maior est proportio, quàm D G. ad D A. erit quoque D C. ad D A. maior proportio, quàm D A. ad B D. Quod demonstrandum erat.

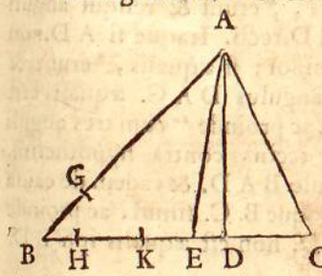


8. *sexti.*
8. *quinti.*

LEMMA QVARTVM.

Si ab angulo acuto vel obtuso demittatur intra triangulum perpendicularis in basim, itemque linea secans angulum bifariam; interuallum laterum angulum comprehendentium, est medium proportionale, inter interuallum segmentorum basis à perpendiculari factorum, & inter interuallum segmentorum quæ fiunt ab angulum secante linea.

Sit triangulum A B C. & in eo angulus B A C. acutus vel obtusus, à quo demittatur perpendicularis A D. itemque linea A E. secans angulum bifariam. Et in maiore latere A B. sumatur A G. æqualis minori lateri A C. ita vt B G. sit interuallum laterum, sumatur etiam in segmento B D. linea K D. æqualis ipsi D C. ita vt B K. sit interuallum segmentorum à perpendiculari factorum. Denique sumatur in B E. linea H E. æqualis ipsi E C. ita vt B H sit interuallum segmentorum à secante angulum factorum, dico B G esse mediam proportionalem inter K B. H B. hoc est esse K B ad B G vt B G ad B H. Quia enim interuallum quadratorum à lateribus A B. A C. [3] æquatur rectangulo sub B C. B K. At idem interuallum quadratorum [4] æquatur rectangulo sub aggregato laterum A B. A C. & interuallo eorundem B G. erit rectangulum sub aggregato A B. A C. & sub B G. æquale rectangulo sub B C. & B K. [5] Igitur est aggregatum ipsarum A B. A C. ad B C. sicut B K. ad B G. [6] Quoniam verò est A B. ad B E. sicut A C. ad C E, [7] erunt & antecedentes simul ad consequentes, hoc est aggregatum ipsarum A B. A C. ad totam B C. sicut A B. ad B E. vel sicut A C. ad C E. Igitur vt A B ad B E. vel A C. ad C E. sic est B K. ad B G. Cùm ergo A G. sit æqualis ipsi A C. & H E. ipsi E C. erit & A G. ad H E. sicut A B. ad B E. & sicut B K. ad B G. Cùm igitur sit vt tota A B. ad totam B E, sic ablata A G. ad ablatam H E. [8] erit & reliqua B G. ad reliquam B H, sicut A B. ad B E. vel B K. ad B G. Quamobrem est B K. ad B G. sicut B G ad B H. Quod demonstrandum erat.



Lemma secundum.
3. 2. *poris.*
16. *sexti.*
3. *sexti.*
12. *quinti.*
19. *quinti.*

COROLLARIVM.

Hinc sequitur primo interuallum segmentorum à perpendiculari factorum, maius esse interuallo eorum quæ fiunt à linea secante angulum, nempe B K maiorem esse quàm B H. Quia est B K ad B G vt A B. A C simul ad B C [9] sed A B. A C. simul sunt maiores quàm B C. ergo & B K maior est quàm B G. ac proinde & B G maior est quàm B H. Quamobrem multo magis B K maior est quàm B H.

20. *primi.*

Secundò sequitur maius segmentum eorum quæ fiunt à linea secante angulum, puta B E, minus esse maiore eorum quæ fiunt à perpendiculari, puta ipso B D. & contra E C maius esse quàm D C. Quia enim B K maior est quàm B H. erit reliqua K C. minor quàm reliqua H C. quare & horum semisses sumendo, erit D C. minor quàm E C. Igitur E cadit inter B & D. ac proinde B E minor est quàm B D.

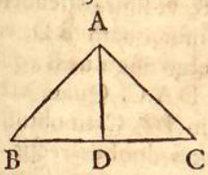
Tertiò, sequitur interuallum E D (quo B D. superat B E. vel quo E C. superat D C) esse dimidium ipsius H K interualli interuallorum. Quia enim vt est H C. ad E C. sic ablatus K C. ad ablatum D C. nam vtrobique est ratio dupla, [10] erit & reliquus H K. ad reliquum E D. in eadem ratione dupla.

19. *quinti.*

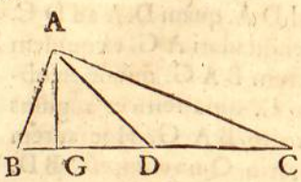
LEMMA QVINTVM.

In triangulo rectangulo, si ab angulo recto ducatur linea diuidens hypotenusam bifariam, erit ducta linea æqualis dimidio hypotenusæ

In triangulo rectangulo A B C. ab angulo recto B A C sit ducta linea A D diuidens B C. bifariam. Dico A D æqualem esse ipsi B D vel D C. Nam si in primo A B. A C æquales. [11] Ergo & anguli A B C. A C B æquales erunt, & [12] quilibet eorum dimidium erit recti, cùm B A C sit rectus. Sed & angulus B A D. est dimidium recti eadem de causa. Igitur cùm in triangulo B A D. anguli B A D. A B D. sint æquales, [13] erunt & latera B D. A D. æqualia. Quod erat propositum.



5. *primi.*
32. *primi.*
5. *primi.*



25. primi. Deinde A B. A C. sint inæquales, sit A C. maior quàm A B. Quia ergo latera A D. D C. trianguli A D C. æqualia sunt lateribus A D. D B trianguli A B D. & basis A C. basi A B maior est, [1] erit angulus A D C. angulo A D B maior. Quare A D C obtusus est, ac proinde perpendicularis A G. cadit inter B & D. ne in eodem triangulo alter angulus sit rectus, alter obtusus [2] & tres anguli trianguli sint duobus rectis maiores. Itaque quia B C Diuisa est bifariam in D. & inæqualiter in G. [3] quadratus semissis D C. æqualis est rectangulo sub B G. G C. & quadrato ipsius G D. At quoniam [4] A G. est media proportionalis inter B G. G C. rectangulum sub B G. G C [5] æquatur quadrato ipsius A G. Igitur quadratus ipsius D C. æquatur quadratis ipsarum A G. G D. [6] sed eisdem quadratis æquatur quadratus ipsius A D. ergo quadrati ipsorum A D. D C. æquales sunt inter se, ac per consequens A D. æquatur ipsi D C. Quod erat demonstrandum.

32. primi. 5. secundi. 8. sexti. 16. sexti. 47. primi.

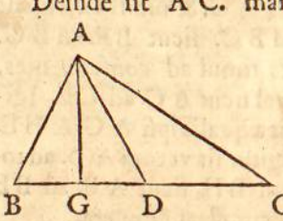
LEMMA SEXTVM.

In oxygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo acuto diuidens basim bifariam maior est dimidio basis.



In triangulo oxygonio A B C. ab angulo acuto B A C. ducta sit A D diuidens basim B C. bifariam, dico A D maiorem esse ipsa B D. vel D C. Nam primo sint A B. A C. æquales, [7] erunt igitur & anguli B C. æquales. Quare cùm A C. C D. æquales sint ipsis A B. B D. & anguli B C. æquales, [8] erunt & reliqui anguli triangulorum A B D. A D C. æquales, & anguli ad D. recti. Itaque si A D. non est maior quàm B D. est vtique vel æqualis, vel minor; si æqualis, [9] erunt & anguli D B A. D A B. æquales, & eadem ratione angulus D A C. æqualis erit angulo C. Quare totus angulus B A C. æquabitur duobus angulis B C. ac proinde [10] cùm tres anguli trianguli A B C. æquentur duobus rectis, erit angulus B A C. rectus contra hypothesim. Si autem A D. ponatur minor quàm B D. [11] erit angulus B minor angulo B A D. & eadem de causa angulus C. minor angulo D A C. Quare totus B A C. maior erit vtroque B. C. simul, ac proinde angulus idem B A C maior erit recto, contrà hypothesim. Quare A D. non est æqualis ipsi B D. nec minor. Igitur maior est. Quod erat propositum.

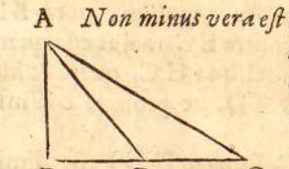
5. primi. 4. primi. 5. primi. 32. primi. 18. primi.



Deinde sit A C. maior quàm A B. Cùm ergo A D. D C. sint æquales ipsis A D. D B. & basis A C. sit maior basi A B. [12] erit angulus A D C. maior angulo A B G. ac per consequens angulus A D C. obtusus est. Quare perpendicularis A G. cadit inter B & D. Itaque quoniam B C. secta est æqualiter in D. & inæqualiter in G. [13] erit quadratus ipsius D C. æqualis rectangulo sub B G. G C. & quadrato G D. sed ob angulum acutum B A C. [14] minor est ratio B G. ad A G. quam ipsius A G. ad G C. ac proinde quadratus ipsius A G. maior est rectangulo sub B G. G C. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi demonstratione, quæ non minus lineis competit quàm numeris. Igitur quadrati ipsarum A G. G D. maiores sunt quadrato ipsius D C. Atqui quadrati ipsarum A G. G D. [15] æquantur quadrato ipsius A D. Ergo quadratus ipsius A D. maior est quadrato ipsius D C. ac proinde A D. maior est quàm D C. Quod demonstrandum erat.

25. primi. 5. secundi. Lemma tertium. 47. primi.

SCHOLIVM.

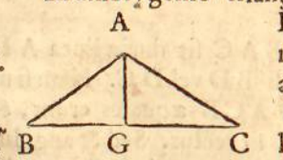


17. primi.

Non minus vera est hæc propositio in triangulo rectangulo vel amblygonio, dum linea A D ducatur ab vno acutorum angulorum. Sit enim angulus A B C. rectus vel obtusus, & ducta sit A D. diuidens B C bifariam, dico nihilominus A D. maiorem esse quàm B D. & quidem manifestum est, [16] *cùm A D. maiorem angulum B. subtendat.*

LEMMA SEPTIMVM.

In amblygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo obtuso diuidens basim bifariam, minor est dimidio basis.

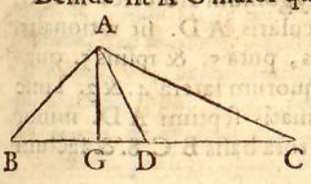


In amblygonio triangulo A B C. ducta sit ab obtuso angulo linea A D diuidens B C. bifariam. Dico A D. minorem esse quàm B D. vel D C. Nam primo A B. A C. ponantur æquales, [17] erunt ergo anguli B. C. æquales, & vt suprà ostendetur angulos ad D. esse rectos. Itaque si A D. non est minor quàm B D. erit vtique vel æqualis, vel maior. Quod si ponatur, [18] ergo angulus B æqualis erit angulo B A D. vel maior & angulus C. angulo D A C. Quare vterque B C simul æquabitur toti B A C. vel maior erit quàm B A C. Quare cùm B A C. sit obtusus, erunt tres anguli trianguli A B C. æquales duobus obtusis, ac proinde maiores duobus rectis. [19] Quod est impossibile. Igitur A D non est æqualis ipsi B D. neque maior. Quamobrem relinquitur vt sit minor. Quod est propositum.

5. primi. 5. primi. & 18. primi. 32. primi.

Deinde

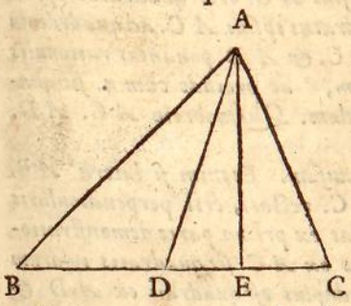
Deinde sit A C maior quàm A B. Igitur vt prius ostendetur angulum A D C. obtusum esse, ac proinde perpendicularis A G. cadet inter B & D. Quoniam itaque B C. secta est æqualiter in D. & inæqualiter in G. [1] erit quadratus ipsius D C æqualis rectangulo sub B G. G C. & quadrato ipsius G D. 5. *secundi.*



At quia [2] maior est proportio B G ad A G. quàm A G. ad G C. quadratus ipsius A G minor est rectangulo sub B G. G C. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi, demonstratione cuilibet quantitati conueniente. Igitur quadrati ipsarum A G. G D. minores sunt quadrato ipsius D C. sed quadrati ipsarum A G. G D. [3] æquantur quadrato ipsius A D. ergo & quadratus ipsius A D. minor est quadrato ipsius D C. ac proinde A D. minor est quàm D C. Quod demonstrandum fuit. *Lemma tertium.* 47. *primi.*

LEMMA OCTAVVM.

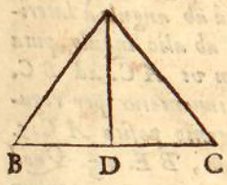
Si à quolibet angulo trianguli ducatur linea diuidens basim bifariam, erunt quadrati laterum dictum angulum comprehendentium, simul dupli quadratorum, tam ex dimidia basi quam ex ducta linea ortorum.

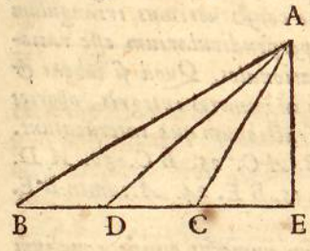


In triangulo A B C. à quolibet angulo A. ducatur A D. diuidens B C. bifariam, dico quadratos simul ipsarum A B. A C. duplos esse quadratorum ab ipsis A D. B D. Nam ducta perpendiculari A E. erunt quadrati ipsarum A B. A C. æquales quadratis segmentorum B E. E C vnà cum duplo quadrati A E. sed quadrati B E. E C. inæqualium segmentorum, [4] dupli sunt quadratorum à dimidia B D. & ab intermedia D E. Igitur quadrati ipsarum A B. A C. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. D E. A E. Atqui duplum quadratorum ab ipsis D E. A E. [5] æquatur duplo quadrati ipsius A D. Igitur quadrati ipsarum A B. A C. æquantur duplo quadratorum ab ipsis B D. A D. Quod demonstrandum erat. 9. *secundi.* 47. *primi.*

SCHOLIVM.

Sic demonstratur hæc propositio à Pappo lib. 7. propo. 122. Duo tamen alij casus considerari possunt. Primus, cùm latera A B. A C. sunt æqualia, ac per consequens linea A D. est perpendicularis ad basim; & tunc quia quadrati laterum A B. A C. æquantur quadratis segmentorum B D. D C. & duplo quadrati ipsius A D. at quadrati ipsarum B D. D C. æquales sunt, patet quadratos laterum A B. A C. duplos esse quadratorum ab ipsis A D. B D. Quod est propositum.



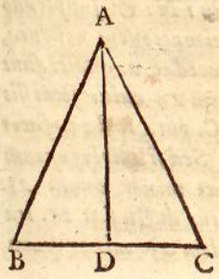


Secundus casus est cùm perpendicularis A E. cadit extra triangulum. Et tunc quia quadrati laterum A B A C. [6] æquantur quadratis ipsarum B E. C E. & duplo quadrati ipsius A E. & quoniam B C. secta est bifariam in D. & adiecta ei linea C E. ac proinde [7] quadrati ipsarum B E. C E. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. D E. patet quadratos laterum A B. A C. duplos esse quadratorum B D. D E. A E. at duplum quadratorum D E. A E. æquatur duplo quadrati ipsius A D. Igitur quadrati laterum A B. A C. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. A D. Ac proinde ex omni parte patet propositum. 47. *primi.* 10. *secundi.*

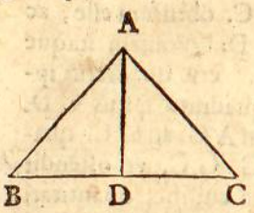
His præmissis sequentia problemata demonstrabimus, omnes triangulorum species persequentes, earum scilicet diuisione tum secundum latera, tum secundum angulos considerata.

PROBLEMA PRIMVM.

Triangulum Isosceles constituere in rationalibus, siue oxygonium, siue amblygonium, vt perpendicularis ab angulo à lateribus æqualibus contento ducta in tertium latus inæquale, sit rationalis.



Sit primo constituendum triangulum Isosceles oxygonium A B C. cuius omnia latera sint rationalia, & perpendicularis quoque A D. sit rationalis. Ponatur quodlibet æqualium laterum A B. A C. quilibet numerus, puta 5. & ipsius 5. quadratus 25. diuidatur per octauam secundi Diophanti in duos quadratos, puta 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Et quoniam vt constat ex prima parte demonstrationis lemmatis sexti A D. maior est dimidio basis, ponatur A D. 4. D C. 3. erit ergo tota basis B C 6. & factum est quod proponebatur, vt manifestum est.



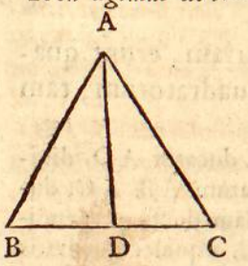
Deinde fit conſtituendum triangulum amblygonium Iſoſceles A B C. cuius omnia latera ſint rationalia , & perpendicularis A D. ſit rationalis. Ponatur vt prius A B. vel A C. quilibet numerus , puta 5. & ipſius 5. quadratus 25. diuidatur in duos quadratos 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Tunc quia per primam partem demonſtrationis lemmatis ſeptimi A D. minor eſt dimidio baſis , ponetur A D 3. D C 4. & erit tota baſis B C. 8. & factum erit quod requirebatur.

SCHOLIVM.

Non agimus de triangulo æquilatero , quia in eo perfici non poteſt problema. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. dico ſi latera illius ponantur rationalia , perpendicularem, A D. eſſe non poſſe rationalem quia enim A D. diuidit B C. bifariam, cùm A C. ſit dupla ipſius D C. [1] & quadrati ſint in ratione duplicata laterum, erit quadratus ipſius A C. quadruplus quadrati ipſius D C. Quare cùm quadrati ipſarum A D. D C. ſint æquales quadrato ipſius A C. erit quadratus ipſius A D. $\frac{3}{4}$. quadrati ipſius A C. ac proinde quadratus ipſius A C. ad quadratum ipſius A D. ſe habebit vt 4. ad 3. Quare ſi A C. & A D. ponantur rationales 4. ad 3. habebit rationem quadrati ad quadratum, [2] ac proinde cùm 4. ſit quadratus. erit & 3. quadratus. Quod eſt abſurdum. Quamobrem A C. A D. non poſſunt ſimul eſſe rationales , & longitudine commenſurabiles.

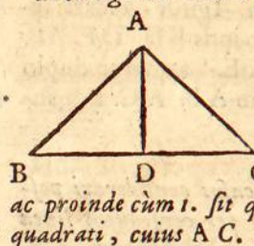
20. ſexti.

24. octaui.



Non agimus etiam de triangulo rectangulo Iſoſcele , ob eandem cauſam. Etenim ſi latera A B. A C. ponantur æqualia , & angulus B A C. rectus , erit perpendicularis A D. æqualis dimidio baſis D C. vt conſtat ex prima parte demonſtrationis lemmatis quinti. Quare cùm quadratus ex A C. ſit quadratis ipſarum A D. D C. æqualis , quadratus ex A C. duplus eſt quadrati ex A D. & quadratus ex A D ad quadratum ex A C. eſt vt 1. ad 2. Quare ſi A D. A C. ponantur rationales habebit 1. ad 2. rationem quadrati ad quadratum, ac proinde cùm 1. ſit quadratus [3] erit & 2. quadratus. Quod eſt abſurdum. Vel cùm A D. ſit latus quadrati , cuius A C. eſt diameter , [4] latus erit commenſurabile coſtæ. Quod eſt impoſſibile.

24. octaui. vltima decimi.



Porro ſic conſtituto triangulo oxygonio vel amblygonio , non ſolùm A D. ducta ab angulo à lateribus æqualibus contento , eſt rationalis , ſed & quælibet alia perpendicularis , ducta ab alio angulo , puta B E. vt conſtat ex Corrollario lemmatis primi. Eſt enim vt A C. ad B C. ſic A D. ad B E. Quare poſita A C. 5. B C. 6. A D. 4. inuenietur per regulam trium B E. 4 $\frac{4}{5}$. in triangulo oxygonio. At in amblygonio poſita A C. 5. B C. 8. A D. 3. inuenietur rurſus per regulam proportionum , B E. 4 $\frac{4}{5}$. Quod ſemel monuiſſe ſufficiat , vt deinceps quotieſcumque conſtituerimus triangulum quodlibet in rationalibus , & oſtenderimus vnam perpendicularium eſſe rationalem , intelligatur & alias perpendiculares eſſe rationales. Quod ſi lubeat & latera omnia trianguli , & perpendiculares exhiberi in numeris integris , oportet omnia multiplicare per communem denominatorem fractionum quæ interueniunt. Vt in dato exemplo , ſi omnia ducas in 5. fient in oxygonio triangulo A B. A C. 25. B C. 30. A D. 20. B E. 24. At in amblygonio , erit A B. vel A C. 25. B C. 40. A D. 15. B E. 24. Attamen B E. intelligetur cadere extra triangulum.

Poteſt autem quadrupliciter conſtrui hoc problema. Primo ſi præſcribatur numerus vnius æqualium laterum , vt iam docuimus.

Secundò ſi præſcribatur numerus baſeos. Vt ſi ponatur baſis B C. 10. Tunc enim ſumpto ſemiſſe ipſius 10. puta 5. cuius quadratus 5. quæram pro quadrato perpendicularis , quadratum numerum qui ad 25. additus quadratum faciat. Sed ſi oxygonium triangulum eſt conſtituendum , oportebit huiuſmodi quadratum maiorem eſſe quàm 25. & ſi vtaris Canone ad vndecimam ſecundi Diophanti tradito , infinitos tales quadratos reperies. Nam quærendi erunt duo numeri , quorum mutuo ductu fiat 25. ita tamen vt interuallum eorum ſit maius quàm 10. quos ſi arte certa conſequi velis , pone minorem 1 N. erit maior $\frac{25}{1N}$. horum interuallum $\frac{25}{1N}$. — 1. N. maior eſt quàm 10. [5] & omnia ducendo in 1 N. & ſupplendo defectum , fit tandem 25. maior quàm 1 Q. + 10 N. Qua æquatione per approximationem reſoluta, fit 1 N. non maior quàm 2. ſumes ergo pro minore quemlibet numerum qui non excedat 2. quales ſunt 1. 1 $\frac{1}{3}$. 1. $\frac{1}{2}$. 2. & infiniti alij. Verbi gratia ſume 1. erit maior 25. quorum interuallum 24 cuius ſemiſſis 12. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus 144. additus quadrato ipſius D C. puta ipſi 25. facit 169. quadratum ipſius A C. Quare A C. vel A B. eſt 13. B C. 10. A D. 12. Sed ſi amblygonium triangulum conſtituendum eſt , poſita vt prius B C. 10. quærendus erit quadratus minor quàm 25. qui ad 25. additus quadratum faciat. Sunt ergo inueniendi duo numeri quorum mutuo ductu fiat 25. ita vt eorum interuallum ſit minus quàm 10. quos ſi ponas vt prius 1 N. & $\frac{25}{1N}$. fiet tandem 25. minor quàm

1 Q. + 10 N. vnde fit 1 N. non minor quàm 2 1/14. sumes ergo pro minore quemlibet numerum maiorem quam 2 1/14 dum is sit minor quàm 5. nam si poneretur maior quàm 5. non esset iam minor duorum quæsitorum, sed maior vt euidens est. Sume igitur verbi gratia 2 1/2. pro minore, erit maior 10. horum interuallum 7 1/2. cuius semissis 3. 3/4. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus 225/16. additus ad 25. quadratum ipsius D C. facit 625/16 quadratum ipsius A C. Quare A C. vel A B. est 6 1/4. B C. 10. A D. 3 3/4. & ducendo omnia in 4. fiet A C vel A B. 25. B C. 40. A D. 15.

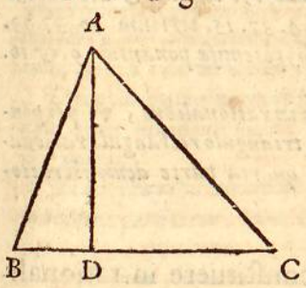
Tertiò, præscribi potest numerus perpendicularis A D. vt si ponatur 12. tuncque quærendus erit quadratus, pro quadrato ipsius D C. qui ad 144. additus quadratum faciat; sed si lubeat oxygonium facere triangulum, quæremus quadratum minorem quàm ipse 144. sin autem amblygonium constituendum sit triangulum, quæremus quadratum maiorem quàm 144. Quod vtrumque, vt prius, perficietur.

Quartò, denique præscribi potest, numerus perpendicularis B E vt pote 24. & tunc sumo hypotenusam cuiuslibet trianguli rectanguli, puta 5. & statuo in Numeris, ponoque quodlibet æqualium laterum A B. A C. 5 N. & si oportet facere triangulum oxygonium pono semissem basis puta D C. minus laterum circa rectum, puta 3 N. erit ergo tota basis 6 N. Quamobrem [1] cùm sit vt B C. 6 N. ad A C. 5 N. sic B E. 24. ad A D. inuenietur A D. 20. cuius quadratus 400. cui addendo 9 Q. quadratum ipsius D C. fit vtique 400 + 9. Q. æqualis quadrato ipsius A C. at idem quadratus est 25. Q. ergo 25. Q. æquantur 400. + 9. Q. & tandem 16 Q. æquantur 400. & fit 1 N. 5. est ergo A B. vel A C. 25. B C. 30. A D. 20. Sed si constituendum est triangulum amblygonium, posita A C. vel A B. 5 N. vt prius, pono D C. maius laterum circa rectum, puta 4 N. ergo tota B C. est 8 N. Tunc facio vt 8 N. ad 5. N. ita 24. ad aliud, & fit A D. 15. cuius quadratus 225. cui addendo 16. Q quadratum ipsius D C sit 225 + 16 Q. æqualis 25 Q. quadrato scilicet ipsius A C. & tandem 225. æquantur 9 Q. vnde fit 1 N. 5. est ergo A C. vel A B. 25. B C. 40. A D. 15. intelligendum tamen B E cadere extra triangulum. Lemma primum.

Cæterùm non agimus de segmentis basis à perpendiculari factis, quia cùm triangulum est rationale, & segmenta illa sunt rationalia per corollarium secundi lemmatis.

PROBLEMA SECVNDVM.

Triangulum oxygonium scalenum constituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo acuto demissa sit rationalis.



Ponatur latus A C. quilibet numerus, vt pote 10. cuius quadratus 100. diuidatur in duos quadratos, vt pote in 64. & 36. quorum latera 8. & 6. & ponatur A D maius horum laterum, puta 8. & D C. minus puta 6. & esto B D. 1 N. quadrati ergo ipsarum B D. A D. puta 1 Q. + 64. æquantur quadrato ipsius A B. Quare vt A B. sit rationalis, oportet 1 Q. + 64. æquari quadrato. Quoniam verò angulus A ponitur acutus [2] est ratio D C ad A D minor ratione A D. ad B D. ac proinde productus ex B D. in D C. puta 6 N. minor est quadrato ipsius A D. qui est 64. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi. Ergo cùm diuidendo 64. per 6. fiat 10. 2/3. patet 1 N. minorem esse debere quàm 10 2/3. Aliter reperietur Numeri determinatio, hac arte scilicet. Quia vt trianguli omnes anguli sint acuti, [3] oportet quadratum cuiuslibet lateris minorem esse aggregato quadratorum ab alijs lateribus. Hoc autem vt sit, oportet quadratum cuiuslibet lateris minorem esse semisse aggregati quadratorum à singulis lateribus, sumo aggregatũ quadratorũ à singulis lateribus, est autem quadratus A C. 100. quadratus B C. 1 Q. + 36 + 12 N. quadratus A B 1 Q. + 64. quorum summa 2 Q. + 200 + 12 N. cuius semissis 1 Q. + 100. + 6 N. quem euidens est maiorem esse tum quadrato ipsius A C. 100. tum quadrato ipsius A B 1 Q. + 64. Restat vt etiam 1 Q. + 100 + 6 N. sit maior quam 1 Q. + 36 + 12 N. Quare ablatis vtrimque æqualibus, oportet vt 64. sit maior quàm 6 N. Quare diuiso 64. per 6. fit 1 N. minor quàm 10. 2/3. vt prius. Itaque quoniam fingentes latus quadrati 1 Q. + 64. ponemus illud 8. – tot numeris, à quorum quadrato auferendo 1. per residuum diuidatur sedecuplum ipsorum numerorum, oportebit hunc quotientem minorem esse quàm 10 2/3. Ponatur ergo numerus Numerorum 1 N. fiet 16 N / 1 Q – 1. minor quàm 10 2/3. & omnia ducendo in 1 Q. – 1. & rursus in 3. fient tandem 48 N. + 32. minores quàm 32 Q. seu 3 N. + 2. minores quàm 2 Q. qua æquatione resoluta cùm fiat 1 N. 2. patet fingendum latus quadrati 8. – tot Numeris qui excedant 2. Ponãtur 8. – 5 N. fiet 1 N. 3 1/3. tanta erit B D. Quare A B est 8 2/3. A C 10. B C. 9 1/3. A D. 8.

Lemma tertium.

13. secundi.

SCHOLIVM.

Hìc etiam loco vnius laterum, præscribi posset ipsa perpendicularis A D. vt puta 12. Tunc ergo quare duos quadratos qui additi ad 144. quadratum ipsius 12. faciant quadratum, hac tamen lege vt vel vtriusque quæsitorum latus sit minus quàm 12. vel si alterum sit maius alterum minus, maioris ad 12. sit minor ratio, quàm ipsius 12. ad minus vt videlicet constituatur triangulum oxygonium. Quadrati quorum latera minora sunt quàm 12. sunto 81. & 25. Posita ergo A D 12. erit B D. 5. D C. 9. atque adeo tota B C.

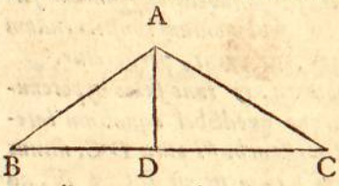
14. At A B. fiet 13. A C. 15. Quadrati verò 256. & 25. si sumantur, quia minor est ratio 16. ad 12. quàm 12. ad 5. Ritè statuetur B D. 5. D C. 16. ac proinde tota B C. 21. erit autem A B. 13. A C. 20.

PROBLEMA TERTIVM.

Triangulum amblygonium scalenum constituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo obtuso demissa sit rationalis.

Ponatur A C. vt suprà quilibet numerus 10. cuius quadrato in duos quadratos diuiso, ponatur D C. alterum latus 6. & A D. alterum 8. & sit B D 1 N. fiet ergo vt prius 1 Q. + 64. æquandus quadrato. Sed quia ob angulum obtusum [1] maior est ratio B D ad A D. quàm A D. ad D C. productus ex B D. in D C. puta 6 N. maior esse debet quadrato ipsius A D. 64. Quare 1 N. debet esse maior quàm 10 $\frac{2}{3}$. si ergo quæras vt suprà determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies fingendum esse latus illud 8. – tot Numeris qui sint minus quàm 2. sed oportet etiam vt sint plus quàm 1. vt videlicet eorum quadratus excedat 1 Q. Pone ergo 8. – 1 $\frac{1}{2}$ N. fiet 1 N. 19 $\frac{1}{3}$. tanta erit B D. ergo tota B C. 25 $\frac{1}{3}$. A B. 20 $\frac{4}{5}$. A C. 10. A D. 8.

Lemma tertium.



Vel ponatur A D. quilibet numerus vtpote 12. & quærantur duo quadrati, vt quilibet additus ad 144. quadratum ipsius 12. faciat quadratum, ita tamen vt cujuslibet quæsitorum quadratorum latus sit maius quàm 12. vel si alterum sit maius, alterum minus, maius ad 12. maiorem habeat rationem, quàm 12. ad minus, ad hoc vt angulus B A C. constituatur obtusus per lemma tertium, sumi possunt maiora latera 35. & 16. nam addito quadrato ex 35. ad quadratum ex 12. fit quadratus ex 37. & eidem addendo quadratum ex 16. fit quadratus ex 20. Posita ergo A D. 12. erit B D. 16. D C. 35. tota B C. 51. A B. 20. A C. 37. si autem sumantur latera 35. & 9. quia maior est ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 9. erit B D. 9. D C. 35. tota B C. 44. A C. 37. A B. 15. Vel denique si sumas latera 35. & 5. quia etiam maior est ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 5. fiet B D. 5. D C. 35. tota B C. 40. A C. 37. A B. 13.

SCHOLIVM.

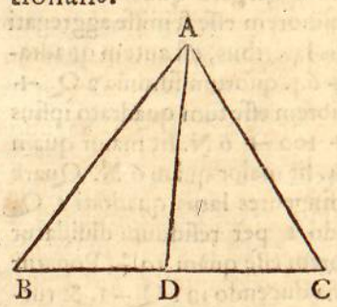
Animaduersione dignum est, posita perpendiculari 12. formari posse sex diuersa triangula in integris, quorum duo sunt oxygonia quæ in scholio præcedentis expossuimus, nimirum 15. 14. 13. & 21. 20. 13. tria sunt amblygonia quæ hic attulimus, primum 51. 37. 20. secundum 44. 37. 15. tertium 40. 37. 13. Restat vnum rectangulum, cuius latera 25. 20. 15. si videlicet segmenta hypotenusæ ponantur 9. & 16. inter quæ perpendicularis 12. est media proportionalis per octauam sexti.

Cæterùm non proposuimus inuenire triangulum rectangulum scalenum in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo recto demissa sit rationalis. Quia id accidit cuicunque triangulo rectangulo rationali, vt constat ex Corollario lemmatis primi, vim suam mutuante à quarta parte demonstrationis ipsius lemmatis.

PROBLEMA QVARTVM.

Triangulum scalenum, oxygonium, vel amblygonium constituere in rationalibus, vt ab angulo acuto, vel obtuso ducta linea diuidens basim bifariam, sit rationalis.

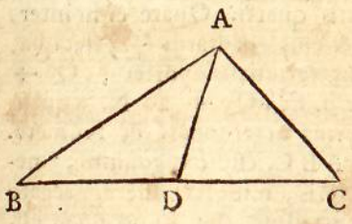
Lemma sextum.
Lemma octauũ.



Sit triangulum oxygonium A B C. in quo ducta sit A D. diuidens basim B C. bifariam. Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compositum, vt 13. compositum ex 9. & 4. quorum latera 3. & 2. & minus latus 2. tribue dimidio basis D C. maius verò 3. tribue lineæ A D. [2] quia scilicet ob angulum acutum A D. debet esse maior quàm D C. [3] Tum verò quia quadrati ipsarum A B. A C. sunt dupli quadratorum ab ipsis A D. D C. cùm summa quadratorum ab ipsis A D. D C. ponatur 13. erit summa quadratorum ab ipsis A B. A C. 26. Porrò quia 13. componitur ex duobus quadratis, quorum latera 3. & 2. duplum ipsius 13. puta 26. [4] componetur etiam ex duobus quadratis, quorum latera 5. & 1. æqualia scilicet tum summæ, tum interuallo laterum quadratorum ex quibus 13. componitur. Sed si tribuas 5. ipsi A B. & 1. ipsi A C. manifestum sequetur absurdum. Quia enim A B. ponitur summa ipsorum 3. & 2. & A C. eorundem interuallum. At B C ponitur duplum minoris 2. puta 4. patet addendo duplo minoris interuallum numerorum, fieri summam numerorum, ac proinde latera A C. B C. simul æqualia fore reliquo A B. [5] Quod est absurdum. Supereſt ergo vt numerum 26. compositum ex duobus quadratis 25. & 1. rursus diuidamus in duos alios quadratos per decimam secundi Diophanti. Ponatur alterum latus 5 – 1 N. alterum 1 + 2 N. fiet summa quadratorum 26 + 5 Q. – 6 N. æqualis 26. vnde fiet 1 N. $\frac{6}{5}$. sunt ergo quæsita latera 3 $\frac{4}{5}$. & 3 $\frac{2}{5}$. Posita igitur A D. 3. erit A B. 3 $\frac{4}{5}$. A C. 3 $\frac{2}{5}$. & B C. 4. vel omnia ducendo in 5. fiet A B. 19. A C. 17. B C. 20. ipsa A D. 15.

7. 2. poris.

20. primi.



Contraria ratione in triangulo amblygonio A B C. ſtatuemus D C. 3 & A D. 2. [1] quia A D. minor eſt quàm D C. Tum vt prius quia quadrati ipſarum A D. D C. ponuntur 13. [2] erunt quadrati ipſarum A B. A C. 26. qui cùm ſit duplus numeri ex duobus quadratis compoſiti, [3] componetur & ipſe ex duobus quadratis, ſed maius latus 5. eſt ſumma ipſarum A D. B C. & minus latus eſt interuallum earundem, puta 1. Quare ſi A B ponas 5. A C. 1. cùm maioris duarum A D. D C. dupla ſit B C. ſi aggregato earundem A D. D C. puta ipſi A B. addas earundem interuallum A C. fiet aggregatum ipſarum A B. A C. [4] æquale ipſi B D. [5] Quod eſt abſurdum. Quare rurſus 26. diuidendus eſt in duos alios quadratos, vt factum eſt ſuprà, ſint ergo eorum latera $\frac{19}{5}$. & $\frac{17}{5}$. Poſita ergo A D. 2. fiet B C. 6. A B. $\frac{19}{5}$. A C $\frac{17}{5}$. vel omnia ducendo in 5. erit A B. 19. A C. 17. B C. 30. A D. 12.

Lemma ſeptimũ. *Lemma octauum.* 7. 2. *poriſ.* 23. 1. *poriſ.* 20. *primi.*

SCHOLIVM.

Euidens eſt tam in oxygonio, quàm in amblygonio ipſas A D. D C. poni poſſe in qualibet proportione, dum ſemper habeatur ratio lemmatum 6. & 7.

Deinde ſicut prius præſcribuntur ipſæ A D. D C. ita poſſunt prius ipſæ A B. A C. præſcribi, vt ex ipſis indagentur A D. D C. verbi gratia ponatur A B. 3. A C. 1. erit ſumma quadratorum 10. cuius ſemiſſis 5. [6] *æquatur quadratis ipſarum A D. D C. ſed & ipſe 5. componitur ex duobus quadratis,* [7] *quia eſt ſemiſſis numeri ex duobus quadratis compoſiti, ſed latera ipſorum non poſſunt applicari ipſis A D. D C. ob cauſas ſuprà allatas. Quare oportet rurſus diuidere 5. in duos alios quadratos, ponantur eorum latera 1 + 7 N. & 2 − 5 N. fiet ſumma quadratorum 5 + 74 Q. − 6 N. æqualis 5. vnde erit 1 N. $\frac{3}{17}$. Sunt ergo latera quadratorum 1 $\frac{2}{37}$. & 1 $\frac{22}{37}$. Quare poſita A B. 3. A C. 1. ſi libet facere triangulum oxygonium, pones A D. 1 $\frac{22}{37}$. B D. 1. $\frac{21}{37}$. vnde tota B C. fiet 3. $\frac{5}{37}$. At ſi velis conſtituere amblygonium, pones A D. 1 $\frac{21}{37}$. B D. 1 $\frac{22}{37}$. totam B C. 3 $\frac{7}{37}$.*

Lemma octauũ. 6. 2. *poriſ.*

Moneo tamen ſi abſque vlla cautione numeri ex duobus quadratis compoſiti, rurſus diuidantur in alios duos quadratos per ſolum artificium decimæ ſecundi Diophanti, accidere poſſe vt in idem abſurdum incidatur, ad quod vitandum huiuſmodi ſubdiuiſio inſtituitur, vt ſcilicet inueniantur latera quadratorum quæ minimè poſſint applicari lateribus trianguli. Quare tutius erit huiuſmodi numeros diuidere per artificium duodecimæ quinti, in duos quadratos, quorum exiguum ſit interuallum, ſic enim in tale incommodum nunquam incurretur.

Cæterùm propoſui triangulum ſcalenum, non autem Iſoſceles inuenire, quia cùm in triangulo Iſoſcele linea diuidens baſim bifariam, ſit perpendicularis ad baſim, non differret huiuſmodi problema à primo.

Non propoſui etiam de triangulo rectangulo ſcaleno, quia in omni triangulo rectangulo rationali problema perficitur, cùm linea diuidens hypotenuſam bifariam ſit ſemper æqualis dimidio hypotenuſæ per lemma quintum.

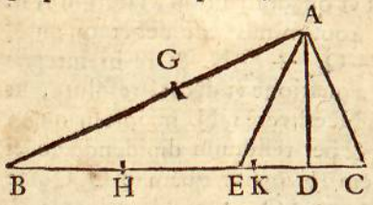
Superſunt elegantiſſima duo problemata quibus quæritur triangulum tum oxygonium, tum amblygonium, vt acuto vel obtuſo angulo bifariam ſciſſo, numerus angulum ſecantis ſit rationalis; quæ ſanè magis accedunt ad quæſtionem Diophanti, quamuis ſint longè ſubtiliora.

PROBLEMA QVINTVM.

Triangulum oxygonium inuenire in rationalibus, vt numerus angulum acutum bifariam ſecantis ſit rationalis.

Eſto triangulum oxygonium A B C. & ducta perpendicularis A D. & linea A E. ſecans angulum B A C. bifariam, oportet facere omnia latera trianguli rationalia, & lineam A E. rationalem. Sumatur ſegmento C D. æquale D K. vt K B. ſit interuallum ſegmentorum à perpendiculari factorum. Item ſegmento C E. ſumatur æquale E H. vt H B. ſit interuallum ſegmentorum à ſecante angulum factorum. Denique ſumatur A G. æqualis ipſi A C. vt B G. ſit interuallum laterum A B. A C. Quoniam ergo [8] vt eſt B K ad B G. ſic eſt B G. ad B H. ſumantur tres quicunque numeri proportionales, puta 25. 20. 16. & ponatur B K. 25. B G. 20. B H. 16. & ſtatuatur A C. ſeu A G. 1 N. erit ergo tota A B 1 N. + 20. ac proinde interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. eſt 40 N. + 400. quo diuiſo per interuallum ſegmentorum baſis à perpendiculari factorum, puta per 25. [9] prodit tota baſis B C. $\frac{8}{5}$ N. + 16. cui ſi addatur & adimatur interuallum ſegmentorum, puta 25. ſemiſſis ſummæ & reſidui oſtendet ipſa ſegmenta. Fiet ergo minus ſegmentum D C. $\frac{4}{5}$ N. − $\frac{9}{2}$. cuius quadratus $\frac{16}{25}$ Q. + $\frac{81}{4}$. − $\frac{36}{5}$ N. qui ſi auferatur à quadrato lateris A C. puta ab 1 Q. remanet quadratus ipſius perpendicularis. A D. nimirum $\frac{9}{4}$ Q. + $\frac{36}{5}$ N. − $\frac{81}{4}$. cui ſi addatur quadratus ipſius E D. puta $\frac{81}{4}$. (etenim E D eſt ſemiſſis ipſius H K.

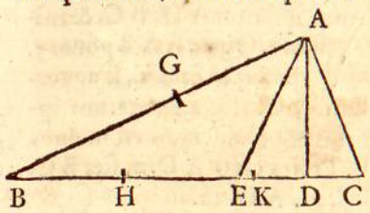
Lemma quartũ.



Lemma ſecundũ.

interualli interuallorum BK. BH. vt constat ex Corollario lemmatis quarti. Quare cùm interuallum ipsorum 25. & 16. sit 9. cuius semissis est $\frac{9}{2}$. tanta erit E D. & eius quadratus $\frac{81}{4}$.) fiet quadratus lineæ A E. nimirum $\frac{9}{25}$. Q. + $\frac{36}{5}$. N. Quamobrem vt A E. sit rationalis oportet $\frac{9}{25}$. Q. + $\frac{36}{5}$. æquari quadrato, & omnia in 25. ducantur, tum diuidantur per 9. fit 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato, & facilis quidem est æquationis ratio, sed oportet prius determinare de Numero.

13. *secundi.*



Quia enim volumus triangulum A B C. esse oxygonium, necesse est quadratum cuiuslibet lateris, minorem esse aggregato quadratorum à reliquis duobus lateribus, seu quod idem est, oportet semissem aggregati quadratorum à singulis lateribus, maiorem esse quadrato cuiuslibet lateris. Cùm ergo sint tria latera 1 N. 1 N. + 20. $\frac{8}{5}$ N. + 16. erit aggregatum quadratorum à singulis $\frac{124}{25}$ Q. + $\frac{456}{5}$ N. + 656. cuius semissis est $\frac{62}{25}$ Q. + $\frac{228}{5}$ N. + 328. qui quidem vt apparet maior est quadrato primi lateris, sed de aliis duobus non statim appareret. Oportet ergo vt $\frac{62}{25}$ Q. + $\frac{228}{5}$ + 328. sit maior quàm 1 Q. + 40 N. + 400. quâ æquatione resoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{45}{8}$. Rursus oportet vt $\frac{62}{25}$ Q + $\frac{228}{5}$ N. + 328. sit maior quàm $\frac{64}{25}$ Q. + $\frac{256}{5}$ N. + 256. qua æquatione resoluta, fit 1 N. minor quàm $\frac{62}{7}$. Oportet ergo ita fingere latus quadrati 1 Q. + 20 N. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{45}{8}$. minor quàm $\frac{62}{7}$ Porrò fiet valor Numeri si à quodam quadrato auferatur 1. & per residuum diuidatur 20. Ponatur ergo quadratus quæsitus quo cum instituenda est æquatio 1 Q. fiet $\frac{20}{1\ Q\ -\ 1}$. maior quàm $\frac{45}{8}$. minor quàm $\frac{62}{7}$. Quare vtraque æquatione resoluta constat quadratum quæsitum maiorem esse debere quàm 3 $\frac{8}{81}$. minorem quàm 4 $\frac{5}{9}$. Ponatur verbi gratia 4. & sint 1 Q. + 20 N. æquales 4 Q. fiet 1 N. $\frac{20}{3}$. latus scilicet A C. erit autem A B $\frac{80}{3}$. B C item $\frac{80}{3}$. segmenta B D. D C. fient $\frac{155}{6}$. & $\frac{5}{6}$. segmenta verò B E. E C. erunt $\frac{64}{3}$ & $\frac{16}{3}$. Ipsa E D $\frac{9}{2}$. Quamobrem à quadrato ipsius A C. hoc est à $\frac{400}{9}$. auferendo quadratum ipsius D C. puta $\frac{25}{36}$. remanet $\frac{1575}{36}$. quadratus perpendicularis A D. cui si addas quadratum ipsius E D. puta sub eadem denominatione $\frac{729}{36}$. fit $\frac{2304}{36}$. seu 64. quadratus lineæ A E. Ac proinde ipsa linea A E. est 8. & rationalis vt requirebatur. Quod si omnia latera per 3. multiplices, habebis omnia in integris, eritque A B. 80. A C. 20. B C. 80. A E. 24.

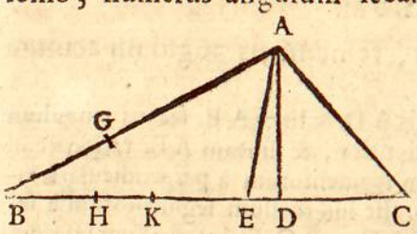
SCHOLIVM.

Non curamus vtrum perpendicularis A D. sit rationalis, an non; cum sufficiat latera trianguli vnà cum linea A E. facere rationalia.

Porrò infinita reperiri possunt hac arte triangula, & quorum latera diuersas seruent rationes, tum quia pro interuallis B K. B G. B H. sumi possunt tres proportionales diuersi ab ipsis 25. 20. 16. & in diuersa ratione, vnde diuersæ contingent solutiones, tum etiam quia quadratus 1 Q. + 20. N. diuersis quadratis æquari potest, cùm inter 3 $\frac{1}{81}$. & 4 $\frac{5}{9}$. infiniti sumi possint quadrati. Verbi gratia si æques 1 Q. + 20. N. cum $\frac{361}{100}$. Q. fiet 1 N. $\frac{2000}{361}$. & si sumas minima similium fiet A B 1805. A C. 500. B C. 1844. A E. 570. segmentum B E. 1444. segmentum E C. 400. & sic de alijs.

PROBLEMA SEXTVM.

Triangulum amblygonium constituere in rationalibus, vt obtuso angulo bifariam sciſſo, numerus angulum secantis sit rationalis.

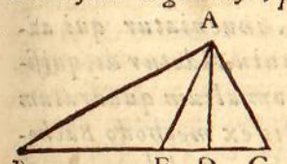


Esto triangulum amblygonium A B C. perpendicularis A D. angulum secans A E. interuallum segmentorum B D. D C. à perpendiculari factorum sit B K. interuallum autem segmentorum B E. E C. à secante angulum factorum esto B H. ac denique interuallum laterum A B. A C. sit B G. igitur ob demonstrata lemmate quarto sumemus, vt suprà tres numeros proportionales, vt 25. 20. 16. & statuemus B K. 25. B G. 20. B H. 16. tum posito A C. 1 N. fiet vt prius A B. 1 N. + 20. & B C. 1 N. + 16. Quare tandem inuenietur quadratus ipsius A E $\frac{2}{25}$ Q. + $\frac{36}{5}$. N. Quare omnia ducendo in 25. tum diuidendo per 9. fiet 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato. Quoniam verò volumus angulum B A C. esse obtusum, oportet vt quadrati simul, laterum A B. A C. sint minores quadrato baseos B C. Quare 2 Q. + 40 N. + 400. minus esse debet quàm $\frac{64}{25}$ Q. + $\frac{256}{5}$ N. + 256. vnde tandem 144. minor esse debet quàm $\frac{14}{25}$ Q. + $\frac{56}{5}$ N. & re in integris ad minimos deducta fit 1800. minor quàm 7 Q. + 140 N. Qua æquatione vt decet, resoluta, fit 1 N. maior quàm 9. Oportet igitur æquantes quadrato 1 Q. + 20 N. efficere 1 N. maiorem quàm 9. Quamobrem cùm fiat 1 N. quodam quadrato vnitate multato, & per residuum diuidendo 20. si ponatur quæsitus quadratus 1 Q. fiet $\frac{20}{1\ Q\ -\ 1}$. maior quàm 9. & tandem 29. maior quàm 9 Q. Quare oportet quæsitum quadratum, minorem esse quàm 3 $\frac{2}{9}$ Ponatur $\frac{25}{16}$. ergo 1 Q. + 20 N. æquatur $\frac{25}{16}$. Q. & fit 1 N. $\frac{320}{9}$. latus scilicet A C. Quare A B. est $\frac{400}{9}$. B C. $\frac{65}{9}$. segmenta B D. D C. $\frac{881}{18}$ & $\frac{431}{18}$.

At segmenta BE. EC. $\frac{100}{9}$ & $\frac{256}{9}$. denique AE fit $\frac{240}{9}$ & si sumas minimos similium, fiet AB. 125. AC. 80. BC. 164. AE. 60.

SCHOLIVM.

Hîc etiam perpendicularis curam non agimus, quæ ferè semper irrationalis reperitur. Cæterùm solutiones diuersæ totidem modis dari possunt, quot in præcedente, & easdem prorsus ob causas. Sed animaduersione dignum est, plerumque contingere vt linea AE. reperiatur æqualis ipsi lateri minori



AC. cùm scilicet ED. DC. sunt æquales, tunc enim, vt patet, triangulum AED, est æquangulum & æquale triangulo ADC. Verbi gratia si ponas 1 Q. + 20. N. æquari $\frac{25}{9}$ Q. fiet 1 N. $\frac{45}{4}$. latus scilicet AC. & si sumas minima similium, erit AB 125. AC 45. BC. 136. segmenta BD. DC. 118. & 18. At segmenta BE. EC. 100. & 36. Ipsa denique AE. 45. æqualis scilicet lateri AC. Interdum contingit AE. æquari ipsi EC. vt si ponas 1 Q. + 20 N. æquari $\frac{16}{9}$ Q. fiet enim 1 N. $\frac{180}{7}$. latus scilicet AC. & sumendo minima similium erit AB. 640. AC. 360 BC. 800. segmenta BD. DC. 575. & 225. At segmenta BE. EC. 512. & 288. Ipsa denique AE 288. æqualis segmento EC.

Verùm hæc de his dixisse sufficiat, & subtilis non minus quàm iucundæ speculationis hîc finis esto esto. Ad Diophantum redeamus.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus cum hypotenusæ numero faciat quadratum, at circumferentiæ numerus sit cubus. Ponatur areæ numerus 1 N. hypotenusa verò statuatur vnitatum aliquot quadratarum cum defectu 1 N. Esto 16 − 1 N. cùm ergo posuerimus aream 1 N. qui fit ex lateribus circa rectum erit 2 N. Atqui 2 N. producuntur ex 1 N. in 2. si ergo alterum circa rectum statuamus 2. erit alterum 1 N. & fiet circumferentia 18. qui non est cubus. At 18. ortus est è quodam quadrato, & vnitatibus 2. Oportet itaque inuenire quadratum aliquem, qui binario adiecto cubum faciat; ita vt cubus quadratum superet binario. Ponatur igitur quadrati latus 1 N. + 1. At cubi latus 1 N. − 1. fit quadratus quidem 1 Q + 2 N. + 1. At cubus 1 C. + 3 N. − 3 Q. − 1. volo ergo cubum superare quadratum binario. Quare quadratus cum binario, puta 1 Q. + 2 N. + 3. æqualis est 1 C + 3 N. − 3 Q. − 1. vnde inuenitur 1 N. 4. est igitur quadrati latus 5. cubi vero 3. ipse quadratus 25. cubus 27. Transmuto itaque rectangulum, & ponens aream illius 1 N. statuo hypotenusam 25. − 1 N. Manet autem basis 2. & cathetus 1 N. Restat vt

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτὸ περιλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ τετράγωνον. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτὸ ἢ κύβῳ. τετάχθω ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμὸς α̅. ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ αὐτὸ μονάδων τινῶν τετραγωνικῶν λείψει ἀριθμῷ α̅. ἔστω μονάδων ις̅ λείψει ἀριθμῷ α̅. ἀλλ' ἐπεὶ ὑπεθέμεθα τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτὸ εἶ ἀριθμὸς α̅. ὁ ἄρα ὑπὸ τὴν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτὸ γίνεται ἀριθμὸς β̅. ἀλλὰ ἀριθμοὶ β̅. περιέχονται ὑπὸ ἀριθμοῦ α̅. μονάδων β̅, ἐὰν οὖν τάξωμεν μίαν τὴν περὶ τὴν ὀρθὴν μονάδων β̅. ἔσαι ἡ ἑτέρα ἀριθμὸς α̅. καὶ γίνεται ἡ περίμετρος μ° ιη̅. ἢ ἐστι κύβῳ. ὁ δ̓ ιη̅. γέγονεν ἔκ τινος τετραγώνου, καὶ μονάδων β̅. δεῖ οὖν ἄρα εὑρεῖν τετράγωνόν τινα, ὃς περιλαβὼν μονάδας β̅. ποιεῖ κύβον. ὥστε κύβου τετραγώνῳ ὑπερέχειν μονάδας β̅. τετάχθω οὖν ἡ μὲν τὸ τετραγώνου πλευρὰ ς̲ α̅. μ° α̅. ἡ δὲ τοῦ κύβου ἀριθμὸς α̅. λείψει μ° α̅. γίνεται ὁ μὲν τετράγωνος δ̲ μ° α̅ ς̲ β̅ μ° α̅. ὁ δὲ κύβος κ° α̅ ς̲ γ̅ ϛ δ̲ υ̅ γ̅ μ° α̅. θέλω οὖν τὸν κύβον τὸν τετράγωνον ὑπερέχειν δυάδι. ὁ ἄρα τετράγωνος μ̲ δυάδος τουτέστι δ̲ υ̅ α̅. ς̲ β̅. μ° γ̅. ἴσος ὅστι κ° α̅. ς̲ γ̅ ϛ δ̲ υ̅ γ̅. μ° α̅. ὅθεν ὁ ς̲ διρίσκεται μ° δ̅. ἔσαι οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μ° ε̅. ἡ δὲ τοῦ κύβου μ° γ̅. αὐτοὶ ἄρα, ὁ μὲν τετράγωνος μ° κε̅. ὁ δὲ κύβος μ° κζ̅. μθυφίσαμαι οὖν τὸ ὀρθογώνιον, & τάξας αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν ἀριθμὸν α̅. τάσω τὴν ὑποτείνουσαν μ° κε̅. λείψει ἀριθμῷ α̅. ωρει δὲ καὶ ἡ βάσις μ° β̅. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμὸς α̅. λοιπὸν ὅστι τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης

ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῆς πρώτης τῶν ὀρθῶν. γίνεται δὲ δ̄ᵘ α̅. μ̄ᵒ χκε̅ γ̅ς̅ ν̅. ἔσται ἴση δ̄ᵘ α̅. μ̄ᵒ δ̅. ὅθεν γίνεται ὁ ς̅ᵒ μ̄ᵒ χκᾱ̅ ν̅. ὅτι τὰς ὑποτεινούσας. κ̓ μδ́ σι.

quadratus hypotenusæ æqualis sit quadratis laterum circa rectum. Fit ergo 1 Q. + 625 − 50 N. æqualis 1 Q. + 4. vnde fit $\frac{621}{50}$. Ad positiones. & constat.

OBSERVATIO D. P. F.

An autem alius in integris quadratus præter ipsum 25. inueniatur qui adsumpto binario cubum faciat. Id sanè difficilis primo obtutu videtur disquisitionis. Certissimâ tamen demonstratione probare possum nullum alium quadratum præter 25. in integris adiecto binario facere cubum. In fractis ex methodo Bacheti supetunt infiniti, sed doctrinam de numeris integris quæ sanè pulcherrima & subtilissima est, nec Bachetus nec alius quiuis cuius scripta ad me peruenerint, hactenus calluit.

IN QVAESTIONEM XIX.

TRIA hîc postulantur. Primò vt exhibeatur triangulum rectangulum in numeris rationalibus. Secundò vt area cum hypotenusa faciat quadratum. Tertiò vt ambitus trianguli, hoc est summa trium laterum, sit numerus cubus. Primùm autem, vltimum est quod curat Diophantus, æquando quadratos laterum circa rectum, quadrato hypotenusæ. Reliqua duo postulata præstat ipsis positionibus ingeniosè factis. Nam vt area cum hypotenusa faciat quadratum, posita area 1 N. ponit hypotenusam quadratum aliquem numerum vnitatum cum defectu 1. N. puta 16 − 1 N. Tum verò quia area est semissis plani sub lateribus circa rectum contenti, sequitur planum sub lateribus circa rectum esse 2 N. Quare vt habeantur ipsa latera circa rectum, sumendi duo numeri quorum, mutuo ductu fiant 2 N. Ex infinitis autem huiusmodi numeris seliguntur 1 N. & 2. quia in hypotenusa positus est 1 N. cum signo defectus, ac proinde addendo simul tria latera, eliduntur Numeri, & manet summa laterum, solus vnitatum Numerus, compositus scilicet ex quadrato illo qui positus est in hypotenusa, & ex binario qui ponitur pro altero laterum circa rectum. Cùm ergo summa hæc debeat conficere cubum, apparet necessitas secundæ positionis, qua inuestigatur quadratus qui adsumpto binario cubum creet.

Hoc sanè loco deuoluimur in æquationem complexam, in qua duæ species, duabus speciebus æquales sunt. Cùm enim 1 Q. + 2 N. + 3. æquentur 1. C. + 3 N. − 3 Q. − 1. fiunt tandem 1 C. + 1 N. æquales 4 Q. + 4. Nec verò sciri potest qua ratione huiusmodi æquationem resoluat Diophantus, cùm in libris eius qui extant, nusquam id docuerit. Certè regula generalis & perfecta hactenus ignoratur. Particularis autem quæ in hoc casu locum habet, traditur à multis, & est huiusmodi. Si 1 C. + 1 N. æquentur cuilibet Quadratorum & vnitatum numero, quorum tamen multitudo sit æqualis, fit 1 N. ipse Quadratorum, vel vnitatum numerus. Quod facilè demonstratur. Etenim vt se habet cubus ad quadratum, sic Numerus ad vnitatem. Quare & duo antecedentes simul nempe 1 C. + 1 N. se habebunt, ad consequentes simul, nempe ad 1 Q. + 1 sicut 1 N. ad 1. Quare si quatuor proportionalium sumantur secundi & quarti æquè multiplices, verbi gratia quadruplices, erit & 1 C. + 1 N. ad 4 Q. + 4. sicut 1 N. ad 4. Ac proinde si 1 C. + 1 N. ponantur æquales 4 Q. + 4. erit & 1 N. æqualis 4. Quod erat propositum.

Eadem de causa si 1 C. + 1 Q. æquentur certo Numerorum & vnitatum numero erit 1 Q. æqualis ipsi numero Numerorum vel vnitatum, ac proinde si numerus ille sit quadratus, erit solutio rationalis. Vt si 1 C. + 1 Q. ponantur æquales 9 N. + 9. fiet 1 Q. 9. & 1 N. 3. & ratio est quia 1 C. ad 1 N. se habet vt 1 Q. ad 1.

Necesse igitur fuit tam aptè fingere latus quadrati, & latus cubi, vt tandem prodirent 1 C. + 1 N. æquales quadratis & vnitatibus multitudine æqualibus, vt pote 4 Q. + 4. sed qui ratione certa id fecerit Diophantus, ita vt modus ab illo vsurpatus alijs huiusmodi quæstionibus applicari possit, non constat ex eius verbis, & verò perdifficile arbitror id diuinare. Sit enim propositum quærere quadratum, cui addendo 4. fiat cubus, quomodo quæso fingenda sunt latera quadrati & cubi, vt commoda proueniat æquatio, & solutio sit rationalis? Fateor equidem me ignorare & ei qui tale quid docuerit, non paruam habebo gratiam. Sanè quod propositum est, non est prorsus impossibile, nam non vnus, sed plures quadrati quæstioni satisfacientes possunt inueniri, quales sunt 4. & 121. quorum vtrique si adiicias 4. fiunt cubi 8. & 125. fortuita ergo videtur Diophanti operatio, nisi quis firmiora ad eam fulciendam ponat fundamenta. Et hac ratione operando vnica tantum reperitur solutio, cùm tamen quæstio sit de earum genere quæ plures solutiones admittunt.

Huic

Huic autem vltimo incommodo noſtra ſubueniet induſtria, tali expedito lemmate.

Dato quadrato qui adſumpto dato numero, cubum faciat, inuenietur alius quadratus idem præſtans.

Sit datus quadratus 25. qui adſumpto 2. cubum facit, puta 27. inueniendus eſt alius quadratus, qui præſtet idem. Fingatur eius latus 5 − 1 N. fiet quadratus 25. − 10 N. + 1 Q. cui addendo 2. fit 27. − 10 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingo 3 − tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipſius 3. nempe in 27. efficiant 10. habebo autem talem Numerorum numerum diuidendo 10. per 27. eſtque $\frac{10}{27}$. fingatur ergo latus cubi 3 − $\frac{10}{27}$ N. fiet cubus 27 − 10 N. + $\frac{900}{729}$. Q. − $\frac{1000}{19683}$. C. æqualis 27 − 10 N. + 1 Q. Quare tandem $\frac{10}{81}$. Q. æquantur $\frac{11000}{1968\frac{3}{4}}$. C. & fit 1 N. $4\frac{4977}{81000}$. eſt ergo latus quæſiti quadrati $\frac{324023}{61000}$. ipſe quadratus $\frac{96242652529}{6561000000}$. cui adiiciendo binarium fit cubus $\frac{14084424529}{6561000000}$. vel in minimis $\frac{2146689}{1000000}$. cuius latus $\frac{129}{100}$.

Simili ratione ſi datus ſit quadratus 4. cui adiiciendo 4. fit cubus 8. inuenietur alius quadratus idem præſtans. Etenim pone latus quadrati 2 + 1 N. fiet quadratus auctus quaternario 8 + 4 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingatur 2 + tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipſius 2. puta in 12. faciant 4. erit ergo numerorum numerus $\frac{1}{3}$. & fingatur latus cubi 2 + $\frac{1}{3}$ N. fietque cubus 8 + 4 N. + $\frac{2}{3}$. Q. + $\frac{1}{27}$ C. æqualis 8 + 4 N. + 1 Q. & tandem $\frac{1}{3}$ Q. æquatur $\frac{1}{27}$ C. & fit 1 N. 9. Eſt ergo latus quadrati 11. ipſe quadratus 121. qui adſumpto 4. facit cubum 125.

Hîc autem poſui latus quadrati 2 + 1 N. non autem 2 − 1 N. quia ſi poſuiſſem 2 − 1 N. oportuiſſet latus cubi poni 2 − $\frac{1}{3}$ N. Tuncque in cubo tam Numerorum quàm cuborum numeri affecti fuiſſent ſigno minoris. Quare vt in præcedenti exemplo, vnitates quidem & Numeri ſe mutuo eliſiſſent. At $\frac{1}{27}$ C. in alteram æquationis partem conceſſiſſet ob appoſitum ſignum defectus. Quamobrem 1 Q. + $\frac{1}{27}$ C. manſiſſent æquales $\frac{2}{3}$ Q. Quod eſt impoſſibile, quia 1 Q. maior eſt quàm $\frac{2}{3}$ Q. Ad ſimile vitandum incommodum contraria ratione poſitiones inſtitui in ſuperiore exemplo, quia videlicet 1 Q. minor erat quàm $\frac{900}{729}$ Q. vnde etiam ſi dato quadrato 121. alium quæreremus qui adſumpto 4. faceret cubum, poneremus latus quadrati 11 − 1 N. & cubi 5 − $\frac{22}{75}$ N. & inueniremus adhuc alium quadratum diuerſum ab ipſis 4. & 121.

Porrò examen operationis Diophanti tale eſt, fit 1 N. $\frac{621}{50}$. Ergo ſit hypotenuſa quæſiti trianguli 12. $\frac{29}{50}$. baſis 2. cathetus 12 $\frac{21}{50}$. Eſtque ſumma laterum cubus 27. At hypotenuſa cum area quæ eſt 12. $\frac{21}{50}$. facit quadratum 25.

QVAESTIO XX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſcito numero hypotenuſæ faciat cubum; At numerus circumferentiæ ſit quadratus. Si perinde vt in præcedente areæ numerum conſtituamus 1 N. numerum vero hypotenuſæ vnitatum aliquot cubicarum − 1 N. eò deuenitur vt quærendum ſit quis cubus adſcito binario faciat quadratum. Ponatur cubi latus 1 N. − 1. fit cubus adiecto binario 1 C. + 3 N. + 1 − 3 Q. æquandus quadrato. Eſto quadrato à latere 1 $\frac{1}{2}$ N. + 1. & fit 1 N. $\frac{21}{4}$. erit igitur cubi latus $\frac{17}{4}$. Ipſe verò cubus $\frac{4913}{64}$. Pono rurſus areæ numerum 1 N. Hypotenuſam verò $\frac{4913}{64}$. 1 N. Habemus autem & baſim 2. cathetum verò 1 N. & ſi æquemus quadratum hypotenuſæ, quadratis laterum circa rectum, inueniemus numerum rationalem.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ἐμβαδῷ αὐτῶ περιλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνον. ἐαν δὲ ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου τάξωμεν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμὸν α̅ τὸν δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μονάδων κυβικῶν λείψει ἀριθμῶ α̅. ἔρχεται ζητεῖν τὶς κύβ☉ μῆ μονάδων β̅. ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ἡ τῶ κύβου πλευρὰ ἀριθμῶ α̅. λείψει μονάδος α̅. ὁ κύβος γίνεται μῆ μονάδων β̅ κύβου α̅. ς̅ γ̅. μ̊ α̅. λείψει δ̊ γ̅. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̅ α̅. α̅ ς̅. μ̊ α̅. καὶ γίνεται ὁ ς̅ μ̊ κα̅ δ̅. ἔσαι ἄρα ἡ τῶ κύβου πλευρὰ ιζ̅ δ̅. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ὁ πιγ̅ ξδ̅. τάσω πάλιν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ς̅ α̅. τιω̅ ϗ ὑποτείνουσαν μ̊ πιγ̅ ξδ̅. λείψει ς̅ α̅. ἔχομεν δὲ ☾ τιω̅ βάσιν μ̊ β̅. τιω̅ ϗ κάθετον ς̅ α̅. καὶ ἐαν ἰσώσωμεν τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον τῇς ἀπὸ τῆς περὶ τιω̅ ὀρθιω̅ τετραγώνους, εὑρήσομεν τὸν ἀριθμὸν ῥητόν.

IN QVAESTIONEM XX.

PARVM differt huius quæstionis tractatio, à præcedentis tractatione, vt satis indicant ipsa Diophanti verba. Pendet itaque solutio à lemmate illo, quo quæritur cubus qui adiecto binario, quadratum faciat. Vbi subtili sanè artificio ponitur cubi latus 1 N. − 1. vt in cubo reperiatur − 1. cui adiiciendo binarium fit + 1. Aliter enim, nisi in cubo binario aucto numerus vnitatum esset quadratus, non posset æquari quadrato. Ponitur autem latus quadrati 1 + tot numeris qui sint dimidium Numerorum in cubo contentorum, puta $\frac{3}{2}$ N. dimidium de 3. N. vt scilicet duplum illorum æquet Numeros in cubo contentos, sic cùm & vnitates & Numeri multitudine æquales vtrimque se mutuo elidant, manet æqualitas inter cubos & Quadratos, puta inter 1 C. & $\frac{27}{4}$ Q. Porrò accidit vt cubo adiiciendo binarium, fiat quadratus, quia 2. componitur ex cubo & ex quadrato. Quare licet pulchrum problema vniuersaliter proponere.

Dato quouis numero composito ex cubo, & ex quadrato, reperietur cubus qui adsumpto dato numero, quadratum faciat.

Sit datus 17. compositus ex cubo 8. & ex quadrato 9. quæro cubum qui adsumpto 17. faciat quadratum. Ponatur latus cubi 1 N. − 2. fiet cubus 1 C. + 12 N. − 6 Q. − 8. cui adiiciendo 17. fit 1 C + 12 N. − 6 Q. + 9. æquandus quadrato, cuius latus, pono 3 + tot numeris quorum duplum per 3. multiplicatum, hoc est quorum sextuplum æquet 12 N. in cubo contentos. Fingetur ergo latus quadrati 3 + 2 N. fiet quadratus 9 + 12 N. + 4 Q. æqualis 1 C. + 12 N. − 6 Q. + 9. & fit 1 N. 10. Est ergo cubi latus 8. cubus 512. cui adiiciendo 17. fit 529. quadratus à latere 23. Idemque in similibus eadem semper ratione perficietur. Nam semper latus cubi ponetur 1 N. − latere cubi, ex quo datus numerus componitur, & sic in cubo huiusmodi binomij reperietur earumdem vnitatum cubus affectus signo minoris, cui addendo datum numerum, fiet vnitatum numerus æqualis quadrato, ex quibus datus numerus componitur.

Posset autem lemma Diophanti mutata paulum operatione æquè benè solui. Ponatur latus quadrati 1 N. + 1. erit ipse quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. vnde auferendo binarium, manet 1 Q. + 2 N. − 1. æquandus cubo, cuius latus fingam à tot Numeris − 1. vt eorum triplum æquet 2 N. positos in quadrato. Fingam ergo latus cubi $\frac{2}{3}$ N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{63}{8}$. Quare latus quadrati vt prius erit $\frac{72}{8}$. latus cubi $\frac{17}{4}$. superest vt integram quæstionis solutionem exhibeamus, quam omisit Diophantus ob molestas fractiones. Quadratus hypotenusæ fit $\frac{241237569}{4096}$. + 1 Q. − $\frac{4913}{32}$. N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta 1 Q. + 4. Quare tandem manent $\frac{4913}{32}$. N. æquales $\frac{24121185}{4096}$ Q. & fit 1 N. $\frac{628864}{24121185}$. æqualis areæ, itemque vni laterum circa rectum, alterum verò est 2. hypotenusa denique $\frac{1184671324602}{1543755840}$. quæ addita areæ facit cubum $\frac{4913}{64}$. At summa laterum est $\frac{5041}{64}$ quadratus à latere $\frac{71}{8}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτὸ περιλαβὼν τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. ὁ δ' ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτὸ ἢ κύβου. τετάχθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ς̄ τινὸς ἀορίστου ☾ ἀπὸ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτὸ, ἔστω ὁ ἀπὸ ς̄ α̃. καὶ ἀπὸ ς̄ α̃. μ̄ᵒ α̃, ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος ς̄ ς̄ β̃. μ̄ᵒ α̃. ἡ δὲ βάσις δ̄ᵘ β̃. ς̄ ς̄ β̃. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ̄ᵘ β̃. ς̄ ς̄ β̃. μ̄ᵒ α̃. λοιπὸν ὅτι τινὸς περίμετρον εἰς κύβον. τὸν δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ ἡ μὲν περίμετρος δ̄ᵘ δ̄ ς̄ ς̄. μ̄ᵒ β̃. ἴση κύβῳ. καὶ ἔστι συνθετος ἀριθμός. περιέχεται γὰρ ἀπὸ ς̄ς̄ δ̄. μ̄ᵒ β̃. καὶ ς̄ᵒ α̃. μ̄ᵒ α̃. ἐὰν οὖν ἑκάστην πλευρὰν μερίσωμεν εἰς ς̄ α̃. μ̄ᵒ α̃. ἕξομεν τινὰ περίμετρον ἀπὸν ς̄ς̄ δ̄. μ̄ᵒ β̃. ἴσην κύβῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτὸ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετρά-

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adscito vno laterum circa rectum, faciat quadratum, at circumferentiæ numerus sit cubus. Statuatur triangulum ab aliquo numero indefinito, & ab alio qui eum vnitate superet. Esto itaque ab 1 N. & ab 1 N. + 1. Erit igitur cathetus 2 N. + 1. Basis 2 Q. + 2 N. hypotenusa 2 Q. + 2 N. + 1. Restat vt circumferentia sit cubus, & numerus areæ cum vno laterum circa rectum faciat quadratum. Fit autem circumferentia 4 Q. + 6 N. + 2. æqualis cubo. Et est numerus compositus quem metitur 4 N. + 2. per 1 N. + 1. si ergo vnumquodque latus partiamur per 1 N. + 1. habebimus circumferentiam 4 N. + 2. æqualem cubo. Restat igitur vt areæ numerus adscito vno laterum circa rectum faciat qua-

dratum. Fit autem areæ numerus 2 C. + 3 Q. + 1 N. ſub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. vnum verò laterum circa rectum 2 N. + 1. ſub denominatione partis 1 N. + 1. & ſi hæc duo ad eiuſdem denominationis partem reducamus, fiunt 2 C. + 5 Q. + 4 N. + 1. ſub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. & ſi partiamur in denominatorem partis fiunt 2 N. + 1. Ita vt duo hæc compoſita faciant 2 N. + 1. æqualia quadrato. Quærebamus autem etiam 4 N. + 2. æqualia cubo. Igitur eò deducta res eſt, vt inueniamus cubum quadrati dupli. Eſt autem 8. reſpectu 4. ſint igitur 4 N. + 2. æquales 8. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{8}{5}$. $\frac{15}{5}$. $\frac{17}{4}$. & manet.

γωνον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτὸ κ̄ β̄. δ̄ γ̄. ς̄ ᾱ. ἐν μορίῳ δ̄ ᾱ. ς̄ β̄. μ̄ ᾱ. ἡ δὲ μία πρὸς τὴν ὀρθὴν ς̄ β̄ μ̄ ᾱ ἐν μορίῳ ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ, καὶ ἐὰν ποιήσωμεν τὰ δύο εἰς τὸ αὐτὸ μόριον γίνονται κ̄ β̄. δ̄ ε̄. ς̄ δ̄. μ̄ ᾱ. ἐν μορίῳ δ̄ ᾱ ς̄ β̄ μ̄ ᾱ. ἐὰν ᾖ μερήσωμεν πρὸς τὸ μόριον, γίνεται ς̄ β̄ μ̄ ᾱ. ὥστε τὰ δύο συντεθέντα ποιεῖν ς̄ β̄ μ̄ ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ. ἐζητεῖμεν ᾧ καὶ ς̄ δ̄ μ̄ β̄. ἴσους εἶναι κύβῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον τετραγώνου διπλασίονα ἵνα ᾖ ὁ η̄. μονάδων δ̄. ἔστω ἄρα ς̄ δ̄ μ̄ β̄. ἴσοι μ̄ η̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ᾱ. ᾱ ε̄. ἔσται ἄρα ὀρθογώνιον η ε ιε. ιζ ε. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XXI.

PVLCHERRIMVM problema, & raræ ſubtilitatis, quod vt perfectè explicetur aliqua ſunt ſupponenda, nimirum.

Primò datis duobus numeris planus bis ſub ipſis contentus, ſumma quadratorum, & interuallum eorundem, æquantur ſimul producto ex duplo ſummæ numerorum in maiorem numerum.

C 14. A 3. B 4. D 9. E 16. F 25. G 7. H 24.

Sint dati duo numeri A minor B maior, & duplum ſummæ illorum eſto C. at quadrati eorundem D. E. quorum ſumma F. interuallum G. Ac demum ſit H. duplum plani ſub A. B. contenti. Dico tres numeros F. G. H. ſimul, æquari producto ex C in B. Quoniam enim F eſt ſumma duorum D E. & G eorundem interuallum, [1] erunt F G ſimul æquales duplo maioris E. Cùm ergo ex B in ſeipſum fiat E, patet ex B. in duplum ſui, fieri numerum æqualem ipſis F G. ſimul. At ex eodem B. in duplum ipſius A fit H. Ergo ex B. in duplum ſummæ ipſorum A B. hoc eſt in C. fit numerus æqualis tribus F. G. H. ſimul. Quod erat intentum. 23. 1. *poriſm.*

Secundò. Datis duobus numeris vnitate diſtantibus, interuallum quadratorum ab ipſis æquatur ſummæ datorum numerorum. Etenim [2] ex interuallo numerorum, in ſummam ipſorum, fit interuallum quadratorum. Quamobrem ſi interuallum numerorum ſit vnitas, patet ex vnitate in ſummam numerorum, produci ſummam ipſam numerorum, pro interuallo quadratorum. 4. 2. *poriſm.*

Tertiò. Datis duobus numeris vnitate diſtantibus, ſi maiori eorum addatur planus ſub ipſis contentus, fiet quadratus maioris. Sint enim duo numeri A B. A C. quorum interuallum ſit vnitas B C. dico ſi plano ſub A B. A C. addatur A C. produci quadratum ipſius A C. Etenim [3] quadratus ipſius A C. æquatur planis ſub A C. A B. & ſub A C. B C. contentis. At planus ſub A C. & ſub vnitate B C. æquatur ipſi A C. ergo A C. cum plano ſub A C. A B. æquatur quadrato ipſius A C. Quod erat demonſtrandum.

A ... B. C.

2. *ſecundi.*

Quartò. In ſimilibus triangulis ſi area primi multiplicetur per quadratum denominatoris proportionis laterum, producitur area ſecundi. Etenim [4] areæ ſunt in duplicata ratione laterum ſed denominator rationis quæ alterius ſit duplicata, eſt quadratus denominatoris prioris rationis, [5] quoniam & quadrati ſunt in ratione duplicata laterum. Igitur patet propoſitum. 2. 3. *poriſm.* 11. *octaui.*

His poſitis nullo negotio explicatur operatio Diophanti. Nam fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. eſt hypotenuſa ſumma quadratorum, nimirum 2 Q. + 2 N. + 1. Alterum latus eſt interuallum eorundem quadratorum, nempe 2 N. + 1 Alterum denique eſt duplum producti, puta 2 Q. + 2 N. Quorum ſumma fit 4 Q. + 6 N. + 2. quæ ſi diuidatur per 1 N. + 1. maiorem numerorum à quibus effictum eſt triangulum, fiet quotiens duplum ſummæ numerorum, puta 4 N. + 2. per primum ſuppoſitum. Vt igitur numerus æquandus cubo ſit ſimplicior, & expeditior æquatio, ab inuento triangulo formatur aliud ſimile, diuidendo ſcilicet ſingula illius latera per 1 N. + 1. ſic enim ſumma trium laterum fit 4 N. + 2. æquanda cubo.

Area verò per quartum ſuppoſitum, fiet ſi area prioris trianguli puta 2 C. + 3 Q. + 1 N. diuidatur per quadratum ipſius 1 N. + 1. videlicet per 1 Q. + 2 N. + 1. hinc eſt quod huiuſmodi aream eſſe ait Diophantus $\frac{2C+3Q+1N}{1Q+2N+1}$. cui vt addatur alterum latus, nempe $\frac{2N+1}{1N+1}$. omnia facienda eiuſdem denominationis, ducendo ſcilicet 2 N. + 1. in 1 N. + 1. vnde fit 2 Q. + 3 N. + 1. quo ad-

dito ſupradictæ areæ ſub denominatione eiuſdem partis, fit $\frac{2\,C. + 5\,Q. + 4\,N. + 1}{1\,Q. + 2\,N. + 1}$. Hæc autem fractio reducitur ad integros, quia denominator metitur numeratorem. Quod ita probo. Numerator componitur ex duobus numeris, puta ex 2 C. + 3 Q. + 1 N. area prioris trianguli, & ex 2 Q. + 3 N. + 1. qui factus eſt ex 2 N. + 1. in 1 N. + 1. Prior itaque numerus, nempe area prioris trianguli, fit ex interuallo quadratorum à numeris à quibus formatum eſt triangulum, in planum ſub ipſis numeris contentum, hoc eſt ex 2 N. + 1. in 1 Q. + 1 N. Poſterior verò numerus fit ex eodem interuallo quadratorum 2 N. + 1. in maiorem numerorum à quibus effictum eſt triangulum, puta in 1 N. + 1. fiet ergo totus numerator ex 2 N. + 1. in ſummam ipſorum 1 Q. + 1 N. & 1 N. + 1. At cùm 1 Q. + 1 N. ſit planus contentus ſub numeris vnitate diſtantibus, & horum maior ſit 1 N. + 1. patet per tertium ſuppoſitum, horum ſummam æquari quadrato ipſius maioris, puta 1 Q. + 2 N. + 1. Quamobrem conſtat ſupradictum numeratorem produci ex 2 N. + 1. in ipſum denominatorem 1 Q. + 2 N. + 1 Quare diuiſo numeratore per denominatorem, fiet quotiens 2 N. + 1. æquandus vtique quadrato, eſt autem hic quotiens ſubduplus ad priorem quotientem 4 N. + 2. qui æquandus eſt cubo. Etenim 4 N. + 2. vt ſuprà oſtenſum eſt, eſt duplum ſummæ numerorum 1 N. & 1 N. + 1. at 2 N. + 1. eſt interuallum quadratorum ab ipſis. Porrò interuallum quadratorum æquatur ſummæ numerorum per ſecundum ſuppoſitum, quia numeri vnitate differunt. Ergo duplum ſummæ numerorum eſt duplum interualli quadratorum.

Iam igitur cùm habeamus 4 N. + 2. æquandum cubo, & 2 N. + 1. æquandum quadrato, patet quærendum eſſe cubum quadrati duplum, cuiuſmodi infinitos reperiri poſſe docuimus ad primam huius. Sumit Diophantus cubum 8. & quadratum 4. æquatque 4 N. + 2 ipſi 8. vel 2 N. + 1. ipſi 4. & fit vtrobique 1 N. $\frac{3}{2}$. Quare latera prioris trianguli fiunt $\frac{17}{2}$. $\frac{15}{2}$. $\frac{8}{2}$. ſed cùm omnia diuidi debeant per 1 N. + 1. puta per $\frac{5}{2}$. fiunt vtique quæſiti latera trianguli $\frac{27}{5}$. $\frac{15}{5}$. $\frac{8}{5}$. eſtque area $\frac{12}{5}$. cui addendo latus $\frac{8}{5}$. fit quadratus $\frac{20}{5}$. ſeu 4. At circumferentia eſt $\frac{40}{5}$. ſeu 8. cubus.

Cæterùm poſſet prius triangulum fingi etiam à 2 N. & 2 N. + 1. vel à 3 N. & 3 N. + 1. & ſic à quolibet Numerorum numero, & altero, vnitate illum ſuperante. Sed eadem ſemper ſolutio continget, ſi cubus & quadratus quibus cum vltima æquatio inſtituitur, iidem ſemper ſumantur. Poſſunt autem alij cubi & quadrati infiniti reperiri in eadem ratione 2. ad 1. per Canonem traditum ad primam huius, dum obſeruetur, cubum maiorem eſſe debere quàm 2. & quadratum maiorem eſſe oportere quàm 1. quia ſcilicet cubus æquandus eſt 4 N. + 2. & quadratus æqualis faciendus 2 N. + 1. Id autem contingit, ſi operando per dictum Canonem, ſumatur quilibet cubus minor vnitate, per quem diuidatur 2. denominator rationis datæ. Verbi gratia ſi ſumas $\frac{1}{8}$. & per eum diuidas 2. fiet 16. latus quadrati quæſiti, nam quadratus eſt 256. cuius duplum 512. eſt cubus. Vnde apparet ex hoc capite quæſtionem infinitas recipere ſolutiones. Nam ſi loco ipſorum 8. & 4. ſumas 512. & 256. fiet 1 N. $\frac{225}{2}$. & diuerſa continget ſolutio, vt potes experiri.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀυτῦ περιλαβὼν τὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ ἀυτῦ ἡ τετράγωνος. πάλιν ἐπὶ τῆς ἀυτῆς ἀγωγῆς χρησώμεθα τῇ πρὸ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ ϛ^ους δ̄. μ^ο β̄. ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ, ϗ ϛ^ους β̄. μ^ο ᾱ. ἴσα κύβῳ. ϗ γίνεται ζητεῖν τετράγωνον κύβου διπλασίονα. ἔστιν ις̄. κϑ η̄. ϗ πάλιν ἰσάζομεν μ^ο ις̄. ἀριθμοῖς δ̄. μ^ο β̄. κϑ γίνεται ὁ ϛ^ος μ^ο γ̄. ᾱ ϛ̄. ἔσται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον. ις̄ θ̃. ξγ̄ θ̃. ξε̄ θ̃.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſcito vno laterum circa rectum, ſit cubus, at circumferentiæ numerus ſit quadratus. Si rurſus eodem vtamur ductu quo in præcedente eo res deueniet, vt 4 N. + 2. æquanda ſint quadrato, & 2 N. + 1. æquanda cubo. Et oportet inuenire quadratum cubi duplum. Eſt autem 16. reſpectu 8. Et rurſum æquabimus 16. & 4 N. + 2. & fit 1 N. $3\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{16}{5}$. $\frac{63}{5}$. $\frac{65}{5}$.

IN QVAESTIONEM XXII.

OMNIA ex dictis ad præcedentem ſunt manifeſta. Et vti potes Canone ad primam huius tradito ad inueniendum cubos infinitos quadrati ſubduplos, diuidendo ſcilicet $\frac{1}{2}$ denominatorem rationis ſubduplæ per aliquem cubum habebis latus quadrati quæſiti. Obſeruandum autem hîc eſt, vt cubus per quem diuidetur $\frac{1}{2}$. ſit minor vnitate, vt proueniat quadratus maior binario. Verbi gratia ſi diuidas $\frac{1}{8}$. per $\frac{1}{8}$. fiet quotiens 4. latus quæſiti quadrati 16. quo vtitur Diophantus. Quod ſi diuidas $\frac{1}{8}$. per $\frac{1}{27}$. fiet quotiens $\frac{27}{8}$. cuius quadratus $\frac{729}{64}$. duplus eſt cubi $\frac{729}{64}$. & ſic de alijs.

Cæterum tam hæc quæstio, quàm præcedens extendi potest ad quaslibet duas species proximas, vel etiam ad non proximas, dum non sint quadratæ, quia vt monuimus ad secundam huius, datis duabus speciebus non quadratis, licet vnam reperire alterius duplam. Itaque poterunt eadem facilitate solui problemata quæ sequuntur.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit cubus, area verò cum altero laterum circa rectum faciat quadratoquadratum. vel è conuerso, vt ambitus sit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum faciat cubum.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum, faciat quadratocubum. vel è conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratocubus, area verò cum altero laterum faciat cubocubum. vel è conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit cubus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerso.

Et sic de alijs.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt circumferentiæ numerus sit quadratus, & adsumens areæ numerum, faciat cubum. Fingatur rectangulum ab 1 N. & 1. fiet vnum laterum circa rectum 2 N. alterum 1 Q. — 1. hypotenusa verò 1 Q. + 1. Et oportet quærere 2 Q. + 2 N. æquales quadrato. & 1 C + 2 Q. + 1 N. æquales cubo. Et sanè 2 Q + 2 N. conficere quadratum, facile est. Nam si binarium diuiseris per quadratum binario multatum, inuenies 1 N. Oportet autem eum talem inueniri, vt compositus ex cubo ipsius, duplo quadrati eiusdem, & ipsomet numero, faciat cubum. Est ergo 1 N. ex binario diuiso per 1 Q — 2. At cubus fit 8. sub denominatione partis quæ sit cubus à latere 1 Q. — 2. & duo quadrati fiunt 8. sub denominatione partis quæ quadratus est à latere 1 Q. — 2. Ipse verò numerus est 2. sub denominatione partis 1 Q. — 2. & si omnia ad eandem partem reducantur, fiunt 2 QQ. sub denominatione partis, quæ est cubus à latere 1 Q. — 2. Et est pars cubica. Oportet ergo vt & 2 QQ. æquentur cubo. & omnia per 1 C. diuidantur, fiunt 2 N. æquales cubo. Et si ponamus æquales vnitatibus cubicis, inuenietur 1 N. cubi alicuius dimi-

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν ᾧ μείζονι αὐτῆ ἢ τετράγωνος, καὶ προσλαβὼν τὴν ἐν τῇ ἐμβαδῷ αὐτῆ, ποιῇ κύβον. πεπλάσθω τὸ ὀρθογώνιον ὑπὸ ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. γίνεται μία μὲν τὴν περὶ τὴν ὀρθὴν ς̄ β̄. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ̄ ᾱ γ̄ μ̄ ᾱ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ̄ ᾱ. μ̄ ᾱ καὶ γίνεται ζητεῖν δ̄ β̄ ς̄ ᾱ β̄. ἴσοις τετραγώνῳ, καὶ κ̄ ᾱ δ̄ β̄ ς̄ ᾱ. ἴσα κύβῳ. καὶ τὸ μὲν δ̄ β̄ ς̄ β̄. κατασκευάζειν τετράγωνον ῥᾴδιόν ὄντιν. ἐὰν γὰρ δυάδα μερίσῃς εἰς τετράγωνον πλὴν δυάδα, δυρήσῃς τὴν ς̄ ᾱ. ἀλλὰ δεῖ ποιεῖν δυρίσκεσθαι, ὥστε τὴν ἀπ' αὐτῆ κύβον, καὶ δύο τὰς ἀπ' αὐτῆ τετραγώνους, καὶ αὐτὸν συμπέλμενον, ποιεῖν κύβον. ἔστιν οὖν ὁ ς̄ ἐκ δυάδος μεριζθείσης ὅπη δύναμιν ᾶ γ̄ μ̄ β̄. ὁ δὲ κύβος γίνεται μ̄ ἡ ἐν μορίῳ τῷ ὑπὸ δ̄ ᾱ. λείψει μ̄ β̄ κύβῳ, καὶ οἱ δύο ἀπ' αὐτῆ τετράγωνοι, γίνονται μ̄ ῑ̄. ἐν μορίῳ τῷ ὑπὸ δ̄ ᾱ λείψει μ̄ β̄ τετραγώνῳ. αὐτὸς δὲ μ̄ β̄ ἐν μορίῳ δυνάμεως ᾶ λείψει μ̄ β̄. καὶ πάντα ὅπη τὸ αὐτὸ μόριον, γίνονται δ̄ δ̄ β̄ ἐν μορίῳ τῷ ὑπὸ δ̄ ᾱ γ̄ μ̄ β̄ κύβῳ. ἔστι τὸ μόριον κυβικόν. ἔστω οὖν καὶ δ̄ δ̄ β̄. ἴση κύβῳ. καὶ πάντα πλὴν κύβον ᾱ. γίνονται ς̄ β̄. ἴσοι κύβῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν ἴσα μονάσι κυβικαῖς, δύρίσκεται ὁ ς̄ κύβα πλὴν τὸ ἥμισυ. ἔστω ὁ κύβος μ̄ ἡ. γίνεται ἄρα ὁ ς̄ τούτου τὸ ἥμισυ μ̄ δ̄. ἡ δὲ τετράγωνος ἔστι μ̄ ις̄.

τάσω ἐν δυνάμεσι, καὶ γίνονται δ^ῦ ις̄. ἴσα ἑνὶ βῶ ϛς^ῦις̄ β̄. καὶ γίνε͂ται ὁ ϛ̄ ἀ ς̄. ὁ ὢν τετράγωνος γίνε͂ται ᾱ^μος̄. καὶ δεῖ ἀπὸ τούτου ἀφελεῖν μῶ ἀ. ἐπειδήπερ ἡ μία τῆς πρὸς τὸν ὀρθὸν ἔστι δ^ῦ ᾱ λείψει μῶ α. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ ζητῆσαι κύβον, ὅπως τὸ τέταρτον τῆς ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου μεῖζον ᾖ μῶ β̄. ἐλάσσω δὲ μῶ δ̄. καὶ ἐκτὶ τάξωμεν αὐτὸν κῦ ᾱ. ζητήσομεν κυβοκύβα ᾱ δ̄ς̄. μείζονα μὲν μονάδων β̄. ἐλάσσονα δὲ μῶ δ̄. ὁ ἄρα κυβόκυβος μείζων μὲν μῶ η̄. ἐλάσσων δὲ μῶ ις̄. ἔστι δὲ τὰ ψκθ̄ ξθ̄ς̄. ὥστε ὁ κύβος κζ̄ ν̄. τάσσω οὖν ϛς^ους̄ β̄. ἵνα ᾖ μῶ κζ̄ ν̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ κζ̄ ῑς̄. ἡ δύναμις ψκθ̄ σνς̄. καὶ ἐὰν δυάδα περίσωμεν εἰς τὸν τούτου δυάδι ἐλάσσονα, εὑρήσομεν τὸν ϛ φιβ σιζ̄. καὶ ἔχομεν ἀπὸ τῆς ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου, ἄραι μονάδα ᾱ.

dium. Esto cubus 8. Fit ergo 1 N. huius dimidium, nempè 4. cuius quadratus est 16. Statuo in quadratis, & fiunt 16 Q. æquales 2 Q. + 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. At quadratus fit $\frac{1}{49}$. Et oportet ab hoc auferre 1. Quandoquidem vnum laterum circa rectum est 1 Q. − 1. Quamobrem res eò deducitur, vt quærere opus sit cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior sit quàm 2. minor quàm 4. Et si eum ponamus 1 C. quæremus $\frac{1}{4}$ C C. maiorem quidem quàm 2. minorem verò quàm 4. Ergo 1 C C. maior est quàm 8. minor quam 16. Talis est $\frac{729}{64}$. Ergo cubus $\frac{27}{8}$. Pono ergo 2 N. æquales $\frac{27}{8}$ & fit 1 N. $\frac{27}{16}$. Quadratus $\frac{729}{256}$. Et si binarium diuidamus per hunc binario multatum, inueniemus 1 N. $\frac{512}{217}$. & poterit ab illius quadrato vnitas auferri.

IN QVAESTIONEM XXIII.

TOTA operatio Diophanti sic habet. Fingatur triangulum ab 1 N. & ab 1. erit hypotenusa 1 Q. + 1. alterum laterum 1 Q. − 1. alterum verò 2 N. Quare ambitus siue summa trium laterum, erit 2 Q. + 2 N. æquanda quadrato. Area verò est 1 C. − 1 N. cui si adiiciatur ambitus, fit 1 C. + 2 Q. + 1 N. æquandus cubo. Et quidem facilè est æquare quadrato 2 Q. + 2 N. si ad hoc solùm respiciamus, nam poterit æquari cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 2. & fiet valor Numeri, ab huiusmodi quadrato auferendo 2. & per residuum diuidendo 2. Talis autem debet esse valor Numeri, vt per eum resoluendo hypostases 1 C. + 2 Q. + 1 N. inueniatur cubus. Quare apparet necessitas secundæ operationis, qua quæritur quadratus, qui multatus binario, & diuidens binarium, det quotientem, cui adiiciendo suum cubum, & duplum sui quadrati, fiat cubus.

In secunda igitur operatione, ponitur quadratus quæsitus 1 Q. vnde auferendo 2. & per residuum diuidendo 2. fit $\frac{2}{1\,Q\,-\,2}$. cuius cubus est $\frac{8}{1\,C\,+\,12\,Q\,-\,6\,Q\,Q\,-\,8}$. duplum autem quadrati eiusdem est $\frac{8}{1\,Q\,Q\,-\,4\,Q\,+\,4}$. Quare vt hæc omnia simul addantur reducantur ad maiorem denominationem, & $\frac{2}{1\,Q\,-\,2}$. fiet $\frac{2\,Q\,Q\,-\,6\,Q\,+\,8}{1\,C\,C\,+\,12\,Q\,-\,6\,Q\,Q\,-\,8}$. At $\frac{8}{1\,Q\,Q\,-\,4\,Q\,+\,4}$. fiet $\frac{8\,Q\,-\,16}{1\,C\,C\,+\,12\,Q\,-\,6\,Q\,Q\,-\,8}$. Tum omnia simul conficient $\frac{2\,C\,C\,+\,2\,Q\,Q}{1\,C\,C\,+\,12\,Q\,-\,6\,Q\,Q\,-\,8}$. æquandus cubo, & cùm denominator sit cubus, vt constat ex ipsa constructione, restat vt æquemus cubo numeratorem, puta 2 Q Q. Quod facilè fiet, nam æquari potest cuilibet numero cuborum cubico, eritque simplex æquatio, cùm sint duæ species proximæ, quæ reducetur ad primam simplicium, diuidendo omnia per 1 C. vt innuit Diophantus. Erit itaque valor Numeri in hac secunda operatione, semissis alicuius cubi, cuius vtique quadratus æquabitur 2 Q. + 2 N. At hîc duo curanda sunt. Primùm, vt huiusmodi quadratus sit maior quàm 2. vt euidens est. Secundum, vt idem quadratus talis sit, vt multatus binario, & diuidens 2. det quotientem maiorem vnitate, vt scilicet 1 Q. sit etiam maior quàm 1. eò quod vnum laterum circa rectum positum est 1 Q. − 1. vt autem in diuisione prodeat quotiens maior vnitate, oportet diuisorem minorem esse diuidendo. Igitur 1 Q. − 2. debet esse minor quàm 2. & addendo vtrimque 2. 1 Q. debet esse minor quàm 4. Constat ergo, quod ait Diophantus, quadratum esse debere maiorem quàm 2. minorem quàm 4. Cùm autem quadrati huius latus sit semissis alicuius cubi, vt dictum est, & quadratus semissis alicuius numeri, sit quadrans quadrati totius numeri, rectè infert Diophantus, quærendum esse cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior sit quàm 2. minor quàm 4. & ideo tertiam instituit operationem.

In tertia operatione ponit cubum quæsitum 1 C. cuius quadratus 1 C C. cuius quadrans $\frac{1}{4}$ C C. debet esse maior binario, minor quaternario. Quare 1 C C. debet esse maior quàm 8. minor quàm 16. Quomodo autem inueniri possint tales quot quis voluerit, cubocubi, constare potest ex iis quæ in simili adnotauimus ad secundam huius. Reducantur enim 8. & 16. ad fractionem cubocubicam, puta ad eam cuius denominator 64. fient $\frac{512}{64}$. & $\frac{1024}{64}$. inter quos cùm cadat cubocubus $\frac{729}{64}$. is optimè satisfaciet proposito. Porro eius latus quadratum, puta $\frac{27}{8}$. est cubus quæsitus, æquandus

2 N. vnde fit in secunda operatione 1 N. $\frac{27}{16}$. cuius quadratus $\frac{729}{256}$. nota quadrati insignitus æquabitur in prima operatione cum 2 Q. + 2 N. Reliquam operationem omisit Diophantus molestiam subterfugiens, nos in gratiam studiosorum, eam persequemur 2 Q. + 2 N. æquantur $\frac{729}{256}$ Q. & fit 1 N. $\frac{512}{217}$. per quem resoluendo primas hypostases, fiunt latera quæsiti trianguli hæc $\frac{3^{\circ}9233}{47089}$. $\frac{215055}{47089^{\circ}}$. $\frac{222203}{47089}$. vel $\frac{1024}{217}$. Area est $\frac{110108160}{10218313}$. summa trium laterum est $\frac{7464960}{47089}$. quadratus à latere $\frac{864}{217}$. & ipsi summæ laterum si addas aream, fit cubus $\frac{272097792}{10218313}$. cuius latus $\frac{648}{217}$.

Cæterùm tota ratio diuersitatis in solutione, pendet ex eo quod 2 N. qui debet æquari cubo, potest *diuersis* æquari *cubis*, cùm infiniti reperiri possint ad hoc idonei. Nam quod attinet ad primas positiones, vix reor eas aliter institui posse, ita vt in commodam incidamus æquationem.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus circumferentiæ sit cubus, & adscito areæ numero, faciat quadratum. Primùm inspicere oportet datis duobus numeris, quomodo inueniatur triangulum rectangulum, vt circumferentia quidem æquetur vni datorum numerorum, area verò æquetur alteri. Sunto duo numeri 12. & 7. & iiunctum sit ipsum 12. æquari circumferentiæ, ipsum verò 7. areæ. Qui fit ergo ex mutuo ductu laterum circa rectum, erit 14. Et si ponamus ipsorum alterum $\frac{1}{\text{N}}$ erit alterum 14 N. Est autem circumferentia 12. Quamobrem hypotenusa erit $12 - \frac{1}{\text{N}} - 14$. N. Restat vt huius quadratum, quod quod est $\frac{1}{\text{Q}} + 196$ Q. $+ 172 - \frac{24}{\text{N}} - 336$ N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc est $\frac{1}{\text{Q}} + 196$ Q. Communis addatur defectus, & à similibus auferantur similia, & omnia in 1 N. ducantur, fiunt 172 N. æquales 336 Q. + 24. & non possibile est hanc æquationem absolui, nisi dimidium numerorum in seipsum, detracto producto ex quadratis in vnitates, faciat quadratum. Et sunt numeri quidem compositi ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ; productum vero ex quadratis in vnitates, fit ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream ducto. Quamobrem si huiusmodi dentur numeri, soluetur quæstio. Esto numerus areæ 1 N. circumferentiæ verò numerus cubus simul & quadratus, putà 64. Et vt constituatur triangulum, oportet vt dimidium compositi ex quadrato ipsius 64. & ex 4. N. ducentes in seipsum, auferamus inde quod fit octies ex quadrato circumferentiæ in 1 N. & reliquum quæramus æquale quadrato. Fiunt 4 Q + 4194304 − 24576 N. & omnium quadrans, fit 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquale qua-

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ἵσπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἀριθμὸς κύβος, περισλαβὼν ὁ τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. πρότερον δεῖ σκέψασθαι δύο ἀριθμοὺς δοθέντων δύο τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ μὲν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἴσος ᾖ ἑνὶ τῶν δοθέντων, ὁ δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ τῷ ἑτέρῳ. ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅτε ιβ. καὶ ὁ ζ. καὶ ὑποτετάχθω τὸν μὲν ιβ. εἶναι τὸ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ. τὸν δὲ ζ. τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ. ὁ ἄρα ὑπὸ τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ ἔσται μ̊ ιδ. ☾ ἐὰν τάξομέν μίαν αὐτῶν α̃ ξ̃. α̃. ἡ ἑτέρα ἔσται ς̃ ξ̃ ιδ. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ μ̊ ιβ̃. ἡ ἄρα ὑποτείνουσα ἔσται μ̊ ιβ̃. τ̃ α̃ ξ̃. α̃. ς̃ ξ̃ ιδ. λοιπόν ἐστι τὸν ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, ὅπερ ἐστὶ α̃ δ̃ῦ. α̃. δ̃ῦ ρ̃ϛ̃. μ̊ ροβ̃. λείψει κδ̃. α̃. ς̃ῦ τλϛ̃. ἰσωθέντα τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετραγώνοις, τουτέστι α̃ δ̃ῦ. α̃. δ̃ῦ ρ̃ϛ̃. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ πάντα ἀπὸ ἀριθμόν, γίνονται ς̃ς̃ῦ ροβ̃. ἴσοι δ̃ῦ τλϛ̃. μ̊ κδ̃. καὶ ἐ πάντοτε δύνατόν ἐστι, εἰ μὴ τὸ ἥμισυ τῶν ξ̃ς̃ ἐφ' ἑαυτὸ λείψαν τὰς δυνάμεις ἀπὸ τὰς μονάδας, ποιῇ τετράγωνον. ☾ ἐστὶν οἱ μὲν ς̃ς̃ῦ ἐκ τῶν ἀπὸ τῆς περιμέτρου, καὶ τῶν τετραπλασίου τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ. αἱ δὲ δυνάμεις ἀπὸ τὰς μονάδας, ἐκ τῶν ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου ἀπὸ τὸ ἐμβαδόν. ὥστε ἐὰν τοιοῦτοι δοθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ λύσεται τὸ ζητούμενον, ἔστω ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμοῦ α̃. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος μ̊ ξδ̃. καὶ ἵνα συναθῇ τὸ τρίγωνον δεῖ τῶν ἀπὸ μ̊ ξδ̃. τετραγώνου, καὶ ἀριθμοῦ δ̃. τὸ ἥμισυ ποιήσαντα ἐφ' ἑαυτὸ ἀφελεῖν τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου εἰς ἀριθμὸν α̃. καὶ ζητῆσαι τὰ λοιπὰ ἴσα τετραγώνῳ. γίνονται δ̃ῦ δ̃. μ̊ υιϛ̃. ,δτδζ̃. λείψει ἀριθμοῦ β̃. ,δφος̃. καὶ πάντων τὸ τέταρτον, γίνεται δ̃ῦ

ἀ. μ° ρδ̄. ψφος̄. λείψει ἀριθμῷ ϛρμδ̄. ἴσῳ τετραγώνῳ. ἔστι δὲ ἡ ἀριθμὸς ᾱ. μ° ξδ̄. ἴσα τετραγώνῳ, ϛ̄ ἐξισώσω σοι ἀριθμοὶ, καὶ ἡ ὑφοχὴ, καὶ ἡ μέτρησις, καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

drato. Porro autem & 1 N + 64. æquatur quadrato. Et exæquentur tibi numeri; & exceſſus, & menſuratio, & reliqua ſunt dilucida.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti ſubtilis eſt, quam ipſe compendiosè perſequitur. Nos autem vt omnia fiant dilucida, eam fuſius explicabimus. Data circumferentia trianguli 12. & area 7. conſtat productum ex lateribus circa rectum eſſe 14. ſit ergo alterum latus 14. N. alterum $\frac{1}{1N}$. vt eorum mutuo ductu fiat 14. vtroque igitur de ſumma laterum 12. detracto, relinquitur hypotenuſa $12 - \frac{1}{1N} - 14$ N. Quare vt triangulum exhibeatur in rationalibus, oportet huius quadratum, æquari quadratis reliquorum laterum ſimul iunctis. Vt autem habeamus quadratum de $12 - \frac{1}{1N} - 14$ N. ſumemus quadratos partium, & quod fit bis ex qualibet parte in quamlibet ex alijs, per primam ſecundi poriſmatum, fietque totus quadratus $\frac{1}{1Q} + 196$ Q. $+ 172 - \frac{24}{1N}. - 336$ N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta $\frac{1}{1Q} + 196$ Q. Quare tandem 172. æquatur $\frac{24}{1N} + 336$ N. & ducendo omnia in 1 N. fiunt 172 N. æquales 24 + 336 Q. Quæ eſt tertia compoſitarum. Quamobrem operando more Diophanti, vt docuimus ad trigeſimam tertiam primi, oportet ducere vnitates in quadratos, hoc eſt 24. in 336. & productum 8064. auferre à quadrato numeri 86. qui eſt ſemiſſis numeri Numerorum 172. hoc eſt à 7396. Quod fieri nequit, quia 7396. minor eſt quàm 8064. Hæc igitur æquatio eſt impoſſibilis. Itaque inſpiciendum eſt vnde prouenerint 172 N. itemque 24. & 336 Q. Quod ſi conſideres qua ratione ſumptus ſit quadratus de $12 - \frac{1}{1N}. - 14$ N. facile omnia conſequeris. Nam 172. fit ad 144. quadratum de 12. addendo 28. duplum ipſius 14. Quare cùm 14. ſit duplum areæ 7. ac proinde 28. eiuſdem quadruplum. Rectè dixit Diophantus 172. numerum Numerorum, componi ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ. At 24. eſt duplum circumferentiæ. 12. & 336. eſt numerus qui fit bis ex 12. in 14. hoc eſt ex duplo ipſius 12. in 14. Atqui 14. eſt duplum areæ, & quod fit ex duplo vnius numeri in duplum alterius, idem eſt atque id quod fit ex quadruplo vnius in alterum. Igitur 336 fit ex quadruplo circumferentiæ 12. in aream 7. Conſtat ergo vnitates 24. eſſe duplum circumferentiæ, & numerum quadratorum 336. eſſe productum ex quadruplo circumferentiæ in aream. Proinde ducere vnitates in quadratos, idem eſt ac ducere duplum circumferentiæ in quadruplum ipſius circumferentiæ, & productum in aream. At ex duplo alicuius numeri, in quadruplum eiuſdem, fit octuplum quadrati ipſius numeri. Rectè igitur infert Diophantus numerum qui fit ex quadratis in vnitates, produci ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream.

Corrigenda igitur eſt prima operatio, & tales ponendi numeri areæ & circumferentiæ, vt à quadrato ſemiſſis compoſiti, è quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ, auferendo octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream, ſuperſit quadratus. Idcirco ponit aream Diophantus 1 N. circumferentiam numerum cubum, puta 64. quia id requirit lex problematis, quem vult præterea eſſe quadratum, ob cauſam quam infra explicabimus. Eſt ergo ipſius 64. quadratus 4096. cui addendo quadruplum areæ fit 4096 + 4 N. cuius ſemiſſis 2048 + 2 N. cuius quadratus eſt 4 Q. + 4194304. + 8192 N. vnde ſi auferas octuplum ex quadrato ipſius 64. in 1 N. nempe 32768 N. ſupereſt 4 Q. + 4194304. − 24576 N. æquandus quadrato, & ſumendo quadrantem more Diophanti 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquandus quadrato. Quoniam verò requiritur, vt & circumferentia adſumens aream, faciat quadratum, oportet etiam 1 N. + 64. æquari quadrato. Quare in duplicatam incidimus æqualitatem. Quæ vt reſolui poſſit, imitando artificium decimæ octauæ tertij, exæquandæ prius ſunt vnitates, vt tangit Diophantus. Quod quidem facilè præſtari poteſt, quia vterque 1048576. & 64. quadratus eſt, vnde patet cur 64. voluerit eſſe quadratum, nam aliter non poſſet 64. ad quadratum 1048576. habere rationem quadrati ad quadratum. Neceſſario autem 1048576. quadratus reperitur, quia quadrans eſt quadrati de 2048. vt ex conſtructione manifeſtum eſt. Itaque quoniam denominator rationis 64. ad 1048576. eſt quadratus 16384. ducto hoc quadrato in 1 N. + 64. fiet hinc 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato. Inde vt prius 1 Q. + 1048576. − 6144 N. æquandus quoque quadrato. Quia verò vterque & quadratorum & vnitatum numerus quadratus eſt, duplici via reſolui poteſt duplicata æqualitas. Primo enim reſpiciendo ad 1 Q. ſumo interuallum Numerorum quadrato æquandorum, quod eſt 22528 N. − 1 Q. quod mutuo ductu conficiunt 22528 − 1 N. & 1 N. (hi ſoli apti ſunt æquationi reſoluendæ, vt conſtat ex iis quæ paſſim libro tertio docuimus, vt ſcilicet in ſemiſſe interualli eorum reperiatur 1 N. latus 1 Q.) Horum ſumma eſt 22528. cuius ſemiſſis quadratus 126877696. æquatur 16384 N. + 1048576. vnde fit 1 N. 7680. numerus ſcilicet areæ, cùm circumferentia ſit 64. ſed omnino impoſſibile eſt triangulum conſtituere cuius area ſit 7680. circumferentia 64. Quia ex 64. fieri nequeunt tres partes, quarum duæ inuicem ductæ efficiant 15360. duplum ſcilicet areæ, cùm 64. neque in duas partes diuidi poſſit

quæ

quæ id præstent: siquidem quadratus semissis ipsius 64. puta 1024. maior est producto multiplicationis duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas secari possit 64. per quintam secundi Euclidis. Quod si primam operationem repetendo quæras triangulum cuius area 7680. circumferentia 64. inuenies sanè à quadrato semissis compositi è quadrato circumferentiæ 64. & ex quadruplo areæ 7680. non posse subduci octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream. Denique si per valorem Numeri 7680. resoluas primas hypostases, inuenies hypotenusam longè minorem nihilo, cùm vnum laterum circa rectum, fiat multo maius tota circumferentia.

Aliam igitur inire viam cogimur, qua respiciendo ad vnitates, sumo interuallum numerorum quadrato æquandorum 1 Q. − 22528 N. Tum quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat. Ita tamen vt in semisse summæ illorum, vel interualli, reperiantur vnitates 1024. quod est latus ipsius 1048576. Sunt ergo huiusmodi numeri 11 N. & $\frac{1}{2}$ N. − 2048. horum interuallum 2048 + 10 $\frac{10}{11}$. cuius semissis 1024. + 5 $\frac{5}{11}$ N. cuius quadratus 1048576. + $\frac{122880}{11}$. N. + $\frac{3600}{121}$ Q. æquatur 1048576 + 16384 N. vnde fit 1 N. 175. $\frac{49}{225}$. Area scilicet quæsiti trianguli. Redeo ergo ad propositam initio quæstionem, & quæro triangulum, cuius ambitus sit 64. area 175 $\frac{49}{225}$. Pono vnum laterum circa rectum $\frac{1}{1N}$. alterum $\frac{78848}{225}$ N. fit hypotenusa 64 − $\frac{1}{1N}$. − $\frac{78848}{225}$ N. cuius quadratum si facias æqualem quadratis laterum circa rectum, fiunt tandem $\frac{1079296}{225}$. æquales $\frac{128}{1N}$ + $\frac{10092544}{225}$ N. & ducendo omnia in 1 N. tum in 225. fiunt 1079296 N. æquales 28800. + 10092544 Q. & rursus diuidendo omnia per 128. vt in minimis exhibeantur, habes 8432 N. æquales 225 + 78848 Q. Quare fit 1 N. $\frac{4400}{78848}$ vel $\frac{4032}{78848}$. seu in minimis $\frac{275}{4928}$. vel $\frac{9}{176}$. Et si per vtrumlibet valorem Numeri resoluas hypostases, fiunt vtroque modo latera circa rectum 19 $\frac{5}{9}$ & 17 $\frac{253}{273}$. Est ergo hypotenusa 26 $\frac{1298}{2475}$ ambitus 64. cui addendo aream, puta 175 $\frac{49}{225}$. fit quadratus $\frac{43824}{225}$. cuius latus $\frac{221}{15}$. Hæc ad omnium pulcherrimi subtilissimique problematis explicationem adnotasse sufficiat.

Quoniam verò in his libris Diophantus diuersimodè vtitur duplicata æqualitate, non abs re me facturum arbitror, si omnes quos vsurpat modos sigillatim recenseam, & vnum in locum quæ sparsim à nobis adnotata sunt, collecta coniiciam, vt sic tota duplicatæ æqualitatis doctrina discentium animis firmius inhæreat. Nec solas Diophanti hypotheses afferemus, sed & alias plerúmque exhibebimus, quibus varia huiusmodi æquationum symptomata declarentur, nouamque insuper quam excogitauimus æquationis rationem, quamque ad quadragesimam quintam quarti explicauimus, alijs adiiciemus.

OBSERVATIO D. P. F.

Vbi non sufficiunt duplicatæ æqualitates vel διπλοισότητες, recurrendum ad τριπλοισότητας, seu triplicatas, æqualitates quæ est nostra inuentio ad plurima problemata pulcherrima præuiam facem præferens. Æquentur videlicet quadrato

1 N + 4
2 N + 4
5 N + 4

oritur triplicata æqualitas cuius solutio per medium duplicatæ æqualitatis est in promptu. Si ponatur loco 1 N. numerus vna cum 4 quadratum conficiens v. g. 1 Q + 4. N. fiet primus numerorum æquandorum quadrato 1 Q. + 4 N. + 4 secundus igitur erit 2 Q + 8 N. + 4. tertius 5 Q + 20 N + 4. primus autem ex constructione est quadratus, ergo debent æquari quadrato 2 Q + 8 N + 4 & 5 Q + 20 N + 4 & oritur duplicata æqualitas quæ vnicam certè exhibebit solutionem, sed eâ exhibitâ prodibit rursum noua, & à secunda tertia deducetur & in infinitum. Quod opus ita procedet vt inuento valore 1 N. rursus ponatur 1 N. esse 1 N + numerus qui primum ipsi 1 N. inuentus est æqualis. Hac enim viâ infinitæ prioribus solutionibus solutiones accedunt & postrema semper deriuabitur à proxime antecedenti. Huius inuentionis beneficio infinita triangula eiusdem areæ possumus exhibere, quod ipsum videtur latuisse Diophantum, vt patet ex quæstione octaua lib. 5. in quâ tria tantum triangula æqualis areæ inuestigat vt sequentem quæstionem in tribus numeris construat quæ ad infinitos ex iisquæ nos primi deteximus, recipit extensionem.

Primvs Modvs vtendi duplicata æqualitate est, quando vterque numerus quadrato æquandus componitur ex Numeris & ex vnitatibus, & numerus Numerorum idem est vtrobique. Et hîc quatuor casus considerari possunt. Primus casus est, cùm vterque numerus & vnitatum & Numerorum afficitur signo pluris, vt accidit duodecima secundi, vbi æquandi erant quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. Itemque decima quarta tertij vbi æquandi erant quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. Et hîc facilis est æquationis ratio. Nam inueniendi sunt duo quadrati, quorum idem sit interuallum

atque ipsarum vnitatum quæ reperiuntur in numeris quadrato æquandis , hac tamen lege vt maior quæsitorum quadratorum excedat maiorem vnitatum numerum , minor quadratus excedat minorem vnitatum numerum. Vt cùm æquantur quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. quorum interuallum 1. quæremus duos quadratos ,quorum interuallum sit 1. ita vt maior quadratorum excedat 3. minor excedat 2. idcirco sumi non possunt $\frac{25}{16}$. & $\frac{9}{16}$. neque $\frac{25}{9}$ & $\frac{16}{9}$. sed sumpsit Diophantus $\frac{289}{64}$ & $\frac{225}{64}$. Similiter cùm æquandi sunt quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. quorum interuallum 48. sumit Diophantus quadratos 16. & 64. quia 16. excedit 6. & 64. excedit 54. non potuerunt autem sumi 1. & 49. ob defectum conditionis adiectæ.

Secundus casus est , cùm vnitatum numeri afficiuntur vtrobique signo minoris , vt accidit decima quarta secundi , vbi æquandi fuere quadrato 1 N. − 6 & 1 N. − 7. & in hoc casu absque vlla conditione sufficit inuenire duos quadratos , quorum interuallum æquet interuallum propositorum numerorum , vt in data hypothesi , quia interuallum est 1. duo quicunque quadrati vnitate distantes , satisfacient proposito , sumpsit Diophantus $\frac{9}{16}$ & $\frac{25}{16}$. & sumere potuisset $\frac{16}{9}$ & $\frac{25}{9}$. vel alios quoscumque quorum interuallum sit vnitas.

Tertius casus est. Cùm Numerorum numeri afficiuntur vtrobique signo minoris , quod nusquam accidit in Diophanto, sed nobis decimam tertiam secundi per duplicatam æqualitatem soluentibus,in hunc casum cõtingit incidisse,æquantibus quadrato tum 9 − 1 N. tum 21 − 1 N. Hìc autem inueniendi sunt duo quadrati eodem interuallo distantes,quo & propositi numeri,ea tamen lege vt maior ipsorum sit minor vnitatibus maioris propositorũ numerorum;minor autem sit minor vnitatibus minoris. Vt in data hypothesi , quia propositorum numerorum interuallum est 12. Quærendi sunt duo quadrati , quorum interuallum sit 12. ita tamen vt maior quæsitorum quadratorum sit minor quàm 21. minor autem sit minor quàm 9. quales sumpsimus 4. & 16.

Quartus casus est. Cùm in vno propositorum numerorum , vnitatum numerus afficitur signo pluris , in altero afficitur signo minoris, vt si sint æquandi quadrato 1 N. + 8. & 1 N. − 12. Tunc que inueniendi sunt duo quadrati quorum interuallum sit idem , atque propositorum numerorum, absque vlla conditione. Sic in data hypothesi , quia propositorum numerorum interuallum est 20. sumam duos quadratos , quorum interuallum sit 20. quales sunt 36. & 16. Itaque in his omnibus casibus , manifestum est propositam quamcunque duplicatam æqualitatem infinitis modis explicari posse.

Secvndvs Modvs vtendi duplicata æqualitate est , quando rursus vterque propositorum numerorum componitur ex Numeris & vnitatibus , & Numerorum numeri sunt inæquales , sed vnitatum numerus vtrimque quadratus est. Et hìc duplex casus considerari potest. Primus casus est , cùm idem quadratus numerus vnitatum vtrimque reperitur , vt accidit in prima operatione quadragesimæ quintæ quarti vbi æquantur quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & in hoc casu cùm interuallum propositorum numerorum constet ex solis Numeris (vt vides in data hypothesi huiusmodi interuallum esse 2 N.) quærendi sunt duo numeri , quorum mutuo ductu fiat dictum interuallum , ea lege vt in summa eorum contineatur duplum lateris quadrati , qui est in vtroque propositorum numerorum , vt in dato exemplo cùm latus quadrati 4. sit 2. cuius duplum 4. deligendi sunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita vt in semisse summæ illorum reperiantur 4. vnitates, vnde patet alios deligi non posse quàm $\frac{1}{2}$ N. & 4. quorum summæ semissis quadratum si æques maiori 8 N. + 4. vel eorundem interualli semissis quadratum æques minori 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. 112. vnde liquet in hoc casu vnicam tantum dari posse solutionem. Reducitur tamen hìc casus ad quartum modum , vt infrà ostendemus , qua ratione infinitis modis resolui potest.

Secundus casus est , cùm in propositis numeris , inæquales vnitatum numeri quadrati continentur , vt accidit decima septima tertij , vbi æquantur quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. quorum interuallum cùm componatur ex Numeris & vnitatibus , est quippe 5 N. + 5. tales sunt deligendi duo numeri quorum mutuo ductu id fiat , vt in eorum summa reperiatur duplum lateris maioris quadrati , & in eorum interuallo reperiatur duplum lateris minoris quadrati , hoc est vt in summa reperiatur 6. in interuallo 4. Quare per Canonem primæ primi facilè reperientur huiusmodi numeri puta 5. & 1. Aliter eosdem numeros reperies , si capias summam & interuallum laterum quadratorum 9. & 4. hoc est summam & interuallum ipsorum 3. & 2. fient enim vt prius 5. & 1. Quia igitur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. sumendi sunt duo numeri , in quorum altero sint vnitates 5. in altero 1. Patet nonnisi duobus modis tales numeros sumi posse,puta vel 5 N. + 5. & 1.vel 1 N. + 1. & 5. vnde liquet in hoc casu contingere posse vt duæ solutiones exhibeantur , dico contingere posse quia plerumque vnica prouenit solutio , vt in data hypothesi , non enim sumendo 5 N. + 5. & 1. solui potest quæstio , quia horum summæ semissis quadratus , puta $\frac{25}{4}$ Q. + 15 N. + 9. maior est omnino quàm 10 N. + 9. ac proinde illi æquari nequit. Contingit autem duplex solutio si proponantur æquandi quadrato 36 N. + 49. & 12 N. + 1. quia enim horum interuallum est 24 N. + 48. constat ex tradita regula produci posse huiusmodi interuallum , siue ex 6. in 4 N. + 8. siue ex 8. in 3 N. + 6. Vnde fit 1 N. vel 2. vel $\frac{20}{3}$.

Verò in hoc secundo casu potest accidere vt vterque vel alter numerus Numerorum afficiatur signo minoris. Vt si sint æquandi quadrato $36-6$ N. & $16-1$ N. quorum interuallum $20-5$ N. Quod si ponatur fieri ex 2. in $10-\frac{5}{2}$ N. optimè resoluetur æquatio, & fiet 1 N $\frac{144}{145}$. Rursus si sint æquandi quadrato $36-1$ N. & $16+9$ N. quorum interuallum $20-10$ N. hoc si ponatur fieri ex 2. in $10-5$ N. vel etiam ex 10 in $2-1$ N. duobus modis resoluetur æquatio, & fiet 1 N. vel $\frac{116}{25}$. vel 20. Attamen vtrumlibet horum accidat, sæpè continget æquationem resolui nullatenus posse, vt si sint æquandi quadrato $36-1$ N. & $16-6$ N. quorum interuallum $20+5$ N. Etenim si per regulam traditam sumantur numeri, quorum mutuo ductu fiat $20+5$ N. horum summæ semissis quadratus semper erit maior quàm $36-1$ N. quia omnes illius partes afficientur signo Pluris. Quare quotiescunque minor Numerorum defectus se tenebit ex parte maioris quadrati, erit impossibilis æquationis duplicatæ resolutio. Sed etsi minor defectus iungatur minori quadrato, non semper resolui poterit æquatio, vt si sint æquandi quadrato $9-8$ N. & $4-6$ N. Cùm enim horum interuallum sit $5-2$ N. siue ponas illud produci ex 1. in $5-2$ N. siue ex 5. in $1-\frac{2}{5}$ N. nil ages, nam horum summæ semissis quadratus semper erit maior quàm $9-8$ N. Similiter cùm numeri ex vna tantùm parte deficiunt, potest impossibilis esse æquationis resolutio, vt si sint æquandi quadrato $36+3$ N. & $16-9$ N. Cùm enim horum interuallum sit $20+12$ N. non potest id fieri nisi ex 2. in $10+6$ N. vel ex 10. in $2+\frac{6}{5}$ N. sed vtroque modo, illorum summæ semissis quadratus maior est quàm $36+3$ N. Quia vero & casus iste secundus cum omnibus suis symptomatis reduci potest ad Quartum modum, vt infrà docebimus, semper huiusmodi æquationes non vna ratione resolui poterunt.

Tertius modus est, cùm rursus propositi numeri componuntur ex Numeris & vnitatibus inæqualibus multitudine, & vnitatum numeri quadrati non sunt, sed Numerorum numeri sunt plani similes. Vt accidit decima octaua & decima nona tertij. Itemque trigesima quinta quarti. Et reducitur hic modus ad primum, faciendo numeros Numerorum æquales. Nam interdum minor ducitur in denominatorem rationis quàm habet ad eum maior, & sic fit æqualis maiori, vt trigesima quinta quarti, vbi cùm æquandi sint quadrato $65-6$ N. & $65-24$ N. quia 24. ad 6. est ratio quadrupla ducitur 4. in $65-6$ N. & fit $260-24$ N. Iam ergo si æques quadrato $260-24$ N. & $65-24$ N. id perages per ea quæ dicta sunt de tertio casu primi modi. Interdum verò ad vitandas fractiones sumuntur quadrati duo in eadem ratione quam habent inter se propositi Numerorum numeri, quique habeant partes propositis fractionibus expressas, & maior ducitur in minorem, & minor in maiorem, vnde productorum existit æqualitas ob identitatem proportionis. Sic decima octaua tertij cùm æquandi sint quadrato $5\frac{1}{5}$ N. $+4\frac{1}{5}$ & $\frac{12}{10}$ N $+\frac{3}{10}$. Quamuis Numerorum inter se sit ratio quadrupla, non ducitur tamen 4. in minorem, quia sic non tollerentur fractiones, sed sumuntur duo quadrati 100. & 25. in eadem ratione, quique habeant partes fractionibus expressas, puta $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{10}$. ductoque maiore 100. in minorem $\frac{12}{10}$ N. $+\frac{3}{10}$. & minore 25. in maiorem $5\frac{1}{5}$ N. $+4\frac{1}{5}$. fiunt iam æquandi quadrato 130 N. $+30$. & 130 N. $+105$. qui est primus casus primi modi. Rursus decima nona tertij, cùm sint æquandi quadrato $2\frac{1}{2}$ N. $-3\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{8}$ N. $-\frac{13}{8}$. vbi etiam numeri Numerorum sunt quadrupli, sumuntur quadrati 4. & 16. in eadem ratione qui habent partes fractionibus expressas, puta $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{8}$. Factaque decussatim multiplicatione fiunt æquandi quadrato 10 N. -26. & 10 N. -14. qui est secundus casus primi modi. Cæterùm aduerte simili prorsus artificio casum secundum secundi modi reduci posse ad primum. Sint enim æquandi quadrato 9 N. $+16$. & 7 N. $+4$. Quia 16. ad 4. est in ratione quadrupla, si ducas 4. in 7 N. $+4$. fient iam æquandi quadrato 28 N. $+16$. & 9 N. $+16$. qui est primus casus secundi modi. Quod si vnitates quadratæ in propositis numeris contentæ, sint minimi in suis rationibus numeri, tunc ad vitandas fractiones, commodius erit quemlibet propositorum numerorum vicissim multiplicare per vnitates alterius, vt in hypothesi decimæ septimæ tertij, vbi æquandi sunt quadrato 10 N. $+9$. & 5 N. $+4$. duces 4. in 10 N. $+9$. & duces 9. in 5 N. $+4$. fientque quadrato æquandi 40 N. $+36$. & 45 N. $+36$. Et in vniuersum quoties rationis quadratorum talis est denominator, vt eo ducto in illum propositorum numerorum, in quo continetur minor quadratus, non fiat integer numerus Numerorum, sumptis similiter minimis in ratione quadratorum eorundem, per eos decussatim multiplicabis propositos numeros, vt si sint æquandi quadrato, 10 N. $+36$. & 5 N. $+16$. sumes minimos in ratione 36 ad 16. puta 9. & 4. & per eos facta decussatim multiplicatione, fient iam æquandi quadrato 40 N. $+144$. & 45 N. $+144$. qui est vtique primus casus secundi modi.

Quartus modus est, cùm propositi Numeri quadrato æquandi constant ex Numeris & vnitatibus, & vnitatum numerus quadratus est, & idem vtrimque, vt in primo casu secundi modi. Sed cùm per secundum modum vix vna aut altera contingat solutio, per hunc quartum modum infinitæ possunt exhiberi solutiones, etiamsi requiratur vt valor Numeri consistat intra præscriptos limites. Sic Diophantus quadragesima quinta quarti æquauit quadrato 8 N. $+4$. & 6 N. $+4$. volens valorem numeri minorem esse quàm 2. Cùm per secundum modum, valor Numeri necessario fiat 112. & hîc triplex casus considerari potest.

Primus casus est, quando vterque propositorum numerorum, continet Numeros affectos signo

pluris. Sic in hypothesi Diophanti, vbi in vtroque numero Numeri afficiuntur signo pluris, procedet æquatio si considerentur tres numeri 8 N. + 4. 6 N. + 4. & 4. Nam cùm maiorum interuallum sit 2 N. minorum 6 N. quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit triens interualli, quo minor illorum superabit 4. Ponatur minoris latus 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. qui cùm excedat 4. numero 1 Q. + 4 N. cuius triens $\frac{1}{3}$ Q. + 1 $\frac{1}{3}$ N. hoc addito, ipsi quadrato, fiet maior quadratus 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. Hic ergo æquandus est quadrato, & ad tollendas fractiones omnia ducendo in 9. tum vt æquatio reducatur ad minimos, omnia diuidendo per 4. fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus vt patet infinitis modis fingi potest, & cum qualibet data Numeri determinatione, fingatur cum Diophanto 5 N. − 3. fiet 1 N. $\frac{21}{11}$. Erunt ergo latera quadratorum $\frac{48}{11}$ & $\frac{43}{11}$. ipsi quadrati $\frac{2304}{121}$. $\frac{1849}{121}$. quorum priorem si æques 8 N. + 4. vel posteriorem 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. $\frac{555}{242}$.

Secundus casus est. Quando vterque numerus Numerorum afficitur signo minoris, vt si sint æquandi quadrato 16. − 1 N. & 16 − 5 N. Tuncque considero tres Numeros 16. 16 − 1 N. 16 − 5 N. & quia maiorum interuallum est 1 N. minorum 4 N. vnde interuallorum ratio est quadrupla, quæro duos quadratos, quorum interuallum sit quadruplum interualli, quo maior superabitur à 16. Ponatur latus maioris 4 − 1 N. fiet quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui superatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius quadruplum 32 N. − 4 Q. Quod si auferas à prædicto quadrato, manet minor quadratus 16 − 40 N. + 5 Q. cuius latus ita finges, vt 1 N. sit minor quàm $\frac{16}{5}$. ob numerum 16 − 5 N. Pone illud 4 − 6 N. fiet 1 N. $\frac{4}{11}$. Ergo latera quadratorum sunt $\frac{40}{11}$ & $\frac{16}{11}$. ipsi quadrati $\frac{1600}{121}$. $\frac{256}{121}$. quorum maiorem si æques 16 − 1 N. minorem verò 16 − 5 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{2256}{121}$.

Tertius casus est, cùm in maiore propositorum numerorum Numeri afficiuntur signo pluris, in minore verò afficiuntur signo minoris, vt si quadrato æquandi sint 16 + 6 N. & 16 − 2 N. Tuncque considerans tres numeros 16 + 6 N. 16. & 16 − 2 N. vbi maiorum interuallum 6 N. triplum est interualli minorum 2 N. quæro duos quadratos, vt interuallum maioris super 16. sit triplum interualli quo 16. superabit minorem. Esto latus minoris 4 − 1 N. fit quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui superatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius triplum 24 N. − 3 Q. quod addito ad 16. fit maior quadratus 16 + 24 N. − 3 Q. cuius latus ita fingendum, vt 1 N. sit maior quàm 4. quia latus minoris quadrati ponitur 4 − 1 N. Ponatur 5 N. − 4 fiet 1 N. $\frac{36}{7}$. eruntque quadratorum latera $\frac{13}{7}$. & $\frac{12}{7}$. quadrati $\frac{2704}{49}$. $\frac{144}{49}$. quorum maior si fiat æqualis 16 + 6 N. vel minor æquetur 16 − 2 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{220}{49}$.

Itaque quoniam vt suprà docuimus secundus casus secundi modi semper reduci potest ad primum, ac per consequens ad aliquem horum trium casuum, & in quolibet horum trium casuum solutiones infinitæ reperiri possunt, constat vtique & secundum casum secundi modi cum omnibus suis symptomatis semper infinitis modis resolui posse.

QVINTVS MODVS quem ipsi commenti sumus est. Quando vterque propositorum numerorum quadrato æquandorum componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent inter se rationem quadrati ad quadratum, nec etiam vnitatum numeri sint quadrati. Quoniam verò modum hunc, & duplicem illius casum fusè ad quadragesimam quintam quarti explicauimus, non est cur ibidem adnotata hîc reponantur, ne inani eiusdem rei repetitione commentarios nostros augere velle videamur.

SEXTVS MODVS est. Quando propositi numeri diuersimodè componuntur ex quadratis, Numeris & vnitatibus, & hîc pro omni casu qui excogitari possit, duæ regulæ sunt obseruandæ, vt æquatio sit explicabilis. Primo enim oportet, vt vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus sit. Deinde oportet interuallum propositorum numerorum, ex vna vel ex duabus speciebus tantùm componi. Cæterùm casus omnes possibiles explicare nobis non est propositum, sed eos omnes in quos incidit Diophantus subiicere satis habebimus, cùm ex iis colligi possit quomodo in aliis sit procedendum.

Primò ergo accidit vtrumque propositorum Numerorum componi ex tribus speciebus supradictis, & eorum interuallum vnica tantùm constare specie, vt vigesima tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. + 4 N. − 1. quorum interuallum 1 N. ad quod conficiendum mutuo ductu deligi possunt soli $\frac{1}{4}$. & 4 N. vt in eorum summa reperiantur 4 N. duplum scilicet 2 N. lateris quadrati 4 Q. Quare vnica contingit solutio. Sic etiam vigesima prima tertij, æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. − 1 N. − 1. quorum interuallum 4 N. quod mutuo ductu conficiunt 1. & 4 N. ob causam suprà allatam. Et vnica tantùm contingit solutio.

Secundò accidit vtrumque propositorum numerorum ex duabus componi speciebus, alterum scilicet ex quadratis & vnitatibus, alterum ex Numeris & vnitatibus, interuallum autem illorum constare ex quadratis & Numeris. Sic prima quinti æquantur quadrato 1 Q. − 12. & 6 $\frac{1}{2}$ N. − 12. quorum interuallum 1 Q. − 6 $\frac{1}{2}$ N. Quare tales deligendi numeri quorum mutuo ductu id fiat, vt in eorum summa reperiantur 2 N. duplum lateris quadrati 1 Q. Igitur alij sumi non possunt quàm 1 N. & 1 N. − 6 $\frac{1}{2}$. Sic rursus secunda quinti æquantur quadrato 1 Q. + 20. & 4 N. + 20. quorum

interuallum 1 Q. – 4 N. quod fit ex 1 N. in 1. N. – 4. Sic denique sexta sexti, æquantur quadrato 1 Q. + 1. & 14 N. + 1. quorum interuallum 1 Q. – 14. N. quod fit ex 1 N. in 1 N. – 14.

Tertiò accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus. Alterum ex quadratis & Numeris, vt decima quinta tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. – 1 N. – 4. & 4 Q. + 15 N. quorum interuallum 16 N. + 4. ad quod conficiendum deligendi numeri, in quorum summa reperiantur 4 N. ac proinde soli 4. & 4 N. + 1. deligi possunt.

Quartò accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis Numeris, & vnitatibus, alterum ex quadratis & vnitatibus. Sic vigesima quarta quarti, æquantur quadrato 1 Q. + 1 N. – 1 & 1 Q. – 1. quorum interuallum 1 N. quod fit ex $\frac{1}{2}$. in 2 N. Sic rursus octaua sexti, æquantur quadrato 1 Q. + 14 N. + 1. & 1 Q. + 1. quorum interuallum 14 N. quod fit ex 2 N. in 7. Posset etiam in hoc casu interuallum numerorum componi ex Numeris & vnitatibus, vt nobis accidit vigesimam tertiam quarti, per duplicatam æqualitatem soluentibus, æquauimus enim quadrato 1 Q. + 1 – 1 N. & 1 Q. – 1. quorum interuallum 2 – 1 N. quod fit ex $\frac{1}{2}$. in 4 – 2 N.

Quintò denique accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus, alterum verò ex Numeris & vnitatibus, vt propositione hac vigesima quarta libri huius, vbi 1 Q. + 1048576 – 6144 N. & 1 N. + 64. æquantur quadrato. Quo casu vt interuallum ex duabus tantùm speciebus componatur, necesse est vel vnitates, vel Numeros vtrobique æquales multitudine reperiri, vel saltem inter eos esse rationem quadrati ad quadratum, quò possint ad æqualitatem reduci, vt *in data hypothesi, quia* vnitates 1048576. & 64. sunt in ratione quadrati ad quadratum, cùm vterque numerus sit quadratus, reducuntur ad æqualitatem ducendo 1 N. + 64. in 16384. denominatorem rationis quam habet 1048576. ad 64. & fit 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato, vnà cum ipso 1 Q. + 1048576 – 6144 N. Quare horum interuallum, iam ex duabus tantùm constat speciebus, est enim 22528 N. – 1 Q. vel contrà 1 Q. – 22528 N. & duobus modis resolui potest æquatio, quia tam quadratorum quàm vnitatum numerus quadratus est, vt suprà satis *supérque docuimus.*

OBSERVATIO D. P. F.

HVic de duplicatis æqualitatibus tractatui multa possemus adiungere quæ nec veteres nec noui detexerunt. Sufficit nunc, vt methodi nostræ dignitatem & vsum asseramus, vt quæstionem sequentem quæ sane difficillima est resoluamus. Inuenire triangulum rectangulum numero, cuius hypotenusa sit quadratus, & pariter summa laterum circa rectum. Triangulum quæsitum repræsentant tres numeri sequentes 468729810289. 456548627761. 10616522293520. *Formatus autem à duobus numeris sequentibus* 2150905. 246792. *Aliâ autem methodo sequentis quæstionis solutionem deteximus. Inuenire triangulum rectangulum numero eâ conditione vt quadratum differentia laterum circa rectum minus duplo quadrati à minore latere conficiat quadratum. Vnum ex triangulis quæ huic quæstioni aptantur est id quod sequitur* 1525. 1517. 156. *formatur à numeris* 2. 9. & 2.

Imo confidenter adiungimus duo triangula rectangula quæ iam exposuimus ad solutionem duarum propositarum quæstionum esse minima omnium in integris quæstiones adimplentium.

Methodus nostra hæc est. Quæratur quæstio proposita secundum methodum vulgarem, si non succedat solutio post absolutam operationem quia nempè valor numeri notâ defectus insignitur & ideo minor esse nihilo intelligitur, non tamen despondendum animum confidenter pronuntiamus (quæ oscitantia, vt loquitur Vieta, fuit & ipsius & veterum analystarum.) Sed iterum quæstionem tentemus & pro valore radicis ponamus 1 N. – numero quem sub signo defectus æquari radici incognitæ in prima operatione inuenimus, prodibit noua haud dubiè æquatio quæ per veros numeros solutionem quæstionis repræsentabit. Et hac via superiores duas quæstiones alioquin difficillimas resoluimus, demonstrauimus pariter & construximus numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos diuidi posse, sed hoc per iteratam ter aliquando operationem. Sæpius enim contingit vt veritas quæsita ad multiplices operationum iterationes solertem & industrium necessario adigat analystam vt facillimè experiendo deprehendes.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἢ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά, καὶ μειωθεὶς ἑαυτὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ κύβον, καὶ πλευράν. τετάχθω ἡ μικρὰ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς̄ α̅. ἡ δὲ ἑτέρα δ̄ α̅. καὶ ἔσται ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ὢν τετράγωνος, καὶ πλευρά. καὶ μειωθεὶς ἑαυτὸν ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῶν κύβον καὶ πλευράν. λοιπὸν ὅτι δ̄ δ̄ α̅. δ̄ α̅. ἰσωθῆναι τετραγώνῳ, καὶ παντὸς δύναμιν. γίνεται δύναμις α̅ μ̄ α̅. ἵνα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ α̅. τ μ̄ β̅. ὅθεν ὁ ς̄ γίνεται μ̄ γ δ̄. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt quadratus hypotenusæ sit alius quadratus, & latus; & diuisus per vnum laterum circa rectum, faciat cubum & latus. Statuatur vnum laterum circa rectum 1 N. alterum verò 1 Q. & manet quadratus hypotenusæ æqualis quadrato aucto suo latere, idemque diuisus per vnum laterum circa rectum, facit cubum cum suo latere. Restat vt 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et omnia per 1 Q. diuidantur, fit 1 Q. + 1. æqualis quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 2. fit 1 N. $\frac{3}{4}$. & reliqua sunt manifesta.

IN QVAESTIONEM XXV.

NESCIO quid somniat hîc Xilander de quadrilatero regulari, & de numero 80. Sanè in codice manu exarato sic habebatur, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἢ ἄλλος τετράγωνος καὶ π̄. Quare cùm passim hoc libro vox πλευρὰ exprimatur vnico π cum λ. superscripto, hac ratione π^{λ}. satis colligi poterat, veram lectionem esse, ἢ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά.

Cæterùm artificiosè Diophantus per ipsas positiones, duabus propositi partibus satisfacit, nam quadratus hypotenusæ fit 1 QQ. + 1 Q. qui est quadratus cum suo latere, & idem quadratus hypotenusæ diuisus per alterum laterum circa rectum, puta per 1 N. dat quotientem 1 C. + 1 N. cubum scilicet cum suo latere. Quamobrem superest solùm, vt quadratus hypotenusæ, nempe 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et diuidendo per 1 Q. fit 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus poni potest 1 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus superet 1. Ponit Diophantus 1 N. − 2. vnde fit 1 N. $\frac{3}{4}$. suntque trianguli quæsiti latera $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{15}{16}$. Quadratus hypotenusæ est $\frac{225}{256}$. qui continet quadratum $\frac{81}{256}$. & eius latus $\frac{9}{16}$. seu $\frac{144}{256}$. & diuidendo eundem quadratum hypotenusæ per latus $\frac{3}{4}$. fit $\frac{300}{768}$. seu $\frac{75}{64}$. qui continet cubum $\frac{27}{64}$. & eius latus $\frac{3}{4}$. seu $\frac{46}{64}$. Non solùm autem inuenti hac arte numeri præstant ea quæ requirit Diophantus, sed præterea summa laterum circa rectum est quadratus cum suo latere, vt patet tum ex positionibus, nam summa laterum circa rectum posita est 1 Q. + 1 N. tum ex ipsa solutione, nam $\frac{3}{4}$. est latus quadratum de $\frac{9}{16}$.

Hîc etiam formari poterit expeditus Canon.

Quemlibet quadratum vnitate multatum, diuide per duplum sui lateris, vel è conuerso, vter volueris quotientum erit alterum laterum circa rectum, & eius quadratus erit alterum latus. Horum autem quadrati simul conficient hypotenusæ quadratum.

Verbi gratia auferi. à quadrato 9. & residuum 8. diuide per 6. duplum lateris ipsius 9. vel contrà diuide 6. per 8. quotiens $\frac{4}{3}$. vel $\frac{3}{4}$. alterum laterum circa rectum. Ergo alterum erit $\frac{15}{9}$. vel $\frac{9}{16}$ & hypotenusa $\frac{15}{9}$. vel $\frac{15}{16}$. Quare vnica operatione duplex reperitur solutio, cuius rei ratio est, quia contingit 1 Q. + 1. æquari quadrato, & quia tam 1 Q. quàm 1. quadratus est, potest latus illius fingi vel 1 N. − quotlibet vnitatibus, vel 1 − quotlibet Numeris, puta, vel 1 N. − 3. vel 1 − 3 N.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἢ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ κύβος καὶ πλευρὰν, ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κύβος καὶ πλευρά. τετάχθω ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κ̄ α̅. ἀριθμὸς α̅. ὁ δὲ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν κ̄ α̅. λείψει ἀριθμὸς α̅. ὁ ἄρα ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἔσται δυνάμεων

INVENIRE triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum sit cubus; alterum verò sit cubus suo multatus latere, hypotenusa denique sit cubus auctus suo latere. Statuatur hypotenusa 1 C. + 1 N. vnum verò laterum circa rectum 1 C. − 1 N. Reliquum ergo latus erit

2 Q. Reſtat vt 2 Q. æquentur cubo. Eſto 1 C. & fit 1 N. 2. Ad poſitiones. Erit triangulum 6. 8. 10. & conſtat.

β. λοιπὸν ὅτι δυνάμεις β. ἰσοῦσθαι κύβῳ ἔστω κὲ α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ β. ὅτι ἂς ὑποτάσις. ἔσται τὸ τρίγωνον ς̄. η. ι. κγ μβ ἐστι.

IN QVAESTIONEM XXVI.

Hîc duo maximè notanda ſunt. Primum non ſine arte poni hypotenuſam 1 C. + 1 N. & alterum laterum 1 C. − 1 N. Nam hac ratione ſatisfit duabus poſtulati partibus, ſiquidem hypotenuſa eſt cubus cum ſuo latere, & alterum laterum eſt cubus ſuo latere multatus. Deinde cùm vt habeamus tertium latus, oporteat à quadrato hypotenuſæ, nempe ab 1 C C. + 2 Q Q. + 1 Q. auferre quadratum lateris ſecundi, puta 1 C C. − 2 Q Q. + 1 Q. & quod ſupereſt, nempe 4 Q Q. ſit quadratus tertij lateris, res optimè ſuccedit, eò quod 4 Q Q. eſt quadratus, ac proinde latus eius 2 Q. eſt tertium latus. Et ſimile ſemper eueniet ſi hypotenuſa ponatur quilibet cuborum numerus cubicus, plus ſuo latere, & ſecundum latus ponatur idem cubus, minus ſuo latere. Nam interuallum quadratorum, erit ſemper certus quadratoquadratorum numerus, qui fit quater ex cubo in ſuum latus, quandoquidem hi quadrati ſunt omnino ſimiles, niſi quod in quadrato hypotenuſæ continetur duplum producti ex cubo in ſuum latus cum ſigno pluris, & in quadrato lateris ſecundi, continetur idem duplum producti ex cubo in ſuum latus cum ſigno minoris. Proinde quadratorum interuallum aliud non eſt quàm quadruplum producti ex cubo in ſuum latus. Igitur quadruplum hoc ſemper eſſe quadratum demonſtrandum eſt. Non ſolùm autem hoc oſtendemus, ſed quod vniuerſalius eſt, ducto quolibet quadrato in aliquem numerum, & producto in cubum eiuſdem numeri multiplicato, produci quadratum, vt non de quadruplo tantùm, ſed etiam de noncuplo, ſedecuplo, &c. idem conſtet.

D 9. E 3. F 1. A 2. B 4. C 8. G 18. H 12.

Eſto quilibet numerus A. cuius quadratus B. & cubus C. & ſumatur quilibet quadratus D. quo ducto in A. fiat G. dico ſi G ducatur in cubum C. fieri quadratum. Sumatur enim E. latus quadrati D. & ſit F vnitas, ductoque E in B producatur H. Patet igitur per ea quæ ad definitionem quartam primi, demonſtrata ſunt, tam tres A B C. quàm tres D E F. eſſe proportionales. Quare cùm ex primo D in primum A. fiat G. & ex ſecundo E in ſecundum B fiat H. ac denique ex tertio F in tertium C. fiat ipſe C. [1] erunt & tres G. H. C. proportionales. [2] Quare ex G in C. fiet quadratus ipſius H. Quod erat propoſitum.

Hinc euidens eſt dupliciter variari poſſe ſolutionem & poſitiones. Nam primò licet ponere pro hypotenuſa quemlibet cuborum numerum cubicum, plus latere ipſius cubi, & pro altero laterum, eundem cubum minus ſuo latere. Deinde tertium latus quod ſemper reperitur certus quadratorum numerus, poteſt æquari diuerſimodè alicui cuborum numero cubico, vt in hypotheſi Diophanti 2 Q. poſſunt æquari $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{1}{64}$ C. &c. vt ſi ponas 2 Q. æquales $\frac{1}{8}$ C. fiet quæſitum triangulum 4112. 4080. 512. Neceſſe eſt autem hîc 2 Q. æquari alicui cuborum numero cubico minori quàm 2. quia cùm alterum latus poſitum ſit 1 C. − 1 N. oportet vt 1 C. ſit maior ſuo latere, quod accidet ſi 1 N. ſit maior vnitate. Id autem continget ſi 2 Q. æquentur cuilibet cubo minori quàm 2. vt euidens eſt, quia valor Numeri reperitur diuidendo 2. per aliquem cubum. Si ergo cubus ille ſit minor quàm 2. fiet vtique quotiens maior vnitate.

Hîc etiam formabitur huiuſmodi Canon.

Per quemlibet cubum minorem binario, diuide binarium, quotientem adde ſuo cubo, & deme à ſuo cubo, habebis hypotenuſam, & vnum laterum. Tertium verò latus erit duplum quadrati quotientis eiuſdem.

Sed & ſimili prorſus artificio licebit ſoluere huiuſmodi quæſtiones.

Inuenire triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum, ſit quadratus, alterum quadratus abſque latere: hypotenuſa quadratus cum latere.

Eſto hypotenuſa 1 Q. + 1 N. vnum latus 1 Q. − 1 N. ergo à quadrato hypotenuſæ auferendo lateris quadratum, manet tertij lateris quadratus 4 C. quod quia volumus eſſe quadratum, oportet vt quadratus ipſius ſit quadratoquadratus. Igitur 4 C. æquantur quadratoquadrato. Eſto 1 Q Q. fit igitur 1 N. 4. eſtque triangulum 20. 12. 16. vbi etiam neceſſe eſt 4 C. æquari alicui quadratoquadrato minori quàm 4. ob cauſam ſuprà explicatam. Et ſi ponas 4 C. æquari $\frac{1}{16}$ Q Q. fiet 1 N. 64. eritque triangulum 4160. 4032. 1024.

Hîc finem impoſiturus eram noſtris commentariis in hoſce Diophanti Arithmeticorum libros, cùm venit in mentem, multa alia, eaque non iniucunda proponi poſſe de triangulis rectangulis problemata, quæ huic libro ſubiicere non abs re viſum eſt, ab illis ſumentes exordium quæ determinationes varias de lateribus, vel de ipſa trianguli area docent.

PROBLEMA PRIMVM.

Dato ambitu trianguli, inuenire terminos intra quos consistere debet hypotenusa.

Datus ambitus esto 10.

Primum certum est hypotenusam, minorem esse debere semisse dati ambitus, eò quod cuiuslibet trianguli latus, minus est duobus reliquis simul. Quare maior quæsitorum terminorum est 5. exclusiuè. Vt autem habeatur minor terminus, ponatur hypotenusa 1 N. ergo reliqua latera simul erunt 10 − 1 N. Quare vt fiat triangulum rectangulum, oportet diuidere 10 − 1 N. in duos numeros, quorum quadrati simul conficiant 1 Q. Quod vt fieri possit per Canonem trigesimæ primi, constat oportere, vt duplum summæ quadratorum, putà 2 Q. superet quadratum summæ duorum numerorum, nempè 100 − 20 N. + 1 Q. Quare sublatis vtrimque æqualibus, & addito defectu, fit 1 Q. + 20 N. maior quàm 100. ex hac autem æquatione fit 1 N. ℞ 200 − 10. Ergo certum est hypotenusam, non posse esse minorem quàm ℞ 200 − 10. Quapropter ℞. 200 − 10. est minor terminus inclusiuè. Dico inclusiuè, quia hypotenusa poni potest ℞ 200 − 10. si videlicet latera circa rectum ponantur æqualia. Nam conditio ad trigesimam primam primi apposita, eatenus locum habet, quatenus inæquales numeri quæruntur, vt ibi adnotauimus. Ex his igitur elici potest huiusmodi Canon.

Semissis dati ambitus est maior terminus exclusiuè. Et si sumas duplum quadrati eiusdèm ambitus, & ab illius latere auferas ipsum ambitum, residuum erit minor terminus inclusiuè.

Itaque si in rationalibus numeris ipsum minorem terminum exhiberi cupias, id fiet per approximationem hac arte. Quia vt constat ex suprà dato Canone, minor terminus hypotenusæ respectu ambitus, est ℞ 2 Q. − 1 N. sume latus proximum de 2 Q. putà $\frac{99}{70}$ N. & hinc aufer 1 N. restat $\frac{29}{70}$ N. Quare talem habeto regulam.

Ducito datum ambitum in 29. productum diuide per 70. orietur minor terminus quæsitus.

Vt data circumferentia 10. ducito 10 in 29. fit 290. quem diuide per 70. fit minor terminus quæsitus 4 $\frac{1}{7}$. Quare dices dato ambitu 10. hypotenusam fore minorem quàm 5. non minorem quàm 4 $\frac{1}{7}$.

PROBLEMA II.

Dato ambitu trianguli rectanguli, inuenire terminos summæ laterum circa rectum.

Ex præcedente pendet hæc quæstio, quia enim summa laterum circa rectum, vna cum hypotenusa, conficit totum ambitum, patet terminos summæ laterum circa rectum respondere terminis hypotenusæ, ita vt ab ambitu trianguli auferendo sigillatim terminos hypotenusæ, relinquantur termini summæ laterum. Sic posito ambitu 10. cùm per præcedentem fiant termini hypotenusæ, 5. & 1. ℞ 200 − 10. si vtrumque auferas à toto ambitu 10. remanebunt termini summæ laterum circa rectum, nimirum minor exclusiuè 5. inclusiuè 20 − ℞ 200.

Vnde Canon.

Semissis dati ambitus est minor terminus exclusiuè, & si à duplo ambitus, auferas latus dupli quadrati ipsius ambitus, residuum erit maior terminus inclusiuè.

Fiet igitur terminus respectu ambitus 2 N. ⌐ ℞ 2 Q. seu per approximationem $\frac{41}{70}$ N. vnde regula.

Ducito datum ambitum in 41. productum diuide per 70. orietur maior terminus quæsitus.

Vt dato ambitu 10. ducito 10. in 41. fit 410. quem diuide per 70. fit maior terminus quæsitus 5 $\frac{6}{7}$. Oportet ergo summam laterum circa rectum cadere inter 5. & 5 $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA III.

Dato ambitu, inuenire terminos aggregati ex hypotenusa, & ex altero laterum.

Ambitus esto 12.

Primo patet maiorem terminum exclusiuè esse ipsum ambitum 12. potest enim aggregatum hypotenusæ & alterius lateris, statui quilibet numerus infrà 12. & quantumuis exiguus numerus relinquatur pro tertio latere, perfici poterit triangulum. Minor vero terminus est 6. semissis ipsius
19. 3. *porif.* 12. Quod sic probatur. Quia quadratus ipsius ambitus 12. æquatur duplo producti ex aggregato hypotenusæ & baseos, in aggregatum hypotenusæ & perpendiculi, semissis eiusdem quadrati, puta 72. æquabitur producto ex aggregato eodem in idem aggregatum. At 72. fit vt patet, ex 12. in suum semissem 6. Quare si 72. diuidatur per 6. fit quotiens 12. & si 72. diuidatur per numerum minorem quàm 6. fit quotiens maior quam 12. Euidens ergo est aggregatum hypotenusæ & baseos non posse esse 6. vel minorem quàm 6. alioquin sequeretur aggregatum hypotenusæ & perpendiculi esse 12. vel maius quàm 12. Quod est impossibilè cùm totus ambitus ponatur 12. Itaque fiet breuissimus Canon.

Ipse ambitus, & eius semissis sunt quæsiti termini exclusiuè.

PROBLEMA

PROBLEMA IV.

Dato ambitu inuenire maximum areæ terminum.

Datus ambitus esto 10.

Inueniatur per secundam harum maximus terminus summæ laterum circa rectum, puta 20 — ℞ 200. & huius quadratus esto 600 — ℞ 320000. cuius octaua pars sit 75. — ℞ 5000. dico hunc esse maximum areæ terminum; quia enim octaua pars alicuius quadrati æquatur semissi quadrati à latere subduplo lateris propositi quadrati, erit 75 — ℞ 500. semissis quadrati à semisse ipsius 20 — ℞ 200. puta semissis quadrati ipsius 10 — ℞ 50. Itaque quoniam quadratus semissis alicuius numeri maior est producto duarum quarumlibet inæqualium partium eiusdem numeri, erit quadratus ipsius 10 — ℞ 50. maior producto duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas secari possit 20 — ℞ 200. quare cùm area trianguli sit semissis producti duorum laterum, quorum summa 20 — ℞ 200. non poterit area maior esse semisse quadrati ipsius 10 — ℞ 50. hoc est non poterit esse maior quàm 75 — ℞ 500. Hinc ergo fiet huiusmodi Canon. 2. 2. *poris.*

A dodrante quadrati dati ambitus, aufer latus quadratum semissis quadratoquadrati eiusdem ambitus, residuum erit quæsitus terminus.

Proinde si libet in rationalibus quæsitum terminum præscribere, cùm ex dato Canone area respectu ambitus sit $\frac{3}{4}$ Q. — ℞ $\frac{1}{2}$ QQ. sume proximum latus de $\frac{1}{2}$ QQ. nempe $\frac{99}{140}$ Q. quem aufer à $\frac{3}{4}$ Q. supereſt $\frac{3}{70}$ Q. Hinc ergo formabitur Canon.

Ducito quadratum ambitus in 3. productum diuide per 70. orietur areæ terminus.

Sic in data hypothesi ducito quadratum ipsius 10. puta 100. in 3. fiet 300. quem diuide per 70. fiet 4 $\frac{2}{7}$. quæsitus areæ terminus.

Non præscribitur autem minimus terminus areæ, quia dari non potest. Etenim summa laterum circa rectum, semper diuidi poterit in duos numeros, quorum mutuo ductu fiat quantumlibet exiguus numerus, vt constat ex conditione appositæ trigesimæ primi, quæ vt quæstio sit possibilis, requirit tantùm quadratum summæ maiorem esse quadruplo producti. Vnde euidens est, quò minor erit productus, eò magis solui posse quæstionem.

PROBLEMA V.

Data hypotenusa præscribere terminos summæ laterum circa rectum.

Esto hypotenusa 5.

Quoniam ex conditione appositæ trigesimæ primæ primi, oportet duplum quadrati hypotenusæ superare, vel saltem æquare quadratum summæ laterum circa rectum, cùm duplum quadrati 5. sit 50. non poterit summa laterum circa rectum excedere ℞ 50. sed eadem summa laterum circa rectum debet superare hypotenusam, vt duo trianguli latera simul sint maiora reliquo. Igitur quæsiti termini sunt 5. excluſiuè, & ℞ 50. incluſiuè. Hinc fiet Canon.

Ipsa hypotenusa est minimus terminus. At latus dupli quadrati hypotenusæ est maximus terminus.

Quia ergo respectu hypotenusæ maximus terminus summæ laterum circa rectum est ℞ 2 Q. & latus proximum de 2 Q. est $\frac{99}{70}$ N. hunc habeto Canonem.

Ducito hypotenusam in 99. productum diuide per 70. orietur quæsitus terminus.

Vt in data hypothesi ducito 5. in 99. fit 495. quem diuide per 70. fit terminus quæsitus 7 $\frac{5}{14}$.

PROBLEMA VI.

Data summa laterum circa rectum præscribere terminos hypotenusæ.

Sit summa laterum circa rectum 6.

Igitur ex dictis ad præcedentem quadratus ipsius 6. puta 36. non debet excedere duplum quadrati hypotenusæ. Quare hypotenusa non potest esse minor quàm ℞ 18. Debet autem eadem esse minor quàm summa laterum 6. Ergo quæsiti termini sunt 6. excluſiuè, & ℞ 18. incluſiuè. Vnde formatur Canon.

Ipsa summa laterum circa rectum est maximus terminus excluſiuè. At latus semissis quadrati eiusdem summæ laterum, est minimus terminus incluſiuè.

Quoniam igitur respectu summæ laterum circa rectum, fit hypotenusæ minimus terminus ℞ $\frac{1}{2}$ Q. cùm proximum latus de $\frac{1}{2}$ Q. sit $\frac{70}{99}$. N. hanc habe regulam.

Ducito summam laterum circa rectum in 70. productum diuide per 99. orietur minimus terminus hypotenusæ.

Vt in data hypothesi ducito 6. in 70. fit 420. quem diuide per 99. fit quæsitus terminus hypotenusæ 4 $\frac{8}{33}$.

PROBLEMA VII.

Data hypotenusa præscribere totius ambitus terminos.

Sit data hypotenusa 5.

Inueniantur per quintam termini laterum circa rectum, puta 5. & ℞ 50. qui addantur sigillatim ipsi hypotenusæ 5. fient quæsiti termini 10. excluſiuè, & 5 + ℞ 50. incluſiuè. Vnde Canon.

Duplum ipsius hypotenusæ est minimus terminus excluſiuè. At aggregatum ex hypotenusa & latere dupli quadrati eiusdem hypotenusæ, est maximus terminus incluſiuè.

Cùm ergo maximus ambitus terminus respectu hypotenusæ sit 1 N. + ℞ 2 Q. & ℞ 2 Q. per approximationem sit $\frac{99}{70}$ N. inuenietur quæsitus terminus in rationalibus hac arte.

Ducito hypotenusam in 169. productum diuide per 70. orietur maximus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypotesi ducito 5. in 169. fit 845. quem diuide per 70. fiet 12 $\frac{1}{14}$. quæsitus terminus.

PROBLEMA VIII.

Data summa laterum circa rectum, præscribere circumferentiæ terminos.

Sit data summa 6.

Inueniantur per sextam hypotenusæ termini, puta 6. & ℞ 18. qui addantur sigillatim datæ summæ laterum 6. fient quæsiti circumferentiæ termini, puta 12. excluſiuè & 6 + ℞ 18. incluſiuè. vnde Canon.

Duplum summæ laterum circa rectum, est maximus terminus excluſiuè. At aggregatum ex summa laterum, & ex latere semiſsis quadrati eiusdem summæ, est mininus terminus incluſiuè.

Cùm ergo minimus circumferentiæ terminus, respectu summæ laterum circa rectum, sit 1 N. + ℞ $\frac{1}{2}$ Q. & ℞ $\frac{1}{2}$ Q. per approximationem sit $\frac{99}{140}$. Inuenietur quæsitus terminus in rationalibus hoc pacto.

Ducito summam laterum in 239. productum diuide per 140. orietur minimus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypotesi ducito 6. in 239. fit 1434. quem diuide per 140. fiet quæsitus terminus 10 $\frac{17}{70}$.

PROBLEMA IX.

Data summa laterum circa rectum, inuenire maximum areæ terminum.

Esto data summa 4.

Sume quadratum datæ summæ, puta 16. huius octaua pars nempe 2. est quæsitus areæ terminus, vt demonstratum est quarta harum.

PROBLEMA X.

Data hypotenusa inuenire maximum areæ terminum.

Data hypotenusa esto 6.

Sume quadratum datæ hypotenusæ, puta 36. huius quarta pars nempe 9. est quæsitus areæ terminus. Nam per quintam duplum quadrati hypotenusæ debet superare, vel saltem æquare quadratum summæ laterum circa rectum. Quare quadratus summæ laterum circa rectum, ad maximum est 72. cuius octaua pars per præcedentem est maximus areæ terminus. At octaua pars de 72. est quarta pars semiſsis ipsius 72. puta ipsius 46. Igitur patet propositum.

PROBLEMA XI.

Data area inuenire minimum terminum summæ laterum circa rectum.

Area esto 6.

Sume octuplum areæ, puta 48. huius latus nempe ℞ 48. est minimus terminus summæ laterum circa rectum, vt constat ex quarta, & nona.

PROBLEMA XII.

Data area inuenire minimum terminum hypotenusæ. Area esto 6.

Sume quadruplum areæ, puta 24. huius latus nimirum ℞ 24. est minimus hypotenusæ terminus, vt constat ex quinta, & decima.

PROBLEMA XIII.

Data area præscribere minimum ambitus terminum. Area esto 6.

Sumantur per duas præcedentes minimi termini summæ laterum & hypotenusæ, puta ℞ 48. & ℞ 24. horum summa ℞ 48. + ℞ 24. est quæsitus circumferentiæ terminus, vt euidens est.

PROBLEMA XIV.

Triangulum rectangulum in rationalibus constituere, vt summa laterum circa rectum sit datus numerus.

Summa laterum circa rectum esto 8.

Ponatur vnum latus 1 N. erit alterum 8 − 1 N. cùm ergo horum quadrati simul debeant æquari quadrato hypotenusæ, fiet summa quadratorum 64 − 16 N. + 2 Q. æqualis quadrato, cuius latus ponatur 8 − tot numeris qui excedant 2. vt scilicet fiat 1 N. minor quàm 8. quia latus alterum positum est 8 − 1 N. fingatur ergo latus prædictum 8 − 3 N. fiet quadratus 64 − 48 N. + 9 Q. æquales 64 − 16. N. + 2 Q. vnde fit 1 N. $\frac{32}{7}$. vnum laterum circa rectum, estque alterum $\frac{24}{7}$. ipsa hypotenusa $\frac{40}{7}$. Hinc elicitur facilis Canon.

Sume quemlibet numerum maiorem binario, inde aufer 1. residui duplum ducito in datam summam, productum diuide per quadratum sumpti numeri binario multatum, orietur vnum laterum circa rectum.

PROBLEMA XV.

Inuenire triangulum rectangulum in rationalibus, vt eius ambitus sit datus numerus.

Esto ambitus 20.

Pone latera quæsiti trianguli 3 N. 4 N. 5 N. fit summa 12 N. æqualis 20. est ergo 1 N. $\frac{5}{3}$. & quæsitum triangulum 5. $6\frac{2}{3}$. $8\frac{1}{3}$. & sic infinitæ reperientur solutiones si loco 3. 4. 5. deligantur alia atque alia triangula non similia. Sed & licebit inuenire triangulum simile cuicunque dato triangulo rectangulo, eodem numero ambitus manente.

Aliter sume semissem quadrati ipsis 20. puta 200. & statue aggregatum hypotenusæ & baseos quemlibet numerum inter 20. & eius semissem 10. ob ea quæ demonstrata sunt tertia harum. Verbi gratia pone tale aggregatum 15. erit ergo perpendiculum 5. At diuidendo 200. per 15. quotiens $13\frac{1}{3}$. erit aggregatum hypotenusæ & perpendiculi per decimam nonam tertij porismatum. Quare si inde auferas perpendiculum, puta 5. manebit hypotenusa $8\frac{1}{3}$. quam si subtrahas à 15. fiet basis $6\frac{2}{3}$.

PROBLEMA XVI.

Dato ambitu, & data area trianguli rectanguli, inuenire triangulum.

Esto ambitus 40. Area 60.

Pone hypotenusam 1 N. ergo latera circa rectum simul sunt 40. − 1 N. cuius quadratus 1600 − 80. N. + 1 Q. æquatur quadratis laterum circa rectum, & duplo plani sub ipsis contento, hoc est quadrato hypotenusæ, & quadruplo areæ. Quare 1 Q. + 240. æquantur 1600 − 80 N. + 1 Q. Vnde fit 1 N. 17. Ipsa scilicet hypotenusa. Igitur summa laterum circa rectum est 23. Quamobrem duplici via inueniri possunt ipsa latera, diuidendo scilicet 23. in duas partes, quarum quadrati simul efficiant 289. per trigesimam primam primi, vel in duas partes quarum mutuo ductu fiat 120. per trigesimam primi, & vtroque modo reperientur latera 15. & 8. Hinc fit Canon. 4. *secundi.*

A quadrato ambitus aufer quadruplum areæ, residuum diuide per duplum ambitus, orietur hypotenusa.

PROBLEMA XVII.

Dato ambitu, & solido sub tribus lateribus, inuenire triangulum.

Esto ambitus 12. solidus 60.

Pone hypotenusam 1 N. erunt latera circa rectum simul 12 − 1 N. At planus sub iisdem lateribus $\frac{60}{1N}$. Quadratus autem summæ laterum circa rectum est 144. − 24 N. + 1 Q. vnde si auferas quadratos ipsorum laterum, hoc est illis æqualem quadratum hypotenusæ, relinquetur 144 − 24 N. duplum plani sub lateribus. Igitur huius dimidium, puta 72 − 12 N. æquatur $\frac{60}{1N}$. Vnde fit 1 N. 5. hypotenusa scilicet, est ergo summa laterum circa rectum 7. & planus sub ipsis 12. vnde etiam vt suprà duplici via, nimirum per trigesimam vel per trigesimam primam primi inuenies latera 3. & 4. Hinc elicietur facilis Canon.

Diuide datum ſolidum per datum ambitum, quotientem aufer à quadrato quadrantis ipſius ambitus, reſidui latus adde eidem quadranti, fiet hypotenuſa.

PROBLEMA XVIII.

Dato vno laterum circa rectum, & plano ſub altero latere & hypotenuſa, inuenire alterum latus & hypotenuſam.

Eſto alterum latus 4. Planus ſub altero & hypotenuſa 15. faciat.

Ponatur latus quæſitum 1 N. ergo hypotenuſa eſt $\frac{15}{1N}$. cuius quadratus $\frac{225}{1Q}$. æquatur quadratis laterum, puta 16 + 1 Q. & tandem 1 QQ. + 16 Q. æquantur 225. & fit 1 N 3. quæſitum latus. Eſt ergo hypotenuſa 5. Sic poni poteſt hypotenuſa 1 N. alterum latus $\frac{15}{1N}$. & fiet 1 Q. æqualis 16 + $\frac{225}{1Q}$. & tandem 1 QQ. æquabitur 16 Q. + 225. vnde fiet 1 N. 5. Hinc formatur Canon.

Quadrato dati plani adde quadratum ſemiſſis quadrati dati lateris, ſummæ latus adde vel adime eidem ſemiſſi quadrati dati lateris, proueniet hinc quadratus quæſiti lateris, inde quadratus hypotenuſæ.

PROBLEMA XIX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius ambitus ſit quadratus, & idem ambitus ſiue adſumpta, ſiue detracta area quadratum faciat.

Primùm quærere oportet triangulum rectangulum, cuius ambitus ſit quadratus numerus, & fiet triangulum, per decimam quintam, cuius ambitus æqualis erit cuilibet dato quadrato. Eſto ergo tale triangulum 36. 48. 60. cuius ambitus eſt quadratus 144. & conſtituatur in quadratis, ſintque quæſiti trianguli latera 36 Q. 48 Q. 60 Q. Supereſt vt ambitus ſiue adſumpta ſiue detracta area faciat quadratum. Quia ergo in quolibet triangulo rectangulo quadratus ſemiſſis hypotenuſæ ſiue illi addatur, ſiue adimatur area facit quadratum, vt ex demonſtratis ad vigeſimam ſecundam tertij facilè infertur, ſumatur quadratus ſemiſſis hypotenuſæ, puta 900 Q Q. & is ſtatuatur æqualis ambitui, puta 144 Q. fiet ergo 1 N. $\frac{5}{2}$. & erunt quæſiti latera trianguli $\frac{144}{25}$. $\frac{192}{25}$. $\frac{240}{25}$ & conſtat.

PROBLEMA XX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius area ſit datus numerus. Oportet autem vt quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum.

Sit A datus areæ Numerus, cuius duplum B. cuius quadratus F. quo addito ad quadratoquadratum D. fiat quadratus E. Oportet inuenire triangulum cuius area ſit A. ſumatur K latus quadratoquadrati D. & ſit ipſius K quadratus C. diuiſoque A. per K producatur G. cuius duplum eſto H. Quia ergo ducto K in G. producitur A. eſt A ad G ſicut K ad vnitatem, ſed ſicut K ad vnitatem, ita eſt C ad K. Igitur vt eſt C ad K. ſic A ad G. & permutando vt C ad A. ſic K ad G. ſed vt A ad B. ſic eſt G ad H cùm vtrobique ſit ratio ſubdupla, ergo ex æquo vt C. ad B. ſic eſt K ad H. ſed C B ſunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cùm eorum quadrati D F ſimul conficiant quadratum E. Igitur & K H ſunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cuius vtique area eſt A. cùm A producatur ex K in G. ſemiſſem ipſius H. Quamobrem conſtat propoſitum.

D 81. E 225. F 144.
C 9 A 6. B 12.
K 3. G 2. H 4.

1. 3. *poriſ.*

Porro conditio adiecta non ſolùm ſufficiens eſt, ſed & neceſſaria, ita vt dari non poſſit triangulum rectangulum, quin quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum. Quod eadem facilitate probatur. Sint enim K H. latera circa rectum trianguli dati, & ipſius H. dimidium ſit G quo ducto in K fiat area A. cuius duplum B. cuius quadratus F. dico F. additum alicui quadratoquadrato facere quadratum, ſit enim C quadratus ipſius K. & ipſius C. quadratus, hoc eſt quadratoquadratus ipſius K eſto D. Oſtendetur vt ſuprà eſſe C ad B vt K ad H. Quare cùm K H ſint latera circa rectum trianguli rectanguli erunt & C B. latera circa rectum trianguli. Proinde quadrati ipſorum, puta D F. ſimul component quadratum. Quod erat propoſitum.

OBSERVATIO D. P. F.

AReа trianguli rectanguli in numeris non poteſt eſſe quadratus, huius theorematis à nobis inuenti demonſtrationem quam & ipſi tandem non ſine operoſâ &

laborioſâ meditatione deteximus, ſubiungemus. Hoc nempè demonſtrandi genus miros in arithmeticis ſuppeditabit progreſſus, ſi area trianguli eſſet quadratus darentur duo quadratoquadrati quorum differentia eſſet quadratus: Vnde ſequitur dari duo quadrata quorum & ſumma, & differentia eſſet quadratus. Datur itaque numerus compoſitus ex quadrato & duplo quadrati æqualis quadrato, ea conditione vt quadrati eum componentes faciant quadratum. Sed ſi numerus quadratus componitur ex Quadrato & duplo alterius quadrati eius latus ſimiliter componitur ex quadrato & duplo quadrati vt facillime poſſumus demonſtrare.

Vnde concludetur latus illud eſſe ſummam laterum circa rectum trianguli rectanguli & vnum ex quadratis illud componentibus efficere baſem & duplum quadratum æquari perpendiculo.

Illud itaque triangulum rectangulum conficietur à duobus quadratis quorum ſumma & differentia erunt quadrati. At iſti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis primò ſuppoſitis quorum tam ſumma quam differentia faciunt quadratū. Ergo ſi dentur duo quadrata quorum ſumma & differentia faciant quadratum, dabitur in integris ſumma duorum quadratorum eiuſdem naturæ priore minor. Eodem ratiocinio dabitur & minor iſtâ inuenta per viam prioris & ſemper in infinitum minores inuenientur numeri in integris idem præſtantes: Quod impoſsibile eſt, quia dato numero quouis integro non poſſunt dari infiniti in integris illo minores. Demonſtrationem integram & fuſius explicatam inſerere margini vetat ipſius exiguitas.

Hac ratione deprehendimus & demonſtratione confirmauimus nullum numerum triangulum præter vnitatem æquari quadratoquadrato.

SCHOLIVM.

Hinc patet, idem oſtendi poſſe de quadratoquadrato ipſius H quod oſtenſum eſt de quadratoquadrato ipſius K. Quare verum eſt in quolibet triangulo rectangulo quadratum areæ duplicatæ additum quadratoquadrato cuiuſlibet lateris circa rectum efficere quadratū. Vt in data hypotheſi 144. cum quadratoquadratis ipſorum 3. & 4. puta cum 81. & 256. facit quadratos 225. & 400. ſed & conditionis adiecta neceſſitas per algebram ſic demonſtrabitur. Data area cuiuſlibet trianguli rectanguli puta 6. ponatur vnum laterum circa rectum 1. N. erit alterum $\frac{12}{1N}$. Vt autem ſit triangulum rationale oportet, vt ſumma quadratorum, puta $1\underline{Q} + \frac{144}{1\underline{Q}}$. æquetur quadrato, & omnia ducendo in $1\underline{Q}$. fiet $1\underline{Q}\underline{Q} + 144$. æqualis quadrato. Vnde patet quadratoquadratum cuiuſlibet lateris circa rectum adſcito quadrato areæ duplicatæ, debere conficere quadratum.

Porrò hanc ipſam quæſtionem tractans Franciſcus Vieta Zetetico 16. libri quarti, duas alias ei præfigit conditiones. Prima eſt. Oportet vt areæ addendo aliquem quadratoquadratum, fiat quadratoquadratus, vel vt ducendo aream in aliquem quadratum, & productum addendo alicui quadratoquadrato, fiat quadratoquadratus. Et hæc conditio, ſufficiens quidem eſt, vt demonſtrat Vieta, ſed an ſit neceſſaria meritò quis ambigat. Sanè arbitror cùm eius neceſſitatem demonſtrare non poſſet ſummi vir ingenij. ſecundam excogitaſſe. Secunda conditio eſt. Oportet vt datus areæ numerus, ſit cubus ſuo multatus latere, vel vt idem per quadratum aliquem multiplicatus, ſit cubus ſuo multatus latere. Et hæc conditio non ſolùm ſufficiens eſt, vt oſtendit Vieta, ſed etiam neceſſaria vt demonſtrabimus, ne tanti viri commentum labare videatur. Quamuis tutius ſit hanc conditionem ita proponere. Oportet vt areæ numerus ſit cubus ſuo multatus latere, latuſve ſuo multatum cubo. Vel vt eo per aliquem quadratum multiplicato vel diuiſo, fiat cubus ſuo multatus latere, latuſue ſuo multatum cubo. Huius autem rei ratio eſt, quia quodlibet triangulum rectangulum, poteſt concipi ſimile alteri triangulo, quod formatum ſit ab vnitate, & ab alio quouis quadrato, cuius quadrati ſi ponas latus 1 N. fiet trianguli hypotenuſa $1\underline{Q} + 1$. alterum laterum circa rectum $2N$. alterum $1\underline{Q} - 1$ vel $1 - \underline{Q}$. prout 1 N. ſupponitur maior vel minor vnitate. Quare fit area $1C. - 1N.$ vel $1N. - 1C.$ ita ſi fingas triangulum ab 1. & 4. modo tradito tertia tertij poriſmatum. Fient latera 3. 4. 5. Area verò 6. cubus ſcilicet 8. ſuo multatus latere. At ſi formes triangulum ab 1. & $\frac{1}{4}$. fiet triangulum $\frac{3}{4}.\frac{4}{4}.\frac{5}{4}$. cuius area. $\frac{3}{8}$. eſt latus $\frac{1}{2}$ multatum ſuo cubo $\frac{1}{8}$.

Propoſito verò quolibet alio triangulo, cùm per quartam tertij poriſmatum, neceſſe ſit illud formari à duobus planis ſimilibus, hos planos ſumens, & vtrumque per minorem ipſorum ſigillatim diuidens, fient duo quotientes in eadem ratione, quorum minor erit vnitas, à quibus ſi formes triangulum, erit

9. 3. poriſ. 2. 3. poriſ. *eius area, cubus ſuo multatus latere per ſuprà demonſtrata.* [1] *Quia verò à proportionalibus numeris formata triangula ſimilia ſunt, erit inuentum triangulum primo propoſito ſimile.* [2] *Quare cùm ſimilium triangulorum areæ ſint in ratione duplicata laterum, ſi aream inuenti trianguli ducas in quadratum denominatoris proportionis laterum, fiet area propoſiti trianguli, & è conuerſo diuidendo aream propoſiti trianguli per eundem quadratum, fiet area inuenti, ſeu cubus ſuo multatus latere. Sic propoſito triangulo 9. 12. 15. inuenies illud formari à planis ſimilibus 3. & 12. quos diuidendo ſigillatim per minorem ipſorum 3. fient in eadem ratione 1. & 4. quorum minor vnitas, à quibus ſi formes triangulum priori ſimile, puta 5. 4. 3. erit eius area 6. cubus ſuo multatus latere per ſuprà demonſtrata. Cùm ergo prioris trianguli latera ſint tripla laterum poſterioris, erit area areæ noncupla. Quare diuidendo aream 54. per 9. fiet area 6. cubus ſuo multatus latere. Rurſus propoſito triangulo 39. 36. 15. cuius area 270. Inuenies formari triangulum à planis ſimilibus 12. & 27. quos ſi diuidas ſigillatim per minorem 12. fient 1. & $\frac{9}{4}$. à quibus finges triangulum priori ſimile $\frac{15}{4}$. $\frac{12}{4}$. $\frac{5}{4}$. cuius area $\frac{15}{8}$. eſt cubus $\frac{27}{8}$. ſuo multatus latere. Quia verò proportio laterum prioris trianguli ad latera poſterioris eſt duodecupla, ſi per quadratum ipſius 12. puta per 144. diuidas aream 270. fiet vtique $\frac{15}{8}$. cubus ſuo latere multatus. Quod ſi inuentis planis ſimilibus à quibus propoſitum triangulum formatum eſt, diuidas vtrumque per maiorem ipſorum, fient duo numeri in eadem ratione, quorum maior erit vnitas, à quibus ſi fingas aliud triangulum erit eius area latus ſuo multatum cubo, vt conſtat ex ſuprà demonſtratis.*

Itaque quia diuiſio in multiplicationem verti poteſt, & è conuerſo. Nam verbi gratia diuidere 54. per 9. idem eſt atque multiplicare 54. per $\frac{1}{9}$. ferri poteſt Vietæ limitatio. Et abſolutè verùm eſt aream cuiuſlibet trianguli rectanguli eſſe cubum ſuo multatum latere, vel inueniri ſimile triangulum cuius area ſit cubus ſuo latere multatus.

PROBLEMA XXI.

Dato ambitu trianguli rectanguli, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenuſam demiſſa, inuenire triangulum.

Sit datus ambitus 60. perpendicularis 12. Ponatur hypotenuſa 1 N. erit ſumma laterum circa rectum $60 - 1$ N. cuius quadratus $3600 - 120$ N. $+ 1$ Q. [3] æquatur quadratis ipſorum laterum, ſeu quadrato hypotenuſæ, & duplo plani ſub lateribus. Igitur $3600 - 120$. N. eſt duplum plani ſub lateribus, & $1800 - 60$ N. eſt ipſe planus ſub lateribus. Quoniam verò, vt conſtat per octauam ſexti, vt ſe habet hypotenuſa ad vnum laterum, ſic etiam ſe habet alterum latus ad perpendicularem, [4] erit planus ſub hypotenuſa, & ſub perpendiculari, æqualis plano ſub lateribus. At ex hypotenuſa in perpendicularem fiunt 12 N. ergo 12 N. æquantur $1800 - 60$ N. & fit 1 N. 25. ipſa ſcilicet hypotenuſa. Quare facile eſt inuenire latera circa rectum, puta 20. & 15.

4. ſecundi. 19. ſeptimi.

Hinc elicitur Canon.

Semiſſem quadrati dati ambitus diuide per aggregatum ex ambitu & ex perpendiculari, orietur hypotenuſa.

PROBLEMA XXII.

Data area trianguli rectanguli, & perpendiculari ſub angulo recto in hypotenuſam demiſſa, inuenire triangulum.

Eſto area 150. Perpendicularis 12. Ponatur vnum laterum circa rectum 1 N. erit ergo alterum $\frac{300}{1N}$. Quoniam verò [5] vt eſt perpendicularis 12. ad vnum laterum circa rectum 1 N. ſic eſt alterum $\frac{300}{1N}$. ad hypotenuſam. Inuenietur per regulam proportionum hypotenuſa 25. & reliqua latera 20. & 15.

6. ſexti.

Hinc Canon.

Diuide duplum areæ per perpendicularem, orietur hypotenuſa.

ADDENDA COMMENTARIIS IN *Definitionem ſeptimam & octauam.*

RETRACTANTI commentaria noſtra occurrit mihi definitionem ſeptimam ad mentem Diophanti accommodatius explicari poſſe, ſi accipiatur de fractionibus, in quibus ſuperiores poteſtates per vnitates diuidi intelliguntur. Vt velit Diophantus, verbi gratia, ex $\frac{2}{1N}$. in $\frac{3}{1N}$. produci $\frac{6}{1Q}$. quemadmodum ex 2 N. in 3 N. producuntur 6 Q. & ex $\frac{3}{1N}$ in $\frac{4}{1Q}$ produci $\frac{12}{1C}$. eadem ratione, qua ex 3 N. in 4 Q. Producuntur 12 C. & ſic de alijs. Sic enim vtraque definitio, ſeptima ſcilicet & octaua de iiſdem fractionibus accipientur, & tolletur ambiguitas illa, de qua ad definitionem octauam Diophantum criminabamur, ſemper enim apud Diophantum fractio numerica erit ſeu ἀριθμοστὸν, cùm vnitates per Numeros diuidentur, vt $\frac{3}{1N}$. & fractio Quadratica, ſeu δυναμοστὸν, cùm vnitates per quadratos diuidentur, vt $\frac{4}{1Q}$. & ſic de alijs. Et ſanè apparet ex reliquo opere ita ſenſiſſe Diophantum. Nam vbicumque ἀριθμοστὸν vel δυναμοστὸν vſurpat, huiuſmodi fractiones intelligit. Verum erit nihilominus, quod ad definitionem ſeptimam adnotauimus, nimirum eius demonſtrationem, ab iis quæ demonſtrauimus ad definitionem quartam, pendere omnino, vt per ſe manifeſtum eſt.

FINIS.

DIOPHANTI ALEXANDRINI

DE MVLTANGVLIS NVMERIS.

PROPOSITIO PRIMA.

QVILIBET numerorum à ternario per vnitatis incrementum progredientium, multangulus est, primus ab vnitate, & habet tot angulos, quot ipse vnitatibus constat. Latus autem ipsorum est, proximus ab vnitate numerus, puta 2. est autem 3. triangulus. 4 quadratus. 5. quinquangulus, & sic deinceps. Cùm autem de quadratis euidens sit, ita eos constitui, quod nascantur numeri alicuius in seipsum multiplicatione, exploratum est quemlibet multangulum multiplicatum aliquo numero secundum proportionem multitudinis angulorum eius, & adsumentem quadratum aliquem secundum proportionem multitudinis angulorum eius, apparere quadratum. Atque hoc nos demonstrabimus, ostendentes quomodo dato latere inueniatur qui poscitur multangulus; & quomodo dato multangulo, latus accipitur. Prius autem ea demõstrabimus quæ ad hanc rem sumuntur.

Ἕκαστος τῶν ἀπὸ τ τριάδος ἀριθμῶν αὐξομένων μονάδι, πολύγωνός ἐστι ταῖς ἀπὸ τ μονάδος. καὶ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων. πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ ἐξῆς τ μονάδος ἀριθμός, ὁ β. ἔσται δὲ ὁ μὲν γ τρίγωνος, ὁ δὲ δ τετράγωνος, ὁ δὲ ε. πενταγωνος, καθ ἑξῆς. Τῶν δὲ τετραγώνων τετραπλάσιον ὄντων, ὅτι καὶ τετράγωνοι διὰ τὸ γεγονέναι αὐτοὺς ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ἐδοκιμάσθη ἕκαστος τῶν πολυγώνων πολλαπλασιαζόμενος ὅπου τινος ἀριθμοῦ κατὰ τὸν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, καὶ προσλαβόντα τετράγωνόν τινα κατὰ τὸν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ φαίνεσθαι τετράγωνον. ὃ δὴ δείξομεν ὑποδείξαντες πῶς ἑκάστη τῶν πολυγώνων ἡ ἐπιζητουμένη πολυγώνου εὑρίσκεται καὶ πῶς δοθέντι πολυγώνῳ ἡ πλευρὰ λαμβάνεται. προδείξομεν δὲ τὰ εἰς αὐτὰ λαμβανόμενα.

In Librum Diophanti de numeris multangulis Commentarij.

LAborioſiſſimis in libros ſex Arithmeticorum commentariis exantlatis, ſupereſt nobis de numeris multangulis liber enodandus. In quo reſtituendo quantum deſudauerim coniicere poterunt quotquot in eo percipiendo, vt à Xilandro nobis traditus eſt, operam aliquam impenderint. Sanè, vt omittam cætera quæ huc contulimus, non paruam à tyronibus gratiam promeriti ſumus ob diagrammata ſingulis ferè propoſitionibus adjecta, quæ paſſim imperitus librarius, tanquam ad rem minimè pertinentia, prætermiſerat, cùm tamen illorum ope deſtitutus, vel accerrimo qui ſit prædituſ ingenio, Diophanti demonſtrationes vix percipere poſſit.

IN PROPOSITIONEM PRIMAM.

HÆc propoſitio definitionis vel petitionis cuiuſdam locum obtinet. Per eam enim ſupponit Diophantus, quemlibet numerum incipiendo à ternario eſſe polygonum, tot angulos continentem quot vnitatibus conſtat ipſe numerus, verbi gratia 3. eſſe triangulum, 4. quadratum 5. pentagonum, 6. hexagonum, & ſic in infinitum. Cuius rei ratio eſt, quia vnitates cuiuſlibet

numeri æqualibus interuallis ita disponi possunt, vt repræsentent figuram totidem angulorum, & laterum æqualium, vt in appositio diagrammate videre est. Vnde etiam apparet, quod subiicit Diophantus nimirum horum omnium polygonorum latus esse proximum ab vnitate numerum, puta 2. vides enim in quolibet latere cuiuslibet polygoni contineri vnitates 2.

Quoniam vero ipsa vnitas virtualiter est omnis polygonus; est enim & triangulus, & quadratus, & pentagonus, quia horum omnium polygonorum proprietates ipsi vnitati conueniunt, idcirco ait Diophantus quemlibet numerum à ternario, esse polygonum in sua specie primum post vnitatem, verbi gratia 3. est primus triangulus post vnitatem, 4. primus quadratus, 5. primus pentagonus post vnitatem, & sic de alijs.

PROPOSITIO SECVNDA.

ε.....α.....β..δ...γ

Ἐαν᾽ ᾖς ἀριθμοὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχωσιν, ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ μέσου, προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τετράγωνον γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ μείζονος καὶ δύο τῶν μέσων. Τρεῖς γὰρ ἀριθμοὶ ὁ αβ. βγ. βδ. τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερεχέτωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βγ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ βδ. τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῷ τε. αβ. καὶ δυσὶ τοῖς βγ. ὅτι ἓν ὁ αβ. ἴσος ἐστὶ τοῖς βγ. γδ. διαιρεῖται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τῶν αβ. βγ. εἰς τε τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τοῦ βγ. τετράγωνον καὶ εἰς τὸν ὀκτάκις ὑπὸ βγ. γδ. Καὶ πάλιν διαιρεῖται ἕκαστος τῶν εἰρημένων διχῶς, εἴτε τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βγ. τετράγωνον καὶ τὸν τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. ὁ δὲ τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. μετὰ τοῦ ἀπὸ δβ. τετραγώνου, γίνεται τετράγωνος ὁ ἀπὸ αβ. ζητητέον οὖν πῶς ὁ ἀπὸ τοῦ αβ. τετράγωνος, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ ὁ τετράκις ἀπὸ τοῦ βγ. τετράγωνος συντεθέντες ποιοῦσιν τετράγωνον. ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ βγ. ἴσον τὸν αε. μεταβησόμεθα τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βα. αε. ὃς μιγεὶς τῷ τετράκις ἀπὸ γβ. τουτέστι τῷ ἀπὸ αε. ποιήσει ἴσον τῷ τετράκις ὑπὸ βε. εα. ὃς μιγεὶς τῷ ἀπὸ τοῦ αβ. τετραγώνῳ, γίνεται ἴσος τῷ ἀπὸ βε. εα. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ οἱ δὲ βε. εα. ἴσοι εἰσὶ τῷ τε αβ. καὶ δυσὶ τοῖς αε. τουτέστι δυσὶ τοῖς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε.....α.....β..δ...γ

E.....A.....B..D...G

SI fuerint tres numeri æqualibus interuallis se superantes, qui fit ex maximo in medium octies, adsumens minimi quadratum, facit quadratum, cuius latus æquale est composito ex maximo & medij duplo. sint enim tres numeri AB. BG. BD. æqualib. interuallis se superantes; Ostendendum est eum qui fit octies ex AB. in BG. vna cum quadrato ipsius BD. facere quadratum, cuius latus æquale est ipsi AB. & duobus BG. Quoniam ergo AB. æqualis est ipsis BG. GD. diuidetur qui fit octies ex AB. in BG. in eum qui fit octies ex BG. quadratum, & in eum qui fit octies ex BG. in GD. Et rursus diuiditur vnumquodque prædictorum bifariam, nimirum in eum qui fit quater ex AB. in BG. & in quadratum ex BG. quater, & in eum qui fit quater ex BG. in GE. At qui fit quater ex BG. in GD. vna cum quadrato ex DB. fit quadratus à latere AB. Quærendum igitur est, quomodo quadratus ex AB. & productus ex AB. in BG. quater, & quadratus ex BG. quater, compositi faciant quadratum. Itaque si ponamus ipsi BG. æqualem AE. traiiciemus eum qui fit quater ex AB. in BG. in eum qui fit quater ex BA. in AE. qui mixtus quadruplo quadrati ex GB. seu quadrati ex AE. facit æqualem quadruplo producti ex BE. in AE. qui mixtus quadrato ex AB. fit æqualis quadrato qui ex BE. EA. tanquam vna describitur. At ipsi BE. EA. æquales sunt ipsi AB. & duobus AE. seu duob. BG. quod erat ostendendũ.

E.....A.....B..D...G

IN SECVNDAM.

IN huius propositionis demonstratione, nulla insignis est difficultas. Tria tamen sunt quæ tyrones fortassis morari queant. Primum est quod ait Diophantus Quadratum ex AB. æquari qua-

E....A.....B..D...G

druplo producti ex B G. in G D. vna cum quadrato ex B D. Quod ita probatur. Quoniam A B. ſupponitur æqualis ſummæ duorum B G. D G. quorum interuallum B D. [1] patet quadruplum producti ex B G. in D G. vnà cum quadrato interualli B D. æquale eſſe quadrato ſummæ ipſorum B G. D G. hoc eſt quadrato ipſius A B. Quinta 2. poriſ.

Secundum eſt, quod ait Diophantus quadruplum producti B A. in A E. vnà cum quadruplo quadrati ex A E. æquari quadruplo producti ex toto B E. in A E. Quod euidens eſt, quia [2] productus ex B E. in E A. æquatur producto ex B A. in A E. vnà cum quadrato ex A E. tertia 2.

Tertium eſt, quod ait Diophantus, quadruplum producti ex B E in A E, vna cum quadrato ex A B. æquari quadrato compoſiti ex B E. E A. Quod rurſus patet per 5. 2. poriſmatum cùm A B. ſit interuallum ipſorum B E. E A.

Poteſt autem hæc propoſitio & vniuerſalius concipi, & breuius atque etiam facilius demonſtrari, hoc pacto.

Si fuerint tres numeri in medietate arithmetica, octuplum producti ex medio in quemlibet extremorum, adſciſcens quadratum alterius extremi, æquatur quadrato compoſiti ex medij duplo, & ex illo extremo qui in medium octies ductus eſt.

D 10. A 2. B 5. C 8.

Sint tres numeri A B C. in medietate arithmetica, & ſit D. duplum medij, dico octuplum producti ex B. in vnum extremorum C. vnà cum quadrato alterius extremi A. æquari quadrato compoſiti ex ipſis D C. Quia enim ſunt in medietate arithmetica ipſi A B C. erit duplum medij, puta D. [3] æquale ſummæ extremorum A C. Quare ipſorum D C. interuallum erit A. Quadratus autem compoſiti ex ipſis D C. [4] æquatur quadratis ipſorum D C. & duplo producti ex D. in C. ſeu quadruplo producti ex B. in C. Quadrati autem ipſorum D C. [5] æquantur rurſus duplo producti ex D. in C. ſeu quadruplo producti ex B in C. & quadrato interualli A. Igitur quadratus compoſiti ex ipſis D. C. æquatur octuplo producti ex B. in C. vnà cum quadrato ipſius A. Quod erat oſtendendum. Eodem prorſus argumento probabitur octuplum producti ex B in A. vnà cum quadrato ipſius C. æquari quadrato compoſiti ex ipſis A D. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum. quinta 1. poriſ. quarta 2. quarta 2. poriſ.

Aliter etiam Franciſcus Vieta propoſitionem hanc demonſtrauit lib. 8. variorum de rebus mathematicis reſponſorum, per ipſam ſcilicet Algebræ operationem hac arte. Sit minimus trium numerorum arithmeticæ medietatis A. & ſit differentia B. erit ergo medius A + B. maximus vero A + B. bis & ſi ducatur medius A + B. in maximum A + B. bis fit A Quad. + A in B. ter + B Quad. bis. quod ſi ſumatur octies, & producto addatur A Quad. fit vtique A Quad. nouies + A in B quater & viceſies + B Quad. ſedecies. Hic autem numerus eſt quadratus à latere A. ter + B. quater vt euidens eſt. Et A ter + B quater æquatur compoſito ex maximo & medij duplo, cùm maximus ſit A + B bis, & duplum medij ſit A bis + B bis. Ergo conſtat propoſitum.

Eodem artificio demonſtrabitur altera noſtræ propoſitionis pars. Ducatur enim minimus A in medium A + B octies, & producto addatur quadratus maximi, fiet A Quad. nouies + A in B. duodecies + B Quad. quater qui numerus quadratus eſt à latere A ter + B bis quod æquatur minimo & medij duplo.

PROPOSITIO TERTIA.

B.A.. G..D.. E

Ε.α..γ..δ..ε

SI ſint quotcunque numeri æquali interuallo ſe ſuperantes, interuallum maximi & minimi, multiplex eſt interualli ipſorum, ſecundum numerum vnitate minorem eo qui multitudinem propoſitorum numerorum exprimit. Sint enim quotlibet numeri A B. B G. B D. B E. æquali ſe ſuperantes interuallo. Oſtendendum eſt, quod interuallum ipſorum A B. B E. multiplex eſt interualli ipſorum A B. B G. ſecundum numerum vnitate minorem multitudine ipſorum. AB. B G. B D. BE. Quoniam enim expoſiti ſunt AB. BG. BD. BE. æquali interuallo ſe ſuperantes, erunt ipſi

Ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἡ ὑπεροχὴ, τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν πολλαπλασίων ἔστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ἀριθμῶν. ἔστωσαν γὰρ ὁποσιοῦν ἀριθμοὶ οἱ αβ. βγ. βδ. βε. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι ἡ τῶν αβ. βε. ὑπεροχὴ, τῆς τῶν αβ. βγ. ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἔστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τῶν αβ. βγ. βδ. βε. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκεινται οἱ αβ. βγ. βδ. βε. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ ἄρα αγ. γδ. δε. ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις. ὁ ἄρα εα τοῦ αγ. πολλαπλάσιός ἐστι

κὴ τὸ πλῆθος τῶν αγ. γδ. δε. τὸ δὲ πλῆθος τ αζ. ζδ. δε. τῶ πλήθυς τ αϐ. ϐγ. ϐδ. ϐε. μονάδι ἐλάσσων ὄζιν. ὥστε τὸ εα, τ αγ. πολλαπλάσιόν ὄζι κὴ τ μονάδι ἐλάσσονα τῶ πλήθους τ αϐ. ϐγ. ϐδ. ϐε. κὴ ἔστιν ὁ μὲν αε. ὑπεροχὴ τ μεγίσου κὴ τῶ ἐλαχίσου, ὁ δὲ αγ. ὄζὶν αὐτῶν μία ὑπεροχὴ.

AG. GD. DE. æquales inter ſe. Quamobrem ipſe EA. ipſius AG. multiplex eſt, ſecundum multitudinem ipſorum AG. GD. DE. Atqui multitudo ipſorum AG. GD. DE. eſt vnitate minor multitudine ipſorum AB. BG. BD. BE. Igitur EA. ipſius AG. multiplex eſt ſecundum numerum vnitate minorem multitudine ipſorum AB. BG. BD. BE. eſt autem AE. interuallum maximi & minimi, At AG. eſt vnum interuallum ipſorum numerorum.

IN TERTIAM.

NIhil eſt hic difficultatis. Nam demonſtratio Diophanti breuis eſt, & dilucida.

PROPOSITIO QVARTA.

ΕΑν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ μέγιστος κὴ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες κὴ πολλαπλασιαθέντες ὅση τὸ πλῆθος αὐτῶν, ποιοῦσιν ἀριθμὸν διπλάσιον τῦ συγκειμένυ ἐκ τῶν ἐκτεθέντων. ἔστωσαν γὰρ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ α. ϐ γ. δ. ε. ζ. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι συναμφότερος ὁ αζ. πολλαπλασιαθεὶς ὅση ϐ πλῆθος τῶν α. ϐ. γ. δ. ε. ζ. ποιεῖ πνα ἀριθμὸν, ὃς ὄζι διπλασίων τῦ συγκειμένυ ἐκ τ α. ϐ. γ. δ. ε. ζ. τὸ γὰρ πλῆθος τ α. ϐ. γ. δ. ε. ζ. ἢ κὴ ἄρτιόν ὄζιν ἢ περισσόν. ἔστω πρότερον ἄρτιον, κὴ ὅσοι εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. ἀριθμῷ ὥστε ἄρτιός ὄζιν ὁ ηθ. τετμήσθω διχῶς τὸ κ. κὴ διῃρήσθω ὁ κ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κὴ τὰ λ. μ. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ζ. τῦ δ. τέτῳ ὑπερέχει κὴ ὁ γ. τῦ α. συναμφότερος ἄρα ὁ ζα. συναμφοτέρῳ τῷ γδ. ἴσος ὄζιν. ἀλλὰ συναμφότερος ὁ ζα. ἴσος ὄζὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρυ τῦ ζα. & τῦ ηλ. ὥστε κὴ ὁ γδ. ἴσος ἔσαι τῷ ὑπὸ συναμφοτέρυ τῦ ζα. κὴ τῦ λυ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ κὴ συναμφότερος ὁ εϐ. ἴσος ὄζὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρυ τοῦ ζα. κὴ τοῦ μκ. ὥστε & ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α. ϐ. γ. δ. ε. ζ. ἴσος τῷ ὑπὸ συναμφοτέρυ τοῦ ζα καὶ τοῦ ηκ. τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ ηκ. διπλασίων ὄζὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. κὴ τοῦ ηθ. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένυ ἐκ τ α. ϐ. γ. δ. ε. ζ. διπλασίων ὄζὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τ ζα καὶ τ ηθ. τουτέστι τ πλήθους τῶν α. ϐ. γ. δ. ε. ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

α. ϐ. γ. δ. ε. ζ.
η. λ. μ. κ...θ

SI ſint quocunque numeri æquali interuallo progredientes, ſumma maximi & minimi ducta in numerum multitudinis ipſorum, numerum producit duplum ſummæ expoſitorum numerorum. Sunto numeri quotcunque AB. CD. EF. æquali interuallo progredientes. Oſtendendum eſt ſummam duorum AF. ductam in numerum multitudinis ipſorum AB. CD. EF. producere numerum qui duplus eſt ad ſummam ipſorum AB. CD. EF. etenim numerus multitudinis ipſorum AB. CD. EF. velpar eſt, vel impar. Sit primùm par, & quot ſunt expoſiti numeri, tot vnitates ſint in ipſo HG. erit ergo HG. par. Quare ſecetur bifariam in K, & diuidatur HK. in ſuas vnitates per L. & M. Tunc quia F. ſuperat D. eodem numero, quo C. ſuperat A. erit ſumma duorum FA. æqualis ſummæ duorum CD. Atqui ſumma duorum FA. æqualis eſt producto ex ipſamet in vnitatem HL. Igitur & ſumma duorum CD. æquabitur producto ex ſumma duorum FA. in vnitatem LM. Ob hæc eadem ſumma duorum EB. æqualis eſt producto ex ſumma duorum FA. in vnitatem MK. Quamobrem ſumma omnium AB. CD. EF. æqualis eſt producto ex ſumma duorum FA. in HK. At producti ex ſumma duorum FA. in HK. duplum eſt productum ex ſumma duorum FA. in HG. Igitur & ſummæ omnium AB. CD. EF. duplum eſt productum ex vtroque FA. in HG. hoc eſt in numerum multitudinis ipſorum AB. CD. EF. Quod demonſtrandum erat.

A. B. C. D. E. F.
H. L. M. K...G

PROPOSITIO QVINTA.

A. B. C. D. E.
G. M. L. K. H

IIsdem positis sit multitudo ipsorum A. B. C. D. E. impar, & sint in G H tot vnitates, quot sunt ipsi A. B. C. D. E. Erit ergo impar ipse G H. sumatur in eo vnitas G M. & secetur M H. bifariam in K. & secetur M K. in suas vnitates per L. & quoniam E. superat C. eodem numero quo C. superat A. summa ipsorum E A. dupla est ipsius C. Hoc est producti ex C. in vnitatem K L. Ob hæc eadem summa duorum B D. dupla est producti ex C. in L M. quare summa ipsorum A E B D. dupla est producti ex C. in M K. Atqui ipsius M K. duplus est M H. Igitur summa ipsorum A E B D. æqualis est producto ex C. in M H. sed & ipse C. æqualis est producto ex C. in M G. Quamobrem summa omnium A B C D E. æqualis est producto ex C. in G H. At producti ex C. in G H. duplus est productus ex vtroque A E. in G H. quare summæ omnium A. B. C. D. E. duplus est productus ex vtroque A E. in G H. hoc est in numerum multitudinis expositorum numerorum. Quod oportebat ostendere.

α. β. γ. δ. ε.
ζ. θ. κ. η.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ὁ τῶν α. β. γ. δ. ε. περισσὸς. καὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ζη. τοσαῦται μονάδες, ὅσαι εἰσὶν οἱ α. β. γ. δ. ε. περισσὸς ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ζη. κείσθω ἐν αὐτῷ μόναι ζθ. καὶ τετμήσθω ὁ θκ. δίχα τῷ κ. καὶ τετμήσθω. ὁ θκ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κῆ τὸ λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ε. τῷ Γ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ Γ. τῷ α. συναμφότερος ἄρα ὁ εα. διπλασίων ἐστὶ τοῦ Γ. τουτέστι τοῦ ὑπὸ Γ. Ⓒ κλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ βδ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ Γ. καὶ λθ. ὥστε οἱ α. ε. β. δ. διπλασίων εἰσὶ τοῦ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ θκ. διπλασίων ἐστὶν ὁ θη. ὥστε καὶ οἱ α. ε. β. δ. ἴσοι εἰσὶ τῷ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ θη. ἐστὶ δὲ Ⓒ ὁ Γ. ἴσος τῷ ὑπὸ τοῦ Γ. καὶ τοῦ θζ. ὥστε ὁ συκείμενος ἐκ τ α. β. γ. δ. ε. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ ζη. τοῦ δὲ ὑπὸ τ Γ. καὶ ζη. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε. καὶ τῆ ζη. ὥστε καὶ τοῦ συκειμένου ἐκ τ α. β. Γ. δ. ε. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε. καὶ τοῦ ζη. τουτέστι τοῦ πλήθους τ ὑπεθέντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IN QVARTAM ET QVINTAM.

HÆ quoque demonstrationes faciles sunt, & vnicam tantum propositionem constituunt, vt euidens est, cuius demonstratio pendet omnino à propositione sexta libri primi porismatum, qua ostendimus in medietate arithmetica summam extremorum æquari summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, atque etiam duplo medij, si multitudo terminorum fuerit impar. Ex his porro collige summam quotlibet numerorum progressionis arithmeticæ, æqualem esse producto ex semisse numeri terminorum in summam extremorum, vel è conuerso, producto ex semisse summæ extremorum, in numerum terminorum. Semper enim accidit alterutro horum modorum summam omnium numerorum haberi nullis intercedentibus fractionibus, si enim numerus terminorum sit par, eius dimidium sumi potest absque fractione, si autem multitudo terminorum sit impar, semissis summæ extremorum haberi potest absque fractione, quia tunc summa extremorum est numerus par, quandoquidem est dupla medij termini.

PROPOSITIO SEXTA.

α. κ. ν. . . . β γ. . . . . δ ε. λ. . . . . ζ
η. μ —— ξ —— ϑ
A. K. N. . . B G. . . . . D E. L. . . . . Z
H. M —— X —— T

SI sint ab vnitate quotcunque numeri æquali interuallo progredientes, sum-

ΕΑν ὦσιν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιδῆ ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ σύμπας πολλαπλα-

σιαθεὶς ὅπὶ τ ὀκ̃ζαπλασίονα τῆς ὑπ̃οχῆς αὐτῷ, ℂ πρσλαβὼν τ ἀπὸ τ̃ δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπ̃οχῆς αὐτ̃ τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος, ᾧ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα πολλαπλάσιος ἔσαι τῆς ὑπ̃οχῆς αὐτῷ, κατά τινα ἀριθμὸν, ὃς πρσλαβὼν μονάδα διπλασίων ὄ̃ι τ̃ πλήθους τῷ ὑκκειμένων πάντων σὺν τῇ μονάδι: ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπ̃οχῇ οἱ αβ. γδ. εζ. λέγω ὅτι γίνεται τὸ πρκείμενον. ὅσοι γ̃ εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες σὺν τῇ μονάδι, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. ᾗ ἐπεὶ ἡ ὑπ̃οχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ εζ μονάδα, τ ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ αβ. πολλαπλάσιός ὄ̃ι ᾗ τ μονάδι ἐλάσσονα τ̃ ηθ. ἐὰν ἄρα θῶμεν ἕκασιν μονάδα τὸν ακ. ελ. ημ. ἕξομεν τὸν λζ. τ̃ κβ. πολλαπλάσιον ᾗ τὸν μθ. ὥστε ὁ λζ. ἴσος ὄ̃ι τῷ ὑπὸ κβ. μθ. ᾗ ἐὰν θῶμεν δυάδα τὸν κγ. ζητήσομεν εἰ ὁ σύμπας πολλαπλασιαθεὶς ὅπὶ ὅπτω τοις κβ. ὃς ὄ̃ι ὑπεροχὴ αὐτῷ, ᾗ πρσλαβὼν τ ἀπὸ τ̃ γβ. γβ. ὄντος δυάδι ἐλάσσονος τ ὑπεροχῆς αὐτῷ, γίνεται τετράγωνος, ᾧ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα ποιεῖ τινα ἀριθμὸν ὃς τ ὑπεροχῆς αὐτῷ τ̃ κβ. πολλαπλάσιός ὄ̃ι ᾗ συναμφότερον τ̃ κθ. θμ. ᾗ ἐπεὶ ὁ σύμπας ἡμισύς ὄ̃ι τ̃ ὑπὸ συναμφοτέρου τῷ ζε. ελ. ᾗ τ̃ ϑη. ὁ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τ̃ ζε. ελ. ᾗ τοῦ ϑη, διαιρεῖται εἵστε τὸν ὑπὸ λζ. ηθ ᾗ εἰς τ δὶς ὑπὸ ελ. ηθ. τουτέστι δύο τοις ηθ. πάλιν ἄρα ὁ σύμπας ἥμισύς ὄ̃ι τ̃ ὑπὸ λζ. ηθ. ᾗ δύο τ̃ ηθ. ἀλλὰ ὁ λζ. ἴσος ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κβ. μθ. ᾗ ὁ σύμπας ἄρα ὄ̃ιν ἥμισυς τ̃τε ὑπὸ κβ. μθ. ϑη. στρεῷ καὶ δύο τ̃ ηϑ. ἐὰν ἄρα τέμωμεν τ μθ. δίχα κῇ τὸ ξ. ἕξομεν τὸν ἐκ πάντων συγκείμενον ἴσον τῷ ἐκ τ̃ κβ. ηθ. θξ. στρεῷ καὶ ἑνὶ τῷ ηϑ. ζητήσομεν ἄρα εἰ ὁ ἐκ τ̃ κβ. ηϑ. ϑξ. στρεὸς μῇ ἑνὸς ηϑ. πολλαπλασιαθεὶς ὅπὶ ὅπτω τοις κβ. ℂ πρσλαβὼν τὸν ἀπὸ τ̃ νβ. τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος. ἀλλὰ ὁ ἐκ τ̃ κβ. ηϑ. ϑξ στρεὸς πολλαπλασιαθεὶς ὅπὶ ἕνα τὸν κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηϑ. ϑ ξ. ὅπὶ τὸν ἀπὸ τ̃ κβ τετράγωνον ὥστε καὶ ὁ ἐκ τ̃ κβ. ηϑ. ϑξ. στρεὸς πολλαπλασιαθεὶς ὅπὶ ὅπτω τοις κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηϑ. θξ. ὅπὶ ὅπτω τοις ἀπὸ κβ. τετραγώνους τουτέστι τ ὀκτάκις ὑπὸ ηθ. θξ. ὅπὶ τ ἀπὸ τ̃ κβ. τετράγωνον τουτέστι τ τεσσάκις ὑπὸ ηθ. θμ. ὅπὶ τ ἀπὸ τ̃ κβ. τετράγωνον δεικτέον ἐν ὅτι ὁ τε-

ma omnium ducta in octuplum interualli ipſorum, & adſumens quadratum numeri qui binario minor eſt eodem interuallo, quadratus exiſtit, cuius latus binario multatum multiplex eſt ad interuallum ſecundum quendam numerum, qui auctus vnitate, duplus eſt numeri multitudinis expoſitorum numerorum, vnitate *in iis annumerata*. Sint enim ab vnitate *numeri* æquali interuallo progredientes. A B. G D. EZ. dico fieri quod eſt propoſitum. Quot enim ſunt expoſiti numeri cum vnitate, tot vnitatibus conſtet numerus H T. Et quoniam interuallum quo E Z. ſuperat vnitatem, interualli quo A B. vnitatem ſuperat multiplex eſt ſecundum numerum vnitate minorem ipſo H T. ſi ponamus vnitati æquales ſingulos A K. E L. H M. habebimus L Z. ipſius K B. multiplicem ſecundum M T. Quamobrem L Z. æqualis eſt producto ex K B. in M T. Et ſi ſumamus K N. *binarium*, quæremus an omnium ſumma *ducta in octuplum ipſius* K B. (quod eſt *ipſorum interuallum*) & adſumens quadratum ipſius N B. (qui binario deficit ab interuallo) faciat quadratum, cuius latus binario multatum, faciat quendam numerum, qui interualli K B. multiplex ſit, ſecundum compoſitum ex vtroque H T. T M. Et quia ſumma omnium eſt dimidium producti ex vtroque Z E. E L. in H T. *At* productus ex vtroque *ZE. EL. in HT. diuiditur in productum ex LZ. in H T & in* eum qui fit bis ex E L. in H T. hoc eſt in duos H T. Rurſum omnium ſumma eſt dimidium eius qui fit ex L Z. in H T. & duorum H T. At LZ. eſt oſtenſus æqualis producto ex K B. in M T. Quare ſumma omnium eſt dimidium ſolidi ſub K B. M T. T H. contenti, & duorum H T. ſi ergo ſecemus M T. bifariam in X. habebimus ſummam omnium æqualem ſolido ſub KB. HT. TX. contento & vni H T. Quæramus igitur an ſolidus ſub K B. H T. TX. contentus, cum vno H T. multiplicatus in octo K B. & adſumens quadratum ipſius N B. faciat quadratum. Atqui ſolidus ſub K B. H T. TX. contentus ductus in vnum K B. æquatur ei qui fit à producto ex H T. in T X. in quadratum ipſius K B. Quare ſolidus ſub K B. H T. T X. contentus,

ductus in octo K B. æquatur ei qui fit à producto ex H T. in T X. in octo quadratos K B. hoc eſt ei qui fit octies ex H T. in T X ducto in quadratum K B. hoc eſt ei qui fit quater ex H T. in T M. ducto in quadratum K B. oſtendendum ergo quod qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adſumens productum ex H T. in octo K B. & adhuc quadratum N B. fit quadratus. Diuiditur autem qui fit octies ex H T. in K B. in eum qui fit quater ex H M. in K B. & in eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. quærendum ergo an qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adſciſcens eum qui fit quater ex H M. in K B. & eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratum N B. faciat quadratum. At qui fit quater ex H M. in K B. æqualis eſt ei qui fit bis ex N K. in K B. & mixtus quadrato N B. facit quadratos ipſorum K B. K N. Quæremus igitur an qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adſumens eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratos B K. K N. fiat quadratus. Rurſus autem quadratus B K. tranſit in eum qui fit ex quadrato H M. in quadratum K B. & mixtus hic ei qui fit quater ex H T. in T M. ducto in quadratum K B. facit numerum æqualem producto ex quadrato compoſiti ex vtroque H T. T M. in quadratum K B. Quærendum ergo an quadratus compoſiti ex vtroque H T. T M. ductus in quadratum K B. adſumens quadruplum producti ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratum K N. fiat quadratus. Itaque ſi producto ex vtroque H T. T M. in K B. accipiamus æqualem numerum N R. erit productus ex quadrato vtriuſque H T. T M. in quadratum K B. æqualis quadrato N R. vt deinde oſtendetur. Videndum igitur an quadrati R N. N K. cum quadruplo producti ex vtroque H T. T M. in K B. faciant quadratum. Atqui quadruplum producti ex vtroque H T. T M. in K B. æquale eſt quadruplo ipſius N R. quandoquidem qui fit ſemel ex vtroque H T. T M. in K B. æqualis poſitus eſt N R. Atqui quatuor N R. æquales ſunt duplo producti ex N R. in N K. (nam N K. poſitus eſt binarius) quærendum ergo an quadrati N R. N K. cum duplo producti ex N R. in N K. faciant quadratum; faciunt autem quadratum à latere R K. cuius latus R K. multa-

τράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ὅλη τὸν ὑπὸ τῶ κβ. τετράγωνον πρωτλαβὼν τὸν ὑπὸ τῶ αθ. ὅλη ὅκτω τοις κβ. καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τῶ νβ. τετράγωνον γίνεται τετράγωνος. διαιρεῖται δὲ ὁ ὀκτάκις ὑπὸ κθ. κβ. εἰς τε τ τετράκις ὑπὸ κμ. κβ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῶ ηθ. θμ. καὶ τῶ κβ. ζητητέον ἦν εἰ ὁ τετράκις ὑπὸ τ ηθ. θμ. ὅλη τὸν ὑπὸ τῶ κβ. τετράγωνον, μὴ τ τετράκις ὑπὸ κμ. κβ. καὶ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῶ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ☾ ὁ ὑπὸ τοῦ νβ. τετράγωνος ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ τετράκις ὑπὸ κμ. κβ. ἴσός ἐστι τῷ δἰς ὑπὸ νκ. κβ. καὶ μιγεὶς τῷ ὑπὸ νβ. τετραγώνῳ ποιεῖ ζυὶς ὑπὸ κβ. νκ. τετραγώνους: ζητήσομεν ἄρα εἰ καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ θκ. θμ. ὅλη τ ὑπὸ ὑπὸ τῶ κβ. τετράγωνον καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου ζυῶ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. μὴ τ ἑκ. κη. τετραγώνων γίνεται τετράγωνος. πάλιν δὲ ὁ ἀπὸ ζυῶ ἑκ. τετράγωνος μεταβαίνει εἰς τὸν ἀπὸ τοῦ ημ. τετράγωνον ὅλη τὸν ἀπὸ τῶ κβ. τετράγωνον, καὶ μιγεὶς ὅλῃ τῷ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ὅλη τὸν ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον ποιεῖ τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνον ἐπὶ τ ἀπὸ τῶ κβ. τετράγωνον: ζητητέον ἄρα εἰ ☾ ὁ συναμφοτέρῳ τῶ ηθ. θμ. τετράγωνος ἐπὶ τ ἀπὸ τῶ κβ. τετράγωνον, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρῳ τῶ ηθ. θμ. καὶ τῶ κβ. μὴ τῶ ἀπὸ κν. τετραγώνου γίνεται τετράγωνος, ἐαν δὴ θῶμεν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσον τὸν ρ. ἀριθμὸν, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνος ὅλη τ ἀπὸ τῶ κβ. τετράγωνον ἴσος τῷ ἀπὸ τ ρ. τετραγώνῳ, ὅπερ ἐξῆς δειχθήσεται, σκεπτέον ἄρα εἰ οἱ ἀπὸ τῆ ρ. ρν. νκ. τετράγωνοι μὴ τῶ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρῳ τ κθ. θμ. καὶ τῶ κβ. γίνεται τετράγωνος ἀλλὰ ὁ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ☾ κβ. ἴσος ἐστὶ τῷ ρ. τετράκις, ὅπερ δ' ἦν ☾ ὁ ἅπαξ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρῳ τῶ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἴσος ἐτέθη ὁ ρ. Τέσσαρες δὲ οἱ ρ. ἴσοι εἰσὶ τῷ δἰς ὑπὸ ρ. νκ. δυας γὰρ ἐτέθη ὁ νκ. ζητητέον ἄρα εἰ καὶ οἱ ἀπὸ τῆ ρ. ρν. νκ. τετράγωνοι μὴ τοῦ δἰς ὑπὸ ρ. νκ. ποιῶσι τετράγωνον. ποιῶσι δὲ τὸν ἀπὸ τῶ ρκ. ἕ ἡ πλευρὰ ἡ ρκ. λιποῦσα δυάδα τὸν νκ. ποιεῖ ἀριθμὸν τὸν ρ. ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆ τοῦ

κβ. πολλαπλασίων ἐστὶ κτ̅ ἢ συναμφότερον ἢ ηθ. θμ. ὃς προσλαβὼν μονάδα τὸν ημ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ ἐκτεθέντος παντὸς συστήματος.

α. κ. ν... β
η. μ——ξ——θ

tum binario N K. facit numerum quendam N R. qui interualli K B. multiplex est, secundum summam ipsorum H T. T M. quæ adscita vnitate H M. duplum facit numeri multitudinis expositorum numerorum.

A. K.. N... B——R
H. M——X——T

IN SEXTAM.

HIc nonnulla sunt dilucidanda, quæ Diophantæa breuitas obscuriora reddit.

A. K.. N... B G.....D E. L.....Z
H. M——X——T

Primò quod ait summam omnium esse dimidium producti ex summa ipsorum E Z. EL. in H T patet per 4. & 5. huius: Cùm enim EL. sit vnitas, vtique E Z. E L. simul conficiunt summam extremorum, qua ducta in H T. numerum terminorum, fit duplum summæ omnium. Quia vero ducere E Z. in H T, [1] idem est ac ducere sigillatim E L. L Z. in eundem H T. rectè concludit summam omnium esse dimidium producti ex L Z. in H T. semel, & producti ex E L. in HT. bis, & cùm E L. sit vnitas, quæ non immutat numerum quem multiplicat, benè infert summam omnium esse dimidium producti ex L Z. in H T. adsciscentis duplum ipsius HT.

prima 2.

Secundò, diuidentes M T. bifariam in X. rem per lineas expressimus, quia ex hypothesi Diophantæa sequitur M T. esse ternarium, qui bifariam per integros secari non potest, hoc autem nil facit ad demonstrationem.

Tertiò, quod ait solidum sub K B. H T. T X. contentum ductum in K B. æquari ei qui fit à producto ex H T. in T X. in quadratum ipsius K B. patet ex eo quod quatuor numeri quoquo modo & ordine inter se multiplicentur, [2] eundem semper numerum procreant.

tertia 1. poris.

Quartò, quod ait numerum qui fit bis ex K N. in K B. adsumpto quadrato ipsius N B. æquari quadratis ipsorum K B. K N. sic probatur. Qui fit ex K B. in K N. bis. [3] æquatur producto ex K N. in N B. bis & duplo quadrati ipsius K N. Igitur si addatur vtrimque quadratus ex N B. erit productus ex K B. in K N. bis, cum quadrato ex N B. æqualis producto ex K N. in N B. bis, & quadrato ex K N. bis, & quadrato ex N B. semel. At quadrati ipsorum K N. N B. cum duplo producti ex K N. in N B. [4] æquantur quadrato totius K B. Igitur productus ex K N. in K B. bis cum quadrato ipsius N B. æquatur quadratis ipsorum K B. K N. Quod erat demonstrandum.

tertia 2.

quarta 2.

Quintò, quod ait productum ex quadrato ipsius K B. in quadruplum producti ex H T. in M T. vnâ cum producto ex eodem quadrato K B. in quadratum H M. æquari producto ex quadrato K B. in quadratum compositi ex ipsis H T. M T. id sic infertur. Quoniam datis duobus numeris H T. M T. quorum interuallum H M. quod fit quater ex H T. in M T. addito quadrato ipsius H M. [5] æquatur quadrato compositi ex ipsis H T. M T. patet ducere quadratum K B. in quadruplum producti ex H T. in M T. & in quadratum H M. idem esse atque ducere eundem quadratum K B. in quadratum compositi ex ipsis H T. M T.

quinta 2. poris.

Quoniam vero demonstratio Diophanti ob illius prolixitatem, tyronibus fortasse videbitur obscurior, operæ pretium duxi, propositionem istam aliter demonstrare. In quo præter quàm quod facilius & magis dilucidè rem expediemus, id etiam nobis nobis lucri accedet, quod in vniuersum de omni progressione Arithmetica ostendemus, quod demonstrauit Diophantus de sola progressione cuius minimus terminus est vnitas. Itaque more nostro, quinque vel sex Theorematis propositum concludemus.

THEOREMA PRIMVM.

Datis duobus numeris, quadratus primi cum quadrato semissis secundi, æquatur producto ex mutua datorum multiplicatione, vnâ cum quadrato interualli inter primum & semissem secundi.

D 8. C 2.
A 10. B 4.

Sint dati A. B. & ipsius B. semissis esto C. Ipsorum autem A C. interuallum esto D dico quadratos ipsorum A. C. simul æquari producto ex A. in B. vna cum quadrato ipsius D. Etenim quadrati ipsorum A C. [6] æquantur duplo producti ex A. in C. & quadrato ipsius D. sed duplo producti ex A. in C. æquatur productus ex A. in B. quia B. duplus est ad C. igitur quadrati ipsorum A C. æquantur producto ex A. in B. & quadrato ipsius D. quod demonstrandum erat.

4. 2. porism.

Non

Non curamus vtrum A. ſit maior vel minor quam B. vel quam C. ſed & eodem prorſus argumento ſi *B.* ponatur primus, *A.* ſecundus, oſtendemus productum ex A. in B. cum quadrato interualli inter B. & ſemiſſem ipſius A. æquari quadratis tum ex B. tum ſemiſſe ipſius A. ortis.

THEOREMA SECVNDVM.

In progreſſione arithmetica, productus ex differentia progreſſionis in maximum, vnâ cum quadrato interualli inter minimum & ſemiſſem differentiæ, æquatur quadrato minimi, & quadrato ſemiſſis differentiæ & quadrato differentiæ toties ſumpto, quot ſunt termini progreſſionis vno dempto.

H 4. H 1. E 2.
A 5. B 7. C 9. D 11.

Sint A B C D. in arithmetica medietate, & ſit E. differentia progreſſionis cuius ſemiſſis G. & interuallum inter G. & A. eſto H. dico productum ex E. in D. cum quadrato ipſius H. æquari quadratis ipſorum A G. & adhuc quadrato ipſius E. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. nam interuallum quo D. ſuperat A. continet E. toties quot ſunt ipſi A B C. per tertiam huius. Igitur ducere E. in D. idem eſt ac ducere E. in A. & E. in ſeipſum toties, quot ſunt ipſi A B C. at productus ex E. in A. cum quadrato ipſius H. æquatur quadratis ipſorum A G. per primum theorema. Ergo productus ex E. in D. cum quadrato ipſius H. æquatur quadratis ipſorum A G. & præterea quadrato ipſius E. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA TERTIVM.

In progreſſione arithmetica, quadratus maximi æquatur producto ex differentia in omnes antecedentes bis, & quadrato minimi ſemel, & quadrato differentiæ toties ſumpto, quot ſunt ipſi antecedentes.

G 2. G 2. G 2.
A 5. B 7. C 9. D. 11.

Sint in progreſſione arithmetica A B C D. & ſit G. differentia progreſſionis. dico quadratum maximi D. æquari producto bis ex G. in omnes antecedentes A B C. & quadrato ipſius A ſemel, & quadrato ipſius G. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. quia enim G C. ſimul componunt D. [1] erit quadratus ipſius D. æqualis quadratis ipſorum G C. & duplo plani ſub G C. eadem de cauſa quadratus ipſius C. æquatur quadratis ipſorum G B. & duplo plani ſub G B. & rurſus quadratus ipſius B. æquatur quadratis ipſorum G A. & duplo plani ſub G A. igitur quadratus ipſius D. æquatur quadrato A. ſemel, & quadrato G. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. & præterea duplo producti ex G. in ipſos A B C. quod erat oſtendendum. 4. ſecundi.

THEOREMA QVARTVM.

In progreſſione arithmetica, quadratus maximi aucti dimidio differentiæ, æquatur duplo plani ſub ſumma omnium, & ſub differentia contenti, vnâ cum quadrato interualli inter minimum & ſemiſſem differentiæ.

H. 4. E. 2. G 1.
A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.
K. 12.

Sint A B C D. in arithmetica progreſſione cuius differentia E. cuius ſemiſſis G. & interuallum inter A. & G. eſto H. Ipſorum autem D G. ſumma eſto K. dico quadratum ipſius K. æquari numero qui fit bis ex E. in ſummam omnium, vnâ cum quadrato ipſius H. Etenim quadratus ipſius K. [2] æquatur quadratis ipſorum D G. & duplo producti ex G. in D. ſeu producto ex E. in D. (quandoquidem E. duplus eſt ad G) At quadratus ipſius D. per præcedentem æquatur duplo producti ex E. in ipſos A B C. vnâ cum quadrato ipſius A. ſemel, & quadrato ipſius E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. igitur quadratus ex K. æquatur numero qui fit bis ex E. in A B C. & ſemel in D. cum quadratis ex A. & G. ſemel ſumptis, & quadrato ex E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. At per ſecundum theor. quadrati ex A. & G. vnà cum quadrato ex E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. æquantur producto ex E. in D. vna cum quadrato ex H. igitur quadratus ex K. æquatur duplo producti ex E. in omnes A B C D. vna cum quadrato ex H. quod demonſtrandum erat.

H 4. H 2. G 1. K 12.
A 5. B 7. C 9. D 11.

quarta 2.

THEOREMA QVINTVM.

In omni progreſſione arithmetica, numerus qui fit octies ex differentia in ſummam omnium, vna cum quadrato interualli inter duplum minimi & differentiæ, æquatur quadrato, cuius latus componitur ex duplo maximi, & ex differentia.

H. 4. E. 2. G. 1.
A. 5. B 7. C. 9. D. 11.
L. 8. K. 12.

Sint A B C D. in progreſſione arithmetica, cuius differentia E. cuius ſemiſſis G. & interuallum inter A. & G. eſto H. interuallum autem inter duplum ipſius A. & E. eſto L. dico quod ſit octies ex E. in ſummam omnium A B C D. cum quadrato ipſius L. æquari quadrato compoſiti ex duplo ipſius D. & ex E. ſit enim K. ſumma ipſorum D G. quia igitur octuplum producti ex E. in omnes A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. eſt quadruplum producti qui fit bis ex E. in eoſdem A B C D. & quadrati ex H. At productus ex E. in A B C D. bis, quadratus ex H. æquatur quadrato ex K. per præcedens theor. patet octuplum producti ex E. in A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. æquari quadruplo quadrati ex K. at quadruplum quadrati ex K. eſt quadratus, cuius latus duplus eſt ad K. & cum K. componatur ex D. & ex G. duplum illius componitur ex duplo ipſius D. & ex duplo ipſius G. ſeu ex E. igitur octuplum producti ex E. in A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. quadratus eſt, cuius latus componitur ex duplo ipſius D & ex E. Quia vero interuallum ipſorum A G. eſt H. vtique duplorum interuallum, puta L. duplum eſt ad H. ac proinde quadratus ex L. quadruplus eſt quadrati ex H. quamobrem octuplum producti ex E. in omnes A B C D. cum quadrato ex L. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipſius D. quod erat demonſtrandum.

Sane hoc theoremate in vniuerſum de omni progreſſione arithmetica demonſtrauimus, quod Diophantus reſtringit ad ſolam progreſſionem quæ incipit ab vnitate. Nam illius propoſitionem ab hoc theoremate minime differre cuilibet rem attentius conſideranti, ſtatim innoteſcet, ſi hoc applicetur arithmeticæ progreſſioni ab vnitate incipienti. Quod tamen vt fiat commodiſſime, tale adhuc demonſtrandum theorema.

THEOREMA SEXTVM.

In progreſſione arithmetica quæ incipit ab vnitate, productus ex duplo numeri terminorum vnitate multato in differentia progreſſionis, adſumpto binario, æquatur compoſito ex differentia, & ex duplo maximi termini.

E. 6.
A. 1. B. 7. C. 13. D. 19.
H. 4. K 8.
L. 3. F. 6.
G. 7.

Sint A B C D. in arithmetica progreſſione, cuius differentia E. & ſit A. vnitas, numerus terminorum H. cuius duplum K. & ſit L. vnitate minor ipſo H. cuius duplum F. cui addita vnitate fiat G. eritque G. vnitate minor quam K. cum enim H L. vnitate differant, erit duplorum K F. interuallum binarius, quare G. excedens F. vnitate, deficiet vnitate ab ipſo K. dico itaque productum ex G. in E. adſumpto binario, æquari compoſito ex duplo ipſius D. & ex E. Nam productus ex L. in E. æquatur interuallo extremorum D A. per tertiam huius.

E 6.
A. 1. B. 7. C. 13. D. 19.
H 4. K 8.
L 3 F 6.
G 7.

Quare ſi producto ex L. in E. addatur vnitas A. fiet numerus D. ac proinde ſi producto ex F. in E. addatur binarius, fiet duplum ipſius D. quamobrem ſi G. vnitate maior quàm F. ducatur in eundem E. & producto addatur binarius fiet vtique numerus continens bis ipſum D. & ſemel ipſum E. quod erat demonſtrandum.

Hinc porrò manifeſte infertur propoſitio Diophanti. ſint enim A B C D. in arithmetica medietate, & ſit A. vnitas, differentia progreſſionis E. quæ binario multata relinquat G. & duplum numeri terminorum eſto K. vnde ablata vnitate, ſuperſit L. dico ſi E. ducatur octies in ſummam omnium A B C D. & producto addatur quadratus ipſius G. fieri quadratum, cuius latus binario multatum, continet E toties, quot ſunt vnitates in L. quia enim à differentia E. auferendo duplum minimi termini A. puta binarium, relinquitur G. vtique per 5. theorema numerus qui fit octies ex E. in ſummam omnium A B C D. cum quadrato ex G. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipſius D. At per ſextum theor. ipſi E. & duplo ipſius D. æquatur productus ex L. in E. auctus binario. Igitur qui fit octies ex E. in ſummam omnium A B C D. adſumens quadratum ex G. æquatur quadrato, cuius latus æquale eſt producto ex L. in E. adſumenti binarium. Patet ergo ſi à latere huius quadrati auferatur binarius, relinqui productum ex L. in E. ſeu numerum qui toties continet E. quot ſunt in L. vnitates, quod demonſtrandum erat.

G 4. E 6.
A. 1. B 7. C. 13. D 19.
K 8. L 7.

PROPOSITIO SEPTIMA.

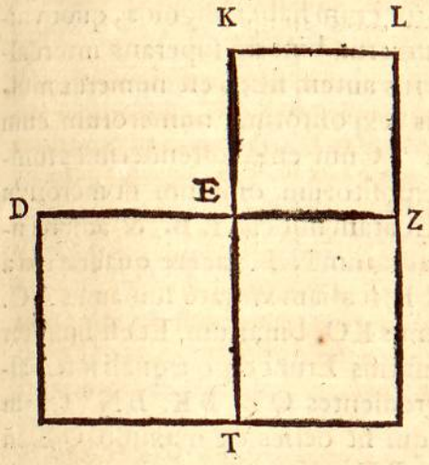
Ἔστω συναμφοτέρῳ τῷ ηθ. θμ. ἴσος ὁ α. τῷ δὲ κβ. ἴσος ὁ β. τῷ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆ ηθ. θμ. καὶ τῆ κβ. ἴσος ὁ γ. λέγω ὅτι καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρε τῆ ηθ. θμ. τουτέστι ὁ ἀπὸ τῆ α. ὅτι καὶ ὁ ἀπὸ τῆ κβ. τουτέστι ὅτι

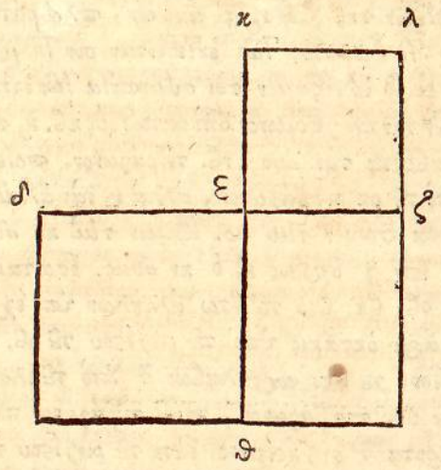
Sit vtrique H T. T M. æqualis A. ipſi autem K B. æqualis B. At producto ex vtroque H T. T M. in K B. æqualis ſit G. dico quod quadratus compoſiti ex vtroque H T. T M. hoc eſt ipſius A.

ductus in quadratum K B. hoc est in quadratum B. producit quadratum ipsius G. Ponantur ipsis A & B. æquales in recta linea D E. E Z. & describantur ab ipsis quadrati A. B. G.

τὸ ἀπὸ τοῦ β. ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γ. κείσθω τοῖς α. β. ἴσοι ἐπ' εὐθείας οἱ δε. εζ. καὶ ἀνάγεγράφθω ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι

α. β. γ.





DT. EL. & perficiatur complementum TZ. Itaque erit vt D E. ad E Z. Ita quadratus D T. ad complementum TZ. vt autem T E. ad E K. sic complementum T Z. ad quadratum E L. quare complementum TZ. est medium proportionale inter quadratos D T. Z K. Productus igitur ex quadrato ex D T. in quadratum Z K. æqualis est quadrato ex T Z. & est D T. æqualis quadrato compositi ex vtroque H T. T M. At Z K. est æqualis quadrato K B. & complementum T Z. æquale est N R. Quamobrem quod fit ex quadrato vtriusque H T. T M. in quadratum K B. æquale est quadrato N. R.
A. B. G.

οἱ δθ. ελ. καὶ συνπεπληρῶσθω τὸ θζ. παραπλήρωμα ὡς ἄρα ἡ δε. ἐπὶ εζ, οὕτως τὸ δθ. ἐπὶ θζ. παραπλήρωμα ὡσδὲ ἡ θε. ἐπὶ εκ. οὕτως τὸ θζ. παραπλήρωμα ἐπὶ ελ. τὸ ἄρα θζ. παραπλήρωμα μέσον ἀνάλογον ἐστὶ τῶν δθ. θζ. τετραγώνων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν δθ. ζκ. τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ θζ. παραπληρώματος καὶ ἐστὶ τὸ μὲν δθ. ἴσον τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ζκ. τετράγωνον ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ κβ. τὸ δὲ θζ. παραπλήρωμα ἴσον τῷ νρ. καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνον, ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ κβ. τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ νρ. τετραγώνῳ.

α. β. γ.

IN SEPTIMAM.

Quod demonstrat hîc Diophantus per lineas, longe breuius & facilius per numeros ostendemus, & ipsam propositionem sic concipiemus.

Productus ex mutua duorum quadratorum multiplicatione, æquatur quadrato producti ex mutuo, laterum ductu.

A. 25. B. 35. C. 49.
D. 5. E. 7.

Sint quadrati A. C. quorum latera D. E. & ex D. in E. fiat B. dico productum ex quadrato A. in quadratum C. æquari quadrato ipsius B. etenim vt constat ex demonstratione vndecima 8. Euclidis B. est medius proportionalis inter A. & C. quare productus ex A. in C. [1] æquatur quadrato ipsius B. Quod erat demonstrandum. 20. septi.

ο.α.κ..ν...β——ρ γ——δ ε.λ——ζ
η.μ——ξ——θ
O.A.K..N...B——R G——D E. L——Z
H. M——X——T

PROPOSITIO OCTAVA.

Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ὁποσιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολύγωνός ἐστι, καὶ γὰρ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ἐπεὶ γὰρ ἐδείξαμεν τὸν σύμπαντα τῶν ἐκκειμένων πάντων γενόμενον ὑπὸ ὀκτὼ τοὺς κϐ. καὶ προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ νϐ. τετράγωνον, ποιεῖν τὸν ἀπὸ τοῦ ρκ τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄλλῳ μονάδα θῶμεν τιὼ ao. ἕξομεν τιὼ κο δυάδα. καὶ ἔστιν ἡ ὁμοίως καὶ ὁ κν δυάς. ἔσονται ἄρα οἱ οϐ. ϐκ. ϐν. πρὸς ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες, ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μείζονος τοῦ οϐ. καὶ τοῦ μέσου τοῦ ϐκ. προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τοῦ ϐν. τετράγωνον, ποιεῖ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν συγκείμενον ἔκτε τοῦ μείζονος τοῦ οϐ. καὶ δύο τῶν μέσων τῶν ϐκ. καὶ ὁ οϐ ἄρα πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις τοὺς κϐ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ νϐ. τετράγωνον, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ συγκειμένου ἔκτε τοῦ οϐ. καὶ δύο τῷ κϐ. καὶ ἑνὶ τούτου πλευρὰ λιπούσα δυάδα τὸν οκ. καταλείψει ξεῖς κϐ. οἱ εἰσι τοῦ κϐ. πολλαπλάσιοι καὶ ξιάδα, ἡ δὲ τελὰς προσλαβοῦσα τιὼ μονάδα, διπλασίων ἐστὶ τοῦ δυάδος. ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων συὼ τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ προβλημα ποιεῖ τῷ οϐ. ὁ δὲ οϐ ὢν τυχὼν, καὶ πολύγωνός ἐστι πρὸς ἀπὸ τοῦ μονάδος, ἑπτάγωνος μονὰς ἐστὶν ὁ ao. ὁ δὲ δεύτερος ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ αϐ. καὶ ἔχει πλευρὰν δυάδα. ὥστε καὶ ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων πολύγωνός ἐστιν ἰσογώνιος τῷ οϐ. ἔχων γωνίας τοσαύτας, ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι τῇ οκ. μείζων τοῦ ὑπεροχῆς αὐτῷ τῷ κϐ. καὶ πλευρὰν ἔχει τὸ ηθ. ὅς ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων συὼ τῇ μονάδι. Καὶ ἀπεδείχθη τὸ προκείμενον· ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁποσοιοῦν, μονάδος μενούσης τῆς ὑπεροχῆς, ὁ σύμπας ἐστὶ τρίγωνος, δυάδος δὲ τετράγωνος, τριάδος δὲ πεντάγωνος. λέγεται δὲ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν κατὰ τὴν δυάδι μείζονα τῆς ὑπεροχῆς, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ὅθεν ἐπεὶ οἱ

6. huius.

2. huius.

1. huius.

CVM sint quæ propoſuimus, pronunciamus. Si ſint quotcumque numeri ab vnitate, æquali interuallo progredientes, omnium ſumma multangulus eſt, tot enim habet angulos, quot vnitates numerus binario ſuperans interuallum; latus autem illius eſt numerus multitudinis expoſitorum numerorum cum vnitate. Cùm enim oſtenderimus ſummam expoſitorum omnium numerorum multiplicatam in octo K B. & adſumentem quadratum N B. facere quadratum à latere R K. ſi aliam vnitatẽ ſumamus A O. habebimus K O. binarium. Et eſt ſimiliter K N. binarius Erunt ergo æquali interuallo progredientes O B. B K. B N. Quam obrem qui fit octies ex maximo O B. in medium B K. adſumens quadratum minimi B N. facit quadratum habentem latus ſummam conflatam ex maximo O B. & duplo medij B K. Igitur O B. ductus in octo K B. & adſumens quadratum N B. æqualis eſt quadrato compoſiti ex O B. & duobus K B. & huius latus multatum binario O K. relinquit tres K B. qui ſunt ipſius K B. multiplices ſecundum ternarium, at ternarius adſumens vnitatem, duplum efficit binarii. Quoniam igitur ſumma omnium progreſſionis terminorum cum vnitate idem præſtat quod O B. & O B. vtcunque oblatus eſt, & multangulus primus ab vnitate (quandoquidem A O. eſt vnitas, ſecundus autem poſt eam numerus eſt A B) & eius latus eſt binarius, ſequitur & ſummam omnium progreſſionis terminorum eſſe multangulum æquiangulum ipſi O B. & habentem tot angulos, quot vnitates habet numerus ſuperans binario O K. interuallum K B. & eſt eius latus H T. numerus multitudinis expoſitorum numerorum cum vnitate. Et demonſtratum eſt quod ab Hypſicle in definitione dicitur. Quod ſi fuerint quotlibet numeri ab vnitate æquali interuallo progredientes, ſi interuallum ſit vnitas, ſumma omnium eſt triangulus; ſi binarius, quadratus; ſi ternarius, quinquangulus. Exprimitur autem multitudo angulorum per numerum binario maiorem differentia; latera vero per numerum multitudinis terminorum cum vnitate. Itaque quoniam trianguli fiunt, cum interuallum eſt vnitas, latera ipſorum erunt maximi ter-

minorum, & productus ex maximo terminorum in vnitate maiorem ipso, duplus est ipsius trianguli. Et quia O B. multangulus est, & illius tot sunt anguli, quot in ipso vnitates, & ductus octies in numerum binario minorem ipso, hoc est in K B. & adsumens quadratum numeri qui ab ipsomet, quaternario deficit hoc est quadratum N B. facit quadratum, talis erit multangulorum definitio. Omnis multangulus multiplicatus octies in numerum binario minorem eo qui exprimit multitudinem angulorum, & adsumens quadratum numeri quaternario minoris multitudine angulorum, facit quadratum. Simul ergo demonstrata Hypsiclis definitione, & horum multangulorum, reliquum est vt ostendamus, quomodo dato latere is qui requiritur multangulus inueniatur. Nam alicuius multanguli latus habentes H T. & habentes multitudinem angulorum eius, habebimus & datum K B. Quare & habebimus productum ex vtroque H T. T M. in K B. qui æqualis est ipsi N R. Quare & datum habebimus ipsum K R. quoniam binarius est N K. Quamobrem & datum habebimus ipsius K R. quadratum. A quo auferendo quadratum ipsius N B. qui & ipse datus est, habebimus reliquum datum, qui quæsiti multanguli multiplex est secundum, octuplum ipsius K B. Ergo inuentus est quæsitus multangulus. Similiter & dato multangulo, inueniemus latus eius H T. Quod demonstrandum erat.

τρίγωνοι μονάδος ὄσης τῆς ὑπεροχῆς γίνονται, καὶ πλευραὶ αὐτῶν εἰσιν οἱ μέγιστοι τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτοῦ, διπλασίων ἐστὶν τοῦ σημαινομένου τριγώνου. Καὶ ἐπεὶ ὁ οβ. πολύγωνος ὢν, καὶ οὗ τοσαῦται γωνίαι ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις ἐπὶ τὴν δυάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, τουτέστι ἐπὶ τὴν κβ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι αὐτοῦ ἐλάσσονος, τουτέστι τὴν ἀπὸ τοῦ νβ. ποιεῖ τετράγωνον ἐστοῦ ἔσται ὅρος τῶν πολυγώνων. ὅτι πᾶς πολύγωνος πολλαπλασιασθεὶς ὀκτάκις ἐπὶ τὴν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ προσλαβὼν τὴν ἀπὸ τῶν τετράδι ἐλάσσονος τῶν πλήθους τῶν γωνιῶν, ποιεῖ τετράγωνον. συναποδειχθέντος οὖν καὶ τοῦ Ὑψικλέους ὅρου, καὶ τούτων τῶν πολυγώνων, ἑξῆς ἐστὶ δεικνῦναι πῶς δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται. ἔχοντες γὰρ πλευρὰν δοθέντος τινὸς πολυγώνου τὸν ηθ. ἔχοντες δὲ καὶ τὸ πλῆθος αὐτοῦ γωνιῶν, ἔχομεν καὶ τὸν κβ. δοθέντα. ὥστε καὶ τὸν ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ηθ. θμ. καὶ τοῦ κβ. ἕξομεν δοθέντα. ὅς ἐστιν ἴσος τῷ νρ. ὥστε ἕξομεν καὶ τὸν κρ. δοθέντα, ἐπείπερ δυάς ἐστι ὁ νκ. ὥστε καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ κρ. ἕξομεν δοθέντα, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφελόντες τὸν ἀπὸ τοῦ νβ. τετράγωνον ὄντα δοθέντα, ἕξομεν καὶ τὴν λοιπὸν δοθέντα, ὅς ἐστιν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πολλαπλασίων κατὰ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ κβ. ὥστε εὑρετός ἐστιν ὁ ζητούμενος πολύγωνος. ὁμοίως δὲ καὶ πολυγώνου δοθέντος εὑρήσομεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὸν ηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ο.α.κ..ν...β——ρ γ——δ ε.λ——ζ
η.μ——ξ——θ
O.A.K..N...B——R G——D E.L——Z
H. M——X——T

IN OCTAVAM.

HÆc propositio, vt à nobis restituta est, parum habet difficultatis, pendet eius demonstratio à superioribus, præsertim à sexta, secunda, & prima, huius, quas idcirco suis locis in margine citauimus.

Quod ait Diophantus de numeris triangulis, nimirum, si latus cuiuslibet trianguli ducatur in numerum vnitate maiorem seipso, fit duplum ipsius trianguli, id sic infertur. Quoniam omnis triangulus ex definitione, est summa progressionis arithmeticæ quæ incipit ab vnitate, & cuius differentia est vnitas, patet numerum terminorum, seu ipsum latus trianguli æquari maximo termino, proinde si lateri addatur vnitas, seu minimus terminus, fiet summa extremorum. Quamobrem cùm latus trianguli seu numerus terminorum, ducetur in numerum vnitate maiorem seipso, hoc est in summam extremorum, fiet duplum summæ omnium terminorum per 4. huius, hoc est duplum ipsius trianguli.

Hinc autem innotescit defectus sextæ propositionis vt concipitur à Diophanto, eam restringendo ad solam progressionem arithmeticam quæ incipit ab vnitate, sic enim per eam vix applicari potest hæc octaua propositio numeris triangulis. Etenim requirit hæc propositio vt à numero multitudinis angulorum auferatur quaternarius, vt residui quadratus additus octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, fiat quadratus. At numerus angulorum trianguli est ternarius, à quo sane auferri non potest quaternarius. Euanescit autem hæc difficultas si vniuersalius enuncietur propositio sexta, vt à nobis præstitum est theoremate quinto. Nam per illud theorema octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, addendus est quadratus interualli inter eundem numerum angulorum binario multatum, & duplum minimi termini, hoc est binarium, quare non refert vtrum numerus angulorum binario multatus sit maior binario, (vt accidit in omnibus polygonis supra quadratum) vel æqualis binario (vt accidit in quadrato) vel minor binario (vt accidit in triangulo) Nam in primo casu à numero angulorum binario multato, auferetur rursus binarius, seu vt vult Diophantus à numero angulorum auferetur quaternarius, & residui quadratus addetur octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum. in secundo casu etiam à numero angulorum binario multato auferetur rursus binarius, & quia nil supererit, nil addetur ad octuplum supradictum, sed huiusmodi octuplum erit numerus quadratus, etenim à numero angulorum quadrati auferendo 2. supereſt 2. cuius octuplum est 16. quo ducto in quemlibet quadratum, patet fieri quadratum.

In tertio denique casu numerus angulorum binario multatus auferetur à binario, & residui quadratus addetur octuplo producti ex triangulo in numerum angulorum binario multatum. Vnde quia numerus angulorum trianguli binario multatus est vnitas, quam auferendo à binario supereſt rursus vnitas, hinc demonstratur quod ait Diophantus propr. 44. lib. 4. omnis triangulus per octo multiplicatus, & adsumens vnitatem, facit quadratum.

Cæterum animaduersione dignum est hanc propositionem non conuerti nisi in triangulis & in quadratis. Quemadmodum enim ex hac propositione sequitur omnem quadratum ductum in 16. efficere quadratum, vt suprà docuimus, sic è conuerso omnis numerus qui ductus in 16. facit quadratum, quadratus est, vt manifestum est, & rursus quemadmodum hac propositione demonstratur, omnem triangulum per octo multiplicatum, & adsumentem 1. efficere quadratum; sic è conuerso omnis numerus cuius octuplum adscita vnitate facit quadratum, triangulus est, vt in promptu est demonstrare.

A. 10. B. 80. C. 81.
F 4. E. 8. D. 9.
G. 10.

Sit numerus A. cuius octuplum B. cui addita vnitate fiat C. quadratus cuius latus D. dico A. esse triangulum. Etenim quia B. par est cùm sit octonarij multiplex, erit C. impar, ac proinde & latus eius D. impar est, quare si sumatur E. vnitate minor quàm D. erit E. par sit ergo illius semissis F. & à latere F. fiat triangulus G. constat igitur octuplum ipsius G. adsumpta vnitate facere quadratum, cuius latus superat vnitate duplum ipsius F. tam ex demonstratis ad 44. 4. quàm ex hac propositione triangulis applicata. Quare cum D. superet vnitate duplum ipsius F. & ipsius D. quadratus sit C. vnde ablata vnitate supereſt B. patet B. esse octuplum trianguli G. sed idem B. ex hypothesi est octuplum numeri A. ergo A. est æqualis triangulo G. Quod erat propositum.

In aliis autem polygonis non conuertitur hæc propositio, quod vno aut altero exemplo probasse sufficiet. Quamuis enim vi huius propositionis omnis pentagonus ductus in 24. & adsumens vnitatem, faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 24. & adsumens 1. faciat quadratum est pentagonus, etenim 2. ductus in 24. & adsumens 1. facit quadratum 49. & tamen 2. non est pentagonus. Rursus quamuis omnis heptagonus, vi huius propositionis ductus in 40. & adsumens 9. faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 40. & adsumens 9. facit quadratum, statim est heptagonus. Etenim 4. ductus in 40. & adsumens 9. facit quadratum 169. cum tamen 4. non sit heptagonus, & sic de alijs.

PROPOSITIO NONA.

Διδασκαλικώτερον ὑποδείξομεν τοῖς βουλομένοις ἐυχερῶς ἀκούειν τὰ ζητούμενα διὰ μεθόδων. λαβόντες γὰρ τὸν τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ ἀεὶ διπλασιάσαντες, ἀφελοῦμεν μονάδα, καὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιάσαντες ὅπου τὸ δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, τῷ γενομένῳ προσθήσομεν ἀεὶ δυάδα, καὶ λαβόντες τὸν ὑπὸ τοῦ γενομένου τετράγωνον, ἀφελοῦμεν

AD docendum autem accommodatius, ostendemus hoc iis qui prompte volunt audire ea quæ quæruntur per methodos. sumpto enim latere multanguli, illud geminabimus, hinc auferemus vnitatem, & reliquum ducemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum, producto addemus binarium, quadratumque eius qui sic fit sumentes,

auferemus ab eo quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, reliquumque diuidentes in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, inueniemus quæsitum multangulum. Rursus ipso multangulo dato, inueniemus latus hac arte. Multiplicabimus eum per octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto addemus quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, & inueniemus quadratum, si tamen datus est multangulus. De huius autem quadrati latere, semper auferemus binarium, residuum diuidemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum, quotienti addemus vnitatem, & summæ semissem capientes, habebimus quæsiti multanguli latus.

ἀπ' αὐτοῦ τὸ ἀπὸ τῆ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τ γωνιῶν. καὶ τὸ λοιπὸν μερίσαντες εἰς τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τ γωνιῶν. εὑρήσομεν τὸν ζητούμενον πολύγωνον πάλιν δ' αὐτῷ πολυγώνῳ δοθέντος, εὑρήσομεν ἕτως τὴν πλευράν. πολλαπλασιάσαντες γὰρ αὐτὸν ἐπὶ τὸν ὀκταπλασίονα τῆ δυάδι ἐλάσσονος τῆ πλήθους τ γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες τὸ ἀπὸ τῆ τετράδι ἐλάσσονος τῆ πλήθους τῶν γωνιῶν τετράγωνον, εὑρήσομεν τετράγωνον, ἐάνπερ ᾖ ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος. τούτου οὖ τ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ἀφελόντες ἀεὶ δυάδα, τὸν λοιπὸν μερίσομεν ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τῆ πλήθους τ γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες μονάδα, καὶ τῆ γενομένου λαβόντες τὸ ἥμισυ, ἕξομεν τὴν τῆ ζητουμένου πολυγώνου πλευράν.

IN NONAM.

NVlla omnino hîc est difficultas, solum moneo has duas regulas paulò aliter tradi in excerptis nondum editis Apofroditi, & Betrubi Rubi architectonis, itemque in Hygini gromatico, nimirum sic.

DATO LATERE INVENIRE POLYGONVM.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod fit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, residui semissis erit quæsitus polygonus.

Verbi gratia dato latere 10. si velis hexagonum; quadra 10. fit 100. quem ducito in 4. binario minorem multitudine angulorum, fit 400. hinc aufer 20. qui fit ex latere dato 10. in 2. numerum multitudinis angulorum quaternario multatum, relinquitur 380. cuius semissis 190. est hexagonus à latere 10.

DATO POLYGONO INVENIRE LATVS.

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, summæ cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, summam diuide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quæsitum latus.

Vt sit datus hexagonus 190. hunc ducito in 32. octuplum ipsius 4. binario minoris multitudine angulorum, fit 6080. adde 4. quadratum numeri angulorum quaternario multati, fit 6084. cuius latus 78. cui adde 2. numerum scilicet angulorum quaternario multatum, fit 80. quem diuide per duplum ipsius 4. numeri angulorum binario multati, puta per 8. fit quotiens 10. quæsitum latus.

Nos etiam alias multas: & faciles regulas ad inueniendum polygonum dato latere trademus in Appendicis libro 1.

Cæterum quamuis vt monuimus ad præcedentem, neque regulæ Diophanti, neque hæ Apofroditi possint proprie applicari triangulis, quandoquidem in his omnibus regulis oportet à numero angulorum auferre quaternarium, quod in triangulis proprie fieri nequit. Attamen impropriè & per numeros fictos quos vocant, etiam in triangulis hæ omnes regulæ locum habent, quod exemplis fiet manifestum.

Dato enim latere 6. quæratur triangulus per regulam Apofroditi, sumo quadratum ipsius 6. puta 36. quem duco in numerum angulorum binario multatum, puta in 1. fit 36. Tum sumo numerum angulorum multatum quaternario, puta − 1. quem duco in datum latus, fit − 6. quem aufero à 36. fit 42. cuius semissis 21. est triangulus à latere 6.

Rursus dato triangulo 21. quæro eius latus per regulam Apofroditi. Duco 21. in octuplum

numeri angulorum binario multati, puta in 8. fit 168. & quia numerus angulorum multatus quaternario, est − 1. cuius quadratus est + 1. addo 1. ad 168. fit quadratus 169. cuius latus 13. cui addo numerum angulorum quaternario multatum, puta − 1. fit 12. quem diuido per duplum numeri angulorum binario multati puta per 2. fit quæsitum latus 6. eademque ratio est de regulis à Diophanto traditis.

OBSERVATIO D. P. F.

Proposítionem pulcherrimam & mirabilem quam nos inuenimus hoc in loco sine demonstratione apponemus. In progressione naturali quæ ab vnitate sumit exordium, quilibet numerus in proximè maiorem facit duplum sui trianguli, in triangulum proximè maioris facit triplum suæ pyramidis, in pyramidem proximè maioris facit quadruplum sui triangulotrianguli, & sic vniformi & generali in infinitum methodo. Nec existimo pulchrius aut generalius in numeris posse dari theorema cuius demonstrationem margini inserere nec vacat, nec licet.

PROPOSITIO DECIMA.

Δοθέντος ἀριθμοῦ δύρεῖν ποσαχῶς δύναται εἶναι πολύγωνος. ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ αβ. πλῆθος δ' αὐτῦ γωνιῶν ὁ βγ. καὶ κείσθω ἐν τῷ βδ. δυαὶ μὲν ὁ δε. τετρὰς δ' ὁ γε. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ. ὢν πολύγωνος ἔχει γωνίας ἰσαύτας ὅσός ἐστιν ὁ βγ. ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ αβ. δζ μῦ τὸ ἀπὸ βε τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω αὐτὸ πλευρὰ ὁ ζη. ὥστε
8. huius. ὁ ἀπὸ τῆ ζη τετράγωνος ἴσος τῷτε ὀκτάκις ὑπὸ αβ. δζ. καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ. κείσθω ἐν τῷ αβ. μονὰς ὁ αθ. καὶ διήρηται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. δζ. εἶτε τὸ τετράκις ὑπὸ αθ. βζ. καὶ εἰς τὸ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρας τῆς αβ. θβ. καὶ τὸ δζ. καὶ κείσθω συναμφοτέρῳ αβ. θβ. ἴσος ὁ δκ. καὶ μεταβησόμεθα τὸ μὲν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αβ. θβ. ἐστὶ τοῦ δζ. εἰς τὸ ὑπὸ κδβ. τὸ δ' τετράκις ὑπὸ αθ. δζ. εἰς τὸ δις ὑπὸ δζ. δε, δυὰς γὰρ ὅδε ὁ ed. καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη. ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ ὑπὸ κδβ. καὶ τῷ δις ὑπὸ δζ. δε. καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ ἀλλὰ τῷ δις ὑπὸ δζ βε καὶ τῷ ἀπὸ βε τετραγώνῳ ἴσοι οἱ ἀπὸ τῶν δζ. δε. τετράγωνοι καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷτε ὑπὸ κδβ. καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δζ. δε. τετραγώνοις. τῷ δ' ὑπὸ κδβ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ. ἴσον τὸ ὑπὸ κβδ. καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη. ἄρα ἴσος τῷτε ὑπὸ κβδ. καὶ τῷ ἀπὸ δε. τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ. ἴσος ὢν τετράκις συναμφοτέρῳ τῷ αβ. θβ. μείζων ἐστὶ τετράκις τῆς αθ. τουτέστι τετράδος, ὧν ὁ βγ. ἐστὶ δυὰς. λοιπὸς ἄρα ὁ γκ. μείζων δυάδος τῆς γδ. ἡ ἄρα διχοτομία τῆς δκ πεσεῖται μεταξὺ

α.θ——ς——ε..δ..γ——κ

ζ——η

DAto numero inuenire quot modis multangulus esse possit. Esto datus numerus AB. & multitudo angulorum eius BG. & sumatur in ipso BG. binarius GD. & quaternarius GE. & quoniam AB. multangulus existens, tot habet angulos quot sunt in BG. vnitates, qui fit octies ex AB. in BD. adscito quadrato ex BE. quadratum facit. Esto eius latus ZH. igitur quadratus ex ZH. æqualis est numero qui fit octies ex AB. in BD. & quadrato ipsius BE. sumatur in AB. vnitas AT. Itaque qui fit octies ex AB. in BD. diuiditur in eum qui fit quater ex AT. in BD. & in eum qui fit quater ex vtroque AB. TB. in BD. sumatur ergo DK. æqualis quadruplo vtriusque AB. TB. & transferamus eum qui fit quater ex vtroque AB. TB. in BD. in eum qui fit ex KD. in BD. loco autem illius qui fit quater ex AT. in BD. sumamus eum qui fit bis ex BD. in DE. (etenim DE. est binarius) igitur quadratus ipsius ZH. æqualis erit producto ex KD. in DB. & ei qui fit bis ex BD. in DE vna cum quadrato ex BE. atqui duplo producti ex BD. in DE. vna cum quadrato ex BE. æquales sunt quadrati ex BD. DE. ergo & quadratus ex ZH. æqualis erit producto ex KD. in DB. & quadratis ipsorum BD. DE. at producto ex KD in DB. vna cum quadrato ex DB. æqualis est qui fit ex KB. in BD. igitur & quadratus ex ZH. æqualis

A.T——B——E..D..G——K

Z——H

igitur

A.T——B——E..D..G——L——K
Z——H——N——M

α. θ——ϛ——ε..δ..ϛ——λε——κ
ζ——η——ι——μ

erit producto ex K B. in B D. & quadrato ex DE. & quoniam D K. æqualis exiſtens quadruplo vtriuſque A B. B T. maior eſt quadruplo ipſius A T. hoc eſt quaternario, & quaternarij ſemiſſis eſt binarius D G. reliquus vtique G K. maior erit binario G D. igitur ſi diuidatur D K. bifariam in L. cadet L. inter G. & K. itaque loco quadrati ex L B. ſumamus quadratum ex LD. cum producto ex K B. in B D. quandoquidem D K. ſecatur bifariam in L. & additur ei D B. ideoque producto ex K B. in B D. cum quadrato ex L D. æquatur quadratus ex L B. igitur quadratus ex L B. ſuperat quadratum ex L D. producto ex K B. in B D. quocirca quadratus ex Z H. æqualis eſt interuallo quadratorum B L. L D. & quadrato D E. addatur vtrimque quadratus D L. igitur quadrati Z H. D L. æquales ſunt quadratis B L. D E. cùm autem duo numeri ſimul, duobus ſimul æquales ſunt, ſunt & permutando æqualia eorum interualla. igitur interuallum quadratorum L D. D E. æquale eſt interuallo quadratorum L B. Z H. & quoniam E D. æqualis eſt D G. & additur illis G L. productus vtique ex E L. in L G. cum quadrato G D. æquatur quadrato D L. quamobrem interuallum quadratorum L D. D G. ſeu quadratorum L D. D E. quod eſt productus ex E L. in L G. æquale eſt interuallo quadratorum L B. Z H. ponatur ipſi B L. æqualis Z M. nam B L. maior eſt quam Z H. quoniam quadrati Z H. D L. oſtenſi ſunt æquales quadratis B L. E D. cæterum quadratus D L. maior eſt quadrato D E. (quandoquidem maior eſt quadrato D G.) idcirco & quadratus B L. maior eſt quadrato Z H. ponatur ergo ipſi B L. æqualis Z M. erit igitur interuallum quadratorum Z M. Z H. æquale producto ex E L. in L G. & quoniam D K. quadruplus eſt vtriuſque A B. B T. at D K. bifariam ſecatur in L. erit vtique D L. duplus vtriuſque A B. B T. atqui D G. duplus eſt vnitatis A T. ergo reliquus G L. duplus eſt duorum B T. igitur G L. quadruplus eſt ipſius B T. & B T. eſt quarta pars ipſius G L. ſed & A T. vnitas eſt quarta pars quaternarii E G. ergo totus A B. totius E L. quarta pars eſt, ſed & T B. oſtenſus eſt eſſe quarta pars ipſius L G. igitur productus ex A B. in B T. eſt ſextadecima pars producti ex E L. in L G. productus ergo ex E L. in

τῆ Γκ̄. ἔστω τὸ λ. καὶ μεταβησόμεθα τὴ ἀπὸ ϐλ. εἴσε τὴ ἀπὸ λδ̄. καὶ τὸν ὑπὸ κϐδ̄ ἐπεὶπερ ἡ δκ̄ τέτμηται διχῆ κῇ τὸ λ. πρόσκειται δὲ ἡ δϐ. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ κϐδ. μετὰ τῆ ἀπὸ λδ̄. ἴσον ϛ̄ ἀπὸ λϐ̄. μετὰ τὸ ἀπὸ λκ ἄρα τῆ ἀπὸ λδ. ὑπερέχει τῷ ὑπὸ κϐδ̄. καὶ ὁ ἀπὸ τῆ ζῆ ἄρα τετράγωνος ἴσος τῇπε ἀπὸ τῶν ϐλ. λδ. ὑπερεχῇ καὶ τῷ ἀπὸ δε τετραγώνῳ. κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ δλ. καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ζῆ. δλ. ἄρα ἴσοι τετράγωνοι εἰσὶ ζῖς ἀπὸ τῶν ϐλ̄. λε̄ τετραγώνοις. ἐαν̄ δὲ δύο ἀριθμοὶ, δυσὶν ἀριθμοῖς ἴσοι ὧσι, καὶ ἑναλλὰξ αἱ ὑπεροχαὶ αὐτῶν μένωσι, καὶ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν λδ̄. δε̄ ὑπεροχὴ ἴση τῇ τῆ λϐ̄. ζῆ. ὑπεροχῇ. καὶ ἐπεὶ ὁ εδ̄. τῷ δγ̄. ἴσος, προσκείσθω ᾧ ὁ γλ̄. τὸ ἄρα ὑπὸ ελγ̄. μῆ τῶν ἀπὸ γδ̄. ἴσον τῷ ἀπὸ δλ. ἡ ἄρα τῆ ἀπὸ τῆ λδ̄. δΓ. ὑπεροχὴ, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τῆ λδ̄. δε̄. ἥτις ἐστὶν ὁ ὑπὸ ελγ̄ ἴση τῇ ἀπὸ τῶν λϐ. ζῆ. κείσθω τῷ ϐλ̄. ἴσος ὁ ζμ̄. μείζων γὰρ ἐστὶ ϐλ̄ τῆ ζῆ. ἐπεὶπερ ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ζῆ. δλ̄ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ϐλ̄. εδ̄ τετραγώνοις. λοιπὸν τὸ ἀπὸ δλ. μεῖζον ἐστὶ τῆ ἀπὸ δε, ἐπεὶπερ καὶ τῆ ἀπὸ δγ. μεῖζόν ἐστιν, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ϐλ. τῆ ἀπὸ ζῆ. μεῖζόν ἐστι. κείσθω ἴση τῷ βλ̄. ἴσος ὁ ζμ. ἔσται δὴ καὶ ἡ τῶν ἀπὸ ζμ. ζῆ. ὑπεροχὴ ἴση τῷ ὑπὸ ελ. λΓ̄. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ̄. τετραπλασίων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ αϐ. ϐθ. ὁ δὲ δκ̄. διχῶς τέτμηται κῇ τὸ λ. καὶ ὁ δλ̄. ἄρα διπλασίων ἐστὶ συναμφοτέρου τῆ αϐ. ϐθ. ὧν ὁ δγ. διπλασίων ἐστὶ τῆ αθ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ γλ. διπλασίων ἐστὶ δύο τῶν ϐθ. τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ γλ̄. τοῦ ϐθ. ὥστε τέταρτον μέρος ἐστὶν ὁ ϐθ. τῆ λγ̄. ἀλλὰ καὶ ἡ αθ. μόνας τέταρτόν ἐστι τῆς εγ̄. τετράδος. ὅλος ἄρα ὁ αϐ̄ τέταρτόν ἐστι μέρος τῆ ελ̄. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ϐθ̄ τῆ λγ̄. μέρος τέταρτον. τὸ ἄρα ὑπὸ αϐ. ϐθ. ἑκκαιδέκατόν ἐστι τῆ ὑπὸ ελ. λγ̄. τὸ ἄρα ὑπὸ ελ. λγ̄. ἴσον τῷ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αϐ. ϐθ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ελ. λγ̄. ἴσον τῇ τῆ ἀπὸ μζ. ζῆ. ὑπεροχῇ. καὶ τὸ ἑκκαιδεκάκις ἄρα ὑπὸ αϐ. ϐθ. ἴσον τῇ τῆ ἀπὸ μῆ. καὶ

τῷ δὶς ὑπὸ ζη. ημ̃. ὥστε ὁ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αϐ. ϐθ. ἴσος τῷτε ἀπὸ ημ̃. κϐ τῷ δὶς ὑπὸ ζη. ημ̃. ὥστε ἄρτιός ἐστι ὁ ημ̃. τετμήσθω δίχα κϛ τὸ ν̃.

L G. æquale est producto ex A B. in B T. sedecies, sed iam ostensum est productum ex E L. in L G. æquari interuallo quadratorum M Z. Z H. ergo qui fit sedecies ex A B. in B T. æquatur interuallo quadratorum M Z. Z H. hoc est quadrato M H. & duplo producti ex Z H. in H M. quare qui fit sedecies ex A B. in B T. æqualis est quadrato H M. & duplo producti ex Z H. in H M. quamobrem H M. par est. Secetur bifariam in N.

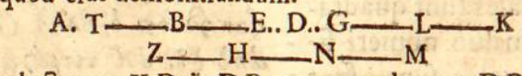
IN DECIMAM.

Quamuis propositionis huius demonstratio tam in codice regio, quam in vaticano atque etiam in eo quem præ manibus habuit Xilander, sit imperfecta, & multa desint, quæ diuinare meum non est, cum præterea neque ipse Diophanti scopus mihi satis perspectus sit, tamen quæcumque reperi, à mendis repurgata perfectæ restitui sanitati, vt ex apta syllogismorum, atque adeo verborum omnium connexione æstimabit prudens lector. si quæ sunt autem quæ prima fronte obscuriora videantur, ea sequenti adnotatione fient perspicua.

Primo quod ait Diophantus duplum producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquari quadratis ex B D. D E. sic probatur. Duplum producti ex B D. in D E [1] æquatur duplo producti ex B E. in E D. & duplo quadrati E D. quare addendo vtrimque quadratum ex B E. erit duplum producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquale duplo producti ex B E. in E D. quadrato ex B E. semel, & quadrato ex E D. bis, sed quadratis ipsorum B E. E D. cum duplo producti ex B E. in E D. [2] æquatur quadratus totius B D. igitur duplo producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquantur quadrati ex B D. D E. quod erat demonstrandum.

3 secundi.

4. secundi.



Secundo quod ait productum ex K D. in D B. cum quadrato ex D B. æquari producto ex K B. in B D. patet per tertiam 2. Euclidis.

Tertio, quod ait secto D K. bifariam in L. & addendo ei B D. productum ex K B. in B D. cum quadrato ex L D. æquari quadrato totius L B. patet per 6. 2. Euclidis.

Quartò, quod ait ex eo quod quadrati Z H. D L. æquales sunt quadratis B L. D E. sequi quadratorum D L. D E. idem esse interuallum, quod & quadratorum B L. Z H. id sic infertur, quia quadrati D L. Z H. æquales sunt quadratis B L. D E. [3] sunt in arithmetica proportionalitate quadrati D L. B L. D E. Z H. quare & permutando [4] sunt arithmeticè proportionales quadrati D L. D E. B L Z H. quod est propositum.

4. primi porism.

7. primi porism.

Quintò, quod ait secto E G. bifariam in D. & addendo illi G L. productum ex E L. in G L. cum quadrato G D. æquari quadrato D L. nil aliud est quàm 6. 2. Euclidis.

Sextò, quod ait B L. maiorem esse quàm Z H. ita probatur, quoniam quadrati D L. Z H. ostensi sunt æquales quadratis B L. D E. [5] est in arithmetica proportionalitate quadratus D L. ad quadratum D E. sicut quadratus B L. ad quadratum Z H. sed quadratus D L. maior est quadrato D E. quia D L. maior est quam D E. cum contineat D G. æqualem ipsi E D. & præterea G L. igitur & quadratus B L. maior est quadrato Z H. ac proinde B L. maior est quàm Z H. quod erat demonstrandum.

4. primi porism.

Denique quod ait, ex eo quod productus sedecies ex A B. in B T. æquatur quadrato H M. & duplo producti ex Z H. in H M. hinc sequi ipsum H M. esse numerum parem, sic probatur. Productum sedecies ex A B. in B T. binarius metitur, quandoquidem binarius metitur numerum 16. qui metitur eundem productum, sed & idem binarius metitur duplum producti ex Z H. in H M. vt euidens est. ergo idem binarius metitur reliquum quadratum H M. ac proinde quadratus H M. par est, ac per consequens & ipse H M. par est. quod erat intentum.

Hæc ad librum Diophanti de numeris polygonis adnotasse sufficiat. Quoniam vero hic liber mutilus est, & alia multa scitu digna tum theoremata, tum problemata excogitari possunt de numeris polygonis, præsertim de eorum progressione, visum est ea duobus sequentibus libris persequi, quos idcirco titulo Appendicis ad librum de numeris polygonis insignire voluimus. Sed & præterea, ad calcem libri primi, pulcherrimi corollarij loco, Problematis huius Diophantæi enodationem feliciter, vt spero, apponemus.

ΤΕΛΟΣ.

CLAVDII GASPARIS
BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS
AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.
LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

IN progreſſione arithmetica, quilibet terminorum poſt minimum, continet minimum ſemel, & differentiam toties, quotus quiſque eſt à minimo; nimirum primus à minimo ſemel; ſecundus bis; tertius ter & ita deinceps.

E. 2. F. 4. G. 6.
A. 3. B. 5. C. 7. D 9.

Sint in progreſſione arithmetica A B C D. & ſit differentia E. cuius duplum F. & triplum G. & ſic deinceps, dico B. continere A. & F. atque etiam D. continere A. & G. & euidens eſt ex ſola definitione progreſſionis arithmeticæ. Aliter per 3. Diophanti D. continet A. ſemel, & differentiam E. ſecundum numerum terminorum vnitate multatum id eſt ter, & eadem de cauſa C. continet A. ſemel, & E. bis, & rurſus B. continet A. & E. ſemel eademque ratio ſi plures exponantur numeri. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In progreſſione arithmetica, ſi differentia ducatur in triangulum numeri terminorum, vnitate multati, & producto addatur quod fit ex numero terminorum in minus extremum, fiet ſumma terminorum omnium.

E. 2.
A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Sint A B C D. in progreſſione arithmetica, cuius differentia E. dico ſi triangulum lateris vnitate minoris numero terminorum ducatur in E. & producto addatur quod fit ex ipſo numero terminorum in A. fieri ſummam omnium A B C D. nam per præced. A. continetur ſemel in quolibet ipſorum A B C D. & præterea B. continet E. ſemel; C. bis continet eundem E. & D. continet ter eundem E. & ſic deinceps. Quare patet E. contineri in ipſis B C D. ſecundum vnitates trianguli cuius latus eſt numerus ipſorum B C D. minor ſcilicet vnitate quàm numerus omnium A B C D. quare patet propoſitum.

PROPOSITIO TERTIA.

Dato latere polygoni, ſi numerus angulorum binario multatus ducatur in datum latus vnitate multatum, & qui producitur, binario auctus ducatur in datum latus, fiet duplum polygoni.

H. 3. G. 4. F. 5.
A. 1. B. 4. C. 7. D. 10. E 13.
K. 12. L. 14. M. 70.

Sit F. datum latus polygoni, vnde ablata vnitate ſuperſit G. & ſit H. numerus angulorum binario multatus, quo ducto in G. fiat K. qui auctus binario faciat L. quo ducto in F. fiat M. dico M. eſſe duplum polygoni à latere F. exponantur termini A B C D E. in progreſſione arithmetica conſtitutiua polygoni à latere F. erit ergo ſumma omnium A B C D E. æqualis polygono illi, & erit A. vnitas, H. differentia, numerus terminorum ipſe F. vt conſtat ex demonſtratis à Diophanto. Quoniam igitur interuallum extremorum A E. per tertiam Diophanti æquatur producto ex H. in G. nempe ipſi K. & addendo interuallum numerorum duorum, duplo minoris, fit ſumma ipſorum; patet addito binario qui duplus eſt ipſius A. ad K. aggregatum L. æquari ſummæ ipſorum A E. Quamobrem qui fiet ex numero terminorum F. in ſummam extremorum L. nimirum M. æquatur duplo ſummæ omnium per quartam Diophanti, ſeu duplo polygoni à latere F. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO QVARTA.

Si latus polygoni ducatur in ſeipſum vnitate multatum & productum ducatur in numerum angulorum binario multatum, fiet numerus qui adſcito duplo lateris, æquabitur duplo polygoni.

A. 5. B. 4. C. 3.
D. 70. E. 60. F. 20.
G. 70. H. 14. K. 12.

Sit A. latus polygoni & B. vnitate minor, & C. numerus angulorum binario multatus ductoque A. in B. fiat F. quo ducto in C. fiat E. & ad ipſum E. addendo duplum lateris A. fiat D. dico D. eſſe duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in C. fiat K. cui addito binario fiat H. quo ducto in A. fiat G. eritque G. per præced. duplum polygoni à latere A. quare probandum ipſos D G. eſſe æquales. Quoniam igitur idem B. ductus in A. & in C. producit F. & K. erit vt A. ad C. ſic F. ad K. quare ex A. in K. fiet idem E. qui fit ex C. in F. cum itaque H. contineat K. & binarium, productus ex A. in H. nempe G. æquatur productis ex A. in K. nempe ipſi E. & ex A. in binarium, nempe duplo ipſius A. At eidem E. & duplo A. æquatur D. ex hypotheſi. ergo D G. ſunt æquales, & ideo D. eſt duplus polygoni à latere A. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO QVINTA.

Si quadratus dati lateris ducatur in numerum angulorum binario multatum, & à producto auferatur quod fit ex dato latere in numerum angulorum quaternario multatum, reſiduum eſt duplum polygoni à dato latere.

K. 42. L. 210. M. 14. N. 224.
A. 7. B. 6. C. 5. D. 3.
E. 49. F. 245. G. 21. H. 224.

Sit A. datum latus, & B. vnitate minor, & ſit C. numerus angulorum binario multatus, & D. idem numerus angulorum multatus quaternario, ſeu numerus binario minor ipſo C. & ſit E. quadratus ipſius A. quo ducto in C. fiat F. vnde auferendo G. qui fit ex D. in A. ſuperſit H. dico H. eſſe duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in A. fiat K. quo ducto in C. fiat L. cui addendo M. duplum ipſius A. fiat N. conſtat ex præced. ipſum N. eſſe duplum polygoni à latere A. Probandum ergo N. H. æquales eſſe. Quoniam itaque A. excedit B. vnitate qui fit ex A. in A. nempe E. æquatur iis qui fiunt ex A. in B. nempe ipſi K. & ex A. in vnitatem, nempe ipſi A. cum ergo K A. æquentur E. qui fit ex C. in E. nempe F. æquatur iis qui fiunt ex C. in K. nempe L. & ex C. in A, ſed quoniam C. ſuperat D. binario, productus ex C. in A. æquatur G. producto ex D. in A. & duplo ipſius A. nempe ipſi M. igitur F. æquatur tribus numeris L. M. G. Quamobrem auferendo vtrimque eundem G. remanent æquales hinc quidem H. inde vero L M. ſeu illis æqualis N. Quare cum N. oſtenſus ſit duplus polygoni à latere A. erit & H. eiuſdem polygoni duplus. Quod demonſtrandum erat

SCHOLIVM.

Hæc eſt demonſtratio regulæ quam tradunt Hyginus & Apofroditus, ad inueniendum polygonum dato latere, de qua ſupra ad nonam Diophanti.

PROPOSITIO SEXTA.

Dato latere polygoni, ſi triangulus à dato latere vnitate multato ducatur in numerum angulorum binario multatum, fit numerus qui adſcito dato latere æquatur ipſi polygono.

G. 42. H. 210.
A. 7. B. 6. C. 5.
D. 21. E. 105. F. 112.

Sit datum latus A. & numerus vnitate minor B. & ſit C. numerus angulorum binario multatus, triangulus autem à latere B. eſto D. quo ducto in C. fiat. E. cui addendo datum latus A. fiat F. dico F. eſſe polygonum à latere A. etenim ducatur B. in A. & fiat G. quo ducto in C. fiat H. Tunc patet per octauam Diophanti ipſum G. eſſe duplum triangulià latere B. nempe ipſius D. quare cùm ex eodem C. in ipſos G D. fiant H E. erit & H. duplus ipſius E. Itaque cùm ad H. addetur duplum ipſius A. & ad E. addetur A. vnde fit F. erit H. cum duplo A. duplus ipſius F. Atqui H. cum duplo A. eſt duplus polygoni à latere A. per quartam huius. Ergo F. eſt huiuſmodi polygonus. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Si quilibet polygonus adſciſcat ſuum latus ſecundum numerum angulorum binario multatum, & præterea vnitatem, fiet polygonus ſimilis proximè maior.

F. 51. E. 16. D. 35.
B. 6. A. 5. C. 3.
G. 1. H. 4. K. 7. L. 10. M. 13. N. 16.

Esto polygonus D. cuius latus A. cui addita vnitate fiat B. & sit numerus angulorum binario multatus C. Et productus ex A. in C. vnitate auctus esto E. additisque simul E D. fiat F. dico F. esse polygonum proximè maiorem ipso D. seu à latere B. Etenim exponatur progressio arithmetica constitutiua huiusmodi polygonorum, & sumantur in ea tot termini G. H. K. L. M. N. quot sunt in B. vnitates. Igitur per octauam Diophanti differentia progressionis est C. & summa omnium est polygonus à latere B. At summa ipsorum G. H. K. L. M. est polygonus D. Polygonus ergo à latere B. excedit ipsum D. numero N. Atqui per tertiam Diophâti N. continet vnitatem G. & productum ex differentia C. in A. vnitate minorem numero terminorum, & productus ex C. in A. vnitate auctus est E. Igitur E. æquatur ipsi N. cum ergo vt ostensum est compositus ex N D. æquetur polygono à latere B. vtique compositus ex E D. nempe F. erit huiusmodi polygonus quod erat propositum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Si triangulus collateralis polygono ducatur in numerum angulorum binario multatum, & à producto auferatur, quod fit ex latere polygoni in numerum angulorum ternario multatum, residuum æquabitur ipsi polygono.

Esto polygonus K. cuius latus A. & numerus angulorum binario multatus B. vnde ablata vnitate superst C. ternario minor numero angulorum, sitque D. triangulus à latere A. quo ducto in B. fiat E. ductoque C. in A. fiat F. dico si F. auferatur ex E. relinqui polygonum K.

D. 15. E. 45. F. 10.
A. 5. B. 3. C. 2.
G. 10. H. 30. K. 35.

etenim sumatur G. triangulus à latere vnitate minore ipso A. ductoque B. in G. fiat H. vnde per sextam huius additis simul A. & H. fiet K. Quia igitur per præced. si ad G. addatur vnitas, & suum latus fiet D. vnitas autem & latus ipsius G. æquantur A. erit D. æqualis duobus A G. simul. quamobrem qui fit ex B. in D. nempe E. æquatur iis qui fiunt ex B. in A. & ex B. in G. qui est H. Productus autem ex B. in A. (quandoquidem B. superat vnitate ipsum C.) æquatur producto ex C. in A. nempe F. & præterea ipsi A. Igitur E. æquatur tribus numeris H. A. F. vnde auferendo vtrimque eundem F. remanet summa duorum A. H. nempe polygonus K. æqualis ei qui restat si ex E. auferatur F. quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex multis harum propositionum, ad inueniendum polygonum dato latere collige canones elegantes, & quidem faciliores & compendiosiores eo quem tradit Diophantus propositione nona.

I. CANON.

Ducito datum latus vnitate multatum in numerum angulorum binario multatum, & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. constat per tertiam huius.

Vt dato latere 7. si quæratur eius pentagonus: latus vnitate multatum est 6. numerus angulorum binario multatus 3. quo ducto in 6. fit 18. qui binario auctus fit 20. quo ducto in 7. fit 140. cuius semissis 70. est quæsitus pentagonus.

II. CANON.

Ducito datum latus in numerum vnitate minorem, productum ducito in numerum angulorum binario multatum producto adde duplum lateris, fiet duplum polygoni per quartam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 7. in 6. fit 42. quo ducto in 3. fit 126. cui si addas duplum 7. nimirum 14. fit vt prius 140. cuius semissis 70. est quæsitus pentagonus.

III. CANON.

Ducito quadratum dati lateris in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit à dato latere in numerum angulorum quaternario multatum, residuum erit duplum polygoni per quintam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 49. in 3. fit 147. hinc aufer productum ex 7. in 1. nempe 7. residuum est vt prius 140. cuius semissis 70. est quæsitus pentagonus.

IV. CANON.

Sume triangulum à latere dato vnitate multato, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde datum latus, fiet quæſitus polygonus per ſextam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ſume triangulum à latere 6. nempe 21. quo ducto in 3. fit 63. cui ſi addas datum latus 7. fit pentagonus quæſitus 70.

V. CANON

Sume triangulum à dato latere, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit ex latere dato in numerum angulorum multatum ternario, reſiduum erit quæſitus polygonus per octauam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ſume triangulum illius nempe 28. quo ducto in 3. fit 84. vnde aufer quod fit ex 7. in 2. nempe 14. reſiduum 70. eſt quæſitus pentagonus, vide rurſus omnium expeditiſſimum Canonem in ſcholio vndecimæ.

PROPOSITIO NONA.

Si numerus ſecetur in duas partes, triangulus totius æqualis eſt triangulis partium & plano ſub partibus comprehenſo.

D.....E...F. G
A.....B...C
K 72.

Numerus A C. ſecetur in A B. B C. dico triangulum totius A C. æquari triangulis partium A B. B C. & plano ſub A B. B C. ſumatur D E. æqualis ipſi A B. & ei apponatur E F. æqualis B C. & adiiciatur ei vnitas F G. conſtat ergo D G. ſuperare A C. vnitate, ſicut & E G ſuperat B C. vnitate. Ducto inſuper A C. in D G. fiat K. patet ergo per octauam Diophanti vel tertiam huius, ipſum K. eſſe duplum trianguli à latere A C. quia vero ducere A C. in D G. idem eſt atque ducere ſigillatim AB. in D E. E F. F G. & BC. in D E. E G. erit K. æqualis productis illis omnibus. At ducere A B. in D E. ſibi æqualem & in vnitatem F G. idem eſt atque ducere A B. in numerum vnitate maiorem ſeipſo, vnde fit duplum trianguli ipſius A B. ducere autem A B. in E F. idem eſt atque ducere A B. in B C. igitur patet ex ductu A B. in totum D G. fieri duplum trianguli A B. & planum ſub A B. B C. ſimiliter productus ex B C. in D E. æquatur plano ſub A B. B C. & productus ex B C. in E G. qui vnitate maior eſt, æquatur duplo trianguli ipſius B C. igitur productus ex B C. in totum D G. æquatur duplo trianguli ipſius B C. & plano ſub A B. B C. quamobrem compoſitum ex productis ex A B. in D G. & ex B C. in D G. nempe productus ex A C. in D G. nimirum ipſe K. æqualis eſt duplo triangulorum A B. B C. & duplo plani ſub A B. B C. igitur dimidium ipſius K. nempe triangulus A C. æquatur triangulis A B. B C. & plano ſub A B. B C. quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur duplum cuiuſlibet trianguli adſumpto collaterali quadrato, facere triangulum à latere duplicato; quod euidens eſt ſi A B. B C. ponantur æquales.

PROPOSITIO DECIMA.

Si numerus ſecetur in duas partes, polygonus totius æqualis eſt ſimilibus polygonis partium, & plano ſub partibus comprehenſo, ſumpto ſecundum numerum angulorum binario multatum.

D 3. E 2.
A.....B....C.
F. 15. G. 10. H. 20.
K. 45. L. 30. M. 60.
N. 10. P. 8. Q. 57.
R. 35. S. 22. T. 117.

Sit numerus A C. ſectus in A B. B C. & ſit D. numerus angulorum binario multatus, & E. vnitate minor. dico polygonum totius A C. æquari polygonis ſimilibus partium A B. B C. & producto ex D. in planum ſub A B. B C. comprehenſum. Etenim ſumantur F. & G. trianguli ipſorum A B. B C. & ſit H. planus ſub A B. B C. Tum ducto D. in ipſos F. G. H. ſigillatim, fiant K. L. M. & ducto E. qui eſt numerus angulorum ternario multatus in A B. B C. fiant N. P. quibus detractis ab ipſis K L. relinquantur R. S. quorum ſumma Q. qua addita ad M. fiat T. Patet itaque ex ſola conſtructione & per octauam huius numeros R. S. eſſe polygonos ipſorum A B. B C. quorum ſumma Q. addita ad M. (qui fit ex D. in H. planum ſub partibus) fiet vtique T. continens polygonos partium, & planum ſub partibus ſumptum ſecundum

numerum angulorum binario multatum. Reſtat ergo probandum ipſum T. eſſe polygonum ſimilem totius A C. Quoniam ergo F G. ſunt trianguli partium A B. B C. & H. planus ſub partibus erit aggregatum ipſorum F. G. H. æquale triangulo totius A C. per præced. Quare cùm ex D. in ipſos F. G. H. fiant K. L. M. erit aggregatum ipſorum K. L. M. æquale producto ex D. in triangulum ipſius A C. Quare cum etiam N. P. æquentur producto ex E. in A C. & iis ſublatis de aggregato ipſorum K. L. M. ſuperſint R. S. M. ſeu T. patet T. eſſe id quod reſtat ſi productus ex E. in A C. auferatur à producto ex D. in triangulum eiuſdem A C. ergo T. eſt polygonus ipſius A C. per octauam huius. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Quod peculiariter de triangulis oſtenſum eſt in præcedenti, & ab Euclide de quadratis quarta ſecundi. Hic vniuerſaliter oſtenditur de omnibus polygonis, vt merito inter pulcherrimas propoſitiones hæc cenſeri debeat quam primus omnium (quod ſciam) ego demonſtraui.

Et quemadmodum quartam ſecundi extendimus ad ſectionem numeri in quotlibet partes. Sic & iſtam vniuerſalius proponemus, hoc ſcilicet modo.

Si numerus ſecetur in quotlibet partes, polygonus totius æqualis eſt ſimilibus polygonis partium, & productis ex qualibet parte in quamlibet aliam toties ſumptis quot ſunt vnitates in numero angulorum binario multato.

K. 3.
A....B...C..D

Eſto enim A D. ſectus in quotlibet partes A B. B C. C D. & ſit K. numerus angulorum binario multatus. Dico polygonum totius A D. æquari polygonis ſingulorum A B. B C. C D. & productis ex qualibet parte in quamlibet ſumptis ſecundum K. conſideretur prius A D. vt ſectus in duas partes A C. C D. Tunc per hanc propoſitionem decimam polygonus totius æquatur polygonis ipſorum A C. C D. & producto ex A C. in C D. ducto in K. ſimiliter polygonus A C. æquatur polygonis ipſorum A B. B C. & producto ex A B. in B C. ducto in K. Quare cum & productus ex A C. in C D. ductus in K. æquetur productis ex A B. & B C. in C D. ductis in K. patet polygonum totius æquari polygonis partium A B. B C. C D. & productis ex qualibet in quamlibet ductis in K. quod ſi ponatur numerus diuiſus in quatuor partes, ſimile concludetur per id quod de diuiſione in tres oſtenſum eſt, & ſic in infinitum. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO VNDECIMA.

Quilibet polygonus componitur ex tot triangulis, quot vnitates continet numerus angulorum binario multatus. Ex his autem vnus eſt collateralis ipſi polygono, reliqui vero à latere proximè minori.

A. 51.
D. 3. B. 6. C 5.

Eſto quilibet polygonus A. cuius latus B. quod vnitate multatum ſit C. & numerus angulorum binario multatus eſto D. dico polygonum A. componi ex tot triangulis quot ſunt in D. vnitates, quorum vnus eſt ab ipſo latere B. reliqui à latere C. Etenim per ſextam huius polygonus A. æquatur producto ex D. in triangulum abs C. adſcito latere B. ſed ſi vni triangulorum abs C. concipiatur addi B. fiet triangulum ab ipſo B. per ſeptimam huius (quia B. continet C. & præterea vnitatem) Patet ergo polygonum A. componi ex tot triangulis quot ſunt in D. vnitates quorum vnus eſt à latere B. reliqui à latere C. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc etiam elicietur Canon ad inueniendum polygonum dato latere. Nam ſi quæratur pentagonum à latere 6. quia numerus angulorum binario multatus eſt 3. conſtat quæſitum pentagonum componi ex tribus triangulis quorum vnus eſt à latere 6. reliqui duo à latere 5. ſi ergo ſumas huiuſmodi triangulos 21. 15. 15. horum ſumma erit 51. quæſitus pentagonus. Quia vero ſi datum latus ducatur in ſeipſum vnitate auctum fit duplum trianguli à dato latere, & ſi idem latus ducatur in ſeipſum vnitate multatum, fit duplum trianguli proximè minoris, formari poterit Canon omnium elegantiſſimus & expeditiſſimus.

CANON.

Dato lateri vnitate aucto adde ipſummet latus vnitate multatum toties, quot ſunt vnitates in numero angulorum multato ternario, ſummam ducito in datum latus, fiet duplum quæſiti polygoni.

Vt ſi quæratur pentagonum à latere 6. adde ad 7. duplum ipſius 5. nempe 10. fiet 17. quo ducto in datum latus 6. fit 102. cuius ſemiſſis 51. eſt quæſitus pentagonus.

ALITER.

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, reſiduum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

Vt in dato exemplo ducito 6. in 3. fit 18. hinc aufer 1. reſtant 17. quæ ducta in 6. faciunt 102. vt prius, cuius ſemiſſis 51. Quoniam vero conuerſum huius propoſitionis vtile eſt ad perficiendum vltimum problema Diophanti vt ſuo loco patebit, operæpretium eſt illud demonſtrare, nimirum.

Si quilibet numerus ducatur in quemlibet triangulum, & producto addatur triangulum proxime maius, totum erit numerus polygonus, collateralis quidem maiori triangulo, ſed tot angulorum duobus amplius, quot ipſe triangulis conſtat.

G. 144. H. 189. K. 189.
A. 36. B. 45. C. 9.
D. 4. E. 5. F. 7.

Eſto A. quilibet triangulus, & proxime maior B. cuius latus C. Tum ſumatur quilibet numerus D. qui vnitate auctus fiat E. & huic addendo binarium fiat F. & ducto D. in A. fiat G. cui addendo B. fiat H. Patet ergo H. tot conſtare triangulis quot ſunt vnitates in E. etenim H. conſtat ex triangulo B. & numero G. qui continet toties triangulum A. quot ſunt vnitates in D. quare cum E. ſuperet D. vnitate, patet H. tot triangulis conſtare quot ſunt vnitates in E. cum igitur F. ſit binario amplior quàm E. dico H. eſſe polygonum à latere quidem C. ſed tot angulorum quot ſunt vnitates in F. etenim ſi non ſit, ſumatur talis polygonus K. facile eſt oſtendere K. æquari ipſi H. Quia enim K. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. ſequitur per hanc vndecimam propoſitionem ipſum K. tot conſtare triangulis quot ſunt vnitates in E. quorum vnum collaterale eſt ipſi K. hoc eſt æquale ipſi B. reliqua æqualia ſunt ipſi A. ſed & H. iiſdem prorſus triangulis conſtat ex conſtructione. Igitur K. eſt æqualis ipſi H. ac proinde H. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DVODECIMA.

Si quotlibet polygoni collaterales ordinate diſponantur, ij cum ſuo communi latere conſtituent progreſſionem arithmeticam, cuius differentia erit triangulus ab eodem latere vnitate multato.

H. 1. K. 2. L. 3. M. 4.
A. 7. B. 28. C. 49. D. 70. E. 91.
F. 6. G. 21.

Sit A. datum latus cuius triangulus B. quadratus C. pentagonus D. hexagonus E. & ſic deinceps. ſitque F. minor vnitate quam A. cuius triangulus G. dico ipſos A B C D E. conſtituere progreſſionem arithmeticam cuius differentia eſt G. etenim cum numeri angulorum ipſorum B C D E. ſint numeri 3. 4. 5. 6. & ſic deinceps per additionem vnitatis creſcentes, ſi ſumantur H K L M. numeri angulorum binario multati erunt hi 1. 2. 3. 4. qui etiam per additionem vnitatis creſcent. Itaque quoniam per 7. huius, G. adſciſcens A. maiorem vnitate quam ſuum latus F. facit triangulum B. patet G. eſſe differentiam duorum A B. Rurſus quia per præced. ſinguli C D E. continent tot triangulos quot ſunt vnitates ſingulis K. M. quorum vnus eſt B. reliqui omnes æquales ipſi G. patet C. continere B. & ipſum G. ſemel, at D. continere B. & inſuper G. bis, atque etiam E. continere B. & ipſum præterea G. ter, & ſic in infinitum quilibet altior polygonus continet B. & adhuc ipſum G. ſemel amplius quam antecedens polygonus. Conſtat igitur per primam huius G. eſſe differentiam per quam progrediuntur ipſi A B C D E. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc elicitur Canon ad inueniendam ſummam quotlibet polygonorum collateralium ordinate diſpoſitorum dato latere, vt ſi quæratur ſumma quadrati, pentagoni, hexagoni, heptagoni & octogoni à latere 4.

CANON.

Ducito triangulum lateris vnitate multati in numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum, producto adde duplum minimi polygoni, ſummam ducito in numerum multitudinis polygonorum, fiet duplum quæſitæ ſummæ.

Vt in exemplo propoſito triangulum lateris vnitate multati eſt 6. quo ducto in 4. numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum fit 24. duplum autem minimi polygoni, nempe quadrati à latere 4. eſt 32. qui cum 24. facit 56. quo ducto in 5. numerum multitudinis polygonorum fit 280. cuius ſemiſſis 140. eſt ſumma quæſita.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In progreſſione numerorum ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum ab vnitate, polygonus maximi, æquatur maximo terminorum, & ſummæ reliquorum ſumptæ ſecundum numerum angulorum binario multatum.

H 3. G 51.
A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 6.

Hæc facile per 6. concluditur, cum qua idem ferè eſt mutatis verbis. Sint A B C D E F. quotlibet numeri ſecundum ſeriem naturalem numerorum ab vnitate diſpoſiti, & maximi F. polygonus eſto G. & numerus angulorum binario multatus ſit H. dico G. æquari ipſi F. & ſummæ reliquorum A B C. D. E. ſumptæ ſecundum H. Quia enim ſumma ipſorum A B C D E. eſt triangulus à latere E. vnitate minore ipſo F. patet per 6. productum ex H. in illum triangulum adſcito F. æquari ipſi G. vnde patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In progreſſione numerorum ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum, aggregatum ſimilium polygonorum à ſingulis, æquatur productis ex ſic diſpoſitis numeris in totidem numeros progreſſionis huiuſmodi polygonorum conſtitutiuæ, ſi videlicet maximus vnius ordinis ducatur in minimum alterius ordinis. Tum primus à maximo ducatur in primum à minimo, & ſecundus à maximo in ſecundum à minimo, & ita deinceps.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N 3. P 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

Sint A B C D. ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti & ſumma polygonorum à ſingulis eſto V. tum ſumantur totidem termini in progreſſione huiuſmodi polygonorum conſtitutiua, ordine inuerſo diſpoſiti E F G H. ductiſque A in H. B in G. C in F. D in E. ſit productorum ſumma X. dico V X. eſſe æquales, ſit enim L. differentia progreſſionis conſtitutiuæ, ſeu numerus angulorum binario multatus: patet per primam huius F. continere vnitatem E. & L. ſemel; G. continere vnitatem ſemel, & L. bis; H. continere vnitatem ſemel, & L. ter. Diuidantur ergo numeri H. G. F. in partes ex quibus componuntur, nimirum F. in vnitatem K. & in L. Ipſe autem G. in vnitatem M. & in N. P. æquales ipſi L. Denique ipſe H. reſoluatur in vnitatem Q. & in R. S. T. æquales ipſi L. Patet numeros qui fiunt ex A. in H. ex B. in G. ex C. in F. ex D. in E. ſimul iunctos: nempe X. æquari omnibus qui fiunt ex A in Q. R. S. T. ex B. in M N P. & ex C. in K L. & ex D. in E. Quia igitur ex E in D. fit ipſe D. (quia E eſt vnitas) At ducere L. in C. P. in B. & T. in A. idem eſt ac ducere L. in ſummam omnium A B C. productus autem ex L. in ſummam omnium A B C. adſcito D. facit polygonum ipſius D. per præcedentem. Patet productos ex E. in D. ex L. in C. ex P. in B. & ex T. in A. æquari polygono ipſius D. ſimili prorſus argumento oſtendemus productos ex K. in C. ex N. in B. & ex S. in A. æquari polygono ipſius C. & rurſus productos ex M. in B. & ex R. in A. æquari polygono ipſius B. & denique conſtat ex Q. vnitate in A. vnitatem fieri polygonum ipſius A. Igitur euidens eſt omnia illa producta ſeu numerum X. æquari polygonis à ſingulis A B C D. ſeu numero V. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

Si ſint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, aggregatum productorum ex numero angulorum binario multato in primum à maximo ſemel; in ſecundum bis; in tertium ter, & ſic deinceps adſcita ſumma numerorum, æquatur aggregato polygonorum à ſingulis.

Repetatur enim præcedens figura. Dico aggregatum productorum ex L. in C. ſemel, in B. bis in A ter & ſic deinceps; adſcita ſumma ipſorum A B C D. æquari V. aggregato polygonorum à ſingulis. Nam ex præcedenti conſtat V. æquari productis ex E. in D. ex K L. in C. ex M N P. in B. & ex Q R S T. in A. Quia vero ſinguli E. K. M. Q. æquantur vnitati producta ex E. in D. ex K. in C. ex M. in B. & ex Q. in A. ſimul æquantur ſummæ ipſorum A B C D. Rurſus quia ſinguli L. N. P. R. S. T. ſunt æquales inter ſe, ducere L. in C. & N P. in B. & R S T. in A. idem eſt atque ducere L. in C. ſemel, & in B. bis & in A. ter. Igitur productis ex L. in C. ſemel in B. bis in A. ter, & ſic deinceps, ſi addatur ſumma omnium A B C D. fit V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N 3. P 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Si ſint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & numerus angulorum binario multatus ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis relicto maximo, & producto addatur triangulus maximi, fiet aggregatum polygonorum à ſingulis.

V 40.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
L. 3.

Sint iidem qui ſupra A B C D. dico ſi L. ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. & producto addatur triangulus ipſius D. fieri V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Nam triangulus C. æquatur ſummæ ipſorum A B C. triangulus B. æquatur ſummæ ipſorum A B. & triangulus A. æquatur ipſi A. ſumere autem A B C. tum A B. tum A. idem eſt atque ſumere C. ſemel, B. bis, A. ter, & ſic deinceps, ergo aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. æquatur ipſi C. ſemel, & B. bis, & A. ter. Quare ducere L. in aggregatum illud triangulorum, idem eſt ac ducere L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter. At productis ex L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter, ſi addatur ſumma omnium A B C D. ſeu triangulus D. fit V. per præced. Igitur ſi & producto ex L. in aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. addatur triangulus D. fiet idem V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, adſcita ſumma numerorum, vel adſcito triangulo maximi, æquatur triplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

M. 5. L. 4. K. 3. H. 2. G. 1.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E 5. F. 6.
N. 3.

Sint A B C D E F. numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, dico ſi polygonus maximi F. ducatur in numerum terminorum vnitate auctum & producto addatur ſumma ipſorum A B C D E F. ſeu quod idem eſt triangulus ipſius F. ſummam æquari triplo polygonorum ſimilium à ſingulis. Sit enim N. numerus angulorum binario multatus, & ſuper ipſos A B C D E. diſponantur totidem illis æquales ordine inuerſo G. H. K. L. M. ita vt G. ſit vnitas. H. binarius K. ternarius & ſic deinceps. Tunc patet ambos G E. æquari ipſi F. & ſimiliter ambos A M. ſed & ob medietatem arithmeticam ſumma duorum A E. æqualis eſt ſummæ duorum B D. atque etiam duplo ipſius C. Igitur cùm ambo A E. æquentur ipſi F. & ſumma duorum B D. ſit eadem quæ duorum B L. & eadem quæ duorum D H. & K. ſit æqualis ipſi C. patet ſingulas ſummas binorum M A. L B. K C. H D. G E. æquari ipſi F. Quare ſi harum ſummarum polygoni ſumantur, & præterea polygonus ipſius F. bis, æquabuntur hi omnes polygoni ſimul producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Itaque cum polygonus ſummæ M A. per decimam huius ſit æqualis polygonis ipſorum M. & A. & plano ſub M A. ducto in N. Item polygonus ſummæ L B. ſit æqualis polygonis K. & L. & B. & plano ſub L B. ducto in N. Item polygonus ſummæ K C. ſit æqualis polygonis K. & C. & plano ſub K C. ducto in N. Itemque polygoni ſummarum H D. G E. ſint æquales polygonis ipſorum H. D. G. E. & planis ſub H D. G E. ductis in N. polygoni autem ipſorum G. H. K. L. M. ſint æquales polygonis ipſorum A B C D E. ſi his addatur duplum polygoni F. ſequitur duplum polygonorum à ſingulis A B C D E F. vna cum planis M A. ſub L B. ſub K C. ſub A D. ſub G E. ductis in N. æquari producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Quare ſi adiiciatur vtrimque ſumma omnium A B C D E F. erunt ſummæ vtrimque æquales. Quia vero G. eſt vnitas H. binarius. K. ternarius & ſic deinceps patet productum ex G in E æquari ipſi E. & productum ex H. in D. æquari duplo D. & productum ex K in C. æquari C. ter, & productum ex L. in B. æquari B. quater & productum ex M. in A. æquari A. quinquies & ſic deinceps. Igitur ducere N. in omnia illa producta, idem eſt atque ducere N. in E. ſemel, in D. bis, in C. ter, in B. quater, in A quinquies & ſic deinceps. Quare per 16. huius qui fit ex N. in omnia illa producta, adſcita ſumma ipſorum A B C D E F. æquatur polygonis à ſingulis. Quamobrem qui fit ex polygono F. in numerum terminorum vnitate auctum adſcita ſumma omnium, æquatur triplo polygonorum à ſingulis. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, in idem latus vnitate auctum, æquatur ſextuplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

A1. B2. C3. D4. E5. F35. G70. H75. K6. M210. L450.

Sint A B C D E. ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & maximi E. polygonus eſto F. cuius duplum G. quo addito ad ipſum E. fiat H. quo ducto in K. vnitate maiorem ipſo E. fiat L. dico L. eſſe ſextuplum ſimilium polygonorum à ſingulis A B C D E. Etenim ex K. in F. fiat M. Patet ergo per preced. ſi ad M. addatur ſumma omnium A B C D E. fieri triplum polygonorum à ſingulis. Quia vero productus ex K. in H. nempe L. æquatur productis ex K. in G. & in E. ex quibus H. componitur. Productus autem ex K. in G. eſt duplus ad M. (quia G. duplus eſt ipſius F) & productus ex K. in E. eſt duplus ſummæ omnium A B C D E. per 4. Diophanti. ſequitur L. continere duplum ipſius M. & ſummæ omnium A B C D E. id eſt duplum tripli polygonorum à ſingulis. Igitur L. eſt ſextuplum huiuſmodi polygonorum. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex his duab. propoſitionib. elicies canones ad inueniendum ſummam quotlibet polygonorum ſimilium ab vnitate ordinatè diſpoſitorum.

CANON. I.

Cape maximum polygonorum quem ducito in ſuum latus vnitate auctum, producto adde triangulum ipſius lateris, ſummæ triens erit aggregatum polygonorum per 17.

Vt ſi quæratur ſumma 5. pentagonorum ab vnitate cape pentagonum ipſius 5. nempe 35. quem ducito in 6. fit 210. cui adde triangulum ipſius 5. nempe 15. fiet 225. cuius triens 75. eſt quæſita ſumma.

CANON II.

Duplo maximi polygoni adde latus illius, ſummam ducito in idem latus vnitate auctum, producti ſextans erit aggregatum polygonorum per 18.

Vt in dato exemplo duplo 35. nempe 70. adde 5. fit 75. quo ducto in 6. fit 450. cuius ſextans 75. eſt quæſita ſumma.

Hæc eadem regula habetur in excerptis nondum editis ex libro Apofroditi & Betrubi Ruſi Architectonis, quam tamen à nemine hactenus demonſtratam vidi.

Quoniam vero regulæ generales de polygonis ad triangulos vt pote ſimpliciores applicatæ, ſunt ſimpliciores & faciliores, fiet forte Canon facilior applicando 17. huius ad triangulos & implorando auxilium 16. hac arte.

CANON III.

Cape triangulum maximi lateris vnitate multati, quem ducito in idem latus vnitate auctum, producti cape trientem, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde triangulum maximi lateris, fiet aggregatum polygonorum.

Vt ſi quæratur aggregatum 7. pentagonorum ab vnitate cape 21. triangulum ipſius 6. quem ducito in 8. fit 168. cuius triens 56. quo ducto in 3. fit 168. cui ſi addas 28. fit 196. aggregatum quæſitum.

Quoniam vero in hunc locum reiecimus explicationem vltimæ propoſitionis Diophanti, cuius tractatio mutila eſt apud ipſum, eius promiſſi fide nos exoluamus, non quidem inſiſtentes veſtigijs Diophanti, ſed aliam prorſus amplectentes viam.

PROPOSITIO 19. PROBLEMA 1.

Propoſito quolibet numero, inueſtigare quot modis polygonus dici poſſit.

Sit propoſitus numerus 120. Primo quidem conſtat ex definitione Diophanti, eum eſſe polygonum à latere 2. totque angulorum, quot ipſe continet vnitates, & ſic dicetur hecaconticoſigonalis. Deinde inuenietur triangulus eſſe à latere 15. quia eius octuplum vnitate auctum, quadratum 961. efficit, cuius latus 31. vnde ablata vnitate ſupereſt 30. cuius ſemiſſis 15. eſt latus trigoni 120. vt conſtat ex Diophanto.

Denique vt ſciamus an alijs modis idem 120. poſſit eſſe polygonus. Exponantur ab vnitate omnes in infinitum ordinatim numeri, puta 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. & illis ſubiiciantur ab vnitate triangulares omnes ordinate diſpoſiti, puta 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. vt factum vides in appoſita tabella, quæ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	620

poteſt in infinitum extendi. Tum propoſitus numerus 120. diuidatur ſigillatim per numeros triangulos, & obſeruetur, quoties reſiduum ex diuiſione æquale erit lateri proxime maioris trianguli, toties enim numerus 120. polygonus erit, cuius latus erit ipſum reſiduum diuiſionis. At quotiens oſtendet differentiam progreſſionis huiuſmodi polygonorum conſtitutiuæ, ſeu quod idem eſt, idem quotiens binario auctus, numerum angulorum indicabit. Hac arte ſi diuidas 120. per triangulum 3. ita vt reſiduum ſit 3. fiet quotiens 39. indicans 120. eſſe polygonum angulorum 41. ſeu teſſaracontahenagonalem, & reſiduum 3. latus illius denotat, ita ſi inſtituas progreſſionem trium terminorum quorum differentia ſit 39. fient hi 1. 40. 79. & ex his polygoni angulorum 41. formabuntur 1. 41. 120. Rurſus ſi diuidas 120. per triangulum 28. ita vt reſiduum ſit 8. fiet quotiens 4. indicans 120. eſſe hexagonum, at reſiduum 8. radicem illius deſignat. Ita ſi inſtituas progreſſionem octo terminorum quorum differentia ſit 4. erunt hi 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. quorum ſumma vtique eſt 120. Quia vero 120. per nullum alium triangulum diuidi poteſt, ita vt reſiduum ſit æquale lateri proxime maioris trianguli, ideo pronunciamus propoſitum eundem numerum, pluribus alijs modis eſſe non poſſe polygonum quàm quatuor; cùm ſit vt oſtenſum eſt triangulus, hexagonus, teſſaracontahenagonus, & hecatontaicoſigonus. Huius rei demonſtratio facilis eſt, quod vno exemplo fiet manifeſtum. Quia 28. diuidens 120. dat quotientem 4. & reſiduum 8. patet 120. æquari quadruplo ipſius 28. & numero 8. atqui per ſeptimam huius triangulus 28. cum 8 (qui vnitate maior eſt quam latus ipſius) facit triangulum 36. proximè maiorem, igitur iungendo 28. ſemel cum reſiduo 8. ſemel, erit 120. æqualis triangulo 28. ter, & triangulo ſequenti 36. ſemel, quamobrem per demonſtrata in ſcholio 11. huius 120. eſt polygonus collateralis ipſi 36. hoc eſt à latere 8. & habens tot angulos, quot triangulis ipſe conſtat plus duobus hoc eſt 6. quod erat demonſtrandum. Et euidens eſt ſi diuiſio tentata ſit per omnes triangulos, donec deuentum ſit ad æqualem vel maiorem ipſo 120. eundem 120. non poſſe eſſe polygonum aliter quam modis ſic inuentis, etenim quomodocunque dicatur eſſe polygonus, oportebit per 11. huius vt componatur ex tot triangulis quot ipſe angulos habet, minus duobus, quorum vnus erit illi collateralis, alij à latere vnitate minore, quare ſi collateralis triangulus reſoluatur in ſuum latus, & in proxime minorem triangulum, quibus æquatur, iam propoſitus numerus continebit aliquoties minorem triangulum, & præterea latus maioris trianguli ſemel, & ideo propoſitus numerus ex demonſtratis oſtendetur eſſe polygonus vno inuentorum modorum, vel inferetur omnes diuiſiones non eſſe tentatas, Quorum primum negabatur, alterum aſſerebatur, vnde manifeſta ſequitur contradictio, igitur ex omni parte propoſito eſt ſatisfactum.

Aduerte autem compendij gratia, non omnino tentandam eſſe diuiſionem donec peruenias ad triangulum æqualem vel maiorem propoſito numero; ſufficit enim ſi deuenias ad triangulum qui ſemel tantum in propoſito numero contineatur; cùm enim ex huiuſmodi diuiſione quotiens non poſſit eſſe niſi 1. qui auctus binario efficit 3. numerum angulorum trianguli, patet per hanc diuiſionem propoſitum numerum non poſſe eſſe niſi triangulum, ſi forte triangulus per quem fit diuiſio, cum latere ſequentis iunctus, efficiat ipſum ſequentem triangulum. Quare cùm per regulam Diophanti iam expertus ſis an propoſitus numerus ſit triangulus, ſuperfluum erit id amplius inquirere, ſic in data hypotheſi numeri 120. cum perueneris ad triangulum 66. qui ſemel tantum continetur in 120. iam deſiſtere poteris ab examine, cum per id nil amplius tibi poſſit innoteſcere niſi 120. eſſe triangulum, cùm diuides ſcilicet eum per triangulum 105. ſed id iam tibi conſtat.

Rurſus ſi propoſitus numerus ſi par, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem cum latus ſequentis eſt impar, quia enim cuiuſlibet trianguli paris multiplex quilibet eſt par, eo detracto à propoſito numero pari, impoſſibile eſt relinqui imparem vt conſtat ex Euclide. Hac de cauſa propoſito numero 120. fruſtra tentabitur diuiſio per triangulos 10. & 36. quia latera ſequentium, ſunt 5. & 9. impares numeri.

Eadem de cauſa ſi propoſitus numerus ſit impar, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem quando ſequentis latus eſt etiam par. etenim trianguli paris multiplex quilibet, par eſt, quo detracto à numere propoſito impari, impoſſibile eſt reſiduum eſſe par. Itaque in hoc caſu non tentabitur diuiſio per triangulos 6. 28. 66. qui latera ſequentium ſunt 4. 8. 12. numeri pares, & ſic de alijs.

Denique poſſunt & alia compendia obſeruari, quibus iam prouecta diuiſione, antequam penitus abſoluatur, dignoſci poſſit an vtilis ſit futura necne, quæ ſtudioſo lectori indaganda relinquo.

CLAVDII GASPARIS

BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.

LIBER SECVNDVS.

ACTVM est superiore libro de progressione polygonorum, quorum latera secundum seriem naturalem numerorum ab vnitate dispositа sunt. Hoc vero agemus de illorum progressione quorum latera reperiuntur in qualibet medietate arithmetica continua, cuius differentia æquatur minimo termino. Et primum quidem insignes aliquot huius medietatis proprietates persequemur. Deinde peculiares de quadratorum progressione trademus regulas, tum generales de omnibus polygonis, demum singularia quædam de cubis deque eorum progressione proferemus.

PROPOSITIO PRIMA.

In medietate arithmetica, in qua differentia minimo termino est æqualis, productus ex numero terminorum in minimum, æquatur maximo.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 2. F 4.

Sint in medietate arithmetica A B C D. & differentia progressionis sit E. æqualis ipsi A. & sit F. numerus terminorum, dico productum ex A. in F. æquari maximo D. etenim [1] B. continet A semel & differentiam E. semel, at C. continet A. semel & differentiam E bis, ac denique D. continet A semel & differentiam E. ter, & sic deinceps. Quare cùm E. sit æqualis ipsi A. patet B. continere A. bis, C. ter, D. quater, & sic deinceps quilibet sequentium continet minimum toties quot sunt à minimo vsque ad ipsum inclusiuè numeri terminorum, quamobrem D. continet A. secundum vnitates ipsius F. ac proinde ducto A. in F. producitur D. quod demonstrandum erat. [1] 1. 1. appen.

COROLLARIVM.

Hinc patet secundum à minimo continere minimum bis, tertium ter, quartum quater, & sic deinceps quotus quisque est in serie progressionis, toties continet minimum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In hac progressione, productus ex numero terminorum vnitate multato in maximum, duplus est summæ reliquorum.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. G 5. H 4.

Sint in hac progtessione A B C D E. sitque G. numerus terminorum & H. vnitate minor, dico productum ex H. in E. duplum esse summæ reliquorum A B C D. quia enim H. est numerus terminorum A B C D. productus ex H. in summam extremorum A D. æquatur duplo summæ ipsorum A B C D. per quartam Diophanti, at summa extremorum A D. æquatur ipsi E. quandoquidem A. æqualis est differentiæ. Igitur ex H. in E. fit duplum summæ antecedentium A B C D. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO TERTIA.

In hac progressione. Quadratus maximi æquatur producto ex numero terminorum in planum sub extremis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. K. 20. G. 5.

Sint numeri qui suprà, & planus sub extremis esto K. dico quadratum maximi E. æquari producto ex G. in K. [2] Etenim ex A. in G. fit ipse E. Quare sumendo tres numeros A. G. E. [3] idem producetur numerus ducendo A. in E. & productum K. in G. qui fiet ducendo A. in G. & productum E. in E. hoc est quadratus ipsius E. Quare patet propositum. [2] 1. huius. [3] 1. porism.

COROLLARIVM.

Quadratus maximi æquatur producto ex quolibet extremo, in planum ſub numero terminorum, & altero extremo.

Eadem enim ratione oſtendetur quadratum ex E. æquari producto ex A. in planum ſub G. & E. vel producto ex E. in planum ſub G. & A.

PROPOSITIO QVARTA.

In hac progreſſione, quadratus maximi æquatur producto ex minimo in compoſitum ex maximo & ſumma reliquorum dupla.

L. 50. M. 40.
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E 10.
2. huius. G. 5. H. 4.

Sint numeri qui ſuprà, & duplum ſummæ ipſorum A B C D. eſto M. dico quadratum ipſius E. æquari producto ex A. in aggregatum ipſorum M E. ſit enim H. vnitate deficiens à G. & ducto G. in E. fiat L. Quia igitur [2] ex H. in E. fit M. & ex G. in eundem E. fit L. cùm G. H. differant, vnitate patet L. æquari vtrique M. E. ſimul. At ex A. in L. fit quadratus ipſius E. per corollarium præcedentis. Igitur ex A. in vtrumque M E. ſimul, fit idem quadratus. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

In progreſsione quæ ab vnitate incipit, quadratus maximi æquatur duplo ſummæ antecedentium adſumente ipſum maximum.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E. 5.

Etenim ſi ponatur A. vnitas, & differentia etiam progreſſionis vnitas, erit per hanc quartam propoſitionem quadratus E æqualis producto ex A. in E. & in duplum ipſorum A B C D. Quia ergo A. eſt vnitas quæ non mutat numeros quos multiplicat, patet quadratum E. æquari ipſi E. & duplo ſummæ ipſorum A B C D. quod erat propoſitum.

PROPOSITIO QVINTA.

In hac progreſſione aggregatum quadratorum à ſingulis, æquatur productis ex minimo in maximum ſemel, & in ſecundum ab illo ter, & in tertium quinquies, & in quartum ſepties, & ſic continue per numeros impares aſcendendo.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.

Sint in hac progreſſione numeri A B C D E. dico aggregatum quadratorum à ſingulis æquari productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, in A. nouies, & ſic deinceps per numeros impares aſcendendo. Etenim per præcedentem quadratus ex E. æquatur producto ex A. in E. ſemel, & in reliquos bis. Rurſus quadratus ex D. æquatur producto ex A. in D. ſemel, & in antecedentes bis. Quare quadrati ex E. & D. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, & in reliquos quater. At rurſus quadratus ex C. æquatur producto ex A. in C. ſemel, & in antecedentes bis. Igitur quadrati ex E D C. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, & in reliquos ſexies. Rurſus denique quadratus ex B. æquatur producto ex A. in B. ſemel, & in A. bis. Igitur quadrati ex E D C B. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, & in A. octies, quare addito quadrato ex A. fiunt quadrati omnium A B C D E. æquales productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, in A. nouies. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO SEXTA.

In hac progreſſione, qui fit ex numero terminorum in ſummam extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto in maximum.

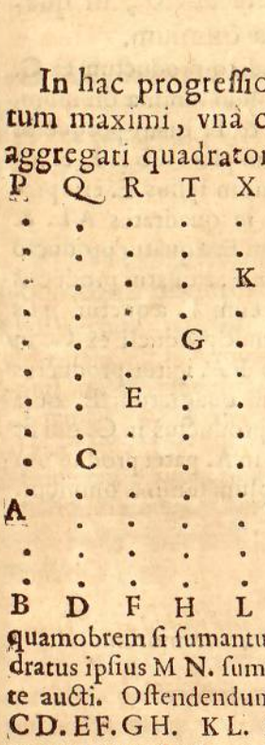
K 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
2. huius. G 5. H 6.

Sint numeri qui prius, & ſit numerus terminorum G. cui addendo vnitatem, fiat H. & ſit ſumma extremorum K. dico ex K. in G. eundem produci numerum qui ex E. in H. etenim [2] E. continet A. ſecundum vnitates numeri G. quare cùm addito A. ad E. fiat K. ac proinde K. contineat A. ſemel amplius quàm E. patet K. continere A. ſecundum numerum H. qui vnitate ſuperat G. quamobrem cùm ex eodem A. in H. & in G. fiant K. & E. [3] erit K. ad E. ſicut H. ad G. ac proinde [4] ex K. in G. producetur numerus æqualis producto ex E. in H. quod erat demonſtrandum.

17. 7.
19. 7.

PROPOSITIO SEPTIMA.

In hac progreſſione, productus ex numero terminorum vnitate aucto in quadratum maximi, vnà cum producto ex minimo in ſummam omnium, æquatur triplo aggregati quadratorum à ſingulis.

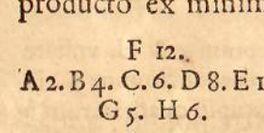


Hæc eſt decima propoſitio Archimedis de lineis ſpiralibus, quæ ſic oſtenditur. Sint in hac progreſſione AB. CD. EF. GH. KL. MN. dico quadratum ex MN. ſumptum ſecundum vnitates numeri terminorum vnitate aucti, vna cum producto ex AB. in ſummam omnium æquari triplo ſummæ quadratorum à ſingulis. Etenim adiiciatur ipſi KL. numerus XK. æqualis ipſi AB. ipſi quoque GH. addatur TG. æqualis ipſi CD. & ipſi EF. addatur RE. eidem EF. æqualis. At ipſi CD. addatur QC. æqualis ipſi GH. & demum ipſi AB. addatur PA. æqualis ipſi KL. Tunc patet totos PB. QD. TH. XL. æquales eſſe ipſi MN. Quia enim AB. eſt æqualis differentiæ, eo addito ad KL. & ad PA. fiunt XL. PB. qui ſinguli æquantur ipſi MN. [1] ſed ob medietatem arithmeticam ſummæ duorum AB. KL. æqualis eſt ſumma duorum CD. GH. itemque duplum ipſius EF. igitur conſtat & totos QD. RF. TH. æquales eſſe ſingulos ſingulis PB. XL. ſeu ipſi MN. quamobrem ſi ſumantur quadrati ipſorum PB. QD. RF. TH. XL. MN. & adhuc ſemel quadratus ipſius MN. ſumetur vtique quadratus MN. ſecundum vnitates numeri terminorum vnitate aucti. Oſtendendum ergo hos quadratos, vna cum producto ex AB. in ſummã omnium AB. CD. EF. GH. KL. MN. efficere triplum quadratorum à ſingulis. Itaque [2] quadratus ex PB. æquatur quadratis ex PA. & AB. & plano bis ſub PA. AB. contento. Item quadratus ex QD. æquatur quadratis ex QC. CD. & plano bis ſub QC. CD. contento. Et ſimiliter quadrati reliquorum æquantur quadratis partium, & plano bis ſub partibus contento. at quadrati ex AB. CD. EF. GH. KL. æquales ſunt quadratis ex XK. TG. RE. QC. PA. quare ſi his addas duplum quadrati MN. patet iam haberi duplum quadratorum à ſingulis. Reſtat ergo probandum dupla planorum ſub partibus contentorum, vna cum producto ex AB. in AB. CD. EF. GH. KL. MN. æquari adhuc ſummæ quadratorum à ſingulis. Quoniam itaque quod fit bis ex XK. in KL. æquatur ei quod fit bis ex AB. in KL. at quod fit bis ex TG. in GH. æquatur ei quod fit quater ex AB. in GH. [3] quia TG. duplus eſt ipſius AB. ſimiliter quod fit bis ex RE. in EF. æquatur ei quod fit ſexies ex AB. in EF. quia RE. triplus eſt ipſius AB. & eadem de cauſa quæ bis ſub alijs partibus continentur, æquantur producto ex AB. in alios numeros, ſecundum numeros pares continenter aſcendendo multiplicatos, omnia vtique plana illa ſimul ſumpta cum producto ex AB. in omnes AB. CD. EF. GH. KL. MN. æquabuntur productis ex AB. in MN. ſemel, in KL. ter, in GH. quinquies, in EF. ſepties, & ſic per numeros impares aſcendendo. His autem productis æquantur quadrati à ſingulis per quintam huius, ergo conſtat propoſitum.

[1] 6. primi poriſ.
[2] 4. ſecundi.
[3] coroll. 1. huius.

PROPOSITIO OCTAVA.

In hac progreſſione productus ex maximo in ſummam extremorum, æquatur producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.



Sint in hac progreſſione A B C D E. & ſit ſumma extremorum F. Dico productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim cùm F. componatur ex duobus A. & E. productus ex E. in F. æquatur quadrato ipſius E. & producto ex A. in E. at [4] quadratus ex E. æquatur producto ex A in E. ſemel, & in antecedentes bis, igitur addito producto ex A. in E. patet productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, quod demonſtrandum, erat.

[4] huius.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur euidenter productum ex minimo in ſummam omnium æquari producto ex maximo in ſemiſſem ſummæ extremorum, vel producto ex ſumma extremorum in ſemiſſem maximi.

PROPOSITIO NONA.

In hac progreſſione productus ex numero terminorum in quadratum ſummæ extre-

morum, æquatur producto ex eodem numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi, vna cum producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.

Sint numeri qui ſupra,& ſit G. numerus terminorum,& vnitate maior ſit H.dico productum ex G. in quadratum ipſius F. æquari productis ex H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim [1] quadratus F. æquatur quadratis partium A E. & duplo plani ſub A. & E. quare productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in quadratos A E. & in duplum plani ſub A E. & loco producti ex G. in planum ſub A E. ſemel, ſumendo [2] illi æqualem quadratum ipſius E. erit productus ex G. in quadratum F. æqualis productis ex G. in planum ſub A E. & in quadratos A E. & ipſi quadrato E. quia vero H. ſuperat G. vnitate, productus ex H. in quadratum E. æquatur producto ex G. in quadratum E. & ipſi quadrato E. Igitur productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in planum ſub A E. & in quadratum A. & ex H. in quadratum E. atqui cum F. æquetur ipſis A E. [3] planus ſub A E. cum quadrato A æquatur producto ex F. in A. ac proinde producti ex G. in planum ſub A E. & in quadratum A. æquantur producto ex G. in planum ſub F A. igitur productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in planum ſub F A. & ex H. in quadratum E. quia vero ſumptis tribus numeris F. A. G. [4] fit idem numerus ſi F. ducatur in A. & productus in G. qui fit ſi G. ducatur in F. & productus, [5] nempe duplum ſummæ omnium, ducatur in A. patet productum ex G. in quadratum F. æquari productis ex H. in quadratum F. & ex A. in duplum ſummæ omnium. Quod erat demonſtrandum.

quarta 2.
3. huius.
tertia 2.
tertia 1. poriſ.
4. Diophanti.

COROLLARIVM.

Ex hac & ex præcedente collige tres numeros æquales eſſe, nimirum.
Productum ex numero terminorum, in planum ſub minimo, & ſub ſumma extremorum.
Productum ex minimo in duplum ſummæ omnium.
Productum ex maximo in ſummam extremorum.

PROPOSITIO DECIMA.

In hac progreſſione productus ex minimo in duplum ſummæ omnium, æquatur quadrato maximi, & plano ſub extremis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.

Sint numeri qui ſupra, dico quadratum maximi E. cum plano ſub A E. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim quadratus E. [6] æquatur producto ex A. in ipſos A B C D. bis & in E. ſemel, quare ſi eidem quadraro addatur rurſus productus ex A. in E. ſemel, erit vtique quadratus E. cum plano ſub A E. æqualis producto ex A. in omnes A B C D E. bis. quod erat oſtendendum.

3. huius.

COROLLARIVM.

Hinc rurſus collige quadratum maximi cum plano ſub extremis, æquari cuillibet trium illorum productorum, de quibus in corollario præcedentis.

PROPOSITIO VNDECIMA.

In hac progreſſione productus ex duplo numeri terminorum ternario aucto in quadratum maximi, vna cum plano ſub extremis, æquatur ſextuplo aggregati quadratorum à ſingulis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
K 13. H 6. G 5.

Sint numeri qui prius, & ſit G. numerus terminorum, & H. vnitate maior, & K. duplum ipſius G. ternario auctum, dico productum ex K. in quadratum ipſius E. cum plano ſub A E. æquari ſextuplo quadratorum à ſingulis: etenim quia H. ſuperat G. vnitate, duplum ipſius H. ſuperat binario duplum ipſius G ac proinde cum K. ſuperet ternario duplum ipſius G. idem K. ſuperat vnitate duplum ipſius H. Itaque quia triplum quadratorum à ſingulis, [7] æquatur productis ex H. in quadratum E. & ex A. in ſummam omnium, vtique ſextuplum quadratorum à ſingulis æquatur productis ex duplo H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium; at productus ex A. in duplum ſummæ omnium, [8] æquatur quadrato E. & plano ſub A E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex duplo H. in quadratum E. ipſi quadrato E. & plano ſub A E. quia vero K. ſuperat vnitate duplum H. vt oſtenſum eſt, patet productum ex K. in quadratum E. æquari producto ex duplo H. in quadratum E. & ipſi quadrato E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex K. in quadratum E. & plano ſub A E. quod erat demonſtrandum.

7. huius.
10. huius.

COROLLARIVM

COROLLARIVM.

Quia E. multiplex eſt ad A. ſecundum ipſum G. per primam huius, patet ducto A. in E. produci partem quadrati ipſius E. denominatam à G. quare ſi ipſi K. addatur pars vnitatis ab ipſo G. denominata, & ſumma ducatur in quadratum E. fiet ſextuplum aggregati quadratorum à ſingulis, vt euidens eſt.

PROPOSITIO DVODECIMA.

In hac progreſſione productus ex numero terminorum in planum ſub maximo, & ſub ſumma extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 6. G 5.

Sint numeri qui ſupra, & ſumma extremorum eſto F. dico productum ex G. in planum ſub F E. æquari producto ex H. in quadratum ipſius E. etenim quia F. ex ipſis A E. componitur planus ſub F E [1] æquatur quadrato ipſius E. & plano ſub A E. Quare productus ex G. in planum ſub F E. æquatur productis ex G. in quadratum E. & in planum ſub A E. ſed productus ex G. in planum ſub A E. [2] æquatur quadrato ipſius E. Igitur productus ex G. in planum ſub F E. æquatur producto ex G. in quadratum E. & ipſi quadrato E. hoc eſt producto ex H. in quadratum E. quod erat demonſtrandum. [1] tertia 2. [2] 3. huius.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In hac progreſſione producti ex numero terminorum in quadratum ſummæ extremorum, & in planum ſub ſumma extremorum, & ſub maximo comprehenſum, æquatur ſextuplo quadratorum à ſingulis.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 6. G 5.

Sint numeri qui prius. Dico productos ex G. in quadratum F. & in planum ſub F E. contentum, æquari ſextuplo quadratorum à ſingulis. Nam productus ex G. in quadratum F. [3] æquatur productis ex H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium. At productus ex G. in planum ſub F E. [4] æquatur producto ex H. in quadratum E. Igitur producti ex G. in quadratum F. & in planum ſub F E. æquantur productis ex H. in quadratum E. bis, & ex A. in ſummam omnium bis. Verum producti ex H. in quadratum E. & ex A. in ſummam omnium, [5] æquantur triplo quadratorum à ſingulis. Igitur iidem producti bis, ſeu illis æquales producti ex G. in quadratum F. & in planum ſub F E. æquantur ſextuplo quadratorum à ſingulis. Quod demonſtrandum fuit. [3] 9. huius. [4] 12. huius. [5] 9. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In hac progreſſione, eſt vt minimus ad maximum, ita quadratus ſummæ extremorum, cum plano ſub eadem ſumma & ſub maximo comprehenſo, ad ſextuplum aggregati quadratorum à ſingulis.

Sint numeri qui ſupra, dico eſſe A. ad E. ſicut quadratum F. cum plano ſub F E. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis. Nam [6] cùm ex A. in G. fiat E. eſt A. ad E. vt vnitas ad G. ſed etiam [7] quia ex G. in quadratum F. & in planum ſub F E. fit ſextuplum quadratorum à ſingulis, eſt vnitas ad G. ſicut quadratus F. cum plano ſub F E. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis. Ergo eſt A. ad E. ſicut quadratus F. cum plano ſub F E. ad ſextuplum quadratorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat. [6] 1. huius. [7] 13. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

In hac progreſſione, productus ex maximo in dimidium numeri terminorum vnitate aucti, vel ex numero terminorum vnitate aucto in dimidium maximi, æquatur ſummæ omnium.

Sint numeri qui prius. Dico productum ex E. in ſemiſſem ipſius H. vel ex H. in dimidium E. æquari ſummæ omnium. Etenim productus ex G. in F. æquatur duplo ſummæ omnium. per 4. Diophanti at producto ex G. in F. [8] æquatur productus ex H. in E. Igitur cùm ex H. in E. fiat duplum ſummæ omnium, ſane ex E. in dimidium H. vel ex H. in dimidium E. fiet ipſa ſumma omnium Quod erat oſtendendum. [8] 6. huius.

SCHOLIVM.

Semper autem continget vel E. vel H. parem eſſe, & alterutrius dimidium poſſe ſumi ſine fractione;
1. huius. *nam vel G. par eſt, vel impar; ſi G. ſit par* [1] *cum eo ducto in A. fiat E. erit & E, par; ſi autem G. ſit impar, ſane qui eum ſuperat vnitate, puta H. par erit.*

Cæterum ex multis harum propoſitionum eliciuntur regulæ ad inueniendam ſummam quadratorum à quotlibet numeris in hac progreſſione diſpoſitis.

PRIMA.

Ducito numerum terminorum vnitate auctum in quadratum maximi, & producto adde quod fit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorũ.

Conſtat per ſeptimam huius, ſic ducendo 6. in 100. fit 600. cui addendo productum ex 2. in 30. nempe 60. fit 660. cuius triens 220. eſt ſumma quadratorum.

SECVNDA.

Ducito numerum terminorum in planum ſub maximo, & ſub ſumma extremorum, & producto adde quod fit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorum.

Conſtat per duodecimam adiuuante ſeptima, ſic ducendo 5. in 120. (qui fit ex 10. in 12.) fit 600. cui reddendo 60. vt prius, fit 660. cuius triens eſt 220. vt ſupra.

TERTIA.

Ducito numerum terminorum in quadratum ſummæ extremorum, à producto aufer quod fit ex minimo in ſummam omnium, reſidui triens erit ſumma quadratorũ.

Conſtat per nonam adiuuante ſeptima, ſic ducto 5. in 144. quadratum ipſius 12. fit 720. vnde ſi auferas 60. reſtat 660. cuius triens eſt 220. vt prius.

Porro ſicut tribus modis, huius regulæ prima pars variata eſt in tribus hiſce præceptis, ita & totidem modis variari poteſt ſecunda. Nam loco producti ex minimo in ſummam omnium ſumi poteſt productus ex minimo in planum ſub maximo, & ſub dimidio numeri terminorum vnitate aucti per decimam quintam, vel productus ex maximo in dimidium ſummæ extremorum per corollarium octauæ.

QVARTA.

Ducito duplum numeri terminorum ternario auctum in quadratum maximi, producto adde planum ſub extremis, compoſiti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per vndecimam: ſic ducendo 13. in 100. fit 1300. cui addendo 20. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

QVINTA.

Ducito quadratum maximi in duplum numeri terminorum auctum ternario, & parte vnitatis à numero terminorum denominata, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per corollarium vndecimæ ſic ducendo 100. in $13\frac{1}{3}$ fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt ſupra.

SEXTA.

Ducito numerum terminorum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex plano ſub maximo & ſub ſumma extremorum contento, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimam tertiam, ſic ducendo 5. in aggregatum ex 144. & ex 120. nempe in 264. fit 2640. quo diuiſo per 2. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

SEPTIMA.

Ducito maximum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex plano

ſub maximo & ſub ſumma extremorum, productum diuide per minimum, quotientis ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimamquartam indagando quartum proportionalem, tribus cognitis. Sic ducendo 10. in 264. fit 2640. quo diuiſo per 2. ſit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt ante.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

In hac progreſſione. Octuplum plani ſub minimo, & ſub ſumma omnium adſcito minimi quadrato æquatur quadrato compoſiti ex minimo, & duplo maximi.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 30.

Sint numeri qui prius, & ſit ſumma omnium F. Dico octuplum plani ex A. in F. adſumpto quadrato ipſius A. æquari quadrato compoſiti ex A. & duplo ipſius E. Etenim [1] productus bis ex A. in F. æquatur quadrato E. cùm plano ſub A E. Quare octuplum producti ex A. in F. æquatur quadruplo quadrati E. & quadruplo plani ſub A E. Proinde ſi addatur vtrimque quadratus A. vtique octuplum plani ſub A F. cum quadrato A. æquabitur quadrato E. quater, plano ſub A E. quater, & quadrato A. ſemel. Atqui quadruplum quadrati E. æquatur quadrato dupli ipſius E. & quadruplum plani ſub A E. æquatur duplo plani ſub A. & ſub duplo ipſius E. Rurſus autem [2] quadrati ex A. & ex duplo ipſius E. cum duplo plani ſub A. & ſub duplo ipſius E. æquantur quadrato compoſiti ex A. & ex duplo E. Igitur hic quadratus æquatur octuplo plani ſub A F. Quod erat demonſtrandum.

[1] 10. huius.

[2] 4. ſecundi.

SCHOLIVM.

Hinc rurſus demonſtratur quod ait Diophantus quæſt. 44. lib. 4. Itemque Plutarchus quæſtione Platonica quarta nimirum Πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς ὀκτάκις γενόμενος καὶ μονάδα προσλαβὼν γίνεται τετράγωνος. *vt euidens eſt ſi A. ponatur vnitas, & differentia progreſſionis vnitas. Tunc enim F. erit triangulus ex definitione. Etenim cum vnitas non mutet numerum quem multiplicat, & quadratus vnitatis ſit ipſa vnitas patet octuplum producti ex A. in F. fore octuplum ipſius F. cui addendo quadratum ipſius A. puta vnitatem fiet quadratus, cuius latus æquabitur duplo ipſius E. & vnitati. Itaque hanc eandem propoſitionem iam tripliciter demonſtrauimus. Primo ad quadrageſimam quartam 4. peculiari demonſtratione. Secundò hìc vniuerſalius, prout hæc proprietas conuenit omni progreſſioni arithmeticæ, cuius minimus terminus æqualis eſt differentiæ. Tertio vniuerſaliſſimè, ad octauam Diophanti de numeris multangulis, proprietatem hanc omni in vniuerſum progreſſioni arithmeticæ applicantes vi theorematis 5. eorum quæ ad ſextam demonſtrauimus.*

A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 15.

Hæc ergo dixiſſe ſufficiat de progreſſione quadratorum, quorum latera in hac progreſſione ſunt ordinata. Agamus iam de omnium polygonorum in vniuerſum progreſſione.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si numerus ſecetur in duas partes, tum in tres, tum in quatuor, tum in quinque; & ſic deinceps, & quælibet pars vnius ſectionis comparetur, cuilibet ex aliis partibus eiuſdem ſectionis, continget hanc comparationem in prima ſectione fieri ſemel, in ſecunda ter, in tertia ſexies, in quarta decies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

A.....C.....B
D....E....F....G
H... K... L... M... N

Secetur A B. in duas partes A C. C B. & ſecetur D G. in tres D E. E F. F G. & ſecetur H N. in quatuor H K. K L. L M. M N. & ſic deinceps, & comparetur quælibet pars vnius ſectionis cuilibet ex alijs eiuſdem ſectionis, dico in ſectione numeri A B. hanc comparationem fieri ſemel, in ſectione D G. fieri ter, in ſectione H N. fieri ſexies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

Primo enim in ſectione A B. patet A C. tantum comparari poſſe ipſi C B. vnde conſtat propoſitum.

Secundo in ſectione D G. quia D E. comparari poteſt ſingulis E F. F G. & ipſæ E F. F G. rurſus inter ſe ſemel comparantur, patet tres hìc fieri comparationes. Quod erat intentum.

Tertio in ſectione H N. quia H K. comparari poteſt ſigillatim, tribus reliquis, vnde tres oriuntur comparationes, & rurſus tres reliquæ per proxime demonſtrata, ter inter ſe comparantur. Patet hìc in vniuerſum ſex fieri comparationes, quod erat propoſitum.

Denique ſi numerus ſecetur in quinque partes, cùm prima pars comparari poſſit quatuor reliquis, & quatuor reliquæ per iam demonſtrata, ſexies inter ſe comparentur, fient omnino decem compa-

tionum æquabitur triangulo præcedentium comparationum adſciſcenti ſuum latus vnitate auctum, vnde fiet triangulus proximè maior ex definitione triangulorum. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

In hac progreſſione ſi polygonus quilibet minimi ducatur in triangulum numeri terminorum, & producto addatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub numero angulorum, binario multato, & ſub ſumma totidem triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi numeri vno minus, fiet ſumma ſimilium polygonorum a ſingulis.

L 2.
G 2. M 2.
E 2. H 2. N 2.
F 2. K 2. O 2.
A 2. B 4. C 6. D 8.
coroll. 1. huius. P 7. Q 10. R 4. T 5. V 10.
X 70. Y 200.

Sint in hac progreſſione A B C D. & ſit P. quilibet polygonus minimi, puta heptagonus, ſitque Q. triangulus numeri terminorum, quo ducto in P. fiat X. ſitque R. quadratus ipſius A. & T. numerus angulorum binario multatus, & V. ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi B C D. & ſolidus ſub ipſis R T V. eſto Y. dico aggregatum duorum X Y. æquari ſummæ ſimilium polygonorum, puta heptagonorum à ſingulis A B C D. Quia enim A. continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, reſoluantur B C D. in numeros æquales ipſi A. puta B. in E F. At C in G H K. ac demum D. in L M N O. Itaque per ſcholium 10. primi polygonus B. æquatur polygonis ipſorum E F. & producto ex E, in F, ſeu quadrato R. ducto in T. ſimiliter polygonus C. æquatur polygonis G H K. & productis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, ſeu totidem quadratis R. ductis in T. denique polygonus D. æquatur polygonis ipſorum L M N O. & productis ex quolibet in quemlibet ex alijs, ſeu totidem R. ductis in T. quamobrem ſi his omnibus polygonis & productis addatur polygonus ipſius A. patet polygonos à ſingulis A B C D. continere polygonum ipſius A. ſeu ipſum P. ſemel, bis, ter, quater, & ſic deinceps, id eſt ſecundum vnitates trianguli Q. & præterea ipſum R. ductum in T. ſemel, ter, ſexies & ſic deinceps ſecundum triangulos ab vnitate, id eſt ſecundum vnitates ipſius V. per præcedentem. Quamobrem polygoni à ſingulis A B C D. æquantur producto ex Q. in P. ſeu ipſi X. adſciſcenti ſolidum ſub R. T. V. nempe ipſum Y. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMANONA.

In hac progreſſione aggregatum productorum ex minimo in maximum ſemel, in ſecundum ab illo bis, in tertium ter, in quartum quater, & ſic deinceps, æquatur producto ex quadrato minimi in ſummam totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi numeri.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.
N. 4. M. 3. L. 2. K. 1.
E. 1. F. 2. G. 3. H. 4.
O. 4. P. 6. Q. 6. R. 4.

Sint in hac progreſſione A B C D. Dico ſi A. ducatur in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, & ſic deinceps, aggregatum productorum, æquari producto ex A. in ſummam totidem triangulorum ab vnitate. Etenim ſumantur totidem numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti E. F. G. H. quibus ſuperponantur totidem illis æquales ordine inuerſo, puta K L M N. & ex K. in H. fiat R. ex L. in G. fiat Q. ex M. in F. fiat P. ex N. in E fiat O.

Coroll. 1. huius. [2] Patet A. contineri in A. ſecundum E. in B. ſecundum F. in C. ſecundum Q. in D. ſecundum H. Quare cùm K. ſit vnitas, ſi A. ducatur ſemel in D. productus continebit quadratum ipſius A. toties, quoties productus ex K. in H. puta R. continet vnitatem. Similiter quia L. eſt binarius, ſi A. ducatur bis in C. productus continebit quadratum A. toties quoties productus ex L. in G. puta Q. continet vnitatem. Eodem argumento probabitur productum ex A. in B. ter toties continere quadratum A. quoties P. continet vnitatem, & rurſus productum ex A. in A. quater toties continere quadratum A. quoties O. continet vnitatem. Quamobrem producti omnes ex A. in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, toties continent quadratum A. quot ſunt

14. 1. appen. vnitates in ſumma ipſorum O P Q R. ſed ſumma ipſorum O P Q R. [3] æquatur ſummæ triangulorum ab ipſis E. F. G. H. Igitur producti omnes ex A. in D. ſemel in C. bis, in B. ter, in A. quater toties continent quadratum A. quot ſunt vnitates in ſumma totidem triangulorum ab vnitate. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMA.

In hac progreſſione, ſi numerus terminorum vnitate auctus, ducatur in polygonum maximi, & à producto auferatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub

numero angulorum binario multato, & ſub ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi numeri vno minus, reſiduum æquatur duplo polygonorum à ſingulis.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 3.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & numerus angulorum binario multatus eſto L. Dico ſi numerus terminorum vnitate auctus ducatur in polygonum ipſius E. & à producto auferatur ſolidus contentus ſub quadrato A. numero L. & ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi A B C D. reſiduum æquari duplo polygonorum à ſingulis A B C D E. Etenim ſuperponantur ipſis totidem illis æquales ordine inuerſo F G H K. Tunc ex demonſtratione ſeptimæ huius patet binos A K. B H. C G. D F. æquari ſigillatim ipſi E. quare ſi ſumantur polygoni harum ſummarum, & præterea polygonus ipſius E. bis, horum aggregatum æquabitur producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum ipſius E. Atqui polygoni ſummæ binorum A K. B H. C G. D F. [1] æquantur polygonis omnium A K. B H. C G. D F. ſeu duplo polygonorum à ſingulis A B C D. & præterea productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à ſingulis A B C D E. & productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. ſed hi producti ([2] quandoquidem A. continetur in F. ſemel, in G bis, in H ter, in K quater) æquantur productis ex A. in D. ſemel, in C. bis, in B. ter in A. quater, ac proinde per præcedentem iidem producti æquantur producto ex quadrato A, in ſummam tot triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi A B C D. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à ſingulis, & producto ex quadrato A, in ſummam tot triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi A B C D. ducto in L. quare ſi ſolidus ſub quadrato A, numero L, & ſumma tot triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi A B C D. auferatur à producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E, reſiduum erit duplum polygonorum à ſingulis A B C D E. quod demonſtrare oportuit.

10. 1. app.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10.
L. 3.

coroll. 1. huius.

PROPOSITIO VIGESIMAPRIMA.

In hac progreſſione, qui fit ex polygono minimi in triangulum numeri terminorum, adſcito producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, æquatur triplo polygonorum à ſingulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 50. F 460.
K 120.

Sint in hac progreſſione A B C D. & qui fit ex polygono minimi A, in triangulum numeri terminorum eſto E. qui fit autem ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi eſto F. dico aggregatum duorum E F. æquari triplo polygonorum à ſingulis, etenim ſumatur K, ſolidus ſub quadrato A, ſub numero angulorum binario multato, & ſub ſumma tot triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi A B C. igitur per 18. ambo E K. ſimul æquantur ſummæ polygonorum à ſingulis A B C D. ſed per præcedentem, detracto K, ex F. manet duplum polygonorum à ſingulis. Igitur ſi ad F. multatum numero K. concipiamus addi ipſos E K. nempe ſummam polygonorum à ſingulis; fiet vtique ſumma ipſorum E F. æqualis triplo polygonorum à ſingulis, quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMASECVNDA.

In hac progreſſione ſi productus ex polygono minimi in numerum terminorum; adſciſcat duplum polygoni maximi, & aggregatum ducatur in numerum terminorum vnitate auctum, fiet ſextuplum polygonorum à ſingulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 3. F 4. G 5. H 12.
K 60. L 36. M 72.
N 360. O 420. P 84.

Sint in hac progreſſione A B C D. & polygonus minimi eſto E, numerus vero terminorum F, & illo vnitate maior eſto G. ductoque E in F. fiat H. Maximi vero polygonus eſto L. cuius duplum M. quo addito ad H. fiat P. ductoque P. in G. fiat O. dico O. eſſe ſextuplum polygonorum à ſingulis, etenim ducto G in ipſos H. M. fiant K N. cùm ergo ex eodem G in P, ſummam eorundem H M. factus ſit O. erit O. æqualis ambobus K N. Quia vero ex E in F, fit H. & ex H in G. fit K, eſt K. ſolidus ſub tribus E F G. proinde [3] idem K, fiet ducto F in G. & producto in E, ſed ex F. in G. fit duplum trianguli ipſius F. per octauam Diophanti. Ergo K, fit ducto E, in duplum trianguli F, ſimiliter N. factus eſt ex G, in M, duplum polygoni L. ergo ſumma duorum K N. ſeu O. componitur ex ductu E. in duplum trianguli ex F, & ex ductu G in duplum polygoni ex D. ſed horum ſemiſſis, nempe productus ex E, in triangulum ex F. vna cum producto ex G. in polygonum ex D. æquatur triplo polygonorum à ſingulis per præcedentem. Igitur O, æquatur ſextuplo eorundem polygonorum. Quod oſtendendum ſuſceperam.

3. 1. poriſ.

SCHOLIVM.

Ex his duabus propoſitionibus duo elici poſſunt Canones ad inueniendum ſummam quotlibet ſimilium polygonorum, quorum latera in hac progreſsione diſponantur, ſed quia ipſi Canones ab ipſis propoſitionibus non differunt, illos adſcribere ſuperuacaneum duxi. Itaque hactenus de polygonorum progreſſione dictum eſto: Reſtat vt agamus de cuborum progreſſione, ſed prius tres inſignes illorum proprietates demonſtrabimus, quæ ad illorum progreſſionem aliquatenus ſpectant.

PROPOSITIO VIGESIMATERTIA.

Si diſponantur omnes numeri impares ab vnitate, ex illorum ordinata & continua additione, quadrati omnes procreabuntur.

Putabit forte quiſpiam nos huic propoſitioni ſuperſedere debuiſſe, quandoquidem ex polygonorum definitione quadratis applicata, hoc ipſum manifeſtum fit. Verum quoniam antiqua definitio quadratorum ab Euclide priſciſque omnibus, & ab ipſo Diophanto libro primo arithmeticorum tradita, diuerſa eſt, quatenus definiuntur quadrati, numeri qui fiunt ex alio quopiam in ſeipſum multiplicato, operæpretium viſum eſt, oſtendere vtramque definitionem iiſdem numeris conuenire, ne vlla ſuperſit hac de re dubitatio. Etenim poſſet aliquis iure ambigere, an quadratus cui conuenit polygoni definitio, & qui fit ex imparium aggregatione, idem ſit qui producitur latere in ſeipſum ducto, quandoquidem neque triangulus neque pentagonus, nec hexagonus, neque alius quiſpiam polygonus præter ſolum quadratum, reſpondet figuræ Geometricæ angulorum & laterum æqualium, eiuſdemque nominis.

A 1. B 3. C 5. D 7.
L 2. M 4. N 6.
F 1. G 2. H 3.

Sint ab vnitate impares A B C D. dico ex eorum ordinata aggregatione fieri omnes quadratos, etenim cùm vnitas A. ſit primus quadratus, dico ſummam duorum A B. eſſe ſecundum quadratum ſeu quadratum binarij, & ſummam trium A B C. eſſe quadratum ternarij, & ſummam quatuor numerorum A B C D. eſſe quadratum quaternarij, & ſic in infinitum, ſumantur numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem, F G H. & ſint eorum dupli L M N. patet igitur ipſos L M N. eſſe numeros pares ordinate diſpoſitos, ac proinde ſi ſingulis addatur vnitas, fieri omnes impares, hoc eſt L. cum vnitate æquatur ipſi B. at M. cum vnitate æquatur ipſi C. ac demum N. cum vnitate æquatur ipſi D. & ſic deinceps. Itaque [1] quoniam ſi quadrato vnitatis F. hoc eſt ipſi vnitati A, addatur duplum lateris illius & præterea vnitas, fit quadratus proxime maior, hoc eſt quadratus binarij, cum L, ſit duplus ipſius F, & B, excedat L, vnitate, patet addito B. ad vnitatem A, fieri quadratum binarij. Rurſus quia quadrato binarij G. addendo duplum ipſius G. & vnitatem, hoc eſt numerum C. fit quadratus ternarij, cum A G. ſimul faciant quadratum binarij vt oſtenſum eſt, facient tres A B C. ſimul quadratum ternarij. Et eodem argumento oſtendetur quatuor A B C D. æquari quadrato quaternarij, & ſic in infinitum. Igitur conſtat propoſitum.

[1] 18. 1. poriſ.

COROLLARIVM.

Patet ergo quemlibet quadratum tot imparibus conſtare, quot vnitates continet latus quadrati.

PROPOSITIO VIGESIMAQVARTA.

In progreſſione arithmetica ab vnitate incipiente, & per vnitatem creſcente, cubus maximi æquatur quadrato maximi, & producto ex maximo in duplum antecedentium.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 12.

Sit vnitas A. & quotlibet numeri deinceps B C D. per vnitatis augmentum creſcentes, ſitque E duplum ipſorum A B C. Dico cubum maximi D. æquari quadrato ipſius D. & producto ex D. in E etenim productus ex D. in E. cum quadrato ipſius D. [2] æquatur producto ex D E. ſimul in D. at E D. ſimul æquantur quadrato ipſius D. per corollarium 4. huius. Igitur productus ex E. in D. cum quadrato ex D. æquatur producto ex quadrato ipſius D, in D. hoc eſt cubo ipſius D. Quod erat oſtendendum.

[2] tertia 2.

PROPOSITIO VIGESIMAQVINTA.

Quotlibet cuborum ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum ſumma quadratus eſt, cuius latus componitur ex cuborum ipſorum lateribus ſimul additis.

Sint quotlibet numeri ab vnitate A B C D. ſecundum ſeriem numerorum, quorum cubi ſint E F G H. Dico ſummam duorum E F. Itemque trium E F G. itemque quatuor E F G H. eſſe quadratum, cuius latus eſt ſumma duorum A B. vel trium A B C. vel quatuor A B C D.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 1. F 8. G 27. H 64.

Primò enim quadratus ſummæ duorum A B. æquatur quadratis ipſorum A & B & duplo producti ex A in B. At quadratus vnitatis A æquatur cubo ipſius vnitatis E. quadratus autem ex B. cum duplo producti ex B in A æquatur cubo F per præcedentem. Igitur quadratus ſummæ duorum A B. æquatur cubis E F. ſimul, quod erat propoſitum. Deinde quadratus ſummæ trium A B C. æquatur quadrato ſummæ duorum A B. & quadrato ipſius C. & duplo producti ex A B. ſimul in C. ſed quadrato ſummæ duorum A B. æquantur cubi E F. per demonſtrata: quadrato autem ipſius C, cum duplo producti ex A B. ſimul in C. æquatur cubus G, per præcedentem. Igitur quadratus ſummæ trium A B C. æquatur cubis E F G. ſimul. Denique eodem argumento quadratus ſummæ omnium A B C D. æquatur quadrato ſummæ trium A B C. hoc eſt cubis E F G. & quadrato ipſius D. cum duplo producti ex D. in ſummam trium A B C. hoc eſt cubo H. per præced. Igitur quadratus ſummæ ipſorum A B C D. æquatur cubis E F G H ſimul. Quod erat demonſtrandum, eademque eſt demonſtrationis ratio in pluribus, vt patet, quamobrem abundè conſtat propoſitum. quartâ 2.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur ſummam quotlibet cuborum ab vnitate, facere quadratum cuius latus, eſt numerus triangulus, quia enim A B C D. eſt progreſſio naturalis numerorum ab vnitate, patet ex definitione triangulorum, tam A B. ſimul, quàm A B C, vel A B C D. conficere triangulum, eſt autem trianguli latus, ipſe cuborum numerus, vt etiam perſpicuum eſt.

PROPOSITIO VIGESIMASEXTA.

Quadratus quilibet adſumpto ſuo latere, duplum facit collateralis trianguli.

A 16.
B.... C. D

Eſto quilibet quadratus A cuius latus B C. dico ſi B C. addatur ad A fieri duplum trianguli à latere B C. etenim ipſi B C. addatur vnitas C D. igitur ex B C. in B D. fiet duplum trianguli ex B C. per 8. Diophanti, ſed productus ex B C in B D. æquatur quadrato ex B C. hoc eſt ipſi A, & producto ex B C in C D. ſit hoc eſt ipſi B C. cum CD. ſit vnitas. Ergo duplum trianguli ex B C. æquatur quadrato A cum ſuo latere B C. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIGESIMASEPTIMA.

Vnitas primum cubum; duo ſequentes impares coniuncti, ſecundum cubum; tres ſequentes tertium cubum; quatuor ſuccedentes, quartum, ſemperque vno plures ſequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares conſtituunt.

A 1.
B 3 | R 8.
C 5.
D 7.
E 9. | T 27
F 11.
G 13.
H 15.
K 17. | V 64
L 19.

Diſponantur ab vnitate A. numeri impares B C D E F G H K L. dico quod B C. ſimul ſecundum ab vnitate cubum faciunt, at D E F. faciunt tertium cubum, ac demum G H K L. quartum cubum conſtituunt, & ſic deinceps, ſit enim R. ſumma duorum B C. & ſit T. ſumma trium D E F. ſitque V. ſumma ipſorum quatuor G H K L. etenim quoniam A B C D E F G K L. ſunt impares ordinate diſpoſiti ab vnitate, eorum ſumma, ſeu ſumma ipſorum A R T V. [2] eſt quadratus, cuius latus tot conſtat vnitatibus, quot ſunt numeri A B C D E F G H K L. Quoniam vero ex ipſis vnus ſumitur; tum duo, tum tres, tum quatuor, patet numerum numerorum eſſe triangulum, cuius latus tot continet vnitates, quot fiunt propoſitorum numerorum ſumptiones, hoc eſt, quot ſunt ipſi A R T V. Cùm itaque ſumma ipſorum A R T V. ſit quadratus cuius latus eſt triangulum, [3] erit eadem ſumma, aggregatum totidem cuborum ab vnitate quot ſunt vnitates in latere trianguli, hoc eſt quot ſunt ipſi A R T V, puta quatuor cuborum, ſimili prorſus argumento oſtendemus aggregatum ipſorum A R T. eſſe ſummam trium cuborum ab vnitate. Quare relinquetur V. eſſe quartum cubum, eademque ratione oſtendemus A R. ſimul eſſe ſummam duorum cuborum ab vnitate, ac proinde relinquetur T, tertius cubus, eritque R. ſecundus, cùm A ſit vnitas. Quare patet propoſitum. 25. huius. Corolla. 25. huius.

SCHOLIVM.

Eadem fere ratione demonſtratur hæc propoſitio à Franciſco Maurolyco, prop. 62. arithmeticorum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hanc propoſitionem ita conſtituo magis vniuerſalem. Vnitas primam columnam in quacumque polygonorum progreſsione conſtituit ; duo ſequentes numeri multati primo triangulo toties ſumpto quot ſunt anguli polygoni quaternario multati, ſecundam columnam ; tres ſequentes multati ſecundo triangulo toties ſumpto quot ſunt anguli polygoni quaternario multati, tertiam columnam, & ſic eodem in infinitum progreſſu.

PROPOSITIO VIGESIMAOCTAVA.

Cubus quilibet adſumpto ſextuplo trianguli collateralis vnitate aucto facit cubum proxime maiorem.

A. 27. B. 36. C. 64. D 3. E. 6. F. 4.

Sit cubus A cuius latus D. & ab eodem latere triangulus eſto E. cuius ſextuplum B. additoque B. vnitate aucto ad A. fiat C. dico C. eſſe cubum proxime maiorem. Sumatur F. ſuperans vnitate ipſum D. Igitur cubus ex F. [1] æqualis eſt cubo ipſius D. & vnitati, & triplo tum quadrati ipſius D. tum ipſius D. At quadratus ipſius D. cum ſuo latere [2] æquabitur duplo trianguli E. Quare triplum quadrati ex D. cum triplo ipſius D. æquatur ſextuplo ipſius E. hoc eſt ipſi B. Igitur ad cubum ipſius D. hoc eſt ad A. addendo B. & vnitatem, qui fit puta C. eſt cubus ipſius F. Quod demonſtrandum erat.

20. 2. por.

26. huius.

21. 2. pori. Aliter interuallum *cuborum ab ipſis* D F. [3] *æquatur cubo interualli, hoc eſt vnitati, & triplo* producti ex D. in F. At ex D. in F. fit duplum trianguli E. per octauam Diophanti, ac proinde triplum producti ex D. in F. æquatur ſextuplo ipſius E. hoc eſt ipſi B. Igitur interuallum cuborum ab ipſis D F. æquatur ipſi B. & vnitati. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO VIGESIMANONA.

In progreſſione arithmetica, in qua minimus terminus æquatur differentiæ, productus ex minimo in quadratum numeri terminorum, æquatur producto ex maximo in numerum terminorum.

A 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 5.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ſit numerus terminorum F. dico productum ex A. in quadratum ipſius F. æquari producto ex E. in F. Quia enim [4] ex A. in F. fit E. vtique productus ex F. in E. erit ſolidus contentus ſub tribus numeris A. E. F. Quare [5] idem ſolidus fiet ſi F. ducatur in E. & productus hoc eſt quadratus ipſius F. ducatur in A. Quod erat demonſtrandum.

3. huius.

8. 1. pori.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

In hac progreſſione, productus ex minimo in triangulum numeri terminorum, æquatur ſummæ omnium.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 5. G. 30.

Sint numeri qui prius, & ſit ſumma omnium G. dico G. æquari producto ex A. in triangulum ipſius F. Etenim ducto F. in ſummam extremorum, hoc eſt in ipſos A. E. fit duplum ipſius G. per quartam Diophanti. At productus ex F. in E. æquatur producto ex quadrato ipſius F. in A. per præcedentem, igitur duplum ipſius G. æquatur productis ex A. in F. & ex A in quadratum F. hoc eſt producto ex A in F. auctum ſuo quadrato. Quare [6] cùm F. cum ſuo quadrato ſit duplus trianguli ex F. erit duplum ipſius G. æquale producto ex A. in duplum trianguli ex F. ac proinde ipſe G. æquabitur producto ex A. in triangulum ipſius F. Quod erat demonſtrandum.

28. huius.

PROPOSITIO TRIGESIMAPRIMA.

In hac progreſſione, productus ex cubo minimi in quadratum trianguli numeri terminorum, æquatur aggregato cuborum à ſingulis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 8. N. 15. G. 1. H. 2. K. 3. L. 4. M. 5. P. 225.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ipſius A. cubus eſto F. ſumanturque totidem ab vnitate continue diſpoſiti numeri G H K L M. quorum ſumma N. patet ergo N. eſſe triangulum numeri terminorum. Quare ſit eius quadratus P. dico productum ex F. in P. æquari aggregato cuborum à ſingulis A B C D E. Quia enim ſicut [7] A continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, in E. quinquies, ſic etiam G. continetur in H. bis, in K. ter,

1. huius.

ter, in L. quater in M. quinquies, patet ipsos A B C D E esse in iisdem rationibus, in quibus & ipsi G H K L M. Quamobrem & cubi illorum sunt in iisdem rationibus, in quibus & cubi istorum, cùm sit ergo cubus A ad cubum G. sicut cubus B. ad cubum H. & cubus C ad cubum K. & cubus D. ad cubum L. & cubus E ad cubum M. erunt & omnes antecedentes hoc est aggregatum cuborum à singulis A B C D E. ad consequentes simul, hoc est ad aggregatum cuborum à singulis G H K L M. sicut F ad cubum ipsius G hoc est ad vnitatem, sed aggregatum cuborum à singulis G H K L M. æquatur ipsi P. per 25. huius, ergo est aggregatum cuborum a singulis A B C D E. ad P. sicut F, ad vnitatem proinde ex definitione multiplicationis, ducto F in P. fiet aggregatum cuborum à singulis A B C D E. Quod erat demonstrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hinc sequitur cubum maximi toties sumptum quot sunt numeri terminorum ad aggregatum cuborum habere minorem rationem quam quadruplam.

PROPOSITIO TRIGESIMA SECVNDA.

In hac progressione productus ex minimo in quadratum summæ omnium æquatur aggregato cuborum à singulis.

H 4. K 8. F 30. G 900.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 225. M 15.

Sint in hac progressione A B C D E. quorum summa F. cuius quadratus G. dico ex A. in G. produci aggregatum cuborum à singulis. Sit enim H. quadratus ipsius A & K cubus eiusdem, sitque M. triangulus numeri terminorum, cuius quadratus L. Itaque [2] quoniam ex A in M. producitur F est F. medius proportionalis inter quadratos ipsorum A M. hoc est inter H & L. per 7. Diophanti, quamobrem ex H in L. producitur G. quadratus ipsius F. Quamobrem [3] cum ex eodem H in A & in L. producantur K & G est A ad L. vt K ad G. [4] ac proinde ex A in G. fiet idem numerus, qui ex K in L. sed ex K. in L. fit aggregatum cuborum à singulis per præcedentem. Igitur & ex A in G. fit idem aggregatum cuborum, quod erat ostendendum. 30. huius. 17. 7. 19. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMA TERTIA.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, & quilibet extremorum ducatur in quadratum alterius extremi; quilibet autem mediorum ducatur in quadratum alterius medij, fient quatuor solidi in eadem ratione proportionales.

E 4. F 16. G 9. H 36.
A 2. B 4. C 3. D 6.
K 12.
L 24. M 48. N 36. P 72.

Sit A ad B. vt C ad D. & sint ipsorum A B C D. quadrati E F G H. ductoque D. in E. fiat L. & ex A in H. fiat P. & rursus ducto C in F fiat M. & ex B in G. fiat N. dico esse L ad M. & N. ad P. sicut A ad B vel C ad D. sumatur K. planus sub mediis B C. vel sub extremis A D. Quia ergo L fit ducto A in A. & producto E in D. [5] idem L fiet ducto A in D, & producto K in A. similiter quia M. fit ducto B in B. & producto F in C fiet idem M. ducto B in C. & producto K in B. quare cum eodem K ducto in A & in B. fiant L M. [6] erit L. ad M. vt A ad B. eodem argumento ostendemus ex eodem K. in C, & in D. produci N. & P ac proinde esse N ad P. vt C. ad D. igitur vt A ad B vel C. ad D. sic est L ad M. & N. ad P. quod erat ostendendum. 3. 1. porif. 17. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMA QVARTA.

In hac progressione, est vt minimus ad maximum, ita solidus sub maximo, & sub quadrato summæ extremorum, ad quadruplum aggregati cuborum à singulis.

F 12. L. 5.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 30. K 60.

Sint in hac progressione A B C D E. & summa extremorum F. dico esse A ad E. sicut solidus sub E & quadrato ipsius F. ad quadruplum aggregati cuborum à singulis, sumatur H summa omnium cuius duplum sit K & sit numerus terminorum L. quia ergo ducto L in F fit K per 4 Diophanti, [7] at ducto eodem L. in A. fit E [8] erit A ad E. sicut F ad K. quare per præcedentem erit A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F. ad productum ex A in quadratum ipsius K, sed productus ex A in quadratum ipsius H [9] æquatur aggregato cuborum à singulis, & quadratus ipsius K quadruplus est quadrati sui semissis H. ac proinde productus ex A in quadratum ex K quadruplus est aggregati cuborum à singulis. Igitur est A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F ad quadruplum aggregati cuborum à singulis, quod demonstrandum erat. 1. huius. 17. 7. 32. huius.

SCHOLIVM.

Ex aliquibus harum propoſitionum licebit faciles elicere regulas ad inueniendum ſummam quotlibet cuborum, quorum latera ſint in hac progreſſione diſpoſita.

PRIMA REGVLA.

Sume triangulum numeri terminorum, & eius quadratum ducito in cubum minimi, fiet aggregatum cuborum à ſingulis.

Conſtat per 31. vt ſi ſint 5. numeri, & ſit minimus 2. ſume triangulum ipſius 5. puta 15. & eius quadratum 225. ducit in 8. cubum ipſius 2. fit aggregatum cuborum à ſingulis 1800.

SECVNDA.

Ducito minimum in quadratum ſummæ omnium, fiet aggregatum cuborum à ſingulis.

Conſtat per 32. ſic in dato ſupra exemplo, ducito 2. in 900. quadratum ſummæ omnium 30. fit aggregatum cuborum à ſingulis 1800. vt prius.

TERTIA.

Ducito quadratum maximi in quadratum ſummæ extremorum, productum diuide per quadruplum minimi, orietur aggregatum cuborum à ſingulis.

Facile infertur ex 34. ſic in dato exemplo ducito 100. quadratum maximi, in 144. quadratum ſummæ extremorum, fit 14400. quem diuide per quadruplum minimi 2. puta per 8. fit 1800. aggregatum cuborum vt ante.

QVARTA.

Ducito maximum in ſemiſſem ſummæ extremorum, vel ſummam extremorum in ſemiſſem maximi, producti quadratum diuide per minimum, orietur aggregatum cuborum à ſingulis.

Rurſus infertur ex 34. vel etiam ex præcedente regula, fit ducendo 10. in 6. vel 12. in 5. fit 60. cuius quadratus 3600. quo diuiſo per minimum 2. fit aggregatum cuborum à ſingulis, vt ſupra 1800.

FINIS.

Ne vacarent paginæ ſequentes, placuit has Epiſtolas adjicere varijs refertas D. P. de FERMAT in quoſdam Græcos authores obſeruationibus, quarum nonnullæ ad Mathematicas pertinent diſciplinas.

VIRO CLARISSIMO D. DE RANCHIN. P. Fermat S. P. D.

POlyænum tibi tuum, Vir Clariſſime, mitto, ſed obſeruanda in eo quædam ſuppeditat codex manuſcriptus optimæ notæ auctorum rei militaris hactenus ineditorum quem penes me habeo; apud eum collectionem quan lam præceptorum & monitorum militarium inueni ſub nomine παρεκβολῶν, cuius auctorem licet manuſcriptus non detegat, colligo tamen ex gloſſario Græcobarbaro Meurſii, eum eſſe Heronem, non illum quidem Alexandrinum cuius ſpiritalia & alia quædam opuſcula extant, & qui antiquo, hoc eſt, optimo æuo, Græcè ſcripſit, ſed alium poſterioris æui, quod pleraque ipſius vocabula Græcobarbara ſatis innuunt; vtrumque, ætatem nempe & nomen auctoris confirmat Meurſius in voce κοντυβέρνιον vbi citantur ſequentia Heronis verba in παρεκβολαῖς, ἀπέστειλε γὰρ τῆς νυκτὸς εἰς τὰ ἄπληκτα αὐτῶν καὶ τὰ κοντυβέρνια, hæc enim verba cum in meo manuſcripto deſint, ſupplendum in eo nomen auctoris ex manuſcripto Meurſii; tempus vero quo hæc ſcribebantur & quo voces ἄπληκτον & κοντυβέρνιον in vſu erant, vltra ſeptingentos plus minùs annos non videtur excurrere; in hoc autem παρεκβολῶν tractatu, pleraque Polyæni ſtratagemata ſuppreſſo authoris nomine aliis ſæpe verbis referuntur, quandoque & iiſdem, vnde ampla emergit emendationum & notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel ſi mauis doctis omnibus tuo nomine iure repreſentationis libenter exhibeo.

Cleomenis ſtratagema narratur libro 1. Polyæni pag. 20. editionis Tornæſianæ ſequentibus verbis, Κλεομένης Λακεδαιμονίων βασιλεὺς, Αργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεστρατοπέδευσεν, ἦν τοῖς Αργείοις ἀκριβὴς φυλακὴ τῶν δρωμένων τοῖς πολεμίοις, καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βούλοιτο ὑπὸ κήρυκος ἐσήμαινε τῇ στρατιᾷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα δρᾶν ἐσπούδαζον, ὁπλιζομένων ἀνθωπλίζοντο, ἐξιόντων ἀντεπεξίεσαν, ἀναπαυομένων ἀντεναπάυοντο, Κλεομένης λάθρα παρέδωκεν ὅταν ἀρισοποιεῖσθαι κηρύξῃ ὁπλίσασθαι, ὁ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Αργεῖοι πρὸς ἄριστον ἐτράποντο, Κλεομένης ὡπλισμένους ἐπαγαγὼν ἀθύμαρῶς ἀνόπλους καὶ γυμνοὺς τοὺς Αργείους ἀπέκτεινεν, hoc loco poſt verba ἐξιόντων ἀντεπεξίεσαν, addendum ex manuſcripto ἀριστώντων ἠρίστων, quod finis ipſius ſtratagematis pleniſſimè confirmat.

Themiſtoclis ſtratagema, eodem libro pag. 44. refertur hoc modo, Θεμιστοκλῆς Ἰώνων Ξέρξῃ συμμαχόντων, ἐκέλευσε τοῖς Ελλησι καταγράφειν ἐπὶ τὸ τεῖχος, Ἄνδρες Ἴωνες ἃ δίκαια ποιεῖτε στρατεύοντες ὅπῃ τοὺς πατέρας, τούτων ἀναγινωσκομένων βασιλεὺς ὑποπτους αὐτοὺς ἐποιήσατο, corrigendum ex manuſcripto ἐλογίσατο, quam eſſe veram lectionem innuit ſenſus.

Ageſilai ſtratagema occurrit lib. 20. pag. 86. Αγησίλαος, aitille, ἐν κορωνείᾳ Αθηναίους ἐνίκησεν, ἤγειλέ τις, οἱ πολέμιοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεὼν τῆς Αθηνᾶς, ὁ δὲ προσέταξεν ἐᾶν αὐτοὺς οἷ ἠβούλοιντο ἀπιέναι. ὡς ἄρα εἴη σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπονοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Αθηναίους reponendum ex manuſcripto Θηβαίους.

Aliud Ageſilai ſtratagema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Αγησίλαος ἐν ταῖς διαφορεσβείαις ἠξίου τῶν πολεμίων τοὺς μάλιστα δυνατοὺς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν οἷς διαλέξηται περὶ τῶν κοινῇ συμφερόντων. τούτοις ἐπὶ πλεῖον συγγενόμενος, καὶ κοινωνῶν ἑστίας καὶ σπονδῶν, ταῖς πόλεσιν ἐποίει διὰ τὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας, Vulteius hoc modo interpretatur, Ageſilaus in legationibus petebat ab hoſtibus vt maxime potentes ad ſe mitterent; cum quibus de communi vtilitate ſermones conferret, cum his plurimum habens conſuetudinis, & communicans focum ac cineres, ſeditiones in vrbibus excitabat propter vulgi ſuſpiciones. Videtur interpres loco verbi σπονδῶν quod eſt in textu Græco

legiſſe σποδῶν cum vertat cineres, ſed nihil mutandum ex manuſcripto euincitur vbi leguntur hæc verba καὶ ὅρκους πρὸς αὐτοὺς ποιούμενος.

Clearchi ſtratagema narratur libro eod. pag. 110. his verbis, Κλέαρχος ἦν ἐν Θράκῃ νυκτερινοὶ φόβοι τὸ στράτευμα κατελάμβανον, ὁ δὲ παρήγγειλεν, εἰ γένοιτο νύκτωρ θόρυβος, μηδένα ὀρθὸν ἀνίστασθαι, ὁ δὲ ἀναστὰς ἀναιρείσθω, τὸ παράγγελμα τοῦτο ἐδίδαξε τοὺς στρατιώτας καταφρονεῖν τοῦ νυκτερινοῦ φόβου. verba quædam hîc ſupplenda ex manuſcripto, quæ tamen videtur in ſuo codice vidiſſe interpres latinus, licet deſint in editione græcâ Tornæſii, ſunt autem ſequentia, καὶ οὕτως ἀνεπαύσαντο ἀναπηδῶντες καὶ ταρασσόμενοι. Atque ita deſierunt exilire ac perturbari.

Perdiccæ ſtratagema ſequens legitur libro 4. pag. 314. Περδίκας Ιλλυριῶν καὶ Μακεδόνων πολεμούντων ἐπειδὴ πολλοὶ Μακεδόνες ἡλίσκοντο ζωγρεῖν, καὶ οἱ λοιποὶ Μακεδόνες λύτρων ἐλπίδι πρὸς τὰς μάχας ἦσαν ἀτολμότεροι ἐπεκηρυκεύσατο περὶ λύτρων, ἐντειλάμενος τῷ κήρυκι ἐπανελθόντι ἀγγεῖλαι ὡς ἄρα λύτρα Ιλλυριοὶ μὴ προσίοιντο. ἀλλὰ ψηφήσειαν τοὺς αἰχμαλώτους κτιννύειν. οἱ δὴ Μακεδόνες ἀπογνόντες τῆς διὰ τῶν λύτρων σωτηρίας εὐτολμότεροι πρὸς τὰς μάχας ἐγένοντο, ὡς ἐν μόνῳ τῷ νικᾷν ἔχοντες τὸ ζώζεσθαι, quod ſic interpretatur Vulteius, Perdiccas Illyriis & Macedonibus bellum gerentibus cum multi Macedones caperentur viui, reliqui etiam redemptionis ſpe ad pugnam minus alacres erant, quibus legationem inter ſe de redemptoriis muneribus mittentibus, præcepit legato vt reuerſus nunciaret ſe redemptoria munera Illyriorum non accepturum, ſed condemnatos captiuos morte affecturum, Macedones deſperatâ ſalute redemptiuâ audaciores ad pugnandum reddebantur, quippe quibus in ſolâ victoriâ ſalus poſita eſſet, in hoc ſtratagemate vocem Ιλλυριοὶ mutandam in Ιλλυριῶν indicat nota marginalis editionis Tornæſianæ; ſi vera eſſet explicatio Vulteii, non ſolum vera, ſed & neceſſaria eſſet illa emendatio, ſed frigidiſſimum eſſet ſtratagema, ſi ſequeremur ſenſum interpretis, Polyænus quippe vult Perdiccam præcepiſſe legato, vt reuerſus nuntiaret Illyrios redemptoria munera non accepturos, & hic eſt verus ſenſus ſtratagematis, quem Hero aliis verbis, ſecundum hanc quæ eſt vera & germana interpretatio, expreſſit in manuſcripto his verbis, ἐπετήδευσε τοιοῦτον, παρεσκεύασε τινὰ ὡς πρόσφυγα ἐλθόντα ἀπὸ τῶν πολεμίων εἰπεῖν ὅτι οἱ πολέμιοι ἐβουλεύσαντο καὶ ἀπεκύρωσαν ἵνα ὅσους κρατήσουσιν αἰχμαλώτους ἀποκτείνωσι.

Alexandri ſtratagema refertur etiam lib. 4. pag. 248. verbis ſequentibus, Αλέξανδρος Δαρείῳ παρατάσσεσθαι μέλλων, παράγγελμα τοῖς Μακεδόσιν ἔδωκεν. ἢν ἐγγὺς γένησθε τῶν Περσῶν εἰς γόνυ κλίναντες ταῖς χερσὶν διατρίβετε τὴν γῆν. ἢν δὲ ἡ σάλπιγξ ὑποσημήνῃ τότε δὴ ..... Μακεδόνες οὕτως ἐποίησαν, οἱ δὲ Πέρσαι σχῆμα προσκυνήσεως ἰδόντες, τὴν πρὸς τὸν πόλεμον ὁρμὴν ἐξέλυσαν καὶ ταῖς γνώμαις ἐγένοντο μαλακώτεροι. Δαρεῖος δὲ ἐκυδριοῦτο καὶ φαιδρὸς ἦν, ὡς ἀμαχὶ κρατῶν, οἱ Μακεδόνες ὑπὸ τῷ συνθήματι τῆς σάλπιγγος ἀναπηδήσαντες ῥυμηδὸν ἐμβάλλουσι τοῖς πολεμίοις καὶ τὴν φάλαγγα ῥήξαντες ἐς φυγὴν ἐτράποντο.

Hoc loco deſunt quædam verba poſt vocem τότε, quæ ſupplenda ex manuſcripto vbi narratio eſt integra & elegans; lacuna itaque ex eo ſic replenda, τότε μετὰ θυμοῦ καὶ ἀνδρείας τοῖς πολεμίοις προσβάλλετε.

Pammenis ſtratagema tale proponitur libro 5. pag. 385. Παμμένης ὀλίγην ἔχων δύναμιν ὑπὸ πλειόνων ἀποληφθεὶς ἔπεμψεν αὐτομόλον ἐς τὸ τῶν πολεμίων στρατόπεδον, ὁ δὲ σύνθημα ἐκμαθὼν ἤγγειλε τῷ Παμμένει, ὁ δὲ νυκτὸς ἐπιθέμενος τοῖς πολεμίοις, πολλοὺς αὐτῶν φθείρας διεξιππεύσατο αὐτὸς σύνθημα, τοῖς δὲ ἦν ἀπορία γνωρίζειν ἐν σκότει τοὺς οἰκείους μὴ δυναμένοις διὰ τοῦ συνθήματος.

Hîc addenda ex manuſcripto poſt verbum αὐτὸς ſequentia, αὐτὸς μὲν καὶ ὁ τούτου στρατὸς ἐγίνωσκον τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα, ἐκείνοις δὲ ἀπορία ἦν ἐν τῷ σκότει τῆς νυκτὸς γνωρίζειν τοὺς ἰδίους ἢ τοὺς πολεμίους, τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα ἀποκρινομένων.

Pompiſci ſtratagema refertur lib. 5. pag. 402. Πομπίσκος περιστρατεύων πόλιν, ἐπὶ μὲν τὴν πολλὴν τῆς χώρας ἐξίεναι τοὺς πολεμίους ἐκώλυσεν, ἐπὶ δὲ τόπον ἕνα συνεχῶς.... καὶ τοῖς ληιζομένοις ἀπέχεσθαι τοῦ τόπου τούτου προσέταξεν, οἱ δὲ ἐκ τῆς πόλεως, ἀδεῶς ἐνταῦθα

προίεσαν, ὁ δὲ παρὰ τῶν σκοπῶν, ὡς ἔμαθεν τοὺς ἥκοντας πολλοὺς ἐπιθέμενος τοὺς πλείστους αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hic vulgò legitur, corrigenda ex manuſcripto & loco illius reponendum συνεχώρει quod ex conjectura viderat Caſaubonus vt patet ex ipſius notis.

Alexandri Pherenſis ſtratagema refertur lib. 6. pag. 426. Αλέξανδρος Πάνορμον πολιορκοῦντος Λεωσθένους πρὸς ἁπάσας τὰς Αττικὰς ναῦς φανερῶς ναυμαχεῖν οὐ θαρρῶν, διέπεμψεν ἐπὶ ἀκάτιον νύκτωρ, &c. legendum eſſe ἐπὶ ἀκατίου, vt vult Caſaubonus in notis, confirmat codex manuſcriptus vbi legitur διὰ μικροῦ πλοιαρίου, quæ verba idem ſonant.

Cyri ſtratagema narrat Polyænus lib. 70. pag. 477. his verbis. Κῦρος Μήδοις παραταξάμενος τρὶς ἡττήθη; ἐπεὶ δὲ Περσῶν αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν Πασαργάδαις τὴν τετάρτην μάχην ἐνταῦθα συνῆψε, πάλιν ἔφυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἴδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ἐπ' αὐτοῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτως διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τηλικαύτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κῦρον πρὸς αὐτοὺς ἄλλης δεηθῆναι μάχης.

Hîc loco vocis παθόντες corrigendum ex manuſcripto συμπαθόντες quæ vox itidem reſtituenda in ſtratagemate Apollodori pag. 435. manuſcriptus noſter ex quo coniicimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθόντες verbis ſequentibus rem narrat & ſtratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθείᾳ τούτων νικώμενοι, &c. vox autem illa melius authoris ſenſui reſpondet quam τι παθόντες vt legendum cenſuit Caſaubonus.

Darij ſtratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκκαις τριχῇ διῃρημένοις, μιᾶς ἐκράτησε μοίρας, τῶν δὲ Σακκῶν ἱζόντων τὰς ἐσθῆτας καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα περιέθηκε τοῖς Πέρσαις, &c. hic loco vocis ἱζόντων quæ eſt corrupta in editione Tornæſii, legendum ex manuſcripto ἀναιρεθέντων.

Autophradatis ſtratagema legitur lib. 7. pag. 516. & tale eſt, Αὐτοφραδάτης ἐμβαλεῖν Πισίδαις βουλόμενος τὴν εἰσβολὴν στενοπόρον καὶ φυλαττομένην ὁρῶν, προσήγαγε μὲν τὸ στρατόπεδον, πάλιν δὲ ἀπήγαγεν ὀπίσω, μέχρι σταδίων ϛ', νὺξ ἐπῆλθεν, οἱ μὲν φυλάττοντες τῶν Πισιδῶν ἀπηλλάγησαν, ὀιόμενοι τοὺς πολεμίους ἀπεληλυθέναι. ὁ δὲ τῶν ψιλῶν καὶ ὁπλιτῶν τοὺς ἐλαφροτάτους λαβὼν, πολλῇ σπουδῇ δραμὼν διῆλθε τὰ στενὰ καὶ τὴν Πισιδῶν χώραν ἐπόρθησεν.

In hoc ſtratagemate loco verborum μέχρι σταδίων ϛ' reponendum procul dubio ἐπίσημον κόππα, quod Vulteius arithmeticarum apud Græcos notarum parum callens non intellexit, ſimilitudine inter ϛ' quod ſignificat 6. & ϛ' quod ſignificat 90. deluſus, legendum igitur μέχρι σταδίων ϛ', quam eſſe veram lectionem, ratio ipſa primum confirmat, ſi enim Autophradates ad ſex tantum ſtadia receſſiſſet, hoſtes ſuſpicione, & metu non liberaſſet, deinde in manuſcripto legitur ἐννενήκοντα abſque notis arithmeticis.

Scipionis continentiæ exemplum laude digniſſimum refertur lib. 8. pag. 568. ſequentibus verbis, Σκηπίων δορυάλωτον λαβὼν ἐν Ιβηρίᾳ πόλιν φοίνισσαν, ὡς οἱ φυγαγωγοὶ παρθένον ἤγαγον κάλλους ὑπερφυῶς ἔχουσαν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τοῦ δὲ δῶρα προσκομίσαντος, ὁ δὲ καὶ ταῦτα συνεχαρίσατο, προῖκα φήσας ἐπιδιδόναι τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgò legitur φυγαγωγοὶ quod interpres vertit captiuorum ductores, ſed legendum ex manuſcripto νυμφαγωγοὶ, hoc eſt virginum ductores, quæ correctio & veriſſima, & elegantiſſima, vt nullus ſuperſit dubitandi locus.

Plura adiungerem, ſed feriis iam deſinentibus quarum beneficio otium ſuppetebat, finem quoque huic παρεκβολῶν παρεκβολῇ imponimus. Vale & me ama.

VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON.
S. Fermat S. P. D.

CRiticas obſeruationes quas mihi nuper miſiſti, vir clariſſime, ſæpius legi non ſine voluptate & admiratione; in illis enim ingenij, judicij, & doctrinæ dotes quas in te iampridem ſuſpicimus vbique elucent, nihil autem inuenire poſſim quod tanti muneris vice tibi referam, niſi commodùm egeſtati meæ ſuccurrerent variæ lectiones quas vir tibi ſingulari coniunctus amicitiâ, cuius mihi iucunda ſemper eſt recordatio, margini appoſuit quorumdam librorum quos ſedulò peruoluebat, & quorum pleraque loca, ſed ὀλίγα παράεργον, emendauit; ſcis enim quàm præcoci ille vbertate florum amænitatem fructuum maturitati iunxerit, nec me latet quantâ ipſe fiduciâ ſuas exercitationes ſolitus ſit in tuum ſinum effundere; licet autem omnes iſtæ quas excerpſi emendationes, tibi nouitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua eſt comitas, te benignâ manu ſuſcepturum non dubito.

Theonem Smyrnæum, ne te diutius morer, vir clariſſime, noſti, auctorem operis illius cui titulus τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, quod prodromi inſtar eſt aut iſagoges Philoſophiæ Platonicæ, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat, illud opus edidit Lutetiæ anno 1644. Iſmael Bullialdus vir doctiſſimus & Latinitate donatum elegantibus notis illuſtrauit; ſed non omnibus illud mendis purgaſſe videtur, vt aliquot, ni fallor, exemplis quæ ſequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78. illius operis vbi περὶ ἁρμονίας & συμφωνίας agit, locum illum exſcribere non piget, ipſa enim ſeries emẽdationis procul dubio neceſſitatem, & veritatem oſtendet, τὰ γράμματα, ait ille, φωναὶ πρῶται εἰσὶ καὶ στοιχειώδεις καὶ διαιρετοὶ καὶ ἐλάχισται &c. & inferius, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων ὅτινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ διαιρετικαὶ καὶ στοιχειώδεις, huic voci διαιρετικαὶ aſteriſcus in margine reſpõdet cum voce διαιρεταὶ, at hîc reponenda bis videtur vox ἀδιαιρετοὶ loco τῶ διαιρετοὶ & διαιρετικαὶ, legendum nempe γράμματα φωναὶ εἰσὶ ἀδιαιρετοὶ, idque confirmat Manuel Bryennius cap. 1. lib. 2. Ἁρμονικῶν, legendum præterea φθόγγων ὅτινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ ἀδιαιρετοὶ, & hæc quoque lectio confirmatur verbis eiuſdem Bryennii lib. 1. cap. 3. vbi dicit φθόγγος ἐστὶ ἀρχὴ ἁρμονίας ὡς ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νῦν τοῦ χρόνου, punctum, vero & inſtans ſunt ἀδιαιρετὰ & conſequenter φθόγγος ἀδιαιρετὸς non diuidendi vim habens, vt vult interpres Latinus, nec immerito Bacchius Senior in introductione artis muſicæ quæſtioni illi τί ἓν ἐστὶν ἐλάχιστον τῶν μελῳδουμένων, reſpondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάχιστον, ſed etiam ἄτομον eſſe docet antiquæ muſicæ celeberrimus auctor Ariſtides Quintilianus lib. 1. de Muſicâ, atque ita authoritas æque ac ratio ſuffragatur huic emendationi, quæ fit vnius tantum litteræ mutatione; minimâ quoque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, vbi vulgò male legitur, φησὶ καὶ τοὺς Πυθαγορικούς, legendum ſcilicet, φασὶ, vt apud Bryennium λέγουσι; paulo inferius vbi legitur ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βραδείας δὲ βαρὺς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μείζων ἦχος, ἠρέμα δὲ μικρὸς, legendum videtur ἠρεμαίας, & Bryennij authoritate confirmatur.

Hactenus de ſono de quo agitur in cap. illo 6. in cap. vero 8. agitur de ſemitonio, & ita vulgo legitur καὶ τὸ ἡμίφωνον γράμμα ἐκ ὡς ἥμισυ φωνῆς καλοῦμεν ἀλλ' ὡς μὴ πρὸς αὐτοτελεῖ καὶ ταυτὸ φωνεῖν, legendum vero videtur καθὸ non καὶ, legendum præterea, ἀλλ' ὡς μὴ αὐτοτελῆ καθ' αὑτὸ φωνὴν ἀποτελοῦν, quæ lectio eiuſdem Bryennij authoritate nixa veriorem vulgatâ ſenſum efficit.

Atque harum probatio lectionum deſumi poteſt, ἐκ τῶν παρὰ τοῖς μουσικοῖς ὑποτιθεμένων καὶ ἐκ τῶν παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς λαμβανομένων, vt Porphyrii verbis vtar quæ in commentariis clariſſimi interpretis referuntur pag. 276. ſed non ſine mendo, male enim ibi legitur, ἐκ τῶν ὑπὸ τῆς μουσῆς ὑποτιθεμένων.

Nec silentio prætermittenda est elegantissima, &, audacter dicam, certissima alterius loci eiusdem Theonis emendatio pagina 164. vbi de octonario loquitur, refertur ibi vetus inscriptio quam in columna Ægyptiaca reperiri tradit Euander hoc modo, Πρεσβύτατος πάντων Οσιρις θεοῖς ἀθανάτοις πνεύματι ϗ ἠέρι ϗ ἡλίῳ ϗ σελήνῃ ϗ γῇ καὶ νυκτὶ ϗ πατρὶ τ῀ ὄντων ϗ τῶν ἐσομένων ΕΡΩΤΕ μνημεῖα τῆς αὐτ῀ ἀρετῆς βίου συντάξεως, id est, vt vertit Bullialdus, antiquissimus omnium Rex Osiris diis immortalibus Spiritui, & Cœlo, Soli, & Lunæ, & Terræ, & Nocti, & Diei, & patri eorum quæ sunt quæque futura sunt, prædicabo memoriam magnificentiæ ordinis vitæ eius, mendosum procul dubio in hac inscriptione illud ΕΡΩΤΕ, & hanc lectionem si retineas quis inde sensus elici poterit? legendum igitur ΕΡΩΤΙ, atque ita paruâ vnius scilicet litteræ mutatione huic loco sua lux, & amori sua laus facile restituitur; nec aliena est ab hoc loco sapientissimi Platonis, cuius velut interpres Smyrnæus ille, sententia, dum ait in conuiuio ϗ μὲν δὴ τὴν γε τῶν ζώων ποίησιν πάντων τὶς ἐναντιώσεται μὴ οὐκ ἔρωτος εἶναι σοφίαν ἢ γίγνεται ϗ φύεται πάντα τὰ ζῶα, etenim animalium omnium effectionem, vt vertit Seranus, ex amoris sapientiâ existere, idest gigni atque nasci ecquis negauerit,

Per quem genus omne animantum
Concipitur visitque exortum lumina Solis.

His emendationibus vnam aut alteram duorum insignium locorum addam, quorum primus est apud Sextum Empyricum, alter apud Athenæum: Sextus ille lib. 1. Pyrrhoniarum hypotyposeon pag. 12. ostendere conatur quam variæ sint pro diuersitate ætatum Phantasiæ, ὧδε δὲ τας ἡλικίας, inquit, ὅτι ὁ αὐτὸς ἀὴρ τοῖς μὲν γέρουσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν εὔκρατος ϗ αὐτὸ βρῶμα τοῖς μὲν πρεσβυτάτοις ἀμαυρὸν φαίνεται, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν κατακορὲς, ϗ φωνὴ ἡ αὐτὴ τοῖς μὲν ἀμαυρὰ δοκεῖ τυγχάνειν τοῖς δὲ ἐξάκουσος, id est vt vertit Henricus Stephanus, ex ætatibus autem quoniam idem aer senibus quidem frigidus esse videtur, aliis qui in ætatis flore constituti sunt bene temperatus, & idem cibus senibus quidem tenuis videtur at iis qui florent ætate crassus, eodem modo & vox eadem, alijs quidem depressa esse videtur, alijs vero alta; at huius loci elegantior sensus erit si legatur non βρῶμα sed χρῶμα, alioquin de sensu visus qui facilè maximam mutationem patitur, nullus hîc foret sermo, præterea τὸ ἀμαυρὸν melius colori conuenit quam cibo, & æque de colore ac de cibo dici potest τὸ κατακορὲς, sic apud Virgilium legimus, saturatas murice vestes, & hyali saturo fucata colore.

Nunc ad Athenæi locum transeo; quis autem vrbanissimi illius scriptoris sales variâ conditos eruditione ignorat? Et si quid in eo frigidum aut inficetum occurrat quis ibi mendum subesse non suspicetur? Suspecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de deprauatis Alcibiadis moribus, qui locus si vulgatam lectionem retineas ipso forsan Alcibiade deprauatior erit, Athenæi verba hæc sunt Λυσίας δὲ ὁ ῥήτωρ ὡδὶ τ῀ τρυφ῀ αὐτ῀ λέγων φησὶν, ἐκπλύσαντες γὰρ κοινῇ Αξίοχος καὶ Αλκιβιάδης εἰς Ελλήσποντον ἔγημαν ἐν Αβύδῳ δύο ὄντε Μεδοντίαδα τὴν Αβυδηνὴν καὶ Ξυνωκείπην, ἔπειτα αὐτῷ γίνεται θυγάτηρ ἣν οὐκ ἔφαντο δύνασθαι γνῶναι ὁποτέρου εἴη, ἐπεὶ δὲ ἦν ἀνδρὸς ὡραῖα ξυνεκοιμῶντο καὶ ταύτῃ, καὶ εἰ μὲν χρῶτο καὶ ἔχοι Αλκιβιάδης Αξιόχῳ ἔφασκεν εἶναι θυγατέρα, εἰ δὲ Αξίοχος Αλκιβιάδῃ, error hic procul dubio in voce illa ξυνωκείπην & legendum ξυνωκείπην hoc est concubuerunt, atque ita si falsa Xynoceipe deleatur, & sola supersit illa duobus nupta Medontias, portentosæ istorum iuuenum libidinis nouitati nihil detrahetur; veritas autem istius emendationis satis per se patet, & ex ipsâ loci serie elici potest, in quo illud δύο ὄντε alioqui superuacaneum foret, nec iam amplius ambigua proles; ratio igitur illius correctionis in promptu est, cui eiusdem Athenæi accedit authoritas, is enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo, Μεδόντιδος γὰρ τ῀ς Αβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἐρασθεὶς καὶ πλεύσας εἰς Ελλήσποντον σὺν Αξιόχῳ ὃς ἦν αὐτ῀ τῆς ὥρας ἐραστὴς, ὡς φησὶ Λυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κατ' αὐτ῀ λόγῳ, καὶ τούτης ἐκοινώνησεν αὐτῷ, id est vt interpretatur Dalechampius, Medontidem Abydenam auditione tantum ille amare cœpit, & imprimis charam habuit, eam tamen cum Hellespontum nauibus

adiiſſet, Axiocho nauigationis comiti, & pulchritudinis ipſius amatori, vt inquit Lyſias in oratione quam contra eum ſcripſit, vtendam dedit, ibi autem fictitiæ Xynoceipes nulla mentio, & illud ἐκοινόνησεν æque ac ξυνωκεῖτην communes Alcibiadis,& Axiochi amores fuiſſe ſatis arguit.

Sed ab iſtorum juuenum voluptate oculos auertamus, & eam quæ ex ſtudiorum ſocietate percipitur, puriorem & diuturniorem, ſummumque aduerſorum ſolatium litteras eſſe fateamur; cum tu his mirum in modum oblecteris, non iniucundas tibi fore confido obſeruationes in quibus amici manum agnoſces; ipſius ego lucubrationum ſparſas varijs in locis reliquias e tenebris quibus illas parentis modeſtia abdiderat, eruere conatus ſum, neque hæc contemnenda duxi, vt ex hoc ſpicilegio rerum quæ perſpicaciſſimos, vt ita loquar, meſſores latuerunt, pateat, quantam earum auctor in liberiori & coniecturis aperto critices campo ſegetem fuerit collecturus ſi ſæpius in illo ſpatiari voluiſſet: Vale & me ama.



