NOTICES

SUR

LA VIE ET LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. ADOLPHE BUHL

PROFESSEUR DE CALCUL INFINITÉSIMAL A L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

TOULOUSE

ÉDOUARD PRIVAT, Libraire-Éditeur

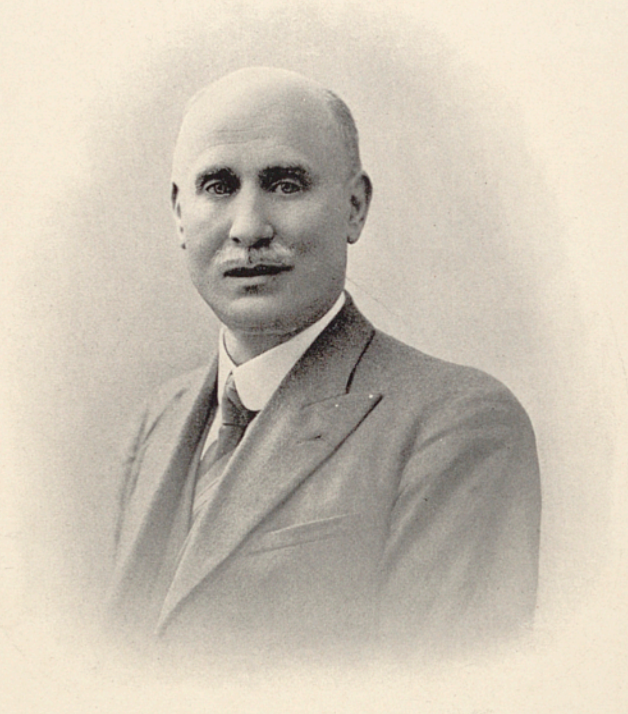
Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS, 14

—

1934

NOTICES



A mon éminent Collègue M. Maurice d'Ocagne

Très sympathiquement

A. Buhl

NOTICES

SUR

LA VIE ET LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. ADOLPHE BUHL

PROFESSEUR DE CALCUL INFINITÉSIMAL A L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

TOULOUSE

ÉDOUARD PRIVAT, Libraire-Éditeur

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS, 14

—

1934

NOTICE BIOGRAPHIQUE

Ces Notices ne sont point rédigées en vue de quelque candidature. Il m'a semblé qu'après plus de quarante années consacrées à des travaux scientifiques, dont trente-deux d'enseignement, je pouvais jeter un coup d'œil sur ce passé. Ceci me permet aussi de donner satisfaction à d'aimables Collègues, de la France et de l'Étranger, qui m'ont souvent demandé de leur communiquer quelque vue d'ensemble sur mes recherches.

Le fait de n'être candidat à rien, me donne une grande liberté de rédaction. Sur l'étrangeté de ma vie et de ma formation scientifique, je puis donner des détails qui n'auraient aucune valeur à l'appui d'une candidature et qui cependant ont un grand intérêt propre. Je commence par là, dans la présente Notice biographique. Ensuite on trouvera la liste de mes publications, dans un Index bibliographique, puis, dans une Notice scientifique, des commentaires relatifs à ces publications.

Enfin, dans une Notice pédagogique, j'indique comment mon Cours de Calcul infinitésimal est mis en harmonie, dans la mesure du possible, avec l'esprit scientifique actuel. J'attache beaucoup d'importance à la Physique théorique mise en relation immédiate avec les Principes les plus élémentaires du Calcul intégral.

Qu'on note bien aussi que ce fascicule ne représente nullement un testament scientifique. Pour l'écrire, il m'a fallu interrompre le labeur habituel, durant plusieurs semaines, mais, au delà, le même labeur continue.

* * *

Je suis né, à Paris, le 19 juin 1878. Mon père était typographe. A l'époque de mes plus lointains souvenirs d'enfance, il faisait partie de l'équipe de composition du journal quotidien *Le Cri du Peuple* dont le Rédacteur en Chef était Jules Vallès. Les opinions du célèbre révolutionnaire étaient partagées par tous ses collaborateurs si bien qu'il me semble m'être éveillé à la vie dans un milieu de bataille sociale. Je me remémore d'ailleurs mon père comme un personnage sévère et dur mais d'une dureté qu'il excusait en commençant par l'appliquer impitoyablement à lui-même et qui pouvait alors devenir courage poussé jusqu'à l'héroïsme. L'idéal semblait d'être toujours prêt à mourir debout. J'ai à peine besoin de dire que *Le Cri du Peuple* ne publiait guère que des articles très violents. C'est ainsi qu'il prit à partie deux frères appartenant au monde de la magistrature; ceux-ci jugèrent leur honneur outragé et résolurent de le venger. La résolution était compréhensible mais fut mise à exécution d'une manière qui ne l'était guère. Les deux hommes pénétrètrent la nuit, le revolver au poing, dans le local de la rue du Croissant où le journal s'imprimait, et parvinrent ainsi, sans avoir été remarqués, jusque dans l'atelier de typographie. Là, sans plus chercher, ils ouvrirent le feu sur un personnel qui avait peut-être composé le malencontreux article mais qui n'en était pas autrement responsable. Mon père, sans armes, bondit sur l'un des assaillants et le désarma, non sans avoir eu la main légèrement éraflée par une balle. L'autre tireur, voyant son frère hors d'état de nuire, abandonna la partie. Je me revois encore assez nettement sortant le lendemain avec mon père; il était arrêté constamment par des gens qui le félicitaient. On lui disait qu'il avait très probablement sauvé la vie à des camarades et il me semblait vaguement comprendre qu'il avait fait quelque chose de très méritant et de fort en dehors de l'ordinaire. L'un des interlocuteurs s'adressa même à moi : « Eh bien, mon petit bonhomme, tu peux te vanter d'avoir un fameux papa ! » Ce fut ma première fierté.

Mon père fut aussi, aux côtés de Frédéric Chatelus, l'un des fondateurs de la Société civile de Retraites *Les Prévoyants de l'Avenir*. Il ne s'agissait plus, cette fois, d'un instant d'héroïsme mais d'une œuvre de longue haleine et toute de dévouement qu'il poursuivit de 1880 à 1899, c'est-à-dire jusqu'à sa mort, avec le titre de Comptable général. Cette Société existe toujours mais, sous l'influence du temps et des passions, elle a dû se transformer profondément, les promoteurs s'étant laissés guider beaucoup plus par la générosité et l'enthousiasme que par une connaissance approfondie de la légalité et de la science de l'actuaire. Toutefois il est absolument certain que, s'il n'y avait pas eu, au début, cette générosité et cet enthousiasme, on n'aurait jamais recueilli les cent et quelques millions avec lesquels l'œuvre fonctionne normalement aujourd'hui.

*
* *

Mon enfance me paraît avoir été aussi heureuse que possible jusqu'à l'âge de neuf ans.

Nous habitions l'extrême nord de Paris, entre la Butte sacrée et les fortifications récemment rasées. L'endroit était encore parsemé de cultures maraîchères et d'immenses terrains vagues dans lesquels les courses et les jeux étaient plutôt ceux de petits campagnards que de petits citadins. Brusquement les choses changèrent; mes parents entreprirent un commerce de quincaillerie et nous dûmes quitter la périphérie parisienne. Il me sembla passer des champs à la ville et d'un régime de liberté à un régime de travaux forcés car, dès que nous eûmes un magasin, il me fallut y être constamment, en dehors des heures d'école, pour participer au travail des apprentis. Cette double occupation me fit prendre en grippe et l'école et la quincaillerie. Des années douloureuses passèrent; vers douze ans, j'obtins le Certificat d'études primaire et fus admis, par concours, au Cours complémentaire où je ne devais rester que quelques mois. Je fus retiré de l'école; c'était toujours un soulagement.

Cette demi-libération parut avoir pour résultat de m'ouvrir l'intelligence. J'allai emprunter, à une Bibliothèque municipale, les volumes de la *Bibliothèque des Merveilles*. Quelle révélation! Si tout de même on pouvait étudier plus avant des choses de ce genre qui ressemblaient si peu à celles qu'on étudiait à l'école primaire. Et voici encore des affiches de l'Association philotechnique qui annoncent des cours du soir consacrés à l'Algèbre, à la Géométrie, à la Physique, ...; allons voir! Ce fut un autre émerveillement. De là datent mes premières réflexions pédagogiques surtout caractérisées par un immense étonnement. Pourquoi, à l'école primaire, m'avait-on parlé si peu de ce qui était cependant, de beaucoup, le plus intéressant? C'était évidemment dans cette voie qu'il fallait continuer. Mais comment? A ce qui me captivait maintenant je ne pouvais consacrer que de rares moments de loisir. J'étais toujours quincaillier. Comment passer du monde de la ferraille au monde de l'esprit? Je n'en avais aucune idée et la situation semblait absolument sans issue.

* * *

C'est ici que se place dans ma vie un événement que je suis forcé de considérer comme capital bien qu'il ait eu d'abord l'apparence d'un effroyable malheur. Mais ce malheur allait être l'instrument de ma libération intellectuelle.

Je venais d'avoir quatorze ans. Un matin de septembre 1892, je me levai en proie à un malaise d'abord léger et surtout bizarre. C'était un dimanche et, en cette fin d'été, j'avais l'habitude d'aller au bain froid chaque dimanche matin. Je ne voulus rien changer à l'habitude. D'ailleurs le bain n'allait-il pas dissiper le malaise? Je me trompais. J'en revins véritablement malade et je dus m'aliter. Puis je fus gagné par une fièvre terrible qui, le surlendemain, dépassa quarante-deux degrés. Le médecin prit mes parents à part, leur déclara qu'il ne pouvait diagnostiquer ce que j'avais mais que c'était, à coup sûr, très grave et qu'une issue fatale semblait imminente. Je résistai cependant et, au bout de quelques jours, la fièvre tomba. Mais alors, je perçus que mes membres inférieurs me refusaient tout service. Sur un nouvel avis du médecin, on me transporta auprès du célèbre Professeur Charcot qui, dès le premier coup d'œil, parut s'intéresser énormément à mon cas et insista pour me prendre dans son service de la Salpétrière, chose qu'on ne songeait nullement à lui demander. Là je jouai, bon gré, mal gré, le rôle d'un petit personnage des plus remarquables. J'eus, autour de mon lit, une foule de savants aux soins desquels j'ai certainement dû, sinon une amélioration immédiate, du moins une limitation du mal. Quant aux questions d'étiologie et de diagnostic, elles semblaient toujours réservées; ce n'est que plus tard que j'appris être atteint d'une paralysie infantile anormale en ce sens qu'elle frappait plutôt un adolescent qu'un enfant.

En 1893, Charcot mourut et la discipline qui régnait à la Salpétrière parut s'en ressentir. Mon état, sans amélioration, semblait stabilisé. Mes parents me reprirent. Chez nous, j'étais cloîtré. Je pouvais quitter le lit mais pour rester assis. Rien d'autre ne m'était permis. Je commençai par ressentir un mortel ennui. Que faire?

*
* *

Il me vint à l'idée de reprendre les cahiers rédigés jadis aux cours du soir. J'eus vite fait de constater que je connaissais ce qu'ils contenaient. Ma mère, envoyée à la bibliothèque déjà mentionnée, en rapporta le *Cours d'Algèbre* de Joseph Bertrand et les ouvrages de Géométrie de Vacquant. Un bouquiniste voisin offrit aussi le *Cours d'Algèbre* de Ph. André, précieux comme contenant beaucoup de problèmes à résoudre. J'eus tout de suite, assez inconsciemment, une méthode de travail. Les textes me semblaient souvent hiéroglyphiques mais je cherchais, à la suite, les exercices à travailler et revenais alors au texte qui non seulement m'aidait mais prenait tout à coup un sens.

Vraiment j'avais trouvé ce pour quoi mon esprit était fait et les journées de claustration passaient rapidement. Cependant je ne savais nullement où ces efforts pouvaient me conduire ce qui prouve que, suivant une parole célèbre, il n'est pas nécessaire d'espérer pour entreprendre. Le bouquiniste apportait, de temps en temps, un livre offrant un intérêt nouveau. Le premier ouvrage sur le Calcul infinitésimal fut le Cours de l'Université de Gand par P. Mansion. Je ne détaillerai pas davantage une bibliographie à coup sûr fort chaotique. Ces études, au bout d'environ deux années et demie, avaient déjà formé en moi une petite personnalité dont on commence à trouver la trace, dès 1896, dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens*. J'avais eu connaissance de cette publication par la *Revue générale des Sciences* d'abord achetée au hasard et numéro par numéro.

Dès lors les choses vont se préciser d'une manière qui me fait croire que j'ai enfin de la chance. Je ne suis plus totalement inconnu; mon nom est remarqué, dans *L'Intermédiaire*, par Paul Appell, Lucien Lévy, Amédée Mannheim. De plus — quel transport de joie ! — de mes jambes inertes l'une semble vouloir revenir à la vie.

Ici commence le rôle, plein d'une infinie sollicitude, d'un ami de la famille, Louis Hunebelle, Maire-adjoint du XVIII^e Arrondissement. Il me fait réexaminer au point de vue pathologique. On conclut que maintenant je vais peut-être pouvoir me déplacer au moyen de béquilles et d'un appareil. La chose réussit au delà de ces prévisions car, au bout de quelques mois, je pouvais laisser l'appareil et marcher avec les béquilles seules. M. Hunebelle, qui est aussi un ancien typographe, connaît M. Montreuil, Directeur de l'Imprimerie Gauthier-Villars. Il va lui raconter mon histoire. M. Montreuil s'enthousiasme à son tour — lui aussi avec quelle bonté — la raconte à Appell, à Lucien Lévy, à Mannheim, à Laisant, Directeur de *L'Intermédiaire*. Les savants viennent me voir, me font venir chez eux, me prêtent ou me donnent des livres, cette fois bien choisis.

Maintenant tout marche merveilleusement. J'aborde la Licence à trois Certificats en 1898 et 1899, le Certificat de Mécanique céleste en 1900, le Doctorat, en 1901, avec la Thèse[1] signalée plus loin [1]. Évidemment, j'étais sauvé.

*
* *

Ce que je tiens à dire c'est surtout mon immense reconnaissance pour tous ceux que je viens de nommer. Sans l'appui de leur autorité ou de leur bonté, tout mon autodidactisme eût été vain. Des personnes bienveillantes m'ont souvent félicité de la manière dont je m'étais formé. Elles pensaient que je devais en éprouver une grande fierté. Il n'en est rien. J'ai toujours envié — au sens noble du mot — les élèves de l'École Normale. Il me semble que l'influence de cette École est irremplaçable. Avant d'aborder le Certificat de Calcul différentiel et intégral, j'ai trouvé le moyen de suivre, à la Sorbonne, une dizaine de

1. Charles-Ange Laisant, qui assistait à la soutenance de ma Thèse, lui a consacré, dans *L'Enseignement mathématique* (t. **3**, 1901, p. 298), un article exhumé récemment par mon excellent Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, M. R. Deltheil. Je saisis cette occasion d'adresser à ce dernier un amical remerciement.

conférences faites par M. J. Hadamard, ce qui a suffi à me convaincre de l'heureuse influence que pouvait avoir un Maître.

Pour Paul Appell, je représentais, à coup sûr, un type idéal. Que de fois il s'est élevé contre le Cours peut-être excellent mais en dehors duquel l'élève ne consultait rien « comme si l'imprimerie n'était pas inventée »[1]. Il faut observer aussi qu'à partir d'un certain stade de formation, tout le monde travaille comme j'ai travaillé mais le travail absolument solitaire ne me semble pas fait pour engendrer la confiance en soi tandis que l'approbation d'un Maître peut l'engendrer. Je n'ai été approuvé que relativement tard.

Je saisis cette occasion de remercier mon éminent ami Henri Villat qui a dû beaucoup insister pour me faire écrire des fascicules dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* et dans le *Mémorial des Sciences physiques* ; sans cette insistance, je n'écrivais rien et cependant, une fois les fascicules écrits, je fus le premier à en être satisfait.

Depuis les temps primitifs et héroïques que j'ai narrés, bien des encouragements me sont venus, de M. Émile Picard, de M. Édouard Goursat, de M. Élie Cartan. Puissent ces grands savants trouver ici l'expression de ma bien vive et très affectueuse gratitude.

1. Paul Appell. *Éducation et Enseignement*, p. 39. Nouvelle Collection scientifique Em. Borel, 1922. F. Alcan, Paris.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

Publications isolées[1].

1. Sur les Équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe. *Thèse* soutenue à Paris le 14 juin 1901. Fascicule gr. in-8° de 62 pages (*Épuisé*).
2. Géométrie et Analyse des Intégrales doubles. *Collection Scientia*, fasc. 36, 1920, 68 pages.
3. Séries analytiques. Sommabilité. *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 7, 1925, 56 pages.
4. Formules stokiennes, *Ibidem*, fasc. 16, 1926, 60 pages.
5. La Géométrie non-euclidienne dans ses rapports avec la Physique mathématique. Notes adjointes à *La Géométrie non-euclidienne* de Paul Barbarin. *Collection Scientia*, fasc. 15, 1928, 64 pages.
6. Aperçus modernes sur la Théorie des groupes continus et finis. *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 33, 1928, 56 pages.
7. Structures analytiques et Théories physiques. *Mémorial des Sciences physiques*, fasc. 22, 1933, 60 pages.
8. Gravifiques, Groupes, Mécaniques. *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 62, 1934, 62 pages.

Directions de Publications périodiques.

9. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique*. M. A. Buhl assume, depuis 1930, les fonctions de Secrétaire de cette publication.
10. *L'Enseignement mathématique*. Revue internationale publiée par M. H. Fehr, Professeur à l'Université de Genève et par M. A. Buhl. Depuis la fondation de cette Revue, par C.-A. Laisant et H. Fehr, en 1899, M. Buhl y a surtout fait de la critique bibliographique en des articles toujours très approfondis. Ces articles se comptent par centaines et n'auront pas cependant ici d'autre mention que celle-ci.

1. Se vendant séparément à la librairie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55, Paris.

Travaux insérés en divers Recueils.

11. Communications diverses à *L'Intermédiaire des Mathématiciens* à partir du tome 3, 1896. Œuvre de jeunesse assez dense et s'étendant sur plusieurs années mais dont il semblerait fastidieux de donner le détail.

Analyse. Intégrales multiples. Groupes.

12. Sur les formes linéaires aux dérivées partielles d'une intégrale d'un système d'équations différentielles qui sont aussi des intégrales de ce système. *Comptes rendus*, t. 132, 11 février 1901.

13. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la Théorie des groupes continus. *Journal de Mathématiques*, 5, t. 10, 1904, 45 pages.

14. Sur l'approximation des fonctions par des polynomes dans ses rapports avec la Théorie des équations aux dérivées partielles. *Comptes rendus*, t. 140, 23 janvier 1905.

15. Sur de nouvelles séries de polynomes. *Comptes rendus*, t. 141, 31 juillet 1905.

16. Sur la généralisation des séries trigonométriques. *Comptes rendus*, t. 142, 7 mai 1906.

17. Sur le caractère arbitraire des développements des solutions même uniques des Problèmes de la Physique mathématique. *Comptes rendus*, t. 143, 16 juillet 1906.

18. Sur la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles. *Comptes rendus*, t. 145, 9 décembre 1907.

19. Sur la généralisation des séries trigonométriques. *Journal de Mathématiques*, 6, t. 4, 1908, 40 pages.

20. Sur la Formule de Stokes dans l'hyperespace. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3, t. 3, 1911, 10 pages.

21. Sur les équations aux dérivées partielles des surfaces susceptibles de passer par un contour fermé. *Comptes rendus*, t. 154, 24 juin 1912.

22. Sur les extensions de la Formule de Stokes. *Comptes rendus*, t. 155, 8 juillet 1912.

23. Sur les formules analogues à la Formule de Stokes. *Comptes rendus*, t. 156, 9 juin 1913.

24-28. Sur les transformations et extensions de la Formule de Stokes. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3; t. 4, 1912, 46 pages; t. 5, 1913, 62 pages; t. 6, 1914, 50 et 55 pages; t. 7, 1915, 39 pages.

29. Sur les extensions de la Formule de Stokes, les équations de Monge-Ampère et les fonctions analytiques de deux variables. *Comptes rendus*, t. 158. 2 février 1914.

30. Sur la forme intégrale des équations de Monge-Ampère. *Comptes rendus*, t. **158**, 6 avril 1914.

31. Sur l'intervention des formules de Riemann, Stokes, Green dans les extensions du théorème d'Abel. *Comptes rendus*, t. **159**, 28 décembre 1914.

32. Sur une formule de M. Paul Appell. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. 23, 1916, 1 page.

33. Sur la sommation de séries. *Ibidem*, t. 24, 1917, 1 page.

34. Sur certaines sommes abéliennes d'intégrales doubles. *Comptes rendus*, t. **166**, 28 janvier 1918.

35. Sur l'extension, aux intégrales multiples, du théorème concernant l'échange de l'amplitude et du paramètre dans les intégrales hyperelliptiques. *Comptes rendus*, t. **167**, 9 décembre 1918.

36. Sur l'échange du paramètre et de l'argument. Analogie avec la réduction des intégrales doubles de seconde espèce. *Comptes rendus*, t. **168**, 10 mars 1919.

37. Sur les pseudo-lignes d'infini des intégrales doubles. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3, t. **10**, 1918, 32 pages.

38. Sur l'addition des fonctions elliptiques et les pseudo-lignes d'infini des intégrales doubles. *Ibidem*, 3, t. **12**, 1920, 9 pages.

39. Sur les intégrales doubles en lesquelles les pseudo-lignes d'infini sont lignes de zéros. *Comptes rendus*, t. **171**, 13 décembre 1920.

40. Sur quelques équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. *Nouvelles Annales*, 5, t. 3, juillet 1925, 11 pages.

41. Sur les groupes continus et l'intégration des équations de Maurer. *Comptes rendus*, t. **182**, 19 avril 1926.

42. Sur l'intégration des équations de Maurer par des séries de fonctions homogènes. *Comptes rendus*, t. **182**, 21 juin 1926.

43. Sur les symétries de la Théorie des groupes continus. *Comptes rendus*, t. **184**, 13 juin 1927.

44. Sur les systèmes différentiels linéaires dépendant de paramètres et les groupes qu'ils engendrent. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. **52**, mai 1928, 6 pages.

45. Sur les opérateurs différentiels permutables ou non. *Ibidem*, 2, t. **52**, octobre 1928, 12 pages.

46. Opérateurs permutables et groupes de transformations. *Comptes rendus*, t. **186**, 27 février 1928.

47. Opérateurs permutables et trièdre mobile. *Comptes rendus*, t. **186**, 26 mars 1928.

48. Groupes et propriétés cycliques de l'équation de Riccati. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. **53**, mai 1929, 12 pages.

49. Sur le choix de l'intégrale complète. *Ibidem*, 2, t. **53**, octobre 1929, 5 pages.

50. Sur la cartographie, dans E_3, d'intégrales triples à champs déformés dans E_4. *Comptes rendus*, t. **190**, 3 mars 1930.

51. Introduction à la Théorie des congruences au moyen de la Théorie des groupes. Traduction d'un Mémoire anglais de G.-A. Miller. *L'Enseignement mathématique*, t. **29**, 1930, 11 pages.

52. Sur la permutabilité des opérateurs différentiels. *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna, t. **3**, 1928, 6 pages.

53. Sur une invariance d'intégrales doubles attachée à toute équation différentielle du premier ordre. *Comptes rendus*, t. **194**, 7 mars 1932.

54. Nouvelles invariances intégrales attachées aux équations différentielles contenant plusieurs paramètres. *Comptes rendus*, t. **194**, 29 mars 1932.

55. Sur la propagation d'invariances intégrales. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. **56**, décembre 1932, 24 pages.

Théorie des Fonctions.

56. Application du procédé de sommation de M. E. Borel aux séries trigonométriques généralisées. *Comptes rendus*, t. **143**, 24 septembre 1906.

57. Sur une extension de la méthode de sommation de M. E. Borel. *Comptes rendus*, t. **144**, 2 avril 1907.

58. Sur de nouvelles applications de la Théorie des résidus. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. **31**, juin 1907, 7 pages.

59. Sur la sommabilité des séries de Laurent. *Comptes rendus*, t. **145**, 14 octobre 1907.

60. Sur la sommabilité des séries de Fourier. *Comptes rendus*, t. **146**, 13 janvier 1908.

61. Sur les séries de polynomes tayloriens. *Comptes rendus*, t. **146**, 16 mars 1908.

62. Sur de nouvelles formules de sommabilité. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. **31**, décembre 1907, 7 pages.

63. Sur la représentation des fonctions méromorphes par des séries de polynomes tayloriens. *Ibid.*, 2, t. **32**, juillet 1908, 9 pages.

64. Sur la sommabilité des séries d'une variable réelle ou complexe. *Journal de Mathématiques*, 6, t. **4**, 1908, 12 pages.

65. Sur la croissance des coefficients des séries trigonométriques analytiques. *Bull. Soc. math. de France*, t. **37**, 1909, 8 pages.

66. Sur la transformation des séries asymptotiques en séries de polynomes tayloriens. *Comptes rendus*, t. **150**, 13 juin 1910.

67. Sur la représentation des fonctions méromorphes. *Acta mathematica*, t. **35**, 1911, 24 pages.

68. Sur la transformation de séries asymptotiques en séries de polynomes tayloriens. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3, t. **2**, 1910, 19 pages.

69. Sur les séries de polynomes tayloriens franchissant les domaines W. *Comptes rendus*, t. **166**, 21 mai 1918.

70. Sommabilité et fonction $E_\alpha(x)$ de Mittag-Leffler. *L'Enseignement mathématique*, t. **24**, 1924-25, 8 pages.

71. Paradoxes apparents dans la Théorie du prolongement analytique. *Association française pour l'avancement des Sciences*. Congrès de Lyon, 1926, 4 pages.

72. Sur la fonction $E_\alpha(x)$ de Mittag-Leffler et les développements en série entière de la Physique mathématique. *Comptes rendus*, t. **187**, 8 octobre 1928.

Géométrie.

73. Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes données. *Bull. Soc. math. de France*, t. **31**, 1903, 8 pages.

74-76. Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures. *Nouvelles Annales*, 4; t. **8**, octobre 1908, 10 pages; t. **9**, août 1909, 18 pages; t. **10**, octobre 1910, 10 pages.

77. Sur les applications géométriques de la Formule de Stokes. *Comptes rendus*, t. **152**, 20 février 1911.

78. Sur des volumes pris pour paramètres de points, de droites et de plans, d'après une méthode de M. Darboux. *Comptes rendus*, t. **152**, 10 avril 1911.

79. Sur un théorème de M. Bianchi et sa généralisation. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. **18**, 1911, 1 page.

80. Sur les applications géométriques de la Formule de Stokes. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3, t. **2**, 1910, 52 pages.

81-82. Sur les applications géométriques des intégrales curvilignes. *Nouvelles Annales*, 4; t. **12**, juin 1912, 21 pages; t. **13**, juin 1913, 12 pages.

83. Sur la torsion géodésique des contours fermés. *Comptes rendus*, t. **158**, 11 mai 1914.

84. Sur la courbure normale des contours fermés. *Comptes rendus*, t. **158**, 29 juin 1914.

85. Sur de nouvelles applications géométriques de la Formule de Stokes. *Comptes rendus*, t. **160**, 17 mai 1915.

86-87. Sur les volumes dus à la rotation d'un contour. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2; t. **39**, août, 1915, 7 pages; t. **40**, août 1916, 6 pages.

88. Sur les applications géométriques du théorème d'Abel et de la formule de Stokes. *Comptes rendus*, t. **162**, 27 mars 1916.

89. Sur les sommes abéliennes de volumes coniques. Cas des cyclides. *Comptes rendus*, t. 164, 19 mars 1917.

90. Sur quelques rapports remarquables entre volumes. *Nouvelles Annales*, 4, t. 17, juillet 1917, 5 pages.

91-92. Sur les sommes abéliennes de volumes cyclido-coniques. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2; t. 41, décembre 1917, 7 pages; t. 42, août 1918, 7 pages.

93. Deux récents Ouvrages de Géométrie (Gaston Darboux, Maurice d'Ocagne). *L'Enseignement mathématique*, t. 20, 1918, 13 pages.

94. Sur la représentation, par des volumes, de certaines sommes abéliennes d'intégrales doubles. *Comptes rendus*, t. 166, 11 février 1918.

95. Sur l'intervention de la Géométrie des masses dans certaines théories concernant les surfaces algébriques. *Comptes rendus*, t. 166, 18 mars 1918.

96. Sur les volumes engendrés par la rotation d'un contour sphérique. *Comptes rendus*, t. 166, 3 juin 1918.

97. Sur les volumes dus à la rotation d'un contour sphérique. *Comptes rendus des Séances de la Soc. math. de France*, 23 février 1921, 3 pages.

98. Sur la Géométrie de la Formule de Stokes. *Nouvelles Annales*, 5, t. 2, octobre 1923, 10 pages.

99-100. Sur les volumes tournants. *Ibidem*, 5, t. 2, 1924; juin, 12 pages; juillet, 4 pages.

101. Lignes asymptotiques et lignes de courbure. *Journal de Mathématiques, Volume Appell-Picard*, 9, t. 8, 1929, 25 pages.

102. Sur la planification des familles de surfaces analytiques. *Comptes rendus*, t. 190, 17 février 1930.

103. Sur les aires sphéro-coniques de Georges Humbert. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. 55, mars 1931, 9 pages.

Physique théorique.

104. Sur les symétries du champ électromagnétique et gravifique. *Comptes rendus*, t. 171, 9 août 1920.

105. Sur la Formule de Stokes dans l'Espace-Temps. *Comptes rendus*, t. 171, 20 septembre 1920.

106. Sur les symétries du champ gravifique et l'extension lorentzienne du Principe d'Hamilton. *Comptes rendus*, t. 171, 26 octobre 1920.

107-113. Sur les formules fondamentales de l'Électromagnétisme et de la Gravifique. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3; t. 12, 1920, 35 pages; t. 13, 1921, 24 pages; t. 15, 1923, 25 pages; t. 16, 1924, 28 pages; t. 18, 1926, 39 pages; t. 19, 1927, 38 et 15 pages.

114. Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral. *Journal de Mathématiques*, 9, t. 1, 1922, 10 pages.

115. Les Théories einsteiniennes et le bon sens. *Revue Scientifique*, t. 60, 14, 22 juillet 1922, 2 pages.

116. Sur le rôle des symétries analytiques dans les Théories relativistes. *Comptes rendus*, t. 173, 7 novembre 1921.

117. La Gravifique einsteinienne. Analyse de l'Ouvrage publié sous ce titre par M. Th. De Donder. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. 46, juin 1922, 5 pages.

118. Sur le mouvement séculaire du périhélie de Mercure. *Comptes rendus*, t. 175, 27 novembre 1922.

119. Sur les champs massique et électromagnétique de M. Th. De Donder. *Comptes rendus*, t. 176, 5 février 1923.

120. Sur le Calcul tensoriel amétrique. *Comptes rendus*, t. 178, 5 mai 1924.

121. Sur l'origine commune de l'Électromagnétisme et de la Géométrie différentielle. *Comptes rendus*, t. 178, 26 mai 1924.

122-123. La Pédagogie des Théories d'Einstein. *L'Enseignement mathématique*, t. 23, 1923, 18 pages; t. 24, 1924-25, 16 pages.

124. Géométrie et Électromagnétisme. *Bulletin de la Soc. math. de France. Volume du Cinquantenaire*, t. 52, 1924, 8 pages.

125. Théorie mathématique de l'Électricité. Analyse de l'Ouvrage publié sous ce titre par M. Th. De Donder. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. 49, octobre 1925, 8 pages.

126. Sur l'origine stokienne de la Cinématique. *Congrès international de Mécanique appliquée, Zürich*, 1926, 4 pages.

127. La Géométrie ondulatoire. Ondes et invariants intégraux propagés. *Comptes rendus*, t. 191, 6 octobre 1930.

128. La Géométrie ondulatoire. Développements explicites. *Comptes rendus*, t. 191, 27 octobre 1930.

129. Considérations dynamiques adjointes à la Géométrie ondulatoire. *Comptes rendus*, t. 191, 29 décembre 1930.

130. Propagations conoïdales en Géométrie ondulatoire. Ondes dérivées de l'ellipsoïde. *Comptes rendus*, t. 192, 9 février 1931.

131. La propagation curviligne d'intégrales invariantes. Cas des intégrales doubles. Propagation corpusculaire. *Comptes rendus*, t. 192, 27 avril 1931.

132. Gravifiques, Groupes, Mécaniques. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. 54, octobre 1930, 17 pages.

133. Tourbillons, Ondes, Quanta. *Mathematica*, Cluj, Roumanie, t. 4, 1930, 20 pages.

134. Mouvements multiponctuels correspondant à l'équation de Jacobi écrite pour le cas d'un seul point. *Comptes rendus*, t. 194, 2 mai 1932.

135. Mouvements multiponctuels correspondant à l'équation de Schrödinger écrite pour le cas d'un seul point. *Comptes rendus*, t. **194**, 20 juin 1932.

136. Tourbillons, Corpuscules, Ondes. Avec quelques préliminaires sur le rôle des opérateurs en Physique théorique. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3, t. **24**, 1932, 48 pages.

137. Fronts d'ondes et Corpuscules. A propos du Problème d'Agrégation de 1929. *L'Enseignement mathématique*, t. **31**, 1932, 8 pages.

138. Sur la Formule de Stokes pour Espaces à canaux. *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich*, t. **2**, 1932, 1 page.

139. Ondes et Corpuscules dans les Espaces à canaux. *Bull. de la Cl. d. Sc. de l'Acad. roy. de Belgique*, 5, t. **19**, 1933, 6 pages.

140. Les Théories modernes se rapportant à la Relativité. *Sociétés savantes. Congrès de Toulouse*, 1933, 8 pages.

141. L'École de Charles Hermite et la Physique théorique. *Revue Scientifique*, t. **71**, 18, 23 septembre 1933, 6 pages.

142. Propagations très générales indifféremment ondulatoires ou corpusculaires. *Comptes rendus*, t. **197**, 16 octobre 1933.

143. Sur l'extrême indétermination de certaines propagations liées à l'équation de Schrödinger. *Comptes rendus*, t. **198**, 16 avril 1934.

144. Sur quelques analogies corpusculaires et ondulatoires (*sous presse*).

Discours. Jubilés. Réceptions. Élections.

145. Quelques réflexions sur les diverses valeurs de la Science. Discours prononcé, le 3 novembre 1906, pour la Séance solennelle de Rentrée des Facultés. *Rentrée des Facultés et de l'École Supérieure de Pharmacie. Montpellier*, 1906, 20 pages.

146. Fr. Gomes Teixeira. Sa réception à Toulouse. *Bulletin de l'Université et de l'Académie de Toulouse*, t. **32**, 1922-23, 8 pages.

147. Les Mathématiques en Portugal. L'amitié franco-portugaise. A propos de la réception précédente. *L'Enseignement mathématique*, t. **23**, 1923, 4 pages.

148. Paul Appell. Cinquantenaire scientifique. *Ibidem*, t. **26**, 1927, 7 pages.

149. Émile Picard. Cinquantenaire scientifique. *Ibidem*, t. **27**, 1928, 9 pages.

150. A propos du VII^{e} Centenaire de l'Université de Toulouse. Doctorat *honoris causa* de M. Tullio Levi-Civita. *Ibidem*, t. **28**, 1929, 4 pages.

151. Dans les Hyperespaces. A propos de l'élection à l'Institut de M. Élie Cartan. *La Dépêche*, Toulouse, 11 mars 1931, 2 colonnes.

152. Albert Einstein au Collège de France. *Ibidem*, 17 avril 1933, 2 colonnes.

153. Louis de Broglie à l'Institut, *Ibidem*, 3 juin 1933, 2 colonnes.

154. Albert Einstein à l'Institut. *Ibidem*, 30 juin 1933, 2 colonnes.

155. Le Jubilé de M. Maurice d'Ocagne. *L'Enseignement mathématique*, t. 32, 1933, 2 pages.

156. Paul Langevin à l'Institut. *La Dépêche*, Toulouse, 2 juillet 1934, 2 colonnes.

Éloges funèbres.

157. Henri Poincaré. *L'Enseignement mathématique*, t. 15, 1913, 32 pages.

158. Henri Poincaré et la publication de ses Œuvres par Gaston Darboux. *Ibidem*, t. 19, 1917, 15 pages.

159. Charles-Ange Laisant. *Ibidem*, t. 21, 1920, 8 pages.

160. Samuel Lattès. *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, 11, t. 9, 1921, 13 pages.

161. Camille Jordan. *L'Enseignement mathématique*, t. 22, 1921-22, 5 pages.

162. Dominique Saint-Blancat. *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, 12, t. 5, 1927, 8 pages.

163. Paul Appell. *La Dépêche*, Toulouse, 27 octobre 1930, 2 colonnes.

164. Paul Appell. *L'Enseignement mathématique*, t. 30, 1931, 17 pages.

165. Eugène Cosserat. *Ibidem*, t. 30, 1931, 2 pages.

166. Eugène Cosserat. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3, t. 23, 1931, 4 pages.

167. Gabriel Kœnigs. *L'Enseignement mathématique*, t. 30, 1931, 1 page.

168. Paul Barbarin, *Ibidem*, t. 30, 1931, 1 page.

169. Paul Barbarin. *Bull. des Sc. mathématiques*, 2, t. 56, mars 1932, 7 pages.

170. René Baire. *L'Enseignement mathématique*, t. 31, 1932, 9 pages.

171. Paul Painlevé. *La Dépêche*, Toulouse, 1er novembre 1933, 2 colonnes.

172. En la Mémoire de Mme Curie. *Ibidem*, 10 juillet 1934, 2 colonnes.

Sujets divers.

173. L'enseignement dans les Universités populaires. *L'Enseignement math.*, t. 4, 1902, 4 pages.

174. Le Commencement et la Fin du Monde. Critique de l'Idée vulgaire du Temps. *Bull. de la Soc. astronom. Flammarion de Montpellier*, 1903-04, 8 pages.

175. Les ondes hertziennes en Astronomie. *Ibid.*, 1905, 6 pages.

176. Quelques réflexions sur l'Astronomie stellaire. *Ibid.*, 1906, 6 pages.

177. Le nouveau Diplôme d'Études supérieures. *L'Ens. math.*, t. 10, 1908, 6 pages.

178. Géométrie et Psychologie. Les Univers non-euclidiens et l'Infini. Deux Notes ajoutées à la seconde édition posthume de l'ouvrage de H. Laurent : Sur les principes fondamentaux de la Théorie des Nombres et de la Géométrie. *Collection Scientia*, fasc. 20, 1911, 7 pages.

179. Calculs de Balistique extérieure exécutés, à la demande du Ministère de l'Armement, entre juillet 1917 et l'Armistice de novembre 1918. Ces calculs, effectués par la méthode des arcs successifs, ont porté sur diverses trajectoires comprenant un ensemble de 298 arcs.

180. Quelques curiosités mathématiques au Baccalauréat. *Bulletin de l'Université et de l'Académie de Toulouse*, t. 33, 1923-24, 5 pages.

181. Préface au *Coup d'œil sur les Déterminants d'ordre supérieur* de Maurice Lecat. M. Lamertin, éditeur. Bruxelles, 1927, 2 pages.

182. Rapport annuel adressé au Conseil de l'Université le 18 mars 1927. *Rapports et Comptes rendus de l'Université de Toulouse*, 1927, 12 pages.

183. Souvenirs de Bologne. *L'Enseignement mathématique*, t. 27, 1928, 10 pages.

184. La fuite des Nébuleuses. *Bull. de la Soc. d'Astronomie populaire de Toulouse*, t. 25, 146, janvier 1934, 6 pages.

NOTICE SCIENTIFIQUE

Je me propose maintenant d'indiquer, aussi brièvement que possible, les résultats les plus remarquables contenus dans les publications précédentes. Un point dont je suis le premier à être étonné est que, pour faire un exposé aussi intéressant et aussi cohérent que possible, je dois m'écarter énormément de l'ordre chronologique. Que de simplifications, aperçues dans ces dernières années, quant à l'obtention de résultats d'abord construits par des voies détournées.

Je trouve aussi extrêmement malaisé de diviser cette réexposition par des sous-titres précis. Analyse, Géométrie, Physique théorique, ...? Tout cela n'est qu'un et me semble découler des mêmes Principes. Cette opinion ne fait d'ailleurs que refléter celle des esprits actuellement les plus autorisés à moins qu'elle n'exprime le renouvellement du miracle grec. Les dieux ont tout fait en géométrisant.

Principes. Formules stokiennes. Travaux de Georges Humbert.

Il me semble que, dans cette Notice, je n'ai à peu près rien à examiner en dehors des identités

$$(1) \quad \int_C X\,dY = \int\int_A dX\,dY, \qquad \int\int_S X\,dY\,dZ = \int\int\int_V dX\,dY\,dZ, \ldots$$

et de leurs conséquences. L'occasion aidant, je pourrais écrire un Traité d'Analyse où tout découlerait des formules (1), y compris les considérations ensemblistes les plus modernes et les plus délicates car, pour que ces égalités aient un sens, il n'y a nul besoin que A soit une *aire* et V un *volume*, au sens vulgaire de ces mots.

A coup sûr, cette extraordinaire fécondité des formules (1) a déjà été remarquée depuis longtemps. Elle peut s'étudier sans signes d'intégration, en n'écrivant que des *formes différentielles* assujetties à deux opérations fondamentales, la *multiplication* et la *dérivation* dites *extérieures*. C'est la science de Grassmann reprise depuis sous des formes vectorielles puis tensorielles diverses avec aboutissement actuel aux magnifiques travaux de M. Élie Cartan.

Toutefois, sans s'éloigner de la physionomie des formules (1), il m'a semblé qu'il restait à faire bien des choses des plus esthétiques amorcées d'ailleurs par le profond et délicat géomètre que fut Georges Humbert. La publication du Tome premier des *Œuvres* de ce savant, faite, en 1929, par MM. Pierre Humbert et Gaston Julia, permet des comparaisons aisées avec ce qui suit; dans une analyse bibliographique du même volume (*L'Enseignement mathématique*, t. **29**, 1930, p. 169), j'ai même proposé de voir en Georges Humbert, tout comme en Charles Hermite, l'un des précurseurs de la Physique théorique.

La première formule (1), par de simples changements de variables, donne la petite formule de Green-Riemann puis la formule de Stokes ordinaire

$$(2) \qquad \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Celle-ci admet des modalités, tout aussi proches de (1), qui sont mieux adaptées à nombre de problèmes. Telle est la formule

$$(3) \qquad \int_\Sigma U\,dP + V\,dQ = \iint_\sigma \left(\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q}\right) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma$$

dite *formule de Stokes pour espaces à canaux* [**7**], [**8**], [**131**], [**136**], [**138**] (1). L'espace est divisé en canaux par les deux familles de surfaces $P = \text{const}^e$, $Q = \text{const}^e$. L'intégrale double de (3) est invariante pour toutes les cloisons σ transversales à un même faisceau de canaux, cloisons en *projections canales* les unes des autres. L'équation, avec Φ pour fonction inconnue,

$$(4) \qquad \frac{1}{\Theta(x, y, z)\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \Psi(\Phi, P, Q)$$

donne des cloisons S (d'équation $\Phi = 0$) qui, dans un même faisceau de canaux, conservent toujours l'invariance transversale

$$(5) \qquad \iint_S \Theta\,dS = \iint_\sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{\Psi_0(P, Q)}.$$

Dans le second membre de (4), Ψ est une fonction analytique ou non, voire une fonctionnelle simplement assujettie à se réduire, pour $\Phi = 0$, à une expression $\Psi_0(P, Q)$ donnant un sens au second membre de (5).

---

(1) Les numéros gras, entre crochets, renvoient à l'index bibliographique.

Il y a ici une théorie de la *propagation* de l'intégrale *quelconque* (5), en ΘdS, sur des cloisons S, déterminées par une équation (4), se trouvant toujours en projection canale l'une de l'autre dans un faisceau de canaux quelconque.

Ceci est un premier cas très net de considérations que l'on peut rattacher aussi bien à la Physique ou à la Géométrie sans qu'il y ait le moindre bénéfice à séparer les deux points de vue; le véritable bénéfice est même de conclure qu'au fond, il y a identité entre les principes des deux sciences.

L'intégrale double en ΘdS peut représenter des aires ($\Theta = 1$), des masses, des charges, ... en propagation; de plus, la multiplicité des solutions Φ peut permettre de considérer, à la fois, différentes cloisons S *non raccordées*, de canal à canal contigu, d'où l'apparence d'un front d'onde qui se brise, s'émiette en corpuscules, [**127**] à [**131**], [**142**]; voilà, très sommairement, une image physique.

Géométriquement, les cloisons qui se propagent en conservant leurs aires ramènent aux vues de Georges Humbert. Dans les travaux déjà cités du regretté géomètre, on trouve quantité d'aires gauches qui se conservent tout en se déformant entre des surfaces limitrophes et, quand toutes ces surfaces sont *algébriques*, Humbert met l'aire invariante en évidence en appliquant, de manière ultra-élégante, le célèbre théorème d'Abel.

On remarquera l'extraordinaire variété de questions pouvant être traitées en l'équation (4); ceci dépend de l'indétermination de Ψ. Ainsi il peut y avoir, en (4), des équations aux dérivées partielles de tous les ordres et même d'ordre infini; si l'on s'en tient aux équations (4) du premier ordre, il y a analogie avec l'équation de Jacobi d'où possibilité de nouvelles comparaisons mécaniques, [**7**], [**134**].

Dans ces considérations, il y a des choses très simples et archaïques, remontant notamment à Archimède. Soit un cylindre circulaire à la surface duquel on trace un contour fermé c, simplement connexe; on projette tous les points de c sur l'axe du cylindre d'où un conoïde C. Soit maintenant une sphère de même rayon glissant dans le cylindre; elle propage, dans le conoïde C une aire invariante. Ce résultat archimédien est extrêmement proche d'une des conceptions fondamentales de la très actuelle Mécanique ondulatoire. Il aide à comprendre comment la propagation d'une onde peut être mise en relation avec le mouvement d'un point, lequel serait ici le centre de la sphère. De plus, le conoïde C peut devenir très fin, très délié, ne propager qu'une aire sphérique très petite; celle-ci, pendant la propagation, n'aura pas toujours la même orientation et ceci est le germe d'une Mécanique plus subtile que celle des points matériels ne tournant jamais sur eux-mêmes.

En conservant le cylindre et le conoïde C, on peut remplacer la sphère par des surfaces plus générales, [**136**].

Les propagations *coniques* sont également pleines d'intérêt. Témoin le théorème suivant qui n'a été définitivement mis au point qu'avec le concours de M. Paul Vincensini, mon élève, [**7**].

Si le plan d'une lemniscate de Bernoulli, de centre O, *et du cercle circonscrit, roule sur un cône quelconque, de sommet* O, *la surface de Monge* M *et la sphère* S *engendrées sont telles qu'une cloison de* M *est toujours équivalente en aire à sa perspective, de centre* O, *sur la sphère.* Donc on a des propagations d'aires invariantes, dans le cône projecteur, en faisant pivoter la surface M autour de O.

Bien que ce théorème soit parmi les plus simples à rattacher à l'étude de l'équation (4), je n'hésite pas à le dédier à la mémoire de Georges Humbert ; ce dernier, quoique maniant supérieurement les généralités concernant courbes et surfaces algébriques, aimait beaucoup les illustrations particulières et la lemniscate de Bernoulli fut notamment parmi ses courbes préférées (1).

Les recherches de Georges Humbert sur les aires ellipsoïdales pourraient, de même, être complétées par ce théorème :

Soit l'ellipsoïde

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

et la surface auxiliaire (dite *surface planifiante*) *d'équation*

$$C(V - C)z^2 = V \sin^2 W$$

en laquelle on a posé

$$V = \frac{A^2x^2 + B^2y^2}{Ax^2 + By^2},$$

$$\frac{VW}{\sqrt{C(V - C)}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - Ax^2 - By^2 - z\sqrt{V - C(V - C)z^2}$$

avec φ *fonction arbitraire.*

Tout contour E *tracé sur l'ellipsoïde et projeté conoïdalement, à partir de* Oz, *sur la surface planifiante donne, sur celle-ci, un contour* E_1 *dont la projection ordinaire* E_2 *sur le plan* Oxy *enferme une aire plane équivalente à l'aire ellipsoïdale enfermée dans* E.

Naturellement, on peut tirer de l'équation (4) d'autres surfaces qui se planifient comme l'ellipsoïde, à l'aide du même conoïde et de la même surface planifiante; il y a, dans le conoïde, *propagation de l'aire ellipsoïdale* bien que cette aire ne conserve pas la forme ellipsoïdale.

L'étude de cette propagation défie jusqu'ici toute intégration pratique, même en n'ayant recours qu'à des équations aux dérivées partielles du premier ordre [136].

Ce théorème ellipsoïdal porte à préciser un point qui, dans mes recherches, est tout à fait essentiel.

Toute intégrale double peut être remplacée par une intégrale stokienne. C'est un

(1) *Voir* Émile Borel ; Notice sur la vie et les travaux de Georges Humbert (1859-1921) lue, à l'Institut, dans la séance du 27 mars 1922, p. 10.

des aspects du recours aux *fonctions de lignes*. Si Σ est une cloison d'intégration donnée, de frontière fermée Γ, il n'y a, par exemple, qu'à considérer, sur le cône $O\Gamma$, un contour C perspective quelconque de Γ et une cloison S jetée sur C. Toujours par perspective, on fera correspondre S à Σ et toute intégrale donnée sur Σ pourra être remplacée par une intégrale étendue à S et *stokienne* car, pour obtenir S, il suffit d'en avoir le contour C. Cette assertion, énoncée ici de manière ultra-brève, demande de nombreuses précisions et c'est l'étude de cas nombreux qui m'a précisément fait écrire des Mémoires étendus, [**24**] à [**28**]. Les choses peuvent se généraliser en remplaçant les canaux coniques par des canaux quelconques d'où recours à la formule (3). Elles peuvent aussi s'étendre dans l'hyperespace [**50**].

En général, le remplacement d'une intégrale multiple quelconque par une intégrale stokienne s'effectue avec intervention d'une infinité de variétés d'intégration sur lesquelles on peut toujours dire qu'il y a *propagation* de l'intégrale initiale.

Dans l'espace ordinaire et pour des problèmes particulièrement simples (notamment dans le cas des canaux coniques), la formule stokienne à utiliser finalement est la *formule réduite*

$$\int_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{vmatrix} = \int\int_S \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma \tag{6}$$

en laquelle L, M, N sont des fonctions homogènes d'ordre -2. Dès que l'on tient ces considérations d'homogénéité, on aperçoit une foule de choses qu'elles simplifient; quantité d'intégrales de surfaces sont avantageusement réduites en écrivant l'équation de la surface d'intégration sous la forme $f(x, y, z) = 1$ avec f homogène, ce qui est toujours possible, [**6**], [**136**], [**137**] et ce sont des considérations de ce genre qui ont rendu possible la constitution des espaces de Finsler (1).

D'élégantes alliances naissent également entre *théorèmes abéliens* (Humbert) et *formules stokiennes*. Soit, par exemple, [**2**], [**27**], [**28**], la surface algébrique Σ, d'équation

$$\varphi_m(x, y, z) + \varphi_{m-1}(x, y, z) + \ldots + \varphi_0 = 0,$$

transpercée par un cône OC, le contour fermé C étant hors Σ et n'ayant aucun rapport obligatoire avec cette surface. La somme abélienne des m volumes coniques compris, dans OC, entre O et les m nappes de Σ est

$$\int\int_S \left[-\frac{\varphi^3_{m-1}}{3\varphi^3_m} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi^2_m} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} \right] (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma,$$

(1) P. Delens. La métrique angulaire des Espaces de Finsler. *Actualités scientifiques*, 80, 1934, p. 9.

la cloison S étant établie de manière quelconque sur C. On reconnaît, dans le crochet, une fonction homogène d'ordre — 3 et l'intégrale relève alors de la formule réduite (6).

Nous n'insisterons pas davantage sur cette *Géométrie des Intégrales doubles* extensible, répétons-le, aux intégrales multiples, [**31**], [**50**], mais qui, en attendant, imposa le titre du fascicule [**2**].

Si tout ce qui précède s'inspire surtout des travaux de Georges Humbert, il serait injuste d'oublier cet autre géomètre de grande valeur que fut Gabriel Kœnigs. Celui-ci publia, en 1889, dans le *Journal de Mathématiques*, un Mémoire *Sur la détermination du volume engendré par un contour fermé*, Mémoire regardé, à l'époque et pendant longtemps, comme offrant de curieux et rares exemples d'applications *géométriques* de la Formule de Stokes. M. Émile Picard, dans son *Traité d'Analyse* (I, 1901, pp. 130-136), attirait l'attention sur ces applications et donnait, de son côté, une théorie stokienne des angles spatiaux, théorie qui, au fond, ne dépend que de la formule réduite (6).

Tels furent les points de départ de mes recherches. Dès 1910, j'avais de nombreuses formules stokiennes à signification géométrique si simple que je pouvais les introduire dans le Cours de Mathématiques générales que je professais alors.

Je ne tardai pas ensuite à trouver la grande voie de la Physique théorique qui reprend les idées de Grassmann et les formes de Pfaff selon MM. Édouard Goursat et Élie Cartan. Nous y reviendrons, mais on peut remarquer tout de suite que la voie est de celles que la Science a parcourue avec une rapidité aussi merveilleuse que foudroyante.

Renvoyons, plus loin, à *Géométrie* et à *Physique théorique*.

Formule de Green. Systèmes différentiels et permutations de leurs intégrales.

Prenons, tout de suite, le cas de n variables, [**8**], [**26**].

a. Soient la formule de Green(¹)

$$(7)\qquad \int \alpha_i \Phi_i \, d\sigma = \int \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} d\tau, \qquad \operatorname{div} \Phi = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'identité

$$(8)\qquad \int_{W_{n-1}} X_1 \, dX_2 \ldots dX_n = \int_{W_n} dX_1 \, dX_2 \ldots dX_n.$$

(¹) Conformément à la convention imposée partout par le Calcul différentiel absolu, tout indice figurant deux fois dans un terme monome est indice de sommation.

On passe de (7) *à* (8) *par la transformation*

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

si

$$X(f) = \frac{\Phi_i}{\operatorname{div}\Phi}\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{avec} \qquad f = X_2, X_3, \ldots, X_n$$

et si

$$X(U_1) = 1 \qquad \text{avec} \qquad U_1 = \log X_1 .$$

b. Ceci permet la construction du multiplicateur de Jacobi

$$D = \frac{\partial(U_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

avec lequel

$$X(f) = \frac{1}{D}\frac{\partial(f, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

et

$$Y(f) = \frac{1}{D}\left|\begin{array}{cccc|c} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & 0 \\ \hline & & & & F_1 \\ & & D & & F_2 \\ & & & & \cdots \\ & & & & F_n \end{array}\right|$$

donnent

(9) $$X[Y(\;)] = Y[X(\;)] .$$

Les F *sont des fonctions arbitraires* de $X_2, \ldots, X_n$, *non de* U_1.

Ce double théorème est d'abord apparu dans mes travaux par la seconde partie, par la partie *b*. Ce fut ma Thèse de Doctorat [**1**], [**12**], complétée en [**18**], mais actuellement épuisée et que, pour cette raison, j'ai récemment résumée en [**136**].

La partie *b*, considérée seule, ne m'intéresse plus guère, encore que l'opérateur Y soit agréable à regarder et ne poursuive remarquablement la théorie du multiplicateur jacobien relatif à X. Ce qui est complet et tout à fait dans l'esprit de la Physique théorique actuelle, c'est l'association des équations

(10) $$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_i = 0, \qquad \Phi_i\frac{\partial}{\partial x_i} = 0,$$

association qui se traduit par une simple et évidente permutation de symboles. Ensuite la seconde équation (10) possède une théorie jacobienne, un opérateur Y permutant les intégrales X_i et même un opérateur Z tel que

$$XZ - ZX = \lambda X \tag{11}$$

car on passe de (9) à (11) par une transformation immédiate [**136**]. C'est passer toutefois du domaine du permutable au domaine du non permutable ; quand les F sont linéaires à coefficients constants, en X_i, et que l'on tente de transformer, par Y, une intégrale également linéaire, en X_i, le résultat dépend de l'action d'un *produit de matrices* sur les X_i. On retrouve le *Calcul matriciel* avec sa règle fondamentale de multiplication *non commutative*.

D'autre part, les créateurs de la Physique théorique (Bateman, De Donder, Einstein, ...) nous ont fait remarquer que les équations fondamentales de cette science étaient toujours de la forme de la première équation (10) ; il ne s'agit que de *divergences évanouissantes* et, par exemple, les équations générales d'Einstein sont constituées par l'évanouissement d'une divergence généralisée, dans un espace de Riemann.

On voit donc que la double théorie que je viens de rappeler contient comme un raccourci des méthodes essentielles et actuelles de la Physique théorique. Certes, on peut aujourd'hui construire de tels raccourcis de bien des manières mais, si l'on pense que ma Thèse date de 1901, on peut sans doute reconnaître que, sous une forme élémentaire, elle précédait dignement l'évolution qui s'est si fortement dessinée depuis.

Au reste et à ne considérer que la partie *b* du double théorème, j'ai eu la satisfaction d'éveiller bien des intérêts. J'ai donné, à cet égard [**6**], une bibliographie sur laquelle je ne reviendrai pas en détail. Le sujet est immédiatement rattachable à la Théorie des Groupes, au Problème de Killing, aux recherches de M. Elie Cartan. Dans ses *Leçons sur le Problème de Pfaff* (1922, p. 234), M. Ed. Goursat l'a repris d'une manière curieuse. Enfin, après la publication de mon fascicule [**6**], un géomètre de Kiew, M. Pfeiffer, lui a encore consacré un long et remarquable travail [1]. D'autres communications ont été faites, en 1928, au Congrès de Bologne.

Des généralisations sont possibles. J'ai étudié aussi [**13**], [**73**], des *équations aux opérateurs* X_i qui se réduisent à des équations aux dérivées partielles quand les X_i se réduisent à des dérivées partielles ordinaires. Quand il existe des opérateurs U_j, permutables avec les X_i, ces opérateurs changent en d'autres les solutions de l'équation originelle. Ces équations sont intermédiaires entre les équations aux dérivées

---

[1] G. Pfeiffer (Kiew). Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3, t. **23**, 1931, pp. 139-182.

partielles et les équations formées par opérateurs *hermitiques* en Mécanique ondulatoire.

Bien d'autres rapprochements pourraient être faits. Ainsi l'association des deux équations (10) adjoint à la première le système différentiel ordinaire

$$\frac{dx_1}{\Phi_1} = \frac{dx_2}{\Phi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\Phi_n}.$$

C'est le système des représentations *mécanistes*; on peut chercher à lui donner une forme aussi simple que possible. Or la Mécanique classique nous a habitués au moins à deux choses : d'abord à deux séries de variables pour représenter les coordonnées des points en mouvement et les composantes des vecteurs vitesses, ensuite à des *intégrales*, fonctions qui sont tenues de rester *constantes* pendant le mouvement. Soient les deux séries de variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n; \qquad y_1, y_2, \dots, y_n$$

et une intégrale F. On aura

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i = 0.$$

Or il n'y a pas de manière plus simple de satisfaire à une telle équation que de poser

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Ce sont les équations canoniques. Henri Poincaré commence ainsi ses *Leçons de Mécanique céleste*.

Les propriétés de ces équations suivent aisément. Le théorème de Poisson s'accorde avec (9).

Et tout ceci est encore dans la dépendance des identités (1) généralisées ici en (8).

Dans mon fascicule [**4**], certaines symétries propres aux systèmes différentiels canoniques sont dites *antistokiennes*. Il est bien certain que Poincaré, dans ses si profondes recherches de Mécanique céleste, ne cesse point de relever de la Physique théorique telle qu'elle est entendue maintenant.

Formules stokiennes d'ordre supérieur. Ondes. Équations de Monge-Ampère.

En ne transformant que la première des identités (1), il est encore aisé d'obtenir la formule

$$(12) \qquad \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq = \int\int_S \Delta\, dx\, dy$$

en laquelle

$$(13) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix}.$$

Par p, q, r, s, t, il faut entendre les dérivées partielles, de z, habituelles. Quant à P, Q, R, S, T, ce sont des fonctions dont chacune contient arbitrairement x, y, z, p, q, **[24]**.

Il m'a fallu tâtonner assez longtemps avant d'attribuer au déterminant Δ la forme optimum.

L'intégrale double de la formule (12) est invariante pour toutes les déformations de la cloison S qui en conservent le contour C *et l'ensemble des plans tangents*, ou des normales, *menés à* S *le long de* C.

Il suit de là que cette intégrale double est de la nature d'une *courbure* et que la formule (12) doit contenir comme cas particuliers des formules telles que celle d'Ossian Bonnet. Nous reprendrons plus loin ce point de vue, en Géométrie.

Il y a beaucoup de choses à tirer de (12) dans le seul domaine de l'Analyse.

En développant le déterminant Δ, on obtient une expression de la forme

$$\Delta = K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D.$$

Donc l'équation $\Delta = 0$ est une équation de Monge-Ampère sur les surfaces intégrales de laquelle l'expression

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq$$

est une différentielle exacte. Ces équations de Monge-Ampère ne sont pas d'un type absolument général; elles touchent aux *transformations de Bäcklund*, illustrées par de très importants développements dus à M. Goursat, et il m'a été commode de dire qu'elles étaient du *type de Bäcklund*.

Quant à l'équation générale de Monge-Ampère, dite, de même, du *type de Lie*, ceci porte à l'écrire

$$
(14)\qquad \begin{vmatrix} s & t & o & o & -1 \\ r & s & o & -1 & o \\ p & q & -1 & o & o \\ I & J & L & M & N \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} = o,
$$

les dix fonctions I, ... , T contenant de manière quelconque x, y, z, p, q. Les caractéristiques ont alors pour équations

$$
\begin{gathered} I dx + J dy + L dz + M dp + N dq = o, \\ P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq = o. \end{gathered}
$$

Mettre une équation *quelconque*, de Monge-Ampère, sous la forme (14), n'est évidemment qu'une question d'identification ; celle-ci entraîne des calculs quadratiques d'où résulte l'existence de deux systèmes de caractéristiques.

Toute équation de Monge-Ampère peut être mise sous la forme intégrale

$$
(15)\qquad \int_C P dx + Q dy + R dz + S dp + T dq = \int\int_S \Theta dx dy.
$$

Alors Θ est, comme P, ... , T, une fonction quelconque de x, y, z, p, q, [**30**].

Si $\Theta = o$, l'équation est du type de Bäcklund. Si, de plus, l'expression sous l'intégrale de ligne se réduit à $u dv$, l'équation possède une *intégrale intermédiaire* $u = \varphi(v)$. Elle peut alors s'écrire soit sous la forme $\Delta = o$, le déterminant de (13) ayant pour dernière ligne

$$
u v_x, \quad u v_y, \quad u v_z, \quad u v_p, \quad u v_q,
$$

soit sous la forme (14) dont le déterminant a, pour ses deux dernières lignes,

$$
\begin{matrix} u_x, & u_y, & u_z, & u_p, & u_q \\ v_x, & v_y, & v_z, & v_p, & v_q \end{matrix}.
$$

On voit quelle extrême élégance présente la théorie des équations de Monge-Ampère développée du point de vue stokien. Elle incite ainsi à des généralisations qui, bien entendu, ne peuvent être distinctes de celles construites par MM. Goursat et Cartan mais qui ont bien leur valeur originale de par l'emploi systématique de déterminants ordinaires ou symboliques. Dans mon Mémoire [**25**], de 1913, j'ai explicitement écrit la formule, à déterminant du huitième ordre, qui se place logiquement après les formules (2) et (12); on peut lui faire correspondre une équation analogue à (14).

Ainsi une simple intuition, qui n'a même pas besoin de calculs de vérification, indique qu'il y a des équations aux dérivées partielles de tous les ordres et à un nombre quelconque de variables qui peuvent être considérées comme analogues à l'équation classique de Monge-Ampère; ces équations généralisées se partageront aussi en types variés, analogues au type de Bäcklund ou au type de Lie suivant le nombre de lignes ordinaires que l'on remplacera, dans les déterminants, par des lignes d'opérateurs de dérivation.

Seulement pour voir ces choses dans toute leur généralité, il ne faut pas se contenter des formules stokiennes issues de la première identité (1); il faut utiliser la seconde et même l'identité générale (8). C'est revenir à la Physique théorique et, plus particulièrement, à l'Électromagnétisme. On est confondu d'admiration devant l'immense étendue de ces synthèses particulièrement commodes à penser sous des aspects physiques.

Il faut observer, d'autre part, que lorsque la Mécanique ondulatoire est apparue avec son symbolisme qui remplaçait de simples multiplicateurs par des opérateurs de dérivation ou des carrés de dérivées par des carrés symboliques qui étaient alors des dérivations de second ordre, elle ne faisait point là quelque chose de bien original; la simple comparaison des équations (13) et (14) montre le même procédé jouant très naturellement dans la théorie des équations de Monge-Ampère. Il y a encore quelque chose d'analogue en l'association des deux équations (10); ceci en attendant les généralisations fournies par les opérateurs *hermitiques*.

Pour revenir aux questions importantes qui se rattachent à la formule (12), je signalerai l'étude de l'intégrale

$$\int\int_S [K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D]\,dx\,dy.$$

A quelle condition cette intégrale peut elle prendre la forme du premier membre de (12).

Il revient au même de demander à quelle condition une équation de Monge-Ampère peut être du type de Bäcklund et c'est ainsi que le problème a été résolu d'abord par M. Goursat.

En [2] j'ai consacré tout un chapitre aux recherches de ce Maître vénéré.

La condition dont il s'agit comprend cinq relations différentielles en K, A, B, C, D. En y remplaçant K, ... , D par $K\lambda$, ... , $D\lambda$ on obtient *le système en* λ qui, par dérivations, ne donne que deux équations distinctes. Mais ceci suffit pour empêcher, *en général*, l'existence de λ ; par suite, les équations $\Delta = o$ sont bien d'un type particulier.

Le système en λ comprend, comme cas très spécial, le système de quatre équations auquel satisfont la partie réelle et la partie purement imaginaire d'une fonction de deux variables complexes [**29**].

Pour plus de détails, je renverrai encore à [**2**] et aux grands Mémoires [**24**] à [**28**]. On y trouvera nombre d'équations de Monge-Ampère classiques mises sous la forme intégrale (15).

Tout ceci est loin d'épuiser l'intérêt de la formule (12) et les travaux que je projette actuellement, à son sujet, me semblent dépasser en importance ceux déjà faits. Cette formule, comme toute formule stokienne, mais de façon particulièrement intéressante, permet de mettre en relation la propagation intégrale avec la propagation de discontinuités de nature différentielle c'est-à-dire avec la propagation ondulatoire telle qu'elle est entendue dans les travaux modernes dûs surtout à M. J. Hadamard. Reprenons la surface S sur laquelle nous imaginerons le contour C et les cloisons S_1, S_2, S_3, ..., toutes tangentes à S le long de C. Quand, sur S, on franchit C vers l'intérieur, on peut continuer à cheminer sur une cloison S_n, mais alors les dérivées de z, au delà de la première, subissent des discontinuités. C'est là qu'il y a représentation possible d'une propagation par ondes, au sens différentiel du mot. La propagation de telles ondes apparaît donc comme intimément liée à celle d'intégrales invariantes c'est-à-dire comme liée, elle aussi, aux identités (1).

Observons encore que, dans les espaces à canaux envisagés jusqu'ici, les canaux étaient définis par des équations finies $P(x, y, z) = \lambda$, $Q(x, y, z) = \mu$. Pourquoi ne seraient-ils pas définis, plus généralement, par des équations telles que

$$P(x, y, z, p, q) = \lambda, \qquad Q(x, y, z, p, q) = \mu.$$

Ceci est une nouvelle extension qui fait jouer un rôle très important à la formule (12) et au déterminant (13).

Surfaces algébriques. Échange du paramètre et de l'argument.

Toutes les formules stokiennes restent valables si l'on y imaginarise les variables. La chose me semble intuitive, encore que n'ayant point dédaigné de reprendre quelques démonstrations.

Le théorème de Poincaré sur la nullité de l'intégrale double, de constitution complexe, attachée à une surface fermée (quand, bien entendu, cette surface n'enferme point de singularités) peut provenir, très simplement, de la petite formule de Green-Riemann à variables imaginaires. Il peut donc provenir de la première identité (1) et l'on pense, tout de suite, que la seconde identité (1) et plus généralement l'identité (8) ont encore des rôles très importants à jouer dans les domaines complexes.

Reprenons l'assertion déjà envisagée plus haut, à propos de considérations géométriques *réelles* à la Georges Humbert : *Toute intégrale double peut être remplacée par une intégrale stokienne.*

Oui. Mais, en général, l'intégrale initiale et l'intégrale stokienne qui la remplace ne sont point étendues *à la même* surface. Alors, très naturellement, très intuitivement, on en vient à se demander en quelles circonstances spéciales les deux intégrales n'en feront qu'une et, d'une manière plus pénétrante, en quels cas, lors de l'étude d'une intégrale double attachée à une surface *algébrique*, on pourra discerner, en cette intégrale et sur la surface même, des parties à forme stokienne, parties qui ne seront point, au fond, de véritables intégrales doubles et dont le repérage sera d'une considération absolument essentielle quant à la classification de l'intégrale double considérée d'abord.

On voit avec quelle clarté l'esprit des méthodes de cette Notice conduit à une question cependant très redoutable, la plus redoutable, sans doute, de celles traitées dans le puissant ouvrage de MM. Emile Picard et Georges Simart : *Théorie des Fonctions algébriques de deux variables indépendantes*. Les intégrales doubles qui y sont dites *de seconde espèce* sont celles qui demandent des réductions stokiennes.

Mes principaux Mémoires sur le sujet **[37]**, **[38]** ne se prêtent guère à une brève description mais leur esprit, toujours issu de la considération préliminaire des identités (1), peut être évoqué sans difficulté. Ainsi, dans la première identité (1), j'ai commencé par poser

$$X = \frac{\sqrt{f(x)f(y)}}{x-y}, \qquad Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}, \tag{16}$$

d'où

$$\int_C \frac{\sqrt{f(x)}\,dy}{(x-y)\sqrt{f(y)}} - \int_C \frac{\sqrt{f(y)}\,dx}{(x-y)\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}\int\int_S \frac{V(x,y)\,dx\,dy}{(x-y)^2\sqrt{f(x)f(y)}} \tag{17}$$

avec

$$V(x,y) = (x-y)[f'(x)+f'(y)] - 2f(x) + 2f(y).$$

Si C est un rectangle de côtés parallèles aux axes on a ainsi la formule qui constitue le théorème d'échange du paramètre et de l'argument entre intégrales hyperelliptiques.

Ce théorème intervient, pour M. Emile Picard, dans l'étude de la surface *algébrique*

$$z^2 = f(x)f(y).$$

Il est d'ailleurs suivi d'importantes extensions mais, sous la forme indiquée ici, il suffira pour remarquer que $V(x, y)$ est divisible par $(x-y)^2$ si bien que l'intégrale double de (17) n'a qu'une *pseudo-ligne* d'infini $x = y$, laquelle n'apparaît point si f et V sont particularisés et si la division est effectuée. Il faut cependant savoir retrouver cette pseudo-ligne dans le premier membre de (17).

Il y a encore beaucoup plus fort. A y regarder de près, V est divisible non seulement par $(x-y)^2$ mais par $(x-y)^3$. *Il y a des intégrales doubles dont les pseudo-lignes d'infini sont lignes de zéros pour l'expresion sous les signes d'intégration*, [**39**].

Je me suis proposé de généraliser la substitution (16) et j'ai mis en évidence de nombreux cas à pseudo-lignes d'infini lignes de zéros. Ces résultats sont d'ailleurs résumés en [**2**].

D'autre part, j'ai examiné si, en passant de la première identité (1) à la seconde, on ne pourrait pas construire, entre intégrales doubles et triples, un théorème analogue à celui concernant l'échange du paramètre et de l'argument, théorème d'abord appuyé sur la formule (17). Le résultat est encore remarquablement intuitif, [**35**]. Il suffit de poser

$$X = \frac{\sqrt{P(x)\,P(y)}}{x-y} + \frac{\sqrt{P(y)\,P(z)}}{y-z} + \frac{\sqrt{P(z)\,P(x)}}{z-x},$$

$$Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{P(y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)},$$

$$Z = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{P(z)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)}.$$

L'extension au cas de n variables se conçoit immédiatement.

Les considérations précédentes, comme M. Picard l'a encore montré, sont intimément liées à la multiplication des fonctions elliptiques. Il y a d'autres liens avec la simple addition des mêmes fonctions, ce que rappelle le seul titre du Mémoire [**38**]. Ce dernier se termine aussi par l'étude d'une condition permettant à une pseudo-ligne d'infini d'être ligne de zéros.

Théorie des Fonctions. Sommabilité.

Mes travaux sur la Théorie des Fonctions se rapportent surtout au problème du prolongement analytique, tel qu'il a été envisagé par G. Mittag-Leffler et par M. Emile Borel.

Soit, dans un cercle de convergence C,

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots = s_n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

et, par ailleurs, la *fonction sommatrice*, entière

$$f(\xi) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \dots$$

ou, d'une manière abrégée,

$$f(\xi) = c_0 + c_1 + c_2 + \dots .$$

Il s'agit d'étudier la représentation de $F(x)$ par l'expression

$$\frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + c_2 s_2 + \dots}{c_0 + c_1 + c_2 + \dots} \tag{18}$$

lorsque ξ tend vers de certaines valeurs, généralement vers l'infini suivant des chemins d'infinitude à préciser. Souvent cette expression limite prend la forme d'une *double limite*, la fonction sommatrice f dépendant de quelque indice qui agit sur son mode de croissance.

En l'expression (18) c'est d'abord la structure du numérateur, qui doit fixer l'attention, le dénominateur étant simplement $f(\xi)$. Or, pour ce numérateur, j'ai d'abord construit l'expression intégrale

$$\sum_0^\infty c_{n+p} s_n = \left(\frac{1}{2 i \pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^p \frac{F(z)\, \varphi_p(\zeta)}{(\zeta - \xi)\left(z - \dfrac{\xi x}{\zeta}\right)} d\zeta\, dz \tag{19}$$

où l'on remarque le rôle de l'indice p qui permet de décaler les c par rapport aux s; il y a là un point secondaire mais parfois intéressant. On a

$$\varphi_p(\xi) = f(\xi) - (c_0 + c_1 + \dots + c_{p-1}), \qquad \varphi_0(\xi) = f(\xi).$$

Le second membre de (19) n'est construit que grâce aux inégalités

$$|\xi| < |\zeta|, \qquad |\xi x| < |\zeta z|$$

mais celles-ci ne jouent aucun rôle restrictif car, quels que soient ξ et x, on peut toujours prendre le rayon $|\zeta|$ du *cercle* Γ assez grand pour qu'elles soient réalisées.

On voit que j'ai ramené, par la formule (19), l'étude de la sommabilité, par séries de *polynomes tayloriens* s_n, à l'étude d'une intégrale double. Je suis toujours dans la même note, dans le même sujet supérieurement plastique. Cette intégrale double, bien entendu, est à rattacher à toutes celles qui généralisent l'intégrale simple de Cauchy et qui sont toujours très travaillées.

L'essentiel de mes travaux a été résumé en [**3**]. Ils sont apparus, dans l'esprit que je viens d'indiquer, en [**57**] et poursuivis jusqu'en [**72**]. Le Mémoire [**67**] des *Acta mathematica*, se rapportant à la représentation des fonctions méromorphes, a trait, de ce fait, à d'importantes études intermédiaires. Si l'on part de la fonction méromorphe F, développée en série de fractions rationnelles, on peut remplacer le second membre de (19) par un développement analogue, complètement explicite, c'est-à-dire sans signes d'intégration. Il est alors particulièrement aisé d'étudier l'influence du choix de la fonction sommatrice f. C'est dans de tels cas que la représentation de F par série de polynomes tayloriens exige l'évanouissement de facteurs de la forme

$$f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right),$$

les a_i étant les pôles de la fonction méromorphe F. Or, supposons que la fonction sommatrice f soit une fonction entière *pourvue de zéros*. On pourra faire croître ξ avec des formes *arithmétiques* telles que, pour d'autres formes *arithmétiques* de x, le quotient $\xi x : a_i$ coïncide toujours avec un zéro de f. La représentation de F peut être assurée ainsi dans toutes les régions du champ complexe mais seulement sur des ensembles dénombrables qui peuvent être extrêmement variés. Dans cet ordre d'idées, j'ai fait jouer un rôle important à la fonction σ de Weierstrass. Cette sommabilité, par fonctions sommatrices *pourvues de zéros*, m'a semblé, il y a vingt-cinq ans, une nouveauté dont personne depuis n'a revendiqué la conception antérieure.

Au delà et en revenant au cas général, l'étude de l'intégrale double de (19), après une première intégration qui peut être faite de plusieurs manières, conduit aisément aux résultats connus : sommabilité exponentielle à domaine polygonal, sommabilité exponentielle itérée, sommabilité, dans l'*étoile*, par fonctions $E_\alpha(x)$ de Mittag-Leffler encore si proches de l'exponentielle. Plus avant, on retrouve, comme fonctions sommatrices, les fonctions entières si curieuses qui sont finies et même nulles à l'infini sur tout chemin rectiligne, parabolique, algébrique, ..., mais qui ont tout de même des chemins d'infinitude d'une autre nature, ce qui fait que le théorème de Liouville, un instant défié, reprend vite tout son aplomb.

A propos de la fonction $E_\alpha(x)$, je me suis souvent étonné de n'en point rencontrer d'applications diverses, nettement distinctes de celles des théories précédentes. En ma Note [**72**], j'ai tenté de faire cesser cet ostracisme.

Équations différentielles. Groupes.

Je me suis peu occupé d'équations différentielles, d'un type analytique donné, dont il aurait fallu, toujours au point de vue analytique, perfectionner la théorie et notamment l'intégration. Je signalerai cependant le Mémoire [**48**].

J'ai surtout été intéressé par la *structure* des systèmes différentiels généraux qui servent ou peuvent servir de base à de grandes théories tout en conservant l'aspect essentiel des équations les plus élémentaires. Ainsi, soit d'abord l'équation

$$(20) \qquad \frac{d\xi}{dt} = A\xi$$

où A est une constante. C'est l'équation de la variation exponentielle propre à d'innombrables phénomènes physiques, chimiques et biologiques. Cette portée, déjà grande, devient incomparablement plus grande encore avec le système

$$(21) \qquad \frac{d\xi^j}{ds} = A^j_\alpha \xi^\alpha$$

dont la structure s'inspire manifestement de (20).

Admettons d'abord qu'en (21) les A^j_α soient des fonctions de s; si ces fonctions sont tant soit peu quelconques, le système défie toute intégration, toute théorie. Mais on peut diminuer la difficulté par *linéarisation*, en posant

$$(22) \qquad A^j_\alpha = -c^j_{k\alpha}\lambda^k,$$

les c à trois indices étant des constantes. Le système (21), ainsi particularisé, joue un rôle fondamental dans l'élaboration de la Théorie des groupes finis et continus. Ce fait, après beaucoup de tâtonnements, peut déjà être reconnu dans Lie; il est beaucoup plus manifeste avec Bianchi et Cartan et je l'ai pris pour point de départ dans mon fascicule [**6**]. La nature exponentielle de ξ, si simple en (20), est conservée pour le système (21) avec la particularisation (22); c'est ainsi qu'il y a, pour les transformations infinitésimales des groupes, un calcul exponentiel symbolique couramment manié par Lie, sinon avec la notation e^X du moins avec des développements bien connus en X. La notation exponentielle elle-même a été reprise, par Henri Poincaré, dans ses trois célèbres Mémoires relatifs aux groupes continus, point de vue que j'ai repris à mon tour dans mon fascicule [**8**]. En ce dernier, comme dans les Notes ou Mémoires [**41**] à [**47**], j'ai repris aussi l'étude du système (21), avec la particularisation (22), en m'efforçant de ne faire d'abord aucune hypothèse sur les $c^j_{k\alpha}$.

On reconnaît alors que les *relations de structure*, que la Théorie des groupes établit entre ces constantes, sont des *relations de simplicité*. Si on ne les suppose pas satisfaites, le système différentiel est encore d'une transcendance qui me semble inaccessible dans l'état actuel de l'Analyse; au contraire, dans le cas où elles ont lieu, on peut s'engager dans les merveilles de la Théorie des groupes, merveilles qui ne vont pas sans nombreuses et redoutables difficultés, mais enfin on peut faire quelque chose. C'est ici tout un système philosophique qui apparaît et qui consiste à construire des théories non pas à partir d'*idées* directrices, d'une réalisation plus ou moins possible, mais, tout de suite, à partir de *possibilités*.

On peut observer aussi que certains systèmes différentiels, tels le système de Maurer-Cartan, peuvent *s'écrire* avec des $c^j_{k\alpha}$ absolument quelconques mais qu'ils n'ont aucun sens si ces constantes ne satisfont pas aux relations de structure.

Tout ceci se rattache évidemment à la très difficile question, examinée par endroits par M. Émile Picard, des systèmes différentiels dépendant de paramètres et qui ont des propriétés extrêmement différentes suivant que ces paramètres sont, ou non, liés par des relations de nature *arithmétique*.

Reprenons encore le système (21) en imaginant des variations vectorielles $d\xi^j$ conditionnées linéairement par des variations de coordonnées dx^k; c'est dire que l'on sera conduit à poser

$$A^j_\alpha = -\Gamma^j_{k\alpha}\frac{dx^k}{ds},$$

les Γ à trois indices étant maintenant des fonctions des variables x^k. Le système (21) devient

$$\frac{d\xi^j}{ds} + \Gamma^j_{k\alpha}\frac{dx^k}{ds}\xi^\alpha = 0. \tag{23}$$

C'est le système qui définit le *déplacement parallèle* généralisé (Levi-Civita, Cartan, Schouten, ...). De toute évidence, déplacement parallèle ordinaire quand tous les Γ sont nuls.

L'équation (23) suppose aussi la nullité des dérivées *généralisées*

$$\frac{D\xi^j}{Dx^k} = \frac{\partial\xi^j}{\partial x^k} + \Gamma^j_{k\alpha}\xi^\alpha = 0,$$

remarque par laquelle on pourrait commencer le Calcul différentiel absolu.

Le rapprochement de (23) et de (21)-(22) conduit aux *espaces de groupes* [**6**], [**8**]. On voit quelles immenses extensions sont immédiatement atteintes par de simples considérations de structure.

Enfin j'attirerai l'attention sur les Notes [**53**], [**54**] ainsi que sur leur développement [**55**].

Étant donnée une équation différentielle du premier ordre, dépendant d'un paramètre, on peut toujours lui faire correspondre, sans intégration, une propagation d'intégrales doubles invariantes sur des cloisons transversales en de certains cônes.

L'assertion se généralise pour une équation dépendant de plusieurs paramètres, pour des hypercônes, pour des faisceaux de canaux quelconques. Il y a d'ailleurs là une nouvelle intervention des *espaces à canaux*.

Problèmes intégro-différentiels. Fonctions continues sans dérivées.

Par problèmes intégro-différentiels, j'entends ici les problèmes qui sont de nature intégrale et cependant pour lesquels la science classique écrit surtout des équations différentielles, ce qui étrique les questions, généralement en les rendant *analytiques*.

Voici un exemple très simple emprunté aux *trajectoires isométriques* de M. Maurice d'Ocagne [2], [7], [141]. *On considère un cercle, deux rayons quelconques* OA *et* OB *et l'on demande toutes les courbes sur lesquelles ces rayons interceptent un arc égal à l'arc circulaire* AB.

Le problème est *intégral*; il exige des comparaisons de mesures d'arc et rien d'autre. Cependant on est tenté de le traiter par l'équation différentielle $ds = a\,d\theta$ avec $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ et l'on n'obtient ainsi que des cercles ayant pour diamètre les rayons du cercle donné. C'est la solution *analytique*. Il y en a bien d'autres.

Ces considérations, quand on peut leur donner toute la généralité possible, sont essentielles pour la Physique théorique. Elles ont donné naissance à la *Géométrie infinitésimale directe* de M. Georges Bouligand, lequel est d'ailleurs revenu plus précisément sur le sujet précédent en un article de la *Revue Scientifique*, du 23 décembre 1933, intitulé : *Les schèmes géométriques d'incertitude*. Les fameuses *incertitudes de Heisenberg*, au point de vue intégro-différentiel, prennent un aspect extrêmement simple et d'ailleurs tout à fait intuitif. Quant aux généralités physiques, elles supportent de moins en moins les notions d'analyticité et de continuité et ce dans des conditions qui détruisent l'idée de dérivée mais non celle d'intégrale. C'est là ce qui sépare la Mécanique ondulatoire de la Mécanique lagrangienne.

Reprenons le problème isométrique ci-dessus. Marquons des rayons OA, OB, OC,... qui pourront être rapprochés indéfiniment. Sur OA, soit un point de départ α à partir duquel on peut tracer *deux* arcs $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ égaux à AB, avec β et γ sur OB.

Si je prends le chemin $\alpha\beta$, je puis le continuer analytiquement en $\beta\delta$, avec δ sur OC, mais je puis aussi le continuer en $\beta\varepsilon$ avec aussi ε sur OC et ainsi de suite.

Des lignes. telles que $\alpha\beta\varepsilon$..., présentent l'isométrie recherchée; elles sont continues.

Elles ont une *structure fine* qui peut devenir *indéfiniment fine* et permet alors d'autant moins l'attribution d'une direction de tangente que l'on recherche celle-ci dans une région de plus en plus resserrée. D'autre part, les points anguleux permettent de concevoir des directions de tangentes ne précisant aucun point de contact.

C'est le transport de telles remarques dans le domaine cinématique qui conduit aux incertitudes de Heisenberg.

En [144], j'ai examiné les allures physiques des trajectoires telles que $\alpha\beta\varepsilon$...; on retrouve ainsi, toujours très simplement, nombre de propriétés auxquelles il semble qu'on se plaise à donner parfois une allure paradoxale qu'on devrait plutôt éviter.

Ainsi, en microphysique, une opération de mesure peut changer du tout au tout l'allure d'un phénomène ou, si l'on préfère, modifier brusquement une probabilité phénoménale. La chose s'explique immédiatement sur le schème précédent. Soit un arc du chemin $\alpha\beta\varepsilon$... à mesurer, avec la variable angulaire θ, jusqu'au point λ situé sur un certain rayon OL. En présentant, si je puis dire, le rayon OL, au phénomène de cheminement $\alpha\beta\varepsilon \ldots \lambda$, je fournis, au chemin considéré, une occasion de bifurquer; pour ce qui se passe, au delà de λ, les probabilités peuvent être brusquement modifiées par le seul fait d'avoir eu recours au rayon OL.

Observons encore que la continuité supposée jusqu'ici au chemin $\alpha\beta\varepsilon$... n'a rien de nécessaire.

De tels schèmes peuvent aussi être conçus dans l'espace, par exemple en partant de la conservation d'aires sphériques examinée plus haut (théorème de la surface de Monge engendrée par une lemniscate). Les secteurs, tels AOB, deviennent des canaux coniques qui peuvent être remplacés eux-mêmes par des canaux quelconques; les propagations générales, dans les *espaces à canaux*, relèvent de toutes les singularités examinées maintenant, ce qui se traduit, sur l'équation (4), par l'indétermination qui préside au choix de Ψ.

Les ondes archimédiennes elles-mêmes peuvent se singulariser dans le même ordre d'idées.

Le conoïde C, alors considéré, découpe une aire de contour c sur le cylindre circulaire; il découpe la même aire sur le cylindre de rayon moitié tangent intérieurement et sur la sphère S inscrite dans le premier cylindre. D'où une courbe de Viviani V qui, animée de translations et de rotations, décrit une surface Σ continue, à lignes singulières V aussi rapprochées qu'on voudra (comme les points anguleux d'un chemin $\alpha\beta\varepsilon$...); on peut d'abord construire une infinité de surfaces Σ et, de plus, en déduire d'autres, à partir de l'une d'elles, par translations et rotations. Toutes ces surfaces Σ propagent une aire invariante dans le conoïde C. Voir [136].

Ces généralisations spatiales des chemins $\alpha\beta\varepsilon$... pourraient être indéfiniment poursuivies et avec des complexités croissantes; dans ces conditions, les incertitudes de Heisenberg ne sont que des images tout à fait préliminaires de conceptions géométriques limites, très diverses, où l'on ne retrouve plus qu'une partie des propriétés géométriques qui existaient avant les passages aux limites.

Équations aux dérivées partielles.

Je crois m'être très notablement occupé des équations aux dérivées partielles et cependant j'en dirai peu de chose à propos du titre ci-dessus. Ceci tient à ce que nombre de résultats, concernant ces équations, ont été rattachés, en ce qui précède, à d'autres sujets.

Ainsi, nous avons déjà remarqué que l'équation (4), qui régit la propagation d'intégrales invariantes dans les espaces à canaux, pouvait être considérée comme une équation aux dérivées partielles en Φ, d'ordre quelconque et même d'ordre infini. Le sujet est immense.

A propos de la formule de Green, nous sommes revenus sur les équations du premier ordre $X(f) = 0$ avec l'opposition ou plutôt l'association fondamentale (10).

Les *équations aux opérateurs* X sont, de même, des équations d'ordre quelconque, prototypes des *équations aux opérateurs hermitiques*.

Les équations de Monge-Ampère et toutes les généralisations signalées avec elles sont évidemment des équations aux dérivées partielles. Le fait de les avoir rapprochées des formules stokiennes n'empêche pas que je leur ai consacré de grands développements.

Après ces développements, où dominent les équations d'ordre supérieur, j'insisterai maintenant sur l'équation du premier ordre, voire sur la simple équation non linéaire à deux variables

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \tag{24}$$

On dit souvent que c'est là une des régions les mieux faites du Calcul intégral. Dans les grandes lignes, sans doute. Mais que de subtilités, curieuses et instructives, sont toujours à relever à propos de l'intégration de l'équation (24) et plus particulièrement quant au choix de l'intégrale complète, [**40**], [**49**].

Soit, par exemple, à rechercher les *surfaces telles que la distance du pied* P *de l'ordonnée au point où la normale rencontre le plan* Oxy *soit proportionnelle à* OP.

Cet énoncé donne immédiatement l'équation

$$z^2(p^2 + q^2) = \mu^2(x^2 + y^2)$$

qui, en prenant pour fonction inconnue $u = z^2$, se ramène à la forme

$$p^2 + q^2 = 4\mu^2(x^2 + y^2).$$

Le plus simple semble alors de la traiter comme une équation en $x, p,$ et $y, q,$ d'où

$$p^2 - 4\mu^2 x^2 = 4\mu^2 y^2 - q^2 = 4a^2\mu^2$$

et, par suite, l'intégrale complète,

$$\frac{z^2}{2\mu} = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx + \int \sqrt{y^2 - a^2}\, dy + b.$$

Il est plus long d'utiliser le système différentiel caractéristique et il faut même une certaine ingéniosité pour en tirer cette autre intégrale complète

$$\frac{z^2}{\mu} = (x^2 - y^2)\sin\alpha + 2xy\cos\alpha + \beta$$

beaucoup plus maniable cependant que la précédente. On conclut de là, quant à des équations (24) très courantes, que *la plus grande simplicité dans l'obtention de l'intégrale complète ne conduit pas forcément à l'intégrale complète la plus simple.*

J'ai grande envie aussi de critiquer les hélicoïdes et les équations (24) à groupe hélicoïdal. Il y a là de fausses généralités. Soient, pour une surface quelconque, γ l'angle de la normale MN et de Oz, δ la plus courte distance de ces deux droites, r le rayon vecteur du pied de la cote z, enfin λ le segment mT de Oz, si m est la projection de M et T le point où le plan tangent en M coupe Oz. La recherche des surfaces définies par une propriété quelconque $\varphi(\gamma, \delta, \lambda, r) = 0$ se traduit, en coordonnées cylindriques, par une équation

$$\psi\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2, \frac{\partial z}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial r}, r\right] = 0$$

qui ne contient pas de θ libre. D'où, par une quadrature, une intégrale complète de la forme $z = a\theta + \omega(r)$. C'est une famille d'hélicoïdes. Réciproquement, on peut prendre des hélicoïdes au hasard ; on leur trouvera toujours des propriétés géométriques où interviendront les éléments $\gamma, \delta, \lambda, r$. Et ceci explique pourquoi les hélicoïdes ont fourni, à certains auteurs, l'occasion de développements étendus mais procédant d'une facilité par trop grande.

Finalement, je voudrais considérer, beaucoup plus sérieusement, les équations à n variables

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \tag{25}$$

ou, en abrégé, $f(x_i, z, p_i) = 0$. En différentiant, on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i = 0$$

ou

$$(X_i + p_i Z)\, dx_i + P_i\, dp_i = 0 .$$

Or, il n'y a pas de manière plus simple de satisfaire à une telle équation que de poser

$$\frac{dx_i}{P_i} = \ldots = \frac{-\,dp_i}{X_i + p_i Z} = \ldots ; \tag{26}$$

c'est la remarque déjà faite plus haut, à propos des systèmes différentiels canoniques. Bien entendu, il reste à montrer ensuite, lorsque, de (25) et de $n - 1$ intégrales de (26), on a tiré les p_i, que $dz = p_i dx_i$ est une équation intégrable et c'est vraiment là qu'est le nœud de la théorie (Cauchy, Jacobi, Lie, Goursat, De Donder, Saltykow,...). Mais je considère comme très important que le système caractéristique (26) puisse être imposé d'abord par la seule raison de simplicité.

Théorie des Surfaces. Géométrie.

Dans mes travaux, je ne peux pas plus séparer la Géométrie, de questions déjà envisagées en ce qui précède, que je ne puis la séparer de la Physique théorique qui sera considérée plus loin. Ceci tient à ce que les identités initiales (1) sont, à la fois, analytiques, géométriques et physiques et qu'il en est de même de leurs conséquences; quant au fait de ne pas toujours pouvoir étiqueter nettement celles-ci, j'y perçois non la confusion mais l'admirable unité de la Science.

Reprenons la formule (12), conséquence très directe de la première identité (1). Nous avons déjà remarqué que l'intégrale double du second membre était de la nature d'une *courbure* [**24**]. Bien qu'ayant écrit cette formule (12) depuis plus de vingt ans, je ne cesse point d'admirer la magie qui incite, par son intermédiaire, à faire sortir la Théorie des surfaces de la première identité (1). J'attends encore bien davantage, de cette même formule (12), quant aux développements, actuellement en élaboration et sommairement indiqués plus haut, concernant la Théorie différentielle des ondes.

Comme premier résultat, remarquons [**25**] que la formule (12) contient la formule d'Ossian Bonnet

$$\int_C d\omega - \int_C \frac{ds}{\rho_g} = \int\int_S \frac{d\sigma}{R_1 R_2} . \tag{27}$$

Et nous voici naturellement aiguillés vers le *rayon de courbure géodésique* ρ_g et vers les *lignes géodésiques* pour lesquelles ce rayon est infini.

De même, sur la surface S, en tout point du contour fermé C, il y a, sauf singularités, un angle élémentaire de *torsion géodésique* $d\tau_g$ et un rayon de *courbure normale* ρ_n avec lesquels on aura, [**2**], [**83**], [**84**], les formules, analogues à (27),

$$\int_C d\tau_g = \int\int_S \begin{vmatrix} r & s & -1 & 0 \\ s & t & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \zeta \end{vmatrix} \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 dx dy,$$

$$\int_C \frac{ds}{\rho_n} = \int\int_S \frac{\Omega\, d\sigma}{R_1 R_2} - \int\int_S \begin{vmatrix} r & s & -1 & 0 \\ s & t & 0 & -1 \\ P_1 & Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & T_2 \end{vmatrix} dx dy.$$

Pour la clarté des notations, rappelons que

$$\frac{ds}{\rho_g} = P_1 dx + Q_1 dy + S_1 dp + T_1 dq,$$
$$d\tau_g = S_2 dp + T_2 dq,$$
$$\frac{ds}{\rho_n} = S_3 dp + T_3 dq.$$

On a, de plus,

$$\Omega = \frac{S_1}{S_3} = \frac{T_1}{T_3}, \qquad \xi = \frac{F_x}{\Phi}, \qquad \zeta = \frac{F_y}{\Phi}, \qquad \Phi^2 = F_x^2 + F_y^2.$$

Tout ceci suppose la surface S donnée par une équation $z = z(x, y)$ et le contour C défini, en projection, par $F(x, y) = 0$.

Les deux formules intégrales qui viennent d'être associées à (27) n'ont pas, il faut le reconnaître, toute l'importance de (27); elles ne sont pas, comme (27), purement géométriques.

Mais, d'autre part, les seules notations montrent combien les trois formules sont étroitement liées. Logiquement, elles fournissent un substratum à une grande partie de la Théorie des surfaces. Faut-il rappeler encore que les lignes $d\tau_g = 0$ sont les *lignes de courbure* et que les lignes à ρ_n infini sont les *asymptotiques*.

Mentionnons d'autre part que si, pour une cloison S quelconque, en coordonnées x, y, z, on désigne par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en l'élément $d\sigma$, on a

$$\int_C P dx + Q dy + R dz + S d\alpha + T d\beta + U d\gamma = \int\int_S \Delta\, d\sigma$$

avec

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z & -1 & 0 & 0 \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z & 0 & -1 & 0 \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z & 0 & 0 & -1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ P & Q & R & S & T & U \end{vmatrix}$$

Ici, P, Q, R, S, T, U sont des fonctions dépendant chacune des six variables x, y, z, α, β, γ et d'ailleurs quelconques, toujours, bien entendu, sauf singularités.

La nouvelle formule m'a semblé prendre de l'importance du jour où certains cas particuliers ont été discutés par Paul Appell [**32**].

Mes premiers travaux, sur les applications géométriques de la formule de Stokes, [**77**], [**78**], [**80**], [**81**], [**82**], n'avaient trait qu'à la formule ordinaire (2). Ils s'inspiraient surtout des travaux de Gaston Darboux et de Gabriel Kœnigs; ce n'est que plus tard que je suis allé à Georges Humbert.

Les volumes *tournants*, c'est-à-dire dus à la rotation d'un contour fermé *gauche*, m'ont beaucoup intéressé; [**86**], [**87**], [**96**], [**97**], [**99**], [**100**]. Il y a là tout un monde qui généralise le premier théorème de Guldin, relatif aux volumes, alors que pour le second théorème élémentaire, relatif aux aires de révolution, je n'ai jamais pu trouver d'extension qui vaille d'être notée. G. Kœnigs semblait avoir déjà remarqué cette opposition assez bizarre.

Je considère comme complètement étudiés les volumes tournants engendrés par contours tracés sur les quadriques, ce qui a été résumé en [**2**]. Les résultats peuvent être indéfiniment poursuivis, sur les surfaces *algébriques*, avec le concours du théorème d'Abel. Les *fonctions de contours fermés*, qui s'introduisent dans ces questions, et plus généralement dans l'expression de toute intégrale double par une intégrale stokienne, sont évidemment des *fonctions de lignes*; d'où un contact, aussi important que naturel, avec les travaux d'Analyse fonctionnelle (M. Fréchet, J. Hadamard, P. Lévy, V. Volterra,...).

Quant à d'autres applications géométriques spatiales du théorème d'Abel, je renverrai surtout à [**88**], [**89**], [**91**], [**92**], [**94**], [**95**]. Les sommes abéliennes de volumes coniques deviennent particulièrement simples dans le cas des cyclides, y compris la cyclide de Dupin. Les aires sphéro-coniques de Georges Humbert, [**2**], [**10**], encore aisées à rattacher au théorème d'Abel, généralisent, pour la sphère, l'angle sécant dans le plan du cercle mais alors que, dans le plan, tout se ramène à l'angle, il faut, dans l'espace, distinguer l'angle solide, au sommet du cône, de la différence des aires découpées sur la sphère transpercée.

Cette dissemblance a d'ailleurs été signalée par Humbert mais la formule de Stokes en permet une étude aussi rapide qu'élégante.

Toutes ces considérations d'aires, sur surfaces algébriques, ont des extensions possibles aux surfaces analytiques [**102**].

Enfin, je me suis aussi occupé de la Théorie des surfaces dans un sens moins spécialement intégral. En [**73**], [**79**], les surfaces données par une propriété de leurs asymptotiques m'ont ramené à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

étudiée, dans un ordre d'idées analogue, par M. Lecornu.

En [**74**], [**76**], [**101**], ce dernier renvoi se rapportant au volume du *Journal de Mathématiques* publié à l'occasion des Jubilés Paul Appell et Emile Picard, j'ai repris les questions fondamentales traitées dans les Thèses des illustres géomètres avec quelques compléments intéressants. Ainsi, il peut arriver que certaines surfaces, comme le tore, n'aient point d'asymptotiques déterminables par voie élémentaire mais que l'on puisse leur associer une infinité d'autres surfaces dont les asymptotiques relèvent de la même transcendance et soient même en correspondance géométrique très simple avec celles de la surface initiale.

Il resterait encore bien d'autres choses à faire ou tout au moins à reprendre, en Géométrie, avec le point de vue des identités initiales (1) qui est, ne l'oublions pas, un point de vue à la Grassmann. Pour l'instant, je me borne à signaler le contact avec les travaux de mon excellent ami Henri Fehr, de Genève, qui en est à la Seconde édition d'une *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale*.

Physique théorique.

Tous les développements de Physique théorique qui me sont connus me semblent exister, à l'état latent, dans les identités (1). Depuis [**2**], [**4**] et [**7**] jusqu'à [**141**], que de fois je me suis interrogé sur la raison de cette assertion mais sans jamais pouvoir conclure de manière absolument claire et définitive. Il se peut qu'il n'y ait pas de « raison » et que ce soit un travers de l'esprit humain que d'admettre que, sous toute chose, il y ait une explication. Quand on peut *constater* et que l'on voit nettement ce que l'on constate il faut, sans doute, du côté des choses élémentaires, se déclarer satisfait.

Quant aux *tentatives* d'explication, on peut remarquer qu'en (1), C est une *ligne*, que A et S sont des *aires*, que V est un *volume*, toutes choses que nous nous représentons comme par la vue, par le toucher, par les sens, bref que nous nous représentons d'abord *physiquement*.

Dès lors, aux *transformations* des identités (1) doivent correspondre des *transformations* de concepts physiques élémentaires tels que l'étendue et nous voici dans le monde phénoménal.

Ainsi la seconde identité (1) se transforme aisément en la formule stokienne de l'espace-temps

$$(28) \qquad \int\!\!\int_S M_{ij}\,dx_i\,dx_j = -\int\!\!\int\!\!\int_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\cdot\cdot} & M_{2\cdot\cdot} & M_{3\cdot\cdot} & M_{4\cdot\cdot} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}}$$

en laquelle V est une variété à trois dimensions, d'équation $F = 0$, déformable dans E_4 en conservant toujours la frontière invariable S à deux dimensions.

Un espace-temps *électrifié*, du moins suivant les conceptions maxwelliennes reprises par M. Th. De Donder, est un espace-temps où la formule (28) s'évanouit en l'identité $0 = 0$. Il suffit, pour cela, que le déterminant de l'intégrale triple soit identiquement nul, ce qui peut être réalisé soit par le choix de F, soit par le choix des M_{ij}. Il y a ainsi deux groupes d'équations électromagnétiques.

Dans les déterminants de formules telles que (28) on peut remplacer les opérateurs de dérivation écrits isolément, opérateurs en ∂, par d'autres, en D, plus généraux. C'est avec les opérateurs D que naît le Calcul différentiel absolu. Les dérivations en D ne sont pas permutables ; leur non permutabilité engendre les symboles $B^{\beta}_{ij\alpha}$ de Riemann pouvant exprimer la *courbure* d'un espace en lequel

$$ds^2 = g_{ij}\,dx_i\,dx_j\,.$$

Si tous les symboles B, à quatre indices, sont nuls, l'espace-temps est sans courbure, il est électromagnétique pur. Le cas *incurvé* qui, dans l'ordre de simplicité, se place immédiatement après le cas de la courbure partout nulle, correspond à

$$G_{ij} = B^{\alpha}_{ij\alpha} = 0\,.$$

Ceci est la loi de gravitation d'Einstein.

C'est toujours avec une vive satisfaction esthétique que l'on rappelle cet enchaînement aussi bref qu'admirable. Le rôle qu'y ont joué mes travaux personnels est, à coup sûr, fort minime. Je tiens cependant à faire remarquer que c'est lors de mes premiers contacts avec la Gravifique que je perçus que la discipline nouvelle pouvait se dérouler derrière les identités (1); la chose est consignée dans le Mémoire [**114**] qui date de 1922.

Je tiens aussi *à la forme* de la formule (28) et à toutes les symétries du Calcul différentiel absolu qu'on peut ramener à des symétries de déterminants. Ma toute première communication, aux *Comptes rendus*, concernant la Physique théorique [**104**], invoquait uniquement des symétries et il en a été de même en [**106**], [**116**] ainsi qu'en les Mémoires développés [**107**] à [**113**]. En mon fascicule [**4**], j'ai conservé cette manière de voir.

En [**124**], dans le Volume du Cinquantenaire de la *Société mathématique de France*, je suis revenu sur les origines communes de la Géométrie différentielle, selon Luigi Bianchi, et de l'Électromagnétisme; j'ai à peine besoin, ici, de m'expliquer sur un tel point puisque, à propos de Physique théorique comme à propos de Géométrie concernant la Théorie des Surfaces, ce sont toujours les mêmes identités initiales (1) qui sont en jeu.

Déjà en [**4**] mais plus particulièrement en [**7**], je suis revenu sur une bifurcation qui peut se placer tout de suite après la formule (28) et qui permet de quitter le rameau de la Gravifique pour le rameau de la Mécanique des milieux continus.

La chose a des origines fort anciennes et bien connues, les équations de Maxwell ayant toujours semblé comparables à celles de l'Élasticité. Mais, particulièrement dans le cas des fluides, j'ai pu définir trois états A (fluide ultra-parfait, sans actions de contact), B (fluide parfait, au sens ordinaire de ce mot), C (fluide visqueux), tels qu'avec une notation appropriée, on peut passer des équations de B à C comme on passe des équations de A à B.

Des idées de ce genre ont actuellement de grands développements. La Gravifique peut être considérée comme une théorie relativistique des équations de Maxwell généralisées, équations tirées de (28). Mais alors on doit pouvoir bâtir de même une Théorie relativistique de l'Élasticité (1) ou une Théorie relativistique de la propagation ondulatoire (2). C'est bien ce qui est arrivé.

Mon fascicule [**6**], relatif aux Groupes, toujours en vertu des mêmes points de départ est fortement teinté de Physique théorique ; j'y rapproche *six* grandes questions : groupes finis, groupes infinis (Cartan), trièdre mobile et travaux Cosserat, courbure et torsion dans les espaces affines ou à connexion affine (Cartan), Électromagnétisme d'origine maxwellienne, Géométrie de Cayley. Pour plus de détails sur le rapprochement de ces deux derniers points, voir [**5**].

---

(1) Th. De Donder. *L'Affinité*. Troisième partie. Fascicule de VIII-132 pages. G. Villars et Cie, Paris, 1934.

(2) J. van Mieghem. *Étude sur la Théorie des Ondes*. Publication de l'Institut belge de Recherches radio-scientifiques dirigé par Th. De Donder. Fascicule de XII-192 pages. G. Villars et Cie, Paris, 1934.

Dans mon fascicule [8], je reviens sur la Théorie unitaire des champs pour insister d'abord sur une divergence d'opinions qui s'est produite entre M. R. Ferrier et moi. Je ne crois pas, pour ma part, que la Gravifique première manière et la Théorie unitaire reposent sur des principes *essentiellement* différents.

Ceci dit, il est indéniable qu'à l'heure actuelle, la Gravifique évolue du côté de la Mécanique ondulatoire. Certains pronostiquent même qu'elle sera absorbée par cette Mécanique. En [140], j'ai montré comment la Théorie des opérateurs hermitiques pouvait ramener à l'association (10) laquelle peut servir de substratum à toute la Physique théorique. Et ceci s'accorde bien avec le rôle fondamental des identités (1) puisque l'association (10) est sous la dépendance de l'identité (8).

Personnellement je crois que les rapprochements valent mieux que les oppositions. Rien n'empêche de continuer à penser avec les méthodes de la Gravifique. Mais, pour qui préférerait penser à la manière de Louis de Broglie, de Dirac ou de Schrödinger, il y a encore amplement de quoi se satisfaire en partant des identités (1). Il y a même là des accords, d'une portée immense, entre choses semblant radicalement différentes au premier abord. La Gravifique avec ses ds^2, ses courbures, ses torsions (Cartan) est *géométrique*; la Mécanique ondulatoire, avec ses quanta, ses corpuscules pour lesquels la notion de trajectoire est de plus en plus suspecte est souvent *agéométrique*.

Cependant les *espaces à canaux*[1] nous donnent de premiers exemples simples de propagations indifféremment ondulatoires ou corpusculaires avec évanouissement de propriétés géométriques de nature différentielle. Et, même si ces espaces à canaux semblent trop géométriques, ils peuvent jouer un rôle adjoint analogue à celui joué provisoirement par les images gravitationnelles de Bohr. On y retrouve l'équation de Schrödinger. En effet, lorsque l'intégrale (5) se propage dans des canaux convenanables, on peut poser

$$F\,dx + G\,dy + H\,dz = \frac{1}{\Phi_0(P, Q)} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = u^2 d\frac{v}{u}$$

d'où

$$F = uv_x - vu_x, \qquad G = uv_y - vu_y, \qquad H = uv_z - vu_z.$$

Et comme

$$F_x + G_y + H_z = 0,$$

---

(1) Reprendre le début de la Notice, équations (3), (4), (5) et explications suivantes; revoir aussi « Problèmes intégro-différentiels ».

le calcul donne immédiatement

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta v}{v} = -\Omega(x, y, z),$$

c'est-à-dire l'équation de Schödinger non temporelle $\Delta W + \Omega W = 0$ dont u et v sont deux solutions.

On sait qu'on peut aisément passer de là, [7] et [8], à l'équation temporelle. Ceci peut ensuite se généraliser de bien des manières. La nature de Ω permet des aperçus matriciels beaucoup plus profonds que les anciennes considérations géométriques.

J'ai grandement développé tous ces points de [**127**] à [**144**]. En [**7**] et [**8**], on trouve des résumés particulièrement commodes. J'insisterai particulièrement sur [**134**] et [**135**]; l'équation (4), lorsqu'elle est du premier ordre, peut coïncider avec l'équation de Jacobi, écrite pour le mouvement d'un seul point et cependant c'est aussi l'équation d'une propagation pouvant s'émietter en autant de corpuscules qu'on voudra. Le fascicule [**7**] développe cette remarque.

La Physique théorique semble d'une portée prodigieuse. Elle indique, dans l'ensemble des Sciences mathématiques, les points d'une fécondité exceptionnelle. Elle tend, de plus, à découvrir les liens les plus avantageux à établir de théorie à théorie. A partir d'identités fondamentales, telles les identités (1), elle permet de construire la Mécanique classique, l'Électromagnétisme, les Théories élastiques,... et ceci montre déjà que ce n'est probablement pas une très bonne idée que de vouloir réunir ces constructions par des liens directs. C'est ainsi qu'on a cherché en vain des représentations mécaniques de l'Électricité puis des représentations électriques de phénomènes mécaniques et physiques divers, ce qui valait mieux mais était encore imparfait. Les liens que l'esprit humain peut le plus commodément percevoir sont, sans doute, à la base des théories, dans quelque moule analytique commun.

NOTICE PÉDAGOGIQUE

On ne travaille pas à une œuvre, aussi étendue que celle sommairement décrite en ce qui précède, sans en introduire quelques rudiments dans l'enseignement dont on est chargé. Si l'on se propose également de former des élèves qui puissent se distinguer de la masse amorphe des licenciés, on ne peut le faire qu'avec l'originalité tant soit peu créatrice qui distingue le professeur lui-même.

Cependant les bons élèves, écrémés par les Concours des Grandes Écoles ou simplement attirés par Paris, sont rares en province. Il faut tout spécialement rechercher ce qui peut éveiller, intéresser les intelligences; les résultats que j'ai obtenus, à cet égard, en trente-deux ans de professorat, me prouvent suffisamment que je n'ai point fait fausse route.

Le Diplôme d'Études supérieures, dès son origine, attira mon attention. En 1908, je lui consacrai un article [**177**] qui était suivi du travail d'un de mes élèves, M. A. Costabel, *Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe* (14 pages). Ce fut le premier sujet de Diplôme que j'inspirai et, après plus de vingt-cinq ans, je considère encore qu'il a été honorablement traité. J'ai dirigé depuis bien d'autres productions analogues ; la liste en serait fastidieuse.

M. Paul Vincensini, géomètre aujourd'hui connu et qui sera bientôt, je l'espère, mon Collègue dans l'Enseignement supérieur, est un disciple qui m'a déjà témoigné beaucoup de reconnaissance. Quelques autres Thèses et Diplômes, actuellement en voie d'élaboration, achèveront, sans doute, de montrer qu'une Université départementale peut contribuer à la formation des élites. Je crois d'ailleurs que c'est là le rôle essentiel de toute Université.

Professeur de Calcul différentiel et intégral, il me faut évidemment songer d'abord aux fondements classiques de l'Analyse. L'émerveillement éprouvé jadis, en étudiant les Leçons autographiées de Charles Hermite puis les Cours, si connus, publiés par Emile Picard, Edouard Goursat, Georges Humbert, est chose facilement contagieuse. Mais, à côté de ces grands Ouvrages, on a vu naître, par exemple, la *Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions* dirigée et rédigée en partie par Emile Borel. J'estime qu'il faut lui faire une petite place dans l'exposition de l'Analyse, non seulement parce qu'elle représente nombre d'idées modernes de grande importance, mais parce qu'il a été souvent remarqué que les jeunes gens faisaient volontiers preuve d'originalité en matière de Théorie des Fonctions.

Une autre et prodigieuse discipline moderne, la Physique théorique, s'est imposée, tout à coup, de manière si impérieuse qu'on a fondé, pour elle, à Paris, l'Institut Henri Poincaré.

J'estime qu'il faut aussi en donner une petite idée aux élèves de province; les envoyer systématiquement à Paris ne me paraît pas une attitude professorale vraiment digne. Du moins, on n'est pas obligé de commencer par là.

L'initiation, fort heureusement, est aisée, la Physique théorique pouvant être développée en liaison extrêmement étroite avec les principes mêmes du Calcul intégral.

Je m'arrête. Au total, je viens déjà de faire allusion à une tâche énorme. Jusqu'à quel point peut-on l'entreprendre? C'est ce que je vais montrer brièvement.

Ce qui suit n'est évidemment pas une description de mon Cours, description impossible en quelques pages. Je signale surtout les liens qui, à l'heure actuelle, peuvent unir l'Analyse des grands Ouvrages classiques aux Théories modernes précitées.

Principes généraux. — La question des principes de l'Analyse est plus à l'ordre du jour que jamais à cause du rude assaut que les Théories quantiques livrent aux notions de *continuité*. De brefs préliminaires sur les *ensembles* s'imposent. La notion de *passage à la limite* doit être réexaminée avec beaucoup d'attention. Autrefois, il semble que les passages à la limite étaient généralement *conservatifs*; un passage à la limite conservait ce qu'on y mettait. Ainsi une droite, définie par deux points A et B, est aussi bien définie, comme tangente en A, quand B tend, vers A, le long d'une *bonne* courbe. Mais le long d'un ensemble unidimensionnel, même continu, définissable, élément par élément, au moyen de quelque propriété *intégrale*, le jeu différentiel précédent peut ne plus être possible[1] et les fameuses *incertitudes de Heisenberg* peuvent être immédiatement rattachées à cette remarque.

Les propriétés intégrales se conservent dans des circonstances incomparablement plus nombreuses que celles qui conservent des propriétés différentielles. Il y a là une opposition qu'un Cours de Calcul infinitésimal ne doit plus méconnaître.

A l'aide de ces remarques préliminaires, on peut aisément traiter ce qui concerne les intégrales simples, en y comprenant, bien entendu, les cas où la conception de l'intégrale implique la conception réciproque d'une dérivée. Cette réciprocité donnera même, dans le Cours, les développements qui seront, de beaucoup, les plus étendus.

---

[1] Pour plus de détails, voir, dans la Notice précédente, *Problèmes intégro-différentiels*. Ces considérations sont d'ailleurs celles qui ont conduit M. Georges Bouligand à créer la Géométrie infinitésimale directe.

Identités intégrales fondamentales. — Après les intégrales simples, on arrive tout naturellement aux intégrales doubles et multiples. J'ai à peine besoin de dire que je considère comme essentiel d'étudier d'abord les identités

$$(1) \quad \int_C X\,dY = \int\int_A dX\,dY, \qquad \int\int_S X\,dY\,dZ = \int\int\int_V dX\,dY\,dZ, \ldots.$$

Des transformations et des associations linéaires les changent en formules stokiennes. Belle occasion, rien qu'en passant, de parler précisément de changements de variables, de déterminants fonctionnels et de questions connexes.

Quant aux formules stokiennes elles-mêmes, je leur attribue une importance de premier plan. Les plus simples sont évidemment à placer entre les intégrales simples et les intégrales doubles; ensuite l'intégrale *stokienne* double apparaît comme susceptible de remplacer n'importe quelle intégrale double, généralement en changeant de surface d'intégration. Ceci ouvre la Théorie des *fonctions de lignes*. Extensions aisées aux intégrales multiples. Innombrables applications géométriques, physiques,... ; on n'a que l'hésitation du choix.

Théorie des surfaces. — Cette théorie peut suivre immédiatement les considérations précédentes. On peut l'aborder de bien des manières. Pour l'instant, je donne la préférence à la considération d'une courbe C tracée sur la surface S par un point M où l'on considère la normale à S et la normale principale à C. Soient θ l'angle de ces droites et R le rayon de courbure de C en M. On se propose d'étudier les expressions

$$(2) \qquad \frac{\cos\theta}{R}, \qquad \frac{\sin\theta}{R}.$$

La première est la *courbure normale* appartenant à la formule

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

qui joue un rôle essentiel dans le Traité de M. Emile Picard; la seconde est la *courbure géodésique* $1 : \rho_g$ de la formule d'Ossian Bonnet

$$\int_C d\omega - \int_C \frac{ds}{\rho_g} = \int\int_S \frac{d\sigma}{R_1 R_2}.$$

Celle-ci est une transformation de la première identité (1) par l'intermédiaire de la formule (12) de la Notice précédente. Il va de soi que l'on peut étudier d'abord la première expression (2) avec toutes ses conséquences : théorèmes de Meusnier et d'Euler, lignes asymptotiques, lignes de courbure,... ; mais la seconde expression (2) joue le rôle capital de conduire aux éléments *géodésiques*, notamment aux *lignes géodésiques* $1 : \rho_g = 0$.

Passons maintenant au point de vue des deux formes différentielles quadratiques dont l'étude peut être mise aussi à la base de la Théorie des surfaces. La première forme

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2$$

se généralise en

$$ds^2 = g_{ij}dx_i dx_j .$$

C'est ici qu'il faut faire, avec Bianchi, les remarques fondamentales sur lesquelles s'est développé, plus tard, le Calcul différentiel absolu. Il existe une dérivation *généralisée*, en symboles D remplaçant les ∂, telle que

$$\frac{\mathrm{D}g_{ij}}{\mathrm{D}x_k} = 0.$$

De même, il existe, pour un vecteur à composantes P^i, un *déplacement parallèle généralisé* tel que

$$\frac{\mathrm{DP}^i}{\mathrm{D}x_k} = 0. \tag{3}$$

En remplaçant les D par des ∂, on retrouve le déplacement parallèle ordinaire, à P^i constants, et c'est d'ailleurs cette remarque qui place l'équation (3) à côté des considérations euclidiennes les plus élémentaires. De plus, (3) donne aisément une équation générale de *lignes géodésiques* ou *lignes autoparallèles*. C'est retrouver le premier point de vue dans un esprit de recoupement des plus remarquables.

Fonctions analytiques. — Considérant la Théorie des fonctions à travers les célèbres Ouvrages mentionnés au début de cette Notice, il m'a toujours semblé que je ne pouvais mieux faire, depuis les théorèmes de Cauchy et de Liouville jusqu'au théorème de Mittag-Leffler (séries de fractions rationnelles) et aux fonctions elliptiques (Appell et Lacour). A propos du théorème de Cauchy, je mentionne simplement qu'il est une conséquence de la petite formule de Green-Riemann, donc de la première identité (1).

Il reste toutefois, comme je l'indiquais encore au début, à dire quelque chose de l'esprit moderne représenté par les *Monographies* de la Collection Émile Borel. Mais quoi? L'embarras est immense. Après beaucoup de réflexions, je me suis décidé à faire une petite place à la croissance des fonctions entières. On remarque que e^z ne croît indéfiniment qu'à droite de l'axe imaginaire. Ensuite que la fonction

$$e^{x^2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx\right)$$

n'a pour *angle d'infinitude* que l'angle droit dont la bissectrice est la partie positive de l'axe réel.

On peut s'arrêter là. Si l'on veut aller plus loin, on considère que la fonction précédente est la fonction $E_\alpha(x)$ de Mittag-Leffler pour $2\alpha = 1$. Et l'on peut alors parler du cas de α quelconque, puis des fonctions dont les *chemins d'infinitude*, semblant parfois défier le théorème de Liouville, sont de plus en plus bizarres et intéressants.

Équations différentielles. — Remarques analogues. On ne peut guère s'éloigner des équations élémentairement intégrables, de quelques rudiments sur les équations linéaires d'ordre n et sur les systèmes linéaires. Au delà, pour ne pas être très vite arrêté, il faudrait de grandes généralités, telles celles de la Théorie des groupes, et, cette fois, c'est l'impossible.

L'époque actuelle exige, de plus en plus, du non analytique, même à propos d'équations analytiques (passages à la limite sur des ensembles de fragments analytiques non raccordés analytiquement). C'est la question déjà signalée plus haut, dans les *Principes généraux*, question qui naît surtout avec les équations différentielles et qui semble particulièrement travaillée, sous l'impulsion de M. Georges Bouligand, par l'École mathématique de Poitiers. Elle n'est pas oubliée à Toulouse.

Équations aux dérivées partielles. — Ici le côté *formel* reprend ses droits. Les déterminants des formules stokiennes livrent aisément des types variés d'équations aux dérivées partielles. Ainsi, au delà du premier ordre, il est aisé, tout au moins, de *situer* les équations de Monge-Ampère. Pour le cas linéaire et homogène du premier ordre, il est possible de parler du multiplicateur de Jacobi. Les équations en x, y, z, p, q sont généralement envisagées sur des questions de Géométrie. Cependant on ne traite ainsi que des problèmes fantaisistes. La Physique théorique peut ouvrir, sans plus de peine, des champs d'activité analogues mais plus élevés et plus réels.

Physique théorique. — En suivant l'ordre chronologique, il est naturel de commencer par jeter un coup d'œil sur la Gravifique d'Einstein. Cette Gravifique naît à la base même du Calcul intégral et repose sur la seconde identité (1) transformée en formule stokienne de l'espace-temps, formule (28) de la Notice précédente. On atteint ainsi une première forme de l'Électromagnétisme.

Les formules stokiennes ont des déterminants, à lignes d'opérateurs en ∂, où ces ∂ peuvent être remplacés par des D plus généraux. D'où une dérivation généralisée qui, outre les formules stokiennes, conserve aussi la règle de dérivation des produits.

C'est la dérivation en D déjà introduite en Théorie des surfaces.

La non permutabilité des dérivations en D fait naître les symboles de Riemann $B^{\beta}_{ij\alpha}$.

L'évanouissement de tous ceux-ci correspond à un espace-temps *sans courbure* ou électromagnétique pur. Ensuite le cas *incurvé* le plus simple correspond à

$$G_{ij} = B^{\alpha}_{ij\alpha} = 0 .$$

C'est la loi de gravitation d'Einstein.

On peut s'en tenir là. Si l'on veut développer davantage, on peut aller à l'identité de Bianchi et aux équations générales d'Einstein.

Comme je l'ai remarqué dans la Notice précédente, nous sommes à un tournant où la Gravifique va peut-être se fondre dans les Théories ondulatoires. Il dépasserait de beaucoup les limites du Cours de traiter une telle question mais il est à noter que, dans les Théories ondulatoires et corpusculaires, on peut trouver nombre d'aperçus mathémathiques simples et suggestifs, tous en relation immédiate avec les identités (1).

Ainsi, dans l'état actuel de la Science, je considérerais comme une lamentable dissymétrie de ne pas parler de l'association des équations

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_i = 0, \qquad \Phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$$

déjà signalée, en (10), dans la Notice précédente. La seconde est l'équation, linéaire et homogène, aux dérivées partielles du premier ordre; elle a toujours figuré dans les Cours d'Analyse. La première est le lemme de la divergence évanouissante fondamental pour la Physique théorique.

Comment désormais séparer les deux choses?

Les *espaces à canaux*, avec leur géométrie à la Georges Humbert, conduisent aisément à l'équation de Schrödinger. Les opérateurs *hermitiques*, qu'on peut rattacher au Calcul matriciel mais qui généralisent aussi l'intégration par parties, nous remènent à Charles Hermite, glorieux précurseur de l'enseignement moderne de l'Analyse. L'École française qui, en Physique théorique, semblait distancée, regagne le terrain perdu et brille, à nouveau, d'un vif éclat. Sans patriotisme exagéré, c'est une grande satisfaction que de conclure ainsi.

De la notion de Cours complet. — Je pense du « cours complet » tout le mal qu'en pensait l'illustre Paul Appell. Avec les développements de la Science, un tel cours devient, de plus en plus, d'une radicale impossibilité. Le meilleur cours paraît être celui qui, partant d'un nombre de questions bien délimité, s'attache à les traiter de façon profonde et logiquement irréprochable. L'époque des encyclopédies est passée et a fait place au règne des méthodes(1).

---

(1) Paul Appell. *Éducation et Enseignement*, p. 39. Nouvelle Collection scientifique Em. Borel, 1922. F. Alcan, Paris.

TABLE DES MATIÈRES

Toulouse. — Typ. Éd. Privat. — 5137 — 10-34.