Astronomie

Tom II

181

181

TRAITÉ

D'ASTRONOMIE THÉORIQUE

ASTRONOMIE RATIONNELLE.

TRAITÉ

D'ASTRONOMIE THÉORIQUE.

ASTRONOMIE RATIONNELLE.

OBSERVATOIRE
181
DE TOULOUSE

TRAITÉ

D'ASTRONOMIE THÉORIQUE.

ASTRONOMIE RATIONNELLE.

Res B OBS
181(2)

TRAITÉ

D'ASTRONOMIE THÉORIQUE,

PAR

FRÉDERIC THÉODORE SCHUBERT,

Conseiller d'Etat actuel de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR, Chevalier des Ordres de St. Wladimir et de Ste. Anne, Membre des Académies des Sciences de St. Pétersbourg, de Stockholm, de Copenhague, d'Upsala, de Boston, de la Société des Naturalistes de Moscou, de l'Université de Casan, du Département Impérial de l'Amirauté, etc.

TOME SECOND.

ASTRONOMIE RATIONNELLE.

A ST. PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMP. DES SCIENCES.

1822.

TABLE DES MATIERES

contenues dans le second Tome.

INTRODUCTION. . . . . page 1

LIVRE PREMIER.

Du mouvement de la terre.

CHAP. I. *Mouvement diurne de la terre* . . . . . page 12

§. 1. Classification des preuves. §. 2. Première preuve. *Probabilité interne.* §. 3. Seconde preuve. *Impossibilité du contraire.* §. 4. Troisième preuve. *Analogie* des autres planètes. §. 5. Quatrième preuve. *Aplatissement* de la terre. §. 6. Déviation des corps tombans. §. 7. Cinquième preuve. Longueur du *pendule.*

CHAP. II. *Mouvement annuel de la terre.* . . . . . page 21

§. 8. Probabilité interne. §. 9. *Parallaxe annuelle* des étoiles fixes. §. 10. Parallaxe de longitude et de latitude. §. 11. Leurs variations. §. 12. Observations relatives à la parallaxe annuelle. §. 13. Les étoiles fixes n'ont point de parallaxe sensible. §. 14. Vitesse de la lumière. §. 15. *Aberration* de la lumière. §. 16. Sa grandeur. §. 17. L'aberration prouve le mouvement annuel.

LIVRE II.

Des étoiles fixes.

CHAP. I. *Distance, grandeur, et position des étoiles.* . . page 32

§. 18. Réflexions générales. §. 19. Parallaxe des étoiles. §. 20. Leur distance. §. 21. Détermination de la parallaxe par les étoiles *doubles.*

§. 22. Grosseur des étoiles. §. 23. Incertitude sur cet objet. §. 24. Les étoiles sont des corps semblables au soleil. §. 25. Positions des étoiles relativement à l'équateur et à l'écliptique. §. 26. Comment l'une dépend de l'autre.

CHAP. II. *Mouvement apparent des étoiles fixes. . . . . page* 42

§. 27. Mouvemens *apparent* et *propre*. §. 28. Découverte des différens mouvemens. §. 29. *Précession des équinoxes*. §. 30. Sa quantité. §. 31. Variation de l'ascension droite et de la déclinaison. §. 32. Sa correction. §. 33. Formules plus exactes. §. 34. *Déplacement de l'écliptique*. §. 35. Mouvement des étoiles qui en résulte. §. 36. Corrections de l'obliquité et de la précession, qui en résultent. §. 37. Découverte de la *nutation*. §. 38. Mouvement des poles. §. 39. Explication physique de la nutation. §. 40. Mouvement elliptique des poles. §. 41. Calcul de la nutation. §. 42. Equations de l'obliquité, des points équinoxiaux, et du lieu des étoiles. §. 43. *Aberration* des étoiles fixes. §. 44. Aberration en latitude et en longitude. §. 45. Aberration en déclinaison et en ascension droite. §. 46. Ellipse d'aberration. §. 47. Aberration des planètes.

CHAP. III. *Mouvement propre des étoiles. . . . . page* 69

§. 48. Mouvement *propre*. §. 49. Mouvement *parallactique*. §. 50. Mouvement *vrai* des étoiles. §. 51. Calcul du mouvement parallactique. §. 52. Comparaison du calcul avec les observations. §. 53. Détermination du vrai mouvement par observation.

CHAP. IV. *Autres propriétés remarquables du ciel étoilé. page* 79

§. 54. La *voie lactée*. §. 55. Conjectures sur la construction du ciel étoilé. §. 56. Explication détaillée de la voie lactée. §. 57. *Systèmes étoilés*. §. 58. *Taches nébuleuses*. §. 59. *Etoiles nébuleuses*. §. 60. *Etoiles changeantes*.

LIVRE III.

Des Planètes.

CHAP. I. *Phénomènes généraux des planètes . . . . . page* 88

§. 61. Importance d'une théorie exacte du soleil. §. 62. Aperçu général des orbites apparentes des planètes. §. 63. Planètes *inférieures*. §. 64. Disposition de leurs orbites. §. 65. Planètes *supérieures*. §. 66. Disposition de leurs orbites. §. 67. *Stations* et *rétrogradations* des planètes inférieures, §. 68. et des planètes supérieures.

CHAP. II. *Les différens systèmes planétaires* . . . . . *page* 97

§. 69. Mouvement *propre* des planètes. §. 70. Mouvement *géocentrique*. §. 71. Système de *Ptolémée*. §. 72. Système des *Egyptiens*. §. 73. Système de *Tycho*. §. 74. Système de *Copernic*.

CHAP. III. *Le système de Copernic* . . . . . *page* 106

§. 75. Détermination de l'orbite d'une planète autour du soleil. §. 76. Point où elle est *stationnaire*. §. 77. Rapports entre les diamètres des orbites et les révolutions. §. 78. *Phases* des planètes. §. 79. Projection du cercle. §. 80. Limite d'illumination. §. 81. L'époque où la lumière de Vénus est la plus grande. §. 82. Latitude des planètes. §. 83. Comparaison des longitudes et latitudes héliocentriques. *Noeuds. Inclinaison. Longitude dans l'orbite. Argument de latitude. Réduction.* §. 84. Comparaison des lieux héliocentrique et géocentrique. *Rayon vecteur. Distance accourcie. Parallaxe annuelle. Commutation. Elongation.* §. 85. Recherches suivantes.

CHAP. IV. *Hypothèse du cercle excentrique, appliquée au soleil* . . . . . *page* 121

§. 86. Différentes hypothèses pour expliquer les inégalités du soleil. §. 87. *Cercle excentrique. Apsides. Anomalies vraie et moyenne. Equation du centre. Vitesse vraie. Rayon vecteur.* §. 88. *Epicycle. Cercles concentrique et déférent.* §. 89. Détermination des apsides et de l'*excentricité* du soleil. §. 90. Méthode de *Kepler*. §. 91. Sa correction. §. 92. Mouvement des apsides. *Année anomalistique*. §. 93. Méthode de *Kepler* perfectionnée. §. 94. *Elémens* de l'orbite solaire. *Epoque. Excentricité.* Durée de l'année. §. 95. Excentricité *double*. §. 96. Calculs suivant cette hypothèse. §. 97. Comparaison avec les observations.

CHAP. V. *Hypothèse du cercle excentrique, appliquée au Planètes* . . . . . *page* 139

§. 98. *Mouvemens moyens* des planetes. §. 99. Révolutions *synodique, périodique*, et *sidérale*. §. 100. Explication des inégalités des planètes suivant Ptolémée. §. 101. Elémens de l'excentrique et de l'épicycle pour les planètes *inférieures*, §. 102. et pour les planètes *supérieures*. §. 103. *Station* et *rétrogradation* des planètes. §. 104. *Latitude* des planètes. §. 105. Liaison entre les systèmes de Ptolémée et de Copernic. §. 106. Observations des *oppositions*. §. 107. Détermination des *noeuds*, §. 108. et de l'*inclinaison*. §. 109. Lieu *héliocentrique sur l'orbite* dans les oppositions, §. 110. et hors des oppositions.

CHAP. VI. *Théorie de Kepler* . . . . . *page* 162

§. 111. Principes desquels Kepler partit. §. 112. Détermination des élémens du soleil par *trois* observations. §. 113. Vérification par d'autres observations. §. 114. Détermination du lieu héliocentrique de la planète. §. 115. Détermination d'une orbite planétaire, 1) par les longitudes dans les oppositions, §. 116. 2) par les latitudes dans les oppositions, §. 117 3) par les longitudes hors des oppositions, §. 118. 4) par les distances. §. 119. Les distances ne s'accordent pas avec le cercle. §. 120. *Elémens excentriques* des orbites planétaires. §. 121. Orbites *elliptiques* des planètes. §. 122. Comparaison du *tems* avec la surface du *secteur* parcouru. §. 123. Lois pour le *rayon vecteur* et pour l'*anomalie vraie*. §. 124. *Première loi de Kepler*. §. 125. *Seconde* loi. §. 126. *Troisième* loi.

CHAP. VII. *Calcul elliptique du mouvement des Planètes*. *page* 190

§. 127. Comparaison des *secteurs* avec le *tems*. §. 128. L'anomalie *excentrique* étant donnée, trouver le reste. §. 129. L'anomalie *vraie* étant donnée. Solution indirecte. §. 130. Solution directe. §. 131. Développement en série. §. 132. Formules, si l'anomalie est comptée du périhélie. §. 133. Vitesse *réelle* ou linéaire. §. 134. L'anomalie *moyenne* étant donnée. Solution indirecte. §. 135. Solution directe. §. 136. Anomalie excentrique en série. §. 137. Anomalie vraie en série. §. 138. Rayon vecteur en série. §. 139. Leurs valeurs numériques. §. 140. La plus grande équation du centre. §. 141. Hypothèse elliptique simple.

CHAP. VIII. *Determination des orbites par observation* . . *page* 218

§. 142. *Elémens* d'une orbite. §. 143. *Noeuds* et *inclinaisons* des planètes. §. 144. La *plus grande équation* ou *excentricité*. §. 145. Position des *apsides*. §. 146. Première méthode, pour corriger à la fois les trois élémens elliptiques. §. 147. Seconde méthode. §. 148. Troisième méthode. §. 149. Méthode générale. §. 150. Correction des noeuds et de l'inclinaison. §. 151. Elémens elliptiques des six planètes anciennes.

CHAP. IX. *Grandeur des Planètes, et autres objets remarquables* . . . . . *page* 253

§. 152. Grandeur *relative* des planètes. *Diamètre apparent*. §. 153. Grandeur *absolue*. §. 154. *Taches* du soleil, §. 155. et des planètes. §. 156. *Atmosphère* des planètes. *Lumière zodiacale*. §. 157. *Anneau de Saturne*. §. 158. Figure elliptique de l'anneau. §. 159 Causes de la disparition de l'anneau. §. 160. Périodes de ses disparitions. §. 161. Position du plan de l'anneau.

CHAP. X. *Rotation des Planètes* . . . . . *page* 250

§. 162. Orbites des taches du soleil. §. 163. Noeuds et inclinaison de l'*équateur solaire*. §. 164. Longitude et latitude héliocentriques des taches. §. 165. Elémens de la rotation du soleil. §. 166. Rotation des planètes. §. 167. Aplatissement des planètes.

CHAP. XI. *Les cinq nouvelles Planètes* . . . . . *page* 259

§. 168. Découverte d'une nouvelle Planète. §. 169. Elémens de l'orbite supposée circulaire. §. 170. Approximations successives. §. 171. Méthode de M. Gauss. §. 172. Triangle formé par les trois cordes. §. 173. Première approximation. §. 174. Sa correction. §. 175. Seconde aproximation. §. 176. Détermination des élémens elliptiques, §. 177. des noeuds et de l'inclinaison. §. 178. Découverte de quatre nouvelles planètes. §. 179. Elémens des nouvelles planètes.

LIVRE IV.

De la Lune.

CHAP. I. *Phénomènes généraux de la Lune*. . . . . *page* 285

§. 180. *Lunes* ou *satellites*. §. 181. *Phases* de la lune. §. 182. La lune reçoit sa lumière du soleil. §. 183. La lune tourne autour de la terre. §. 184. Limite d'illumination de la lune. §. 185. Objet des recherches suivantes.

CHAP. II. *Les differens Mois* . . . . . *page* 291

§. 186. Diverses espèces de mois. Mois *sidéral, périodique, synodique, anomalistique, draconitique*. §. 187. Mois *synodique*. *Epactes*. *Nombre d'or*. §. 188. Mois *périodique et sidéral*. §. 189. Périodes lunaires. Celle de *Méton*. Période *caldaïque*. Périodes de 345 ans, de 441, et de 20 ans. §. 190. *Equation séculaire* de la lune. Période de 600 ans.

CHAP. III. *Apsides et Excentricité de la Lune* . . . . *page* 303

§. 191. Orbite de la lune suivant Ptolémée. §. 192. Détermination des apsides et de l'excentricité suivant le même, §. 193. et suivant les astronomes modernes. §. 194. Mouvement des apsides et mois anomalistique.

CHAP. IV. *Les équations de la longitude de la Lune*. . *page* 311

§. 195. *Evection* suivant Ptolémée. §. 196. *Equation des apsides* suivant Ptolémée. §. 197. Hypothèse moderne. §. 198. Calcul de l'évection suivant les astronomes modernes. §. 199. *Variation*. §. 200. Equation *annuelle*.

§. 201. Les quatre *grandes* inégalités de la lune. §. 202. Les *petites* inégalités. §. 203. Les nouvelles tables de la lune. §. 204. Total des équations de la lune en longitude.

CHAP. V. *Noeuds et inclinaison de l'orbite de la Lune . . page* 333

§. 205. Position et mouvement moyen des *noeuds*. §. 206. *Inclinaison* et *correction des noeuds*. §. 207. Correction de la latitude. §. 208. *Latitude* de la lune, et *réduction* à l'écliptique.

CHAP. VI. *Mouvement horaire et parallaxe de la Lune . . page* 341

§. 209. Mouvement horaire en *longitude*. §. 210. Sa *réduction* à l'écliptique. §. 211. Mouvement horaire en *latitude*. §. 212. Parallaxe *moyenne* sous l'équateur. §. 213. Parallaxe *vraie* et distance de la lune.

CHAP. VII. *Grosseur de la Lune . . . . . page* 354

§. 214. La véritable grandeur de la lune. §. 215. Diamètres *central* et *horizontal*. §. 216. Diamètre à différentes hauteurs. §. 217. Illusion optique.

CHAP. VIII. *Rotation de la Lune . . . . . page* 359

§. 218. *Rotation* et *libration* de la lune. §. 219. Elémens de la rotation. §. 220. Position apparente de l'équateur et des taches de la lune. §. 221. *Sélénotopographie*.

LIVRE V.

Des Occultations et des Eclipses.

CHAP. I. *Classification de ces phénomènes . . . . . page* 367

§. 222. Introduction. §. 223. Conditions générales d'une occultation. §. 224. *Eclipses de lune*. §. 225. *Occultations* et *passages*. §. 226. *Eclipses de soleil*.

CHAP. II. *Les Eclipses de Lune . . . . . page* 372

§. 227. Elémens des éclipses lunaires. §. 228. Calcul préliminaire. §. 229. *Ombre* et *pénombre*. §. 230. Diamètres de l'ombre. §. 231. *Limites* des éclipses. §. 232. Eléméns du calcul. §. 233. Orbite *relative* de la lune. §. 234. Augmentation de l'ombre, produite par l'atmosphère. §. 235. Le *milieu* de l'éclipse et la *plus grande phase*. §. 236. Eclipse *totale* et *partielle*. §. 237. *Grandeur* de l'éclipse. §. 238. Tems des différentes *Phases*. §. 239. Détermination des longitudes géographiques par le moyen des éclipses lunaires. §. 240. Différentes couleurs de la lune éclipsée.

CHAP. III. *Les Eclipses de Soleil en général* . . . . . *page* 384

§. 241. Les éclipses de soleil, envisagées sous différens points de vue. §. 242. L'*éclipse de terre* en général, §. 243. et pour les différens lieux de la terre. §. 244. L'*éclipse de soleil* pour un lieu donné de la terre.

CHAP. IV. *L'Eclipse de la Terre en général* . . . . . *page* 388

§. 245. Eclipse *centrale*, *totale*, *annulaire*, et *partielle*. §. 246. *Rayons* de ces éclipses. §. 247. Variations de la parallaxe horizontale. §. 248. Autre manière d'expliquer les circonstances d'une éclipse. §. 249. *Demi-diamètres* des ombres. §. 250. *Limites* des éclipses solaires. §. 251. Caractères de l'éclipse partiale, totale, centrale. §. 252. L'instant de chaque *Phase*.

CHAP. V. *L'Eclipse des différens lieux de la Terre* . . . *page* 399

§. 253. Matières traitées dans ce chapitre. §. 254. Les lieux qui verront *les premiers le commencement*, et *les derniers la fin*. §. 255. Leur longitude et latitude. §. 256. Le lieu qui verra *la plus grande phase*. §. 257. Les lieux qui verront une éclipse *centrale* dans un instant donné. §. 258. Le lieu qui aura une éclipse *centrale dans le méridien*. §. 259. *Route de l'ombre* sur la surface de la terre. §. 260. Sa direction et vitesse.

CHAP. VI. *L'Eclipse de Soleil dans un lieu déterminé de la terre* . . . . . *page* 408

§. 261. Matières traitées dans ce chapitre. §. 262. *Projection orthographique* de la terre illuminée par le soleil. §. 263. Projection du *Parallèle*. §. 264. Projection de l'*orbite relative* de la lune. §. 265. Commencement, fin, et milieu de l'éclipse, suivant la projection. §. 266. *Parallaxe* de longitude et de latitude. §. 267. Le *commencement*, la *fin*, et *la plus grande phase*, par le calcul des parallaxes. §. 268. Interpolation. §. 269. Position des points de l'immersion, de l'émersion, et de la plus grande phase.

CHAP. VII. *Correction des Elémens de la Lune, et des Longitudes géographiques par l'observation des éclipses de soleil. page* 417

§. 270. Sommaire de la méthode. §. 271. Corrections des tables et des longitudes. §. 272. Correction de la distance apparente des centres. §. 273. Expression analytique des corrections.

CHAP. VIII. *Eclipses des étoiles et des planètes par la lune ou par des planètes* . . . . . *page* 423

§. 274. Commencement, fin, et grandeur d'une éclipse d'étoile par la lune. §. 275. Les lieux qui verront la première immersion, la dernière émersion,

et la plus grande phase. §. 276. Eclipse apparente pour un lieu particulier. §. 277. Correction des élémens de la lune et de la longitude du lieu. §. 278. Occultations des étoiles par une planète, et d'une planète par une autre.

LIVRE VI.

Des Passages des Planètes sur le disque du Soleil.

CHAP. I. *Les Périodes des Passages* . . . . . *page* 429

§. 279. Les premières observations des passages. §. 280. Leur importance pour déterminer la parallaxe du soleil. §. 281. *Limites* des passages de *Vénus*. §. 282. Leurs *périodes*. §. 283. Limites et périodes des passages de *Mercure*.

CHAP. II. *Calcul des passages pour les différens lieux de la terre* . . . . . *page* 437

§. 284. Calcul pour la terre en général. §. 285. Projection de la terre dans la région de Vénus. §. 286. Les lieux de la terre qui verront le premier l'immersion, et le dernier l'émersion. §. 287. Leurs longitudes et latitudes. §. 288. Remarques. §. 289. Les portions de la terre, qui verront le passage entier, qui n'en verront rien du tout, et qui ne verront que l'entrée ou la sortie. §. 290. Effet de la parallaxe sur les phénomènes en différens lieux. §. 291. Les lieux de la terre qui, à une époque donnée, verront une certaine *phase*. §. 292. Les lieux les plus favorables, pour déterminer la parallaxe du soleil.

CHAP. III. *Calcul des passages pour un lieu déterminé de la terre* . . . . . *page* 452

§. 293. Distance *apparente* des centres. §. 294. Distance *géocentrique*. §. 295. Autre méthode pour trouver la distance apparente.

CHAP. IV. *Détermination des parallaxes et correction des élémens de Vénus* . . . . . *page* 457

§. 296. Correction de la distance géocentrique. §. 297. Expression analytique des corrections. §. 298. Diamètre apparent de Vénus. §. 299. Erreur commise sur le tems. §. 300. Passages de Vénus en 1761 et 1769. §. 301. Détermination de la parallaxe du soleil. §. 302. Autre méthode. §. 303. Exemples. §. 304. Correction des élémens de Vénus.

LIVRE VII.

Des Satellites.

CHAP. I. *Découverte des satellites* . . . . . *page* 475

§. 305. Comment les satellites doivent paraître à une grande distance. §. 306. Découverte des satellites de Jupiter, Saturne et Uranus.

CHAP. II. *Théorie de leurs orbites* . . . . . *page* 479

§. 307. Elémens des orbites. §. 308. Révolution *périodique*. §. 309. Révolution *synodique*. §. 310. *Mouvemens moyens* des satellites. §. 311. *Diamètres* de leurs orbites. §. 312. *Inégalités* réelles et apparentes des satellites. §. 313. Première inégalité apparente, ou *équation de Jupiter*. §. 314. Conversion des inégalités en tems. §. 315. Seconde inégalité apparente, ou *équation de la lumière*. §. 316. *Grande* et *petites* équations de la lumière. §. 317. Inégalités *réelles*. §. 318. Equation du centre du III et du IV satellite.

CHAP. III. *Eclipses des satellites* . . . . . *page* 494

§. 319. Rayon de l'ombre. §. 320. Equation fondamentale pour les éclipses. §. 321. Durée de l'éclipse. §. 322. Observations des immersions et émersions. §. 323. Importance des éclipses pour la théorie de Jupiter.

CHAP. IV. *Les autres élémens des satellites* . . . . . *page* 499

§. 324. Les *inclinaisons* et les *noeuds* des orbites. §. 325. *Epoques*. §. 326. *Grosseur* des satellites. §. 327. Leur *rotation*.

CHAP. V. *Les Satellites de Saturne et d'Uranus* . . . . *page* 505

§. 328. Périodes et distances des satellites de Saturne. §. 329. Inclinaisons §. 330. et noeuds des satellites. §. 331. Les satellites d'Uranus.

LIVRE VIII.

Des Comètes.

CHAP. I. *Propriétés générales des comètes* . . . . . *page* 510

§. 332. Probabilité des comètes. §. 333. Les comètes appartiennent au système solaire. §. 334. Elles décrivent des sections coniques autour du soleil. §. 335. Leurs orbites sont très-excentriques. §. 336. Le mouvement se fait suivant toutes les directions. *Queues des comètes.*

CHAP. II. *Calcul Parabolique des orbites des Comètes . . page* 516

§. 337. Méthode *indirecte*. §. 338. Relation entre la parabole et l'ellipse. §. 339. Aperçu général du calcul indirect. §. 340. Elémens d'une orbite. §. 341. Relation entre les tems dans différentes sections coniques. §. 342. L'orbite déterminée par le triangle au soleil. §. 343. Autre méthode. §. 344. Tables paraboliques. §. 345. Rapport entre les distances à la terre et les tems. §. 346. L'orbite *réduite* à l'écliptique. §. 347. Construction de l'orbite de la terre. §. 348. Cercle passant par le soleil, la comète, et le périhélie. §. 349. Division de l'orbite en tems. §. 350. Division de l'orbite réduite. §. 351. Calculer l'orbite par trois observations. §. 352. Correction de la méthode. §. 353. Vérification des élémens par d'autres observations. Première méthode. §. 354. Seconde méthode.

CHAP. III. *Calcul Elliptique . . . . . page* 544

§. 355. Difficulté de déterminer l'axe de l'ellipse. §. 356. Détermination de la révolution. §. 357. Equations fondamentales du calcul elliptique. §. 358. Les élémens étant donnés, trouver le tems de chaque anomalie. §. 359. Le triangle au soleil étant donné, trouver les élémens. §. 360. Le tems que la comète emploie à décrire un secteur elliptique. §. 361. La comète de 1770.

CHAP. IV. *Réflexions générales sur la construction du système solaire . . . . . page* 554

§. 362. Nombre des comètes observées. §. 363. Nombre des comètes qui approchent du soleil plus que Mercure. §. 364. Multitude des comètes du système solaire. §. 365. Pourquoi y a-t-il plus de comètes que de planètes? §. 366. Pourquoi les planètes se meuvent-elles presque dans le même plan? §. 367. Hypothèse de M. Laplace. §. 368. Autres propriétés des orbites des comètes. §. 369. Queues des comètes. §. 370. Liaison du système solaire.

FIN DE LA TABLE DU SECOND TOME.

TRAITÉ
D'ASTRONOMIE THÉORIQUE.

TOME SECOND.

ASTRONOMIE RATIONNELLE.

INTRODUCTION.

Le voyageur qui parvient au terme d'une route pénible, se rappelle avec plaisir les fatigues qu'il a essayées. Les sites variés des pays qu'il a parcourus, les hommes et les moeurs qu'il a observés, se présentent de nouveau à son imagination, sous des teintes plus douces; et sa réflexion plus calme lui fait découvrir une foule d'objets qui s'étaient dérobés à ses observations tumultueuses et précipitées. Les évènemens se groupent dans sa mémoire, pour former une histoire régulière; un paysage pittoresque se compose des vues isolées; des traits épars qu'il a rassemblés, des coutumes qu'il a observées, il tire la *caractéristique* des nations; et sa raison murie dans le calme rassemble les matériaux bruts de son journal, pour en faire un édifice régulier. Tels sont les résultats du repos après le travail. Sans les observations faites pendant le voyage, l'oeuvre du génie ne serait qu'un roman; sans la méditation, l'auteur ne produirait que l'image du chaos. Mais

l'imagination la plus heureuse, privée des observations propres à la science, bâtit sur le sable, tandis que celui qui, ne pouvant s'élever à de hautes conceptions, se borne à observer soigneusement la nature, mérite la reconnaissance de ceux qui employeront des matériaux si péniblement rassemblés, pour élever un nouveau monument à l'esprit humain.

C'est à ce point de repos, où le discernement et l'activité de l'observateur font place à la tranquille pénétration du penseur; c'est là, dis-je, que l'*astronomie sphérique* finit et que commence l'*astronomie rationnelle*. La nature de l'esprit humain, plus portée à créer des systèmes qu'à recueillir des observations, fait présumer que dans les tems anciens, l'astronomie a été traitée ainsi, plus souvent que nous ne sommes à portée de le savoir. Dans la jeunesse du genre humain, il y eut peut-être une époque, où l'esprit, encore libre de prejugés, avait acquis des idées justes sur le système du monde. Ces idées, ensuite méconnues, et dépossédées par de vaines subtilités, ne pouvaient reprendre leur empire que par un travail opiniâtre, suivi pendant une longue suite de siècles. En effet, quoique l'histoire ne nous apprenne pas précisément qu'il fût un tems où l'astronomie eut un temple, construit sur le même plan et avec la même simplicité qu'aujourd'hui, mais moins riche sans doute; on en trouve cependant des traces qui méritent quelque attention; et l'illustre Bailly les a recueillies et développées avec une rare sagacité ([1]).

Ces tems *fabuleux* de l'astronomie furent suivis de l'age *historique*. *Ptolémée* fut le premier qui, profitant avec une rare intelligence, des observations faites avant lui, ainsi que des siennes propres, pour parvenir à la connaissance des véritables mouvemens célestes, ou plutôt pour former une hypothèse qui pût servir à calculer, pour un tems quelconque, les situations et mouvemens apparens des astres. *Ptolémée* est le premier fondateur d'un système de l'astronomie rationnelle, que nous connaissions; et si d'un côté les anciennes observations importantes qu'il nous a transmises, réclament notre reconnaissance, son génie et la sagacité qui se font voir si clairement dans les hypothèses qu'il a imaginées, ne méritent pas le mépris dont on

(1) *Histoire de l'astronomie ancienne.*

a voulu le couvrir. Quiconque aura lu ses ouvrages avec attention, sera persuadé que l'on a souvent été injuste envers ce grand homme, parce qu'on le juge d'après un faux point de vue. On oppose son système à celui de Copernic, sans examiner, s'il avait le dessein d'établir un système. Ce qu'on appelle ainsi, n'était probablement qu'une hypothèse, une fiction qui n'avait pas d'autre but que de faciliter le calcul, comme celles employées par Tycho et même par Newton, et comme celle qui, rigoureusement parlant, est la base de la géométrie transcendante des modernes. Sans s'aviser de faire des recherches ou des hypothèses sur les véritables orbites des planètes, il ne s'occupa que de ce grand problème de l'astronomie, *trouver les lieux où, dans un tems donné, paraîtront les planètes vues de la terre.* Il résolut ce problème, suivant la coutume de son tems, par la *construction géométrique* qui n'admettait que la ligne droite et le cercle: ce qui le conduisit nécessairement a ces cercles excentriques, à ces épicycles qui, à la vérité, sont assés compliqués, mais qui ne mériteraient le nom d'*absurdes* (1) que dans le cas, où il aurait soutenu d'un ton décisif, que le *véritable* mouvement était effectivement composé de tous ces cercles. Ptolémée eût été sans doute un des premiers, à adopter les découvertes de Copernic et de Kepler, s'il eût vecu dans leur tems. Il ne donne jamais à ses suppositions d'autre nom que celui d'*hypothèses* (*hypothesis* eccentrici, epicycli), et il ne les regarde que comme des moyens pour faciliter le calcul. Il commence par prouver, qu'il est tout-à-fait indifférent, d'employer le cercle excentrique ou l'épicycle, et déclare en termes précis, que ce n'est que pour la commodité du calcul, qu'il donne la préférence tantôt à l'un tantôt à l'autre (2). Cela prouve évidemment qu'il ne voulait point parler du *véritable* mouvement. Il est vrai qu'il part de ce principe, que la terre est immobile au centre du mouvement diurne et de la sphère entière (3); mais c'est la marche naturelle de chaque système d'astronomie, c'est sur ce principe que

(1) „L'*absurde* complication du système de Ptolémée", dit Lalande dans la seconde édition de son *Astronomie, T. I.* §. 1068; mais je vois que ce grand astronome a supprimé ce mot dans la troisième édition (§. 1070.).

(2) Par ex. à l'épicycle pour expliquer la *première* inégalité des planètes. Voy. *Almageste Liv. IV. Chap.* 5. *et L. IX. Ch.* 5.

(3) *Astron. de Lalande l. c.*

toutes les observations sont fondées (I. §. 19. 22.); et Ptolémée dit expressément, que ce n'est que relativement aux étoiles fixes, qu'il suppose la terre au centre du monde (1). Enfin, il est bien pardonnable, qu'il cherche à prouver l'impossibilité du mouvement de la terre, par de mauvais raisonnemens tirés de la physique et de la mécanique, quand on réfléchit, combien il lui importait, de mettre hors de doute ce premier principe, que la terre est *toujours* (c'est-à-dire, *immobile*) au centre du ciel étoilé. C'est sous ce point de vue, qu'il faut juger l'auteur de l'*Almageste*, si l'on veut lui rendre justice. Ses épicycles, dont Hipparque s'était servi 300 ans avant lui, pour expliquer l'irrégularité du mouvement du soleil, et Appollonius 400 ans avant Ptolémée, pour expliquer les stations des planètes, seront plus dignes de notre attention, si nous nous rappellerons, que ces épicyles firent parvenir Kepler à la connaissance des véritables mouvemens célestes, et que par un leger changement de l'hypothèse même de Ptolémée (2), Kepler, sans se servir de l'ellipse, découvrit le vrai mouvement elliptique, comme on le verra par la suite.

Le tems de Ptolémée fut suivi de sept siècles, qui ne nous présentent presque aucune observation, ni aucune trace d'une astronomie rationnelle. Les Arabes du neuvième au quinzième siècle nous ont laissé des observations astronomiques qui ne sont pas sans mérite; mais dans tout ce qui regarde l'astronomie rationnelle, ils ne changèrent rien à ce qu'ils trouvèrent dans l'Almageste. Ainsi cette science était tombée en oubli, pendant une période d'à peu près quatorze siècles, jusqu'à l'époque où Copernic vint lui donner une nouvelle existence.

Les passages des anciens, où Copernic, d'après son propre aveu, puisa la connaissance de l'arrangement du système solaire, et qui prouvent que, longtems avant Ptolémée, on en eut des idées fort justes, se trouvent recueillis dans plusieurs livres. Quand on considère que ces passages sont tout-à-fait isolés, sans liaison avec d'autres connaissances qui en sont la base, et sans

(1) *Almag. L. I. Ch.* 6.

(2) En substituant le lieu vrai du soleil au lieu moyen, et un mouvement des planètes le long du diamètre de l'épicycle pour celui sur la périphérie.

aucune preuve qui aurait pu faire naître ce système qui parait si peu naturel, on est presque porté à penser, qu'il y eut un tems dont la mémoire s'est perdue, où une connaissance juste et complette de la structure de l'univers etait généralement répandue. Le système *des Egyptiens* est, à l'égard des deux planètes inférieures, parfaitement d'accord avec ceux de Copernic et de Tycho, en expliquant les stations et les rétrogradations de ces planètes par leur mouvement autour du soleil. Cette explication a trop de simplicité et d'élégance, pour qu'un esprit philosophique comme celui de Copernic n'en profitât pas. Mais je ne sais, si l'on a remarqué que le système des Egyptiens est dans le fond d'accord avec celui de Ptolémée, ou qu'il n'en diffère tout au plus que par la substitution du lieu vrai du soleil au lieu moyen, comme on le verra par la suite. Rien ne paraît plus aisé que d'étendre l'hypothèse des deux planètes inférieures aux trois planètes supérieures; mais celui qui eut la sagacité et le courage, de voir et de dire ce que l'on n'avait aperçu ou osé dire pendant deux mille ans, mérite certainement le nom d'inventeur. Le mouvement des planètes supérieures autour du soleil ne suffit pas, comme celui des inférieures, pour expliquer leurs stations et rétrogradations: il faut encore supposer que le soleil ou la terre soit en mouvement. Copernic choisit le dernier mouvement, sans en avoir d'autres preuves que l'analogie des autres planètes, et la simplicité et l'élégance de l'hypothèse. Tycho choisit le premier mouvement, parce qu'il ne voyait aucune raison proprement astronomique, pour s'écarter de ce qui paraît le plus naturel au premier coup d'oeil. L'un et l'autre procédèrent conséquemment, le premier plutôt en esprit systématique, l'autre en astronome. Le profit que Copernic lui-même tira de son système, est peu de chose. La *seconde* inégalité des planètes fut expliquée, mais à l'egard de la *première*, Copernic, aussi bien que Tycho, s'en tint aux épicycles de Ptolemée, et les embrouilla encore davantage. Il réduisit, à l'instar de Ptolémée, tous les mouvemens, non pas au lieu vrai du soleil, mais au lieu moyen, à un point purement fictif. La découverte de l'arrangement des orbites planétaires était faite, mais la nature de ces courbes, et les lois du mouvement n'étaient pas mieux connues que du tems de Ptolémée. Cependant Tycho, grâce à son activité et à son habi-

lité, avait achevé une suite si complette de bonnes observations, qu'un seul homme fut capable d'en déduire toute l'astronomie rationnelle, et toutes les lois des mouvemens célestes. Quand on voit, avec quelle gratitude Kepler reconnaît son bonheur de pouvoir profiter des observations de Tycho; combien de fois il convient, qu'il n'aurait pu avoir une idée des plus importantes de ses découvertes, s'il n'avait pu se fier à ces observations à une minute près; quand on considère, combien l'art d'observer était imparfait avant Tycho, on peut à peine décider lequel, de Tycho ou Copernic, a rendu les plus grands services à l'astronomie.

L'hypothèse de Copernic avait beaucoup simplifié le plan de la structure de l'univers, et facilité le travail des astronomes à l'avenir: Tycho avait fourni un trésor de matériaux précieux, pour élever un grand monument; mais le génie créateur manquait encore, qui sût profiter de ces matériaux, et mettre le premier la main à la construction. Kepler entreprit cet ouvrage, et il l'acheva. Il n'y a peut-être aucune découverte, qui ait moins dépendu du hazard, qui ait demandé d'aussi vastes connaissances, un zèle aussi infatigable, et un esprit aussi systématique, que celles de Kepler. Si d'un côté, il faut respecter l'homme qui, pour l'amour de la vérité, entreprit plusieurs fois ces immenses calculs, et ne se laissa pas décourager par tant d'essais inutiles, il faut, de l'autre, admirer le génie qui, sans être accablé par d'innombrables difficultés, se fraya toujours un nouveau chemin, qui sut choisir les circonstances les plus favorables pour chaque observation; celui dont l'esprit philosophique tourna ses hypothèses de tous côtés, et les rejeta avec une impartialité sévère, si elles ne se trouvaient pas à toute épreuve; qui ne fit un nouveau pas, qu'après de mûres réflexions et avec toute la rigueur de la logique; et qui enfin ne se décida sur la nature des orbites planétaires, que lorsque presque chaque point en avait été déterminé par un calcul particulier, et par la comparaison d'un grand nombre d'observations, de sorte qu'il n'y eût qu'une seule courbe qui pût être décrite par tous ces points. On peut dire que Kepler a fait ses découvertes, parce qu'il a voulu les faire; et que les services qu'il a rendus à l'astronomie, sont uniques comme son génie.

Il est le fondateur de l'astronomie rationnelle, dont la plus grande partie a pour objet aujourd'hui, d'expliquer les *lois de Kepler*, de raconter leur découverte, et d'en faire l'application au calcul astronomique. L'astronomie lui doit plusieurs des plus belles méthodes, dont on se sert encore pour déterminer les orbites planétaires. Pour étudier la manière dont Kepler parvint à faire ses découvertes, il faut bien connaître les hypothèses de Ptolémée, et ses méthodes dont plusieurs sont encore employées avec fruit. La liaison entière de l'astronomie est la preuve la plus complette de la vérité du système de Copernic: on peut cependant prouver particulièrement les deux parties les plus importantes de ce système, le mouvement annuel et le mouvement diurne de la terre. Ces deux vérités, étant démontrées, serviront de base à la théorie entière du système solaire, et même des étoiles fixes; et l'on peut concevoir de la manière suivante, la marche que l'esprit humain a suivie dans cette savante carrière.

Dès que les habitans de la terre levèrent les yeux au ciel, le premier objet qui attira leur attention, fut le mouvement diurne de cette voute parsemée d'étoiles. L'observation que cette rotation, autant qu'ils en purent juger, se faisait toujours en tems égaux, et qu'elle ne changeait point la situation réciproque des astres qui formaient toujours les mêmes groupes; cette observation, dis-je, fut probablement la première qui développa la grande idée, que les mouvemens célestes ne sont pas l'effet d'un pur hazard, et qui excita le désir de connaître les lois suivies par ces mouvemens, ou de soumettre aux recherches astronomiques, les changemens qui se font dans le ciel. L'invariabilité de la situation des étoiles fixes, l'uniformité et la direction du mouvement diurne, furent donc la base de toutes les connaissances astronomiques. La vicissitude des saisons, si importante pour les premiers besoins et les occupations les plus ordinaires de leur vie, et la variation des formes, sous lesquelles la lune éclairait leurs nuits, les engagea à observer les mouvemens propres du soleil et de la lune, qu'il est si aisé de discerner de la révolution du ciel entier. Le mouvement rapide qui fait parcourir à la lune, dans une seule nuit, une partie si considérable de son orbite parmi les étoiles, et qui la ramène au bout de 27 jours à la même étoile,

explique très-bien ce phénomène, savoir que la révolution de la lune a été exactement connue, il y a deux mille ans, et peut-être bien davantage, tandis que celle du soleil n'a été déterminée avec la même précision que dans les tems modernes. Le mouvement propre de la lune et du soleil est donc la seconde découverte, dont l'astronomie fut enrichie. On apprit par là qu'outre le mouvement diurne, il y en avait d'autres, peut-être encore inconnus; ce qui excita de nouveau l'attention. En observant avec plus de soin, on aperçut bientôt, que quelques uns des plus brillans astres du ciel changeaient assés rapidement leurs situations relativement aux autres. On en découvrit *cinq* qui erraient parmi les étoiles fixes, et qui, par cette raison, furent distingués par le nom de *planètes:* ce qui ouvrit à l'astronomie un nouveau champ. Le mouvement diurne dont on était parti, et qui avait servi de guide dans toutes les recherches, est *uniforme* et *circulaire.* Il était donc naturel que les anciens établirent le principe, que tous les mouvemens célestes ne pouvaient être qu'uniformes et circulaires, d'autant plus qu'ils croyaient apercevoir dans ces deux espèces de mouvement une perfection supérieure, la seule qui pût convenir au plan de la sagesse suprême. Ils ne se seraient jamais avisés de penser que le mouvement vrai des corps célestes pourrait être différent du mouvement apparent, ou de séparer l'astronomie sphérique de la rationnelle, si tous les mouvemens apparens avaient pu être soumis à ces deux lois. Mais ils découvrirent bientôt des écarts considérables de ces lois, même dans le mouvement du soleil, et encore davantage dans celui de la lune. Le mouvement diurne du soleil était tantôt de plus, tantôt de moins d'un degré; la lune parcourait dans un jour plus de 15°, dans un autre moins de 12°, et son diamètre apparent qui a des variations de 4′, fit voir clairement, que cet astre se rapproche de la terre, et s'en éloigne. Son mouvement n'était donc ni uniforme ni circulaire. Que l'un et l'autre a lieu dans les mouvemens *vrais,* non-seulement de la lune, mais de tous les astres, c'est une découverte de l'astronomie moderne. Les anciens ne pouvaient pas s'en persuader: il leur parut plus raisonnable, d'attribuer ces irrégularités uniquement au mouvement *apparent,* que de prendre l'apparence pour la vérité, avec la précipitation de l'ignorance; et il faut convenir, qu'ils

avaient parfaitement raison, tant que les observations, qui doivent tout décider finalement, n'étaient pas contraires. Selon eux, ces mouvemens ne paraissent irréguliers, que parce que nous ne les voyons pas du vrai point de vue, ou parce que la terre ne se trouve pas dans le point, autour duquel les mouvemens sont uniformes et circulaires. Ils cherchaient donc ce point par des observations, et tâchaient de montrer, de quelle manière la combinaison de plusieurs mouvemens uniformes et circulaires pourrait produire un mouvement, qui devrait paraître aux habitans de la terre aussi irregulier, que l'expérience nous le fait voir.

Cette irrégularité était encore plus frappante dans le mouvement des planètes. Leur vitesse varie tellement, que souvent elle devient nulle ou même négative. Elles sont immobiles pendant quelque tems, au bout duquel elles reprennent leur mouvement, mais dans une direction opposée à la précédente: il était naturel d'essayer, si l'hypothèse qui avait été employée avec tant de succès par rapport au soleil et à la lune, ne pouvait pas aussi être appliquée aux planètes. Il leur parut impossible que le véritable mouvement des planètes fût si irrégulier; d'où ils conclurent avec raison, que la terre n'était pas le point d'où il fallait regarder ce mouvement, ou le centre autour duquel il se fait. On employait donc les mêmes hypothèses pour les planètes que pour le soleil; en y apportant selon les besoins de legers changemens, tant pour les accorder avec les observations, que pour les simplifier.

Ainsi naquit l'astronomie *rationnelle*, qui est entièrement fondée sur cette proposition très-philosophique, *que les lois de la nature sont extrèmement simples, et qu'en conséquence, si les mouvemens célestes nous semblent irréguliers, c'est parce que nous ne sommes pas placés dans un point de vue convenable.* Les différentes applications de cette grande vérité ont fait naître les divers systèmes du monde. Les anciens astronomes croyaient que la simplicité exigeait le mouvement circulaire et uniforme; les astronomes modernes, ayant découvert, que l'un et l'autre était contredit par les observations, pensaient que, sans déroger à la simplicité, il était permis de substituer l'ellipse au cercle, et de remplacer l'uniformité par une autre loi non moins simple;

enfin ils aperçurent que cette supposition était parfaitement confirmée par les observations et les lois générales de la dynamique. Les systèmes des anciens étaient fondés sur la supposition, que la terre était en repos, ce qui les força de combiner une foule de cercles arbitraires, qui étaient contraires à une saine physique, et qui ne satisfaisaient que rarement aux observations. Le système moderne est beaucoup plus simple, et parfaitement d'accord avec la physique et les observations, parce qu'on a donné à la terre un mouvement, qui explique justement les phénomènes qui présentent les plus grandes difficultés.

La base de l'astronomie moderne est donc un double *mouvement de la terre*, sa rotation sur un axe, et son mouvement de translation autour du soleil. Le premier explique d'une manière fort simple le mouvement diurne du ciel entier; le dernier, combiné avec la rotation, représente clairement tous les phénomènes du soleil, qui succèdent l'un à l'autre dans une année (*Livre I.*). — Comme le lieu de chaque corps céleste est déterminé par les étoiles fixes, et que toutes les observations s'y réduisent finalement, il est nécessaire avant tout, d'approfondir la théorie des *étoiles fixes*, et d'examiner les changemens qui peuvent avoir lieu dans leurs positions, et qui, à l'exception de quelques anomalies à peine sensibles, sont l'effet du mouvement de la terre: c'est le sujet du *II. Livre.* — Notre système planétaire est pour nous la plus importante partie de l'astronomie. Les irrégularités apparentes des planètes ont donné lieu au système qui est aujourd'hui généralement adopté; mais tant que la théorie du soleil n'est pas bien établie, on ne saurait tirer de justes conclusions des observations des planètes. Le *III. Livre* traite du *vrai mouvement du soleil et des planètes.* — Si les lois que l'on avait trouvées pour les planètes, sont les véritables lois de la nature, elles seront générales, et également applicables à la lune: c'est à cette application que l'on doit le parfait accord de la *théorie* moderne *de la lune* avec les observations (*Livre IV.*). — La suite immédiate de cette connaissance plus juste des mouvemens du soleil, de la lune, et des planètes, est une théorie exacte des *éclipses solaires et lunaires*, des *occultations* d'étoiles par la lune, et des *passages* des planètes inférieures

sur le soleil (*Livre V et VI.*).—Ce que la théorie de la lune, et celle des éclipses qui en dépend, a de particulier, s'applique de même à quelques astres, découverts dans les tems modernes, lesquels ainsi que la lune, décrivent leurs orbites, non autour du soleil, mais autour d'une planète: ce qui a donné lieu à la théorie des *satellites* (*Livre VII.*). — Les anciens ne connaissaient qu'une très-petite partie du système solaire, sept corps seulement. Une partie considérable de ce système, les comètes n'avaient jamais été observées par eux; il y avait même peu d'astronomes qui leur accordassent le rang de corps célestes. L'attention que les astronomes modernes ont dirigée sur les comètes, les a mis en état de se convaincre de la généralité des lois du mouvement, suivies par les planètes, et de se faire une idée juste de l'étendue du système solaire. La théorie des comètes est encore loin de sa perfection, et à juger par la nature de l'objet même, elle le sera apparemment toujours. Les nouvelles comètes qui paraissent annuellement pour la première fois, et celles qui, dans les tems futurs, après avoir achevé leurs orbites, reviendront pour la seconde fois, rendront sans doute cette théorie plus complette. C'est elle qui marque le point où l'astronomie de chaque époque doit s'arrêter, et laisser aux tems futurs, à renouer le fil. Les *comètes*, et les conclusions que l'on en peut tirer relativement à la grandeur et l'arrangement du système solaire, terminent cette partie de l'astronomie (*Livre VIII.*).

LIVRE PREMIER.

DU MOUVEMENT DE LA TERRE.

CHAPITRE PREMIER.

Mouvement diurne de la terre.

§. 1. La première observation astronomique, qui est en même tems le fondement de toutes les autres, savoir la rotation diurne du ciel, n'est peut-être qu'apparente, et s'explique parfaitement, comme on l'a vu (I. §. 112.), en supposant que la terre tourne en 24 heures sur un de ses diamètres, dans le sens opposé. Lequel de ces deux mouvemens est le *véritable*, la rotation de la terre, ou la révolution du ciel entier; c'est une question, dont la solution demande d'autant plus de soin, que beaucoup de siècles se sont écoulés, avant qu'on pût la décider avec un haut degré de certitude. En général, il n'est pas aisé de décider avec une certitude géométrique, si un mouvement que nous croyons voir, est réel ou seulement apparent: car quel que soit le mouvement d'un corps, on pourra toujours en expliquer tous les phénomènes, en supposant que le corps est en repos et que l'observateur a un mouvement convenable. L'organe de la vue, par sa nature même, ne peut nous faire apercevoir que le mouvement *relatif*, lequel, à la vérité, ne peut exister sans un mouvement quelconque dans l'espace *absolu*: les

yeux peuvent donc nous apprendre l'existence d'un mouvement absolu, mais non pas sa qualité; ils ne sauraient décider, auquel des corps, dont la situation relative change, le mouvement absolu appartient. Les conclusions que l'on tire des effets du mouvement, pour en déterminer la cause, ne donneront jamais une certitude mathématique, surtout lorsque ces effets ne sont pas physiques mais optiques. La parallaxe des étoiles fixes par ex. donnerait au mouvement annuel de la terre le plus haut degré de probabilité; toutefois il n'est pas impossible, que les étoiles mêmes aient ce mouvement annuel. Cependant ces effets sont tels qu'ils produisent une certitude morale, qui ne peut manquer de convaincre un homme raisonnable. Les effets physiques donnent encore plus de certitude. Si par ex. un corps tourne sur son axe, toutes les molécules, placées hors de l'axe, éprouveront une force centrifuge, et cette force ne peut exister sans la rotation. La dernière est donc prouvée par la première; mais pour démontrer l'existence même de la force centrifuge, il faut des preuves qui, sans établir la certitude mathématique, donneront une entière conviction a quiconque en est susceptible. Comme, en général, tout mouvement apparent suppose un mouvement réel, le philosophe n'hésitera pas à adopter celui qui a la plus grande probabilité et le moins de difficultés. Les preuves pour le mouvement de la terre se divisent donc en deux classes, dont la première renferme celles qui sont fondées sur la conviction intérieure, et la seconde celles qui recherchent les effets de ce mouvement, pour en déduire la cause.

§. 2. Pour expliquer le mouvement diurne, il faut supposer, ou que tout le ciel étoilé circule autour de la terre, ou que celle-ci tourne sur son axe; et quiconque est sans préjugés, n'hésitera pas à préférer la dernière explication, dès qu'il sera persuadé que l'une et l'autre satisfait également à tous les phénomènes. D'un côté, on ne voit que d'innombrables difficultés, de l'autre la plus grande simplicité. La distance de la plus proche étoile à la terre est, comme on verra dans la suite, au moins égale à 200000 demi-diamètres de l'orbite terrestre, un espace que la lumière même emploie trois ans à parcourir: cette ligne immense serait donc le rayon d'un cercle, dont la circonférence, six fois plus grande, serait parcourue par l'étoile en 24 heures;

d'où il suivrait une vitesse, 3.6.365 fois ou 6570 fois plus grande que celle de la lumière. Cette étoile parcourrait donc plus de 270 millions de lieues (1), ou plus de deux fois la circonférence entière de l'orbite de la terre, en une seconde; et la distance de cette etoile n'est rien en comparaison de celle de la voie lactée. Il est vrai que ce que nous appelons grand ou petit, près ou loin, ne sont que des idées relatives; mais enfin tout dans la nature a ses bornes qu'il ne faut pas franchir arbitrairement, quand on a le choix entre deux hypothèses, dont l'une épouvante l'imagination, tandis que l'autre est conforme à nos idées ordinaires de la grandeur et de la vitesse, dont l'une suppose des mouvemens si rapides que tout ce que nous connaissons de la nature, ne suffit pas pour nous former une idée qui en approche seulement, l'autre y substitue une vitesse qui est surpassée par plusieurs phénomènes très-connus de la nature. Si l'on fait tourner la terre sur son axe, un point de son équateur décrira en 24 heures un cercle de 5400 lieues, en une seconde la seizième partie d'une lieue; cette vitesse est un peu plus grande que celle du son, et 4600 millions de fois moins grande que la précédente. Le contraste sera encore plus frappant, si l'on compare la *grandeur* des étoiles avec celle de la terre. Il est très-probable que les étoiles ne sont pas moins grandes que le soleil, ou 1200000 fois plus grandes que la terre: il faudrait donc supposer, que des millions de ces corps immenses circulent, avec une vitesse qui surpase toutes nos idées, autour d'un corps qui n'est qu'un point par rapport à eux, pour épargner à ce petit corps un mouvement médiocre.

Il y a d'autres circonstances qui rendent ce mouvement encore plus improbable. On a vu (I. §. 93.), que la précession des équinoxes est un mouvement de l'équateur, qui ne change ni l'obliquité de l'écliptique, ni la situation des astres relativement à elle. La précession s'explique donc par un mouvement des poles de l'équateur autour de ceux de l'écliptique (Voy. ci-dessous §. 30.), et ce mouvement ne suppose qu'une petite oscillation de la terre. Si l'on suppose au contraire la terre immobile, il faut

(1) Ce sont des lieues d'Allemagne, dont 15 au degré, que j'employerai constamment dans cet ouvrage.

aussi supposer que le plan de l'équateur céleste est immobile, parce que les observations nous apprennent que les latitudes des lieux ne changent pas, et que, par conséquent, l'axe du monde passe constamment par les mêmes points de la terre (I. §. 41.). Il faut donc supposer un mouvement de l'écliptique sur l'équateur, un mouvement qui entraine tous les astres, tous ces corps immenses, dispersés à des distances très-différentes, puisque leur position relativement à l'écliptique ne change point. Un autre mouvement semblable du ciel étoilé résulterait de la nutation (I. §. 88. 89.), qui s'explique d'une maniere si simple par une petite oscillation de la terre. Il serait inutile d'ajouter encore un mot, pour faire voir, laquelle des deux hypothèses est la plus vraisemblable.

§. 3. Le mouvement du ciel étoilé, mais plus encore les particularités de ce mouvement, sont tout-à-fait contraires aux principes de la mécanique. Chaque mouvement circulaire suppose nécessairement une force centrale, constamment dirigée vers le centre, lequel serait ici la terre. Supposer qu'une force, répandue dans l'espace immense de l'univers, à des distances que l'oeil n'atteint pas, une force qui entraine d'innombrables soleils avec une rapidité, par rapport à laquelle celle de la lumière n'est rien — que cette force inconcevable réside dans un corps qui n'est qu'un atome par rapport à ces soleils; que cet atome ait une sphère d'activité, étendue à l'infini sans s'affaiblir — c'est une opinion si contradictoire en elle-même, qu'elle ne pouvait être adoptée que par des prejugés enracinés, ou par la plus honteuse ignorance. On ne conçoit pas, par quelle raison la terre seule, un des plus petits corps célestes que nous connaissions, aurait cette force centrale d'une si grande intensité, que les forces centrales de tous les autres corps, incomparablement plus grands, disparaissent totalement, ensorte que le mouvement diurne, au lieu d'être altéré par la réaction de tous ces corps, continue d'une manière uniforme et non-interrompue depuis tant de siècles. En supposant même que la force centrale de la terre fût assés grande pour produire la révolution du ciel, il en résulterait toutefois un mouvement de la terre. L'attraction qu'un corps exerce sur un autre, n'est autre chose qu'une tendance à s'approcher de lui; et la terre irait à la rencontre des plus grandes masses, précisément parce qu'elle les attire, ainsi qu'un petit aiman ap-

proche d'une grande masse de fer. Aucune action ne peut exister sans réaction: un corps qui attire un autre, en est également attiré, et d'autant plus fort, que la masse du dernier est plus grande, ainsi qu'on le verra dans l'*astronomie physique*. Il est donc impossible que la terre communique du mouvement à ces masses innombrables, sans en recevoir un mouvement incomparablement plus grand. D'ailleurs, une pareille force ne suffirait pas, pour expliquer le mouvement diurne. Ce mouvement étant parallèle à l'équateur, les astres, placés hors de l'équateur, décrivent des cercles dont les centres ne sont pas situés dans la terre, mais dans l'axe qui est une ligne fictive, et dont les plans ne passent pas par la terre, mais s'en éloignent à l'infini. La force centrale qui leur fait décrire des cercles, ne pourrait donc pas résider dans la terre; elle devrait être dirigée vers un point de l'axe, un point géométrique, un rien. Comme il n'y a pas de doute, que les distances des astres à la terre ne soient très-différentes l'une de l'autre, ils décriraient des cercles de différentes grandeurs en tems égaux: la force centrale agirait donc plus fort dans le lointain; il faudrait qu'elle fût plus faible hors de l'équateur, pour mener les astres avec moins de rapidité dans les petits cercles parallèles, et qu'elle fût nulle dans le sens de l'axe, où il n'y a point de mouvement. Tout cela est contraire à la nature et aux lois des forces connues. L'impossibilité est encore plus frappante, quand on considère que le mouvement propre des planètes obéirait et résisterait en même tems à cette force qui entraine tout. Pour sentir toute la force de cet argument, on n'a qu'à se représenter l'orbite qu'une planète décrirait suivant cette hypothèse, et la force qui serait capable de produire un mouvement aussi compliqué et irrégulier: que l'on se rappelle les sphères solides des étoiles et des planètes, que les anciens étaient obligés d'imaginer, pour expliquer la révolution de tous les corps célestes dans le même tems. Il fallait une sphère particulière à chaque étoile et à chaque planète, et l'on ne conçoit pas, quel lien invisible pourrait joindre ensemble toutes ces sphères, infiniment éloignées l'une de l'autre, si ferme que, depuis des milliers d'années aucune ne s'est détachée des autres. Ces voutes de cristal ont été brisées depuis longtems, par l'apparition des comètes qui les traversent dans tous les sens, en venant de la profondeur du ciel pour approcher du soleil et de la terre.

§. 4. Depuis l'invention des téléscopes, les astronomes ne pouvaient plus douter de la rotation de la terre, ayant devant les yeux celle d'autres corps célestes. Les taches découvertes sur le soleil, sur Jupiter, Mars et Vénus, qui disparaissent et reparaissent du côté opposé, dans des périodes fixes, prouvent évidemment, que ces corps, dont quelques uns sont beaucoup plus grands que la terre, ont une rotation encore plus rapide. Il n'y a donc pas de raison, pour exclure la terre seule de ce mouvement. Pour sentir toute la force de ce raissonnement fondé sur l'analogie, on n'a qu'à se mettre à la place d'un habitant de Jupiter, qui, voyant la révolution du ciel en dix heures, au lieu de 24, aurait le même droit que les habitans de la terre, de mettre le ciel entier en mouvement, pour laisser sa planète en repos. L'habitant de toute autre planète ferait le même raisonnement, et tous se tromperaient, parce qu'un mouvement contredit l'autre. Ce raisonnement, faux pour toutes les autres planètes, ne saurait être juste par rapport à la terre seule.

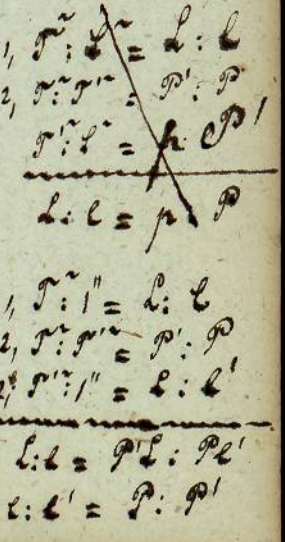
§. 5. Quelque certitude que ces raisonnemens donnent à la rotation de la terre, on ne pourra s'empêcher de demander »si cette rotation peut »se faire d'une manière si insensible, qu'aucune trace n'en paraisse sur la »terre.« La solution de cette question donna lieu à Newton à découvrir les preuves *physiques* de la rotation de la terre. Ce grand génie montra le premier par la théorie, la liaison qui existe entre la *figure* de la terre et sa rotation, et donna par-là lieu au nombreux mesurages entrepris pour déterminer la figure de notre globe. Si la terre a été originairement un corps fluide ou mou, elle devait prendre d'elle-même la figure sphérique, tant qu'elle resta en repos. La gravité de tous ses élémens ne permit à aucun de s'élever au dessus des autres. Dès qu'une partie aurait été plus élevée que les parties voisines, elle se serait répandue de tous côtés, suivant le principe de l'hydrostatique, jusqu'au rétablissement de l'équilibre ou de la forme sphérique. Mais au moment où la terre commença à tourner sur son axe, il en résulta des forces centrifuges, opposées à la gravité, qui croissaient avec la vitesse des différens points de la terre. Or comme les points de l'équateur ont la plus grande vitesse, que d'ailleurs c'est le seul parallèle, dans lequel la force centrifuge qui agit constamment dans le plan du parallèle, est dia-

métralement opposée à la pesanteur; la gravité de ces points est plus diminuée que celle des autres, par deux raisons: l'effet de la rotation devait donc être le même, que si les parties de l'équateur etaient moins pesantes, et en général, la pesanteur sur la terre doit diminuer, à mesure qu'on approche de l'équateur. La pression vers le centre, exercée par les parties circompolaires, l'emporta sur celle des parties équatoriales: la terre fut *aplatie aux poles, en s'élevant vers l'équateur.* Quand même la terre n'aurait pas été fluide mais solide, ce que nous venons de dire, serait applicable aux eaux qui couvrent sa surface: elles ne seront en repos, que lorsque la terre aura pris la figure aplatie qui convient à l'équilibre. Ayant donc trouvé par les plus soigneuses observations (I. §. 192.), que la terre est en effet aplatie depuis l'équateur jusqu'aux poles, on peut en tirer la conclusion, que cette figure qui s'écarte de la forme sphérique, est l'effet de la rotation de la terre. Il est bon d'observer que les lunettes ont donné une preuve sensible même aux yeux, de la liaison entre la rotation et la figure aplatie des corps célestes. Jupiter, dont la rotation se fait le plus rapidement, a un aplatissement si sensible, qu'il est aisé d'apercevoir la différence de ses diamètres: on trouve leur rapport à peu près comme 13 à 14, ce qui est bien d'accord avec la théorie.

§. 6. Un autre effet sensible de la rotation de la terre fut le sujet d'une objection contre cette rotation. Si la terre tourne d'Ouest à l'Est, dit-on, une pierre qu'on laisse tomber d'une haute tour, ne peut frapper la terre au point qui était verticalement au dessous d'elle; il faut que, tombant du côté occidental, elle frappe la terre à une certaine distance de la tour, et que du côté oriental, elle rencontre la tour en tombant, parce que celle-ci avance vers l'orient, pendant que la pierre tombe verticalement. Cette objection est réfutée par une expérience que tout le monde connaît. Une pierre qu'on laisse tomber du haut du mât d'un vaisseau allant très-vite, arrive au pied du mât, malgré le mouvement du vaisseau; et une bille qu'on jette, ou que l'on pousse sur le billard, suivant la largeur du vaisseau, ne dérive pas du tout vers la poupe du vaisseau. La raison en est visible. La pierre, participant au mouvement du vaisseau ou de la terre, avant sa chûte,

continuera, en tombant, le mouvement qui lui a été communiqué; l'atmosphère même, participant au même mouvement, ne pourra l'en empêcher: il est vrai que le point de la terre, qui se trouve verticalement au dessous de la pierre, au moment où elle commence à tomber, avance vers l'Est; mais la pierre, en le faisant de même, parviendra à ce point tout aussi bien que si la terre était en repos. Cependant, en y réfléchissant avec plus d'attention, on trouvera que la pierre doit dériver, non vers l'Ouest, comme on se l'était imaginé, mais vers l'Est. Tant que la pierre est au haut de la tour, elle décrit, en vertu de la rotation de la terre, d'Ouest à l'Est, un arc de cercle plus grand que celui décrit par le pied de la tour, à proportion de sa hauteur. Elle a donc un mouvement plus vite vers l'Est, qu'il conservera pendant sa chûte, d'où il résulte, qu'elle arrivera à la terre du côté oriental du point qui était verticalement au dessous d'elle. Mais les plus hautes tours ont un rapport si inconsidérable au rayon de la terre, que la différence des mouvemens diurnes du pied et de la pointe de la tour, qui en résulte, ne peut pas être sensible. La hauteur de 240 pieds, qui a servi aux expériences faites en Italie et en Allemagne, donne une déviation orientale de moins de 4 lignes, quantité que l'on ne peut espérer d'apercevoir, malgré tous les soins qu'on pourra mettre aux observations. Cependant il est remarquable, que toutes les observations qu'on a faites, donnent non-seulement une déviation *orientale*, mais que le milieu est d'environ 4 lignes. Heureusement, le mouvement de la terre a des fondemens plus solides, que ces observations peu sures.

§. 7. Comme la rotation de la terre diminue la pesanteur depuis les poles jusqu'à l'équateur (§. 5.), et que les oscillations du pendule dépendent de la pesanteur, il est visible, que la rotation doit aussi altérer la longueur du pendule à secondes. Il est démontré dans la mécanique, que le carré du tems d'une oscillation suit le rapport de la longueur du pendule, si la pesanteur est constante, mais le rapport inverse de la pesanteur, si la longueur du pendule est constante: d'où il suit que la longueur du pendule à secondes est proportionnelle à la pesanteur. Il est donc aisé de voir, qu'on peut déterminer la pesanteur dans chaque lieu de la terre, par les longueurs qu'il faut donner au pendule, pour qu'il fasse des vibrations d'une seconde dans les



différens lieux, ou par le nombre des oscillations que le même pendule y fait dans un tems déterminé; et on n'a épargné aucune peine, pour décider cela par les observations les plus exactes. Le résultat de ces recherches pénibles est, 1) que la pesanteur sur la terre va en décroissant depuis les poles jusqu'à l'équateur, 2) que ce décroissement, à de très-petites anomalies près, qui dépendent du local, suit précisément le rapport qui résulte de la rotation de la terre. Il est vrai, que la pesanteur, et par conséquent, la longueur du pendule, diminuerait également depuis les poles jusqu'à l'équateur, si la terre était aplatie aux poles, sans tourner sur un axe, à cause des différentes distances du centre de la terre; et dans ce cas, les observations de la longueur du pendule viendraient à l'appui de la preuve précédente (§. 5.). Mais la différence qui en résulte, est beaucoup plus petite, et suit d'autres lois, que celle qui a lieu d'après les observations. Il en sera parlé avec plus de détail dans l'astronomie physique.

CHAPITRE II.

OBSERVATOIRE 181 DE TOULOUSE

Mouvement annuel de la terre.

§. 8. Comme on a vu (I. §. 101. *suiv.*) que les variations de la situation du soleil relativement à la terre, et les vicissitudes des saisons, s'expliquent également bien, en supposant, que le soleil est en repos au centre de l'orbite que la terre décrit annuellement, que par le mouvement du soleil autour de la terre, la question est, lequel des deux mouvemens a réellement lieu. La réponse aura moins de difficulté, après qu'on sera assuré du mouvement diurne de la terre; et les raisonnemens précédens, fondés sur la probabilité interne et l'analogie (§. 2. 3. 4.), sont ici également applicables. Le soleil est 1300000 fois plus grand que la terre, et il n'y a aucune raison, pour faire circuler cette énorme masse autour d'un petit corps, plutôt que le dernier autour de la première, puisque les deux mouvemens satisfont également aux phénomènes. Il est difficile, d'attribuer à ce petit corps une attraction assés forte, pour mener la grande masse du soleil dans une circonférence de cette étendue; et il est visible, que le mécanisme de ce mouvement se conçoit beaucoup plus aisément, par l'inverse de l'hypothèse. Depuis que Newton a prouvé que l'attraction est une propriété universelle de tout ce qui est matériel, la supposition ne peut plus avoir lieu, que la terre réside tranquillement au centre du système solaire, et que sa force domine sur celles de tous les autres corps du système: car c'est une suite nécessaire de cette théorie, que deux corps quelconques décrivent autour de leur commun point de gravité, des orbites dont le centre est plus près du plus grand corps (§. 3.). En général, il est beaucoup plus naturel, de placer au centre du système entier, le grand corps qui répand de la lumière et de la chaleur dans un es-

pace immense, et qui est la source dans laquelle toutes les créatures puisent la vie et les sensations. Les observations avaient déjà forcé plusieurs des anciens astronomes, de regarder le soleil comme le centre des orbites planétaires, et Tycho ne put s'empêcher de convenir que toutes les planètes, en exceptant la terre, décrivaient leurs orbites autour du soleil. Rien ne peut nous autoriser, d'exempter la terre seule de cette loi, et de faire circuler autour d'elle le soleil avec toutes les planètes, puisque les habitans de chaque autre planète pourraient réclamer le même droit. Il y eut un tems, où l'amour propre était excusable, qui regarda la terre, habitée par des hommes, comme un corps qui devait être plus parfait et plus grand que tous les autres corps célestes, et par conséquent le centre de l'univers. Mais depuis que l'invention des lunettes et le perfectionnement des sciences astronomiques nous ont appris, que la terre est presque la plus petite de toutes les planètes qui, selon toutes les apparences, sont des corps semblables à la terre; il serait inutile de réfuter sérieusement un pareil préjugé. Le développement du véritable système du monde, et l'enchainement de toutes les vérités de l'astronomie rationnelle, sont la preuve la plus complette du mouvement de la terre, dont on ne saurait se convaincre parfaitement, qu'après avoir étudié le système entier de l'astronomie: c'est alors que l'on verra, combien de clarté, de simplicité, et d'ordre, est répandu par ce seul mouvement sur les phénomènes les plus compliqués. Cependant c'est le lieu ici, d'exposer une des plus importantes et des plus belles découvertes du siècle passé, qui prouve le mouvement annuel de la terre de la même manière, que son mouvement diurne est prouvé par les variations de la pesanteur.

§. 9. Pour trouver une preuve immédiate ou physique du mouvement annuel de la terre, il fallait procéder de la même manière, qu'à l'égard du mouvement diurne. On détermina par des raisonnemens, les phénomènes qui devraient résulter d'un pareil mouvement, on se servit de l'observation, pour voir si ces phénomènes avaient lieu: et dans ce cas, on était autorisé d'inférer la cause de l'effet. La première chose dont on s'avisa, fut la *parallaxe annuelle* des étoiles fixes. Si l'oeil de l'observateur ou la terre change de place, le lieu apparent des étoiles changera de même, en supposant que le diamètre de

l'orbite de la terre, ou la plus grande différence des lieux occupés par la terre dans différentes saisons, ait un rapport sensible à la distance des étoiles. Dans un pareil cas, les longitudes et latitudes apparentes de chaque étoile seront différentes aux différens points de l'orbite, ou selon les différentes saisons; elles seront les mêmes dans les mêmes saisons. La longitude et la latitude observée doivent être corrigées par les *parallaxes en longitude et en latitude;* la longitude et la latitude vraie est celle qui serait observée du centre de l'orbite ou du soleil, et que l'on appelle *héliocentrique;* ainsi que, relativement à la parallaxe diurne, le lieu vrai est le géocentrique. Il s'agissait donc, de déterminer par les observations, la parallaxe de longitude et de latitude pour les différens points de l'orbite de la terre.

§. 10. Soit S (*Fig.* 1.) le soleil, autour duquel la terre T circule suivant l'ordre des signes célestes ATC; soit F une étoile fixe, et FE perpendiculaire au plan de l'écliptique, donc E le lieu de l'étoile réduit à l'écliptique, FSE, FTE, ses latitudes héliocentrique et géocentrique. Les longitudes sont déterminées par les droites SE et TE: l'angle SET est donc la *parallaxe de longitude,* et la différence entre les angles FSE et FTE est la *parallaxe de latitude.* Lorsque la terre est en A, les longitudes géocentriques du soleil et de l'étoile sont égales, l'étoile est en *conjonction* avec le soleil (☌); quand la terre est en B, ces longitudes diffèrent de 180 degrés, l'étoile est en *opposition* (☍). La droite ABE est la ligne des *Syzygies* A, B, et la perpendiculaire par S indique les *Quadratures* C, D, où la différence entre les longitudes du soleil et de l'étoile est de 90 degrés. Dans les syzygies la parallaxe de longitude est nulle, et celle de latitude est parvenue à son *maximum;* dans les quadratures la dernière est nulle, et la première est un *maximum.*

Soit le demi-diamètre de l'orbite de la terre $AS = TS = c$, $FE = b$, $ES = a$, $FSE = \beta$, $FTE = \beta'$, et la longitude du soleil, comptée de la conjonction, ou $AST = \alpha$; on aura $\text{tang}\,\beta = \frac{b}{a} = m$, et dans le triangle EST, $TE = \sqrt{(a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos\alpha)}$. En faisant encore, pour abréger, la distance de l'étoile au soleil $FS = e$, $\frac{c}{a} = n$, $\frac{c}{e} = p$, on aura

$$\text{tang}\,\beta' = \frac{FE}{TE} = \frac{m}{\sqrt{(1 + 2n\cos\alpha + n^2)}}.$$

ou puisque l'extrême petitesse de la parallaxe des étoiles fixes prouve que n est une quantité inconsidérable, $\text{tang}\,\beta' = m(1+2n\cos\alpha)^{-\frac{1}{2}} = m(1-n\cos\alpha)$. Cela donne

$$\text{tang}\,(\beta-\beta') = \frac{mn\cos\alpha}{1+m^2(1-n\cos\alpha)}, \text{ ou à très-peu près,}$$

$$\beta-\beta' = \frac{mn\cos\alpha}{1+m^2} = n\cos\alpha\sin\beta\cos\beta:$$

donc, à cause de $\cos\beta = \frac{a}{e}$ et par conséquent $p = n\cos\beta$,

la *parallaxe de latitude*, $\beta-\beta' = p\cos\alpha\sin\beta$.

Comme le plan FSE est perpendiculaire à l'écliptique, la ligne CD, étant perpendiculaire à l'intersection SE de ces deux plans, le sera aussi au plan FSE, ensorte que $DSF = 90°$, et tang DFS ou l'angle $DFS = \frac{DS}{FS} = \frac{c}{e} = p$: d'où il suit que p est le demi-diamètre de l'orbite de la terre, vû de l'étoile F, ou ce qui revient au même, la *parallaxe annuelle* de cette étoile.

Le triangle EST donne encore l'équation

$$\text{tang}\,SET = \frac{c\sin\alpha}{a+c\cos\alpha} = \frac{p\sin\alpha}{\cos\beta+p\cos\alpha}, \text{ ou à peu près,}$$

la *parallaxe de longitude* $SET = p\sin\alpha\sec\beta = \lambda$.

La parallaxe de longitude est donc à celle de latitude, comme

$$\text{tang}\,\alpha : \sin\beta\cos\beta :: 2\,\text{tang}\,\alpha : \sin 2\beta :: \lambda : \beta-\beta';$$

d'où l'on trouve l'une, l'autre étant donnée. Il est bon d'observer que, l étant la longitude héliocentrique de l'étoile, l' la géocentrique, λ est $= l'-l$, parce que TE est plus avancé suivant l'ordre des signes que SE.

§. 11. Ces formules suffisent pour en déduire toute la théorie de la parallaxe annuelle. La parallaxe de latitude est nulle dans les quadratures, où $\alpha = 90°$ ou $270°$, donc $\cos\alpha = 0$; elle est un *maximum* dans les syzygies, où $\cos\alpha = \pm 1$. Son *maximum* est $= \pm p\sin\beta$, elle est donc d'autant plus grande, que l'étoile est plus près du pole de l'écliptique. Comme on peut observer avec plus de précision la latitude, au moyen des hauteurs méridiennes, que la longitude, il est visible, que les étoiles sont d'autant plus favorables à ces observations, que leur latitude est plus grande. Au reste, $\beta-\beta'$ est positif, ou la latitude apparente est moins grande que la véritable, pendant que la terre parcourt la demi-circonférence DAC, c'est-à-dire vers la conjonction A, depuis la dernière quadrature D jusqu'à la pre-

mière C; dans l'opposition B, et de C en D, la latitude apparente est plus grande que l'héliocentrique.

La parallaxe de longitude $\lambda = l' - l$ est nulle dans les syzygies, et son *maximum* dans les quadratures $= \pm p \sec \beta$, augmente également avec la latitude; elle est positive, ou la longitude apparente l' est plus grande que l, depuis la conjonction A jusqu'à l'opposition B; de là jusqu'à la conjonction la longitude apparente est moins grande.

Il suit de l'équation $\tang \beta' = m (1 - n \cos \alpha)$ (§. 10.), que la latitude apparente est un *minimum* $= m (1 - n)$ dans la conjonction, un *maximum* $= m (1 + n)$ dans l'opposition, ensorte qu'elle augmente depuis la conjonction jusqu'à l'opposition, et diminue depuis l'opposition jusqu'à la conjonction.

Tels sont les principes, suivant lesquels il fallait décider, par le moyen des observations, la question relative à la parallaxe annuelle.

§. 12. Vers la fin de l'an 1725 Molineux et Bradley commencèrent leurs observations relativement à cet objet important, avec des grands secteurs, faits exprès pour cet effet, et ils choisirent pour cela principalement l'étoile γ du *Dragon*; dont la latitude est d'environ 75°, la longitude de 8^s 25°. Elle était donc en conjonction avec le soleil au milieu du Décembre; époque où ils commencèrent à l'observer; elle était dans la première quadrature C au mois de Mars, en opposition au mois de Juin, et dans la dernière quadrature D au mois de Septembre. Suivant la théorie des parallaxes (§. 11.), sa latitude devait donc aller en croissant pendant les six premiers mois de l'année, et en décroissant pendant les six derniers mois: la plus grande latitude devait arriver au mois de Juin, la plus petite au mois de Décembre, la moyenne aux mois de Mars et de Septembre. Les observateurs trouvèrent un résultat très-différent de celui auquel ils s'étaient attendus. La latitude augmenta depuis le Mars jusqu'au Septembre, et diminua pendant les six autres mois; elle parvint à son *maximum* au mois de Septembre, à son *minimum* au mois de Mars, et la latitude moyenne arriva aux mois de Juin et de Décembre. Chacune de ces quatre époques principales arriva donc plus tard de trois mois, ou d'un quart de l'orbite de la terre, que suivant la théorie des parallaxes. Ainsi, les phénomènes étant directe-

ment opposés à l'hypothèse d'une parallaxe annuelle, on observa plusieurs étoiles avec le même soin, et l'on trouva toujours le même résultat, que la plus grande latitude arriva dans la quadrature qui suit l'opposition, et la plus petite dans celle qui vient après la conjonction. Cela ne pouvait être l'effet des erreurs de l'instrument ou des observations, parce que toutes les étoiles donnaient le même résultat; on ne pouvait non plus penser à une nutation annuelle de l'axe de la terre, parce qu'une pareille hypothèse, en expliquant le mouvement d'une étoile, était contraire à ceux des autres. Au reste, Bradley s'aperçut que, conformément à la théorie des parallaxes, la variation de la latitude de différentes étoiles était comme les sinus de leurs latitudes; il trouva encore, que la différence entre la plus grande et la plus petite latitude d'une étoile peu éloignée du pole de l'écliptique, ou le diamètre du cercle que les étoiles paraissaient décrire, était de 40″. Les observations, faites longtems auparavant par Picard, Hook, et autres, se trouvèrent en général parfaitement d'accord avec celles de Bradley.

§. 13. Il fallait donc renoncer à l'hypothèse d'une parallaxe annuelle, et il ne restait que cette alternative: ou de nier le mouvement de la terre — et c'était en effet la plus forte objection qu'on avait faite depuis longtems contre ce mouvement — ou de supposer une si grande distance des étoiles fixes, que leur parallaxe soit insensible — c'est la reponse que Copernic donna à cette objection, et ce qu'Aristarque de Samos avait déjà soutenu, en disant que l'orbite de la terre était à la distance des étoiles fixes, comme le centre d'un cercle à sa circonférence, c'est-à-dire, comme zéro à l'unité, ou comme l'unité à l'infini. La première opinion était combattue par la probabilité du mouvement annuel de la terre (§. 8.). D'ailleurs, ces phénomènes extraordinaires suivaient exactement les saisons, ils dépendaient donc évidemment d'un mouvement annuel de la terre, parce que celui du soleil ne saurait influer sur les étoiles. On était donc obligé de chercher d'autres effets du mouvement de la terre, qui seraient propres à expliquer ces phénomènes, et de regarder la grandeur insensible de la parallaxe annuelle comme l'effet de l'immense distance des étoiles, qui d'ailleurs n'était pas improbable, parce que les meilleurs téléscopes ne donnaient

aux étoiles fixes aucune grandeur perceptible, mais les faisaient paraître comme des points. En supposant leur distance e assés grande, pour que le rayon de l'orbite de la terre c s'évanouisse relativement à e, on aura (§. 10.) $p = \frac{c}{e} = 0$, et les parallaxes de longitude et de latitude disparaissent. Il s'agissait donc, d'expliquer ces observations par quelque autre effet du mouvement annuel de la terre, et Bradley en trouva bientôt la véritable cause, dans une découverte faite environ cinquante ans auparavant. Quoiqu'elle ne puisse être éclaircie parfaitement que dans la suite, il sera bon de l'exposer ici briévement.

Au reste, quelle que soit la cause de ce mouvement singulier des étoiles, il prouve d'une manière incontestable le mouvement annuel de la terre autour du soleil, parce que la période des mouvemens de toutes les étoiles est l'année. Le but de ces observations était donc atteint, quand même ce mouvement des étoiles n'aurait jamais été expliqué.

§. 14. Jupiter avec ses quatre satellites est tantôt en conjonction, tantôt en opposition avec le soleil: son orbite renferme donc celle de la terre ou du soleil, et si le soleil occupe le centre de son orbite, il sera dans la conjonction plus éloigné de la terre que dans l'opposition, d'un diamètre de l'orbite de la terre ou du soleil, parce que dans la première le soleil est entre Jupiter et la terre, et que dans la dernière la terre se trouve entre Jupiter et le soleil. Après que, par un grand nombre d'observations, on était parvenu à pouvoir calculer d'avance les éclipses des satellites de Jupiter, on s'aperçut que le commencement et la fin des éclipses n'arrivait que dans les quadratures, à l'époque fixée par les tables, mais que l'un et l'autre arrivait 8 minutes et 7 secondes plus tard dans la conjonction, et plutôt dans l'opposition, qu'il ne devait être suivant le calcul. Roemer expliqua ce phénomène d'une manière fort simple et ingénieuse, en supposant, ce qui était d'ailleurs vraisemblable, que la lumière employait un certain tems pour arriver de Jupiter à la terre; que par conséquent, le dernier rayon de lumière sortant du satellite au commencement de l'éclipse, ou le premier à la fin de l'éclipse, devait frapper nos yeux, dans la conjonction plus tard, et dans l'opposition plutôt, qu'à la distance moyenne des quadratures, de tout le tems

*

que la lumière employe à parcourir le rayon de l'orbite de la terre: d'où il suit, que la lumière parcourt le diamètre de cette orbite en 16 min. 14 sec.; donc la *vitesse de la lumière* etait connue par rapport au diamètre de l'orbite de la terre. On fonda sur cette hypothèse une correction, que l'on appliqua au calcul des éclipses dans toutes les situations de Jupiter, et l'on obtint, par ce moyen, un parfait accord du calcul avec les observations. Ainsi, cette importante découverte n'étant plus douteuse, Bradley en profita, pour expliquer le mouvement des étoiles, par lequel elles semblent décrire une ellipse, dont le plus grand diamètre était, suivant ses observations, de 40″.

§. 15. Soit (*fig.* 2) une étoile en F, la terre en T. Si la terre était en repos, l'observateur verrait l'étoile suivant la direction TF, elle lui paraîtrait élevée au dessus de la ligne TA, de l'angle ATS. Mais si la terre parcourt, dans un très-petit tems, l'arc *t*T que l'on peut regarder comme une ligne droite, et que le rayon de lumière FS parcoure dans le même tems la droite ST, le rayon, en frappant l'oeil en T, l'affectera autrement que si l'oeil était en T sans mouvement. Dans le dernier cas, l'oeil perçoit une impression suivant la direction ST, il voit donc l'étoile sur la ligne TS. Si, au contraire, la lumière sortie de l'étoile se trouvait en T sans mouvement, et que l'oeil vînt la frapper suivant la direction de son mouvement *t*T, il aurait la même sensation que si la lumière agissait sur l'oeil en repos, suivant la direction opposée AT, on croirait donc voir l'étoile dans la ligne TA. Si donc la lumière et l'oeil se meuvent à la fois, suivant les directions et avec les vitesses ST et *t*T, il est clair que l'oeil aura la même sensation, que si la lumière avait en même tems les mouvemens ST et T*t* ou *s*S, ou ce qui revient au même d'après le principe de la composition des vitesses, l'oeil sera affecté, comme si la lumière arrivait dans la diagonale *s*T. Il verra donc l'étoile dans la ligne T*s*, tandis qu'elle se trouve effectivement dans la ligne TS: l'étoile paraîtra élevée au dessus de la ligne TA, de l'angle AT*s*, au lieu de sa véritable élévation ATS. La différence entre les lieux vrai et apparent des astres, qui résulte des mouvemens de la terre et de la lumière, et qui est égale à l'angle ST*s*, est ce qu'on appelle *l'aberration* de la lumière. Si la vitesse de la terre dans son

orbite est à celle de la lumière comme 1 à μ, et qu'on nomme l'angle $ATS = \Phi$, l'aberration $STs = \omega$, on aura $Ss : ST :: 1 : \mu$, $SsT = \Phi$, et $\sin \omega$ ou $\omega = \frac{Ss}{ST} \sin \Phi = \frac{\sin \Phi}{\mu}$, Φ étant l'angle que le rayon visuel de l'astre fait avec la direction du mouvement de la terre, ou avec la tangente de son orbite.

§. 16. Les éclipses des satellites de Jupiter (§. 14.) avaient fait connaître le nombre μ avec assés de précision, pour pouvoir comparer cette théorie avec les observations. Mais dès que l'on était convaincu, par ce moyen, de la vérité de l'hypothèse, on pouvait se servir des observations plus délicates de l'aberration, pour déterminer plus exactement la valeur de μ, et pour calculer les éclipses mêmes des satellites avec plus de précision. La lumière parcourt le diamètre de l'orbite de la terre en 16 min. 14 sec. (§. 14.), ou suivant les observations de M. Delambre, en 16 min. 26,4 sec. Dans le même tems la terre décrit un arc de 40″,5 (I. §. 126.): la vitesse de la lumière est donc à celle de la terre, comme le diamètre d'un cercle à l'arc de 40″,5 ou comme le nombre 2 à celui qui exprime 40″,5 en parties du rayon: d'où l'on tire $\frac{1}{\mu} = \frac{\sin 40'',5}{2} = \sin 20'',25$; partant $\omega = 20'',25 \sin \Phi$ (§. 15.). L'aberration augmente donc avec l'angle Φ, et elle parvient à son *maximum* $= \pm 20'',25$, lorsque Φ est $= 90°$ ou $270°$. Il est aisé de voir, que la direction apparente de l'étoile Ts tombe toujours entre la véritable direction TS et celle de la terre TA, que par conséquent, l'élévation apparente de l'étoile au dessus de la tangente de l'orbite TA, ou l'angle sTA est toujours plus petit que la véritable élévation STA, quand même cet angle serait obtus: car dans l'équation $\omega = 20''25 \cdot \sin \Phi$, $\sin \Phi$ est toujours positif, et par conséquent aussi ω. En effet, le rayon de lumière étant sT, et la terre allant suivant Tt, le mouvement relatif de la lumière sera composé de sT et tT ou Ss; sa direction apparente sera donc ST, et STt est plus petit que sTt.

Il est aisé de conclure de cela, que le mouvement *diurne* de la terre doit aussi produire une aberration; mais comme ce mouvement est beaucoup plus lent, μ est ici un nombre si grand, que ω est insensible. On verra plus bas, que le demi-diamètre de la terre est à peu près 23000 fois plus petit que celui de son orbite: le mouvement diurne fait donc décrire à un point

de l'équateur, en un jour, un cercle dont le rayon $= 1$, au lieu que le mouvement annuel lui fait décrire, en 365,25 jours, un cercle 23000 fois plus grand. Donc, les vitesses étant dans le rapport direct des espaces et inverse des tems, la vitesse du mouvement annuel est $\frac{2300000}{36525}$ fois où 63 fois plus grande que celle du mouvement diurne. L'aberration diurne sera donc tout au plus $\frac{20''}{63}$ ou moins d'un tiers de seconde, lorsque $\Phi = 90°$, et que l'observateur est sous l'équateur; dans tous les autres cas elle sera encore moins considérable.

§. 17. Soit (*Fig.* 3.) ACBD l'orbite et la direction du mouvement annuel de la terre, AB la ligne des syzygies, et C, D, les quadratures, relativement à l'étoile S: les directions, suivant lesquelles l'oeil verrait l'étoile aux divers points A, C, D, s'il était en repos, seraient AS, CF, DE, parallèles entre elles, parceque la parallaxe des étoiles est nulle (§. 13.). Si donc A*a*, C*c*, D*d*, sont des tangentes de l'orbite, les directions apparentes de l'étoile, A*s*, C*f*, D*e*, tomberont dans les plans SA*a*, FC*c*, ED*d*, entre les côtés de ces angles (§. 16.). Puisque les tangentes C*c*, D*d*, sont parallèles à AB, et que les plans SAB, FC*c*, ED*d*, sont perpendiculaires à l'écliptique; l'aberration dans les quadratures se fait en entier dans le plan du cercle de latitude: en nommant donc β et β' les latitudes vraie et apparente, on aura $FCc = \beta$, $fCc = \beta'$, $EDd = 180° - \beta$, $eDd = 180° - \beta'$, et β' est l'angle que nous avons nommé Φ (§. 15.): on a donc $FCf = 20'' \sin \beta' = EDe$. Ainsi, dans la première quadrature C qui suit la conjonction, la latitude apparente est $= \beta - 20'' \sin \beta$, dans la dernière D elle est $= \beta + 20'' \sin \beta$: leur différence, ou le diamètre de l'orbite apparente des étoiles, est donc $= 40'' \sin \beta$, et pour une étoile près du pole de l'écliptique $= 40''$ (§. 14.). La latitude est un *minimum* dans la première quadrature C, elle augmente jusqu'à la quadrature D, et elle diminue de D en C. La tangente A*a* est perpendiculaire à l'intersection AB de l'écliptique et du cercle de latitude, et par conséquent à ce dernier: d'où il suit que dans la conjonction A, le plan de l'aberration SA*s* ou SA*a* est perpendiculaire au cercle de latitude; A*s* a donc même latitude que AS, et la latitude n'est point changée dans la conjonction. Il est visible qu'il en est de même de l'opposition B, de sorte qu'en géné-

ral, dans les syzygies, la latitude apparente est égale à la véritable ou moyenne. Si l'on compare cette théorie générale avec les observations de Bradley (§. 12.), on trouvera le plus parfait accord. On ne peut donc pas douter, que l'aberration de la lumière ne soit la véritable cause de ces phénomènes, et par conséquent une preuve incontestable du mouvement annuel de la terre autour du soleil.

LIVRE II.

DES ÉTOILES FIXES.

CHAPITRE I.

Distance, grandeur, et position des étoiles.

§. 18. Un des plus importans objets de l'astronomie, la base de toutes les recherches sur les propriétés, la grandeur, etc. des etoiles fixes, c'est leur *distance* à la terre, ou ce qui revient au même, leur parrallaxe, qui est le seul moyen à la portée des astronomes, pour déterminer la distance d'un astre à la terre. Mais comme on a vu, que la parallaxe diurne, ainsi que la parallaxe annuelle des étoiles fixes est insensible, il est impossible de connaître leur distance avec quelque précision; cependant cette impossibilité même fournit le moyen de déterminer des limites pour le *minimum* de leur distance. Après que l'aberration eut prouvé le mouvement de la terre, il fallut en conclure, que les étoiles avaient nécessairement une parallaxe annuelle; et comme elle échappait aux observations les plus délicates, il en suivait qu'à cause de sa petitesse, elle était insensible même pour les meilleurs instrumens. En effet, cette insensibilité est une idée relative, dépendant de la perfection des instrumens et des méthodes. Ptolémée ne pouvait répondre d'une erreur de ses observations plus petite que 10′; Tycho porta

l'exactitude à 1′ ou 30″; et vers le commencement du siècle passé, elle fut portée à 1″ ou 2″. On conçoit donc qu'on ne peut pas employer ici des observations antérieures au dix-huitième siècle, parce qu'il y a toute apparence, que la parallaxe n'est pas plus grande que 1″ ou 2″.

Il faut encore remarquer, qu'il n'y a que peu d'étoiles qui aient été observées dans ce dessein et avec le soin nécessaire: si donc les observations n'ont indiqué aucune parallaxe, il ne faut pas en conclure, que toutes les étoiles soient exemptes de parallaxe. Il est très-probable à la vérité, que les étoiles les plus brillantes sont aussi les plus proches; mais il est toutefois possible, que les plus proches étoiles paraissent de la troisième ou quatrième grandeur, parce qu'elles sont réellement plus petites que celles de la première grandeur. Nous verrons plus bas, que les étoiles de la première grandeur sont probablement beaucoup plus grandes que le soleil: s'il est donc permis de supposer ici comme partout, que la nature ne fait pas de sauts, il est à présumer, que ces étoiles ne sont pas les plus proches, mais qu'entre elles et le soleil il y en a d'autres qui, ayant une grandeur plus conforme à celle du soleil, brillent moins que celles-là. On voit donc, combien de circonstances concourent, pour s'opposer à une détermination exacte, et combien il serait à désirer, qu'on observât aussi les petites étoiles relativement à leur parallaxe. Il est visible en même tems, que la parallaxe des étoiles fixes ne peut se monter qu'à peu de secondes, parce qu'autrement elle n'aurait pas échappé aux nombreuses observations des étoiles, quoiqu'elles n'aient pas été faites dans ce dessein.

§. 19. Les instrumens, dont les astronomes se sont servis pour déterminer la parallaxe des étoiles, avaient des dimensions si grandes, et étaient travaillés, vérifiés, et maniés avec tant de soin et d'adresse, que Bradley était persuadé, que la parallaxe n'aurait pas échappé à ses observations, quand-même elle ne monterait qu'à une seconde. Dès qu'il se fut assuré de la théorie de l'aberration, il s'en servit pour calculer pour toutes les saisons, les latitudes ou hauteurs méridiennes apparentes des étoiles, et ne trouva jamais une différence entre le calcul et les observations, plus grande qu'une seconde et demie, d'où il conclut, que la parallaxe n'était pas d'une seconde.

On ne peut pas disconvenir, que cette limite est susceptible de quelque extension, attendu que les erreurs des observations peuvent être un peu plus grandes, et que peut-être les étoiles, observées par Bradley, n'étaient pas justement les plus proches de la terre. Cependant comme les plus habiles astronomes depuis Bradley n'ont pas trouvé des parallaxes plus grandes, il paraît qu'on peut supposer, que la parallaxe des étoiles les plus proches n'est pas plus grande que deux secondes. De même que la parallaxe diurne d'une planète équivaut au demi-diamètre de la terre, vu de la planète, de même la parallaxe annuelle d'une étoile fixe est le demi-diamètre de l'orbite de la terre, vu de étoile, ou ce qui revient au même, le demi-diamètre vrai, divisé par la distance de l'étoile. On trouvera donc le *minimum* de la distance de l'étoile, en divisant le rayon de l'orbite de la terre par 2″ ou par 0,0000096962. Il en résulte, que la distance des étoiles les plus proches de la terre est plus de 103132 fois plus grande que la distance du soleil à la terre, ou suivant Bradley qui prend 1″ pour limite des parallaxes, plus de 200000 fois plus grande.

§. 20. Le demi-diamètre de l'orbe terrestre contient au moins 23000 rayons de la terre, et celui-ci est d'environ 1432 lieues de France, ou 860 milles dont quinze au degré. En multipliant ces nombres par 103132, on trouvera que la distance des étoiles est plus grande que 2372 millions de rayons terrestres, ou 2000000 millions de milles. Ainsi le tems que la lumière emploie à passer de l'étoile la plus proche à la terre, est au moins 103132 fois 8 min. 7 sec. (§. 14.), ou un an et 216 jours, suivant Bradley quatre ans. Cette immense distance n'est peut-être rien par rapport à celle des étoiles dont est composée la voie lactée: ce n'est que le premier degré d'une échelle, dont nous ne connaissons pas la fin. C'est ici que la géométrie finit, et que l'astronomie tient à la poësie. Le seul résultat sûr que donnent les observations astronomiques, c'est que même la plus petite distance des étoiles fixes est si grande, que le diamètre de l'orbe terrestre, une ligne de plus de quarante millions de milles, y paraît être un point.

§. 21. La méthode dont Bradley et d'autres astronomes se sont servis, pour déterminer la parallaxe, consiste à observer, pendant une année en-

tière, la distance zénitale d'une étoile au méridien, ou plutôt les variations périodiques de cette distance: elle suppose donc, que la lunette du secteur reste immuablement dans la même position pendant plusieurs ans. Il est aisé de se convaincre de cette immobilité, si la hauteur des étoiles n'éprouve que des variations périodiques qui dépendent des saisons, de manière qu'après être corrigée par l'aberration, etc. elle est toujours la même au bout d'un an. La réfraction n'y a aucune influence, parce qu'on n'observe pour cet effet, que des étoiles près du zénit, où la réfraction varie seulement de 1″ pour un degré de hauteur, et qu'il ne s'agit ici que d'une variation de 40″, y compris l'aberration. Mais ce qui est plus important, c'est que les observations zénitales ne donnent séparément ni l'aberration ni la parallaxe, mais l'une confondue avec l'autre: il pourrait donc paraître difficile de les séparer, et de déterminer la parallaxe qui n'est que de 1″ ou 2″, par des observations qui comprennent l'aberration qui est de 40″. Il est vrai, que cette dernière, ainsi que la nutation, est bien exactement connue par une foule d'observations. Cependant, vu la grande importance de cet objet, il serait à désirer qu'il y eût des phénomènes, affectés de la parallaxe seule, et en même tems aisés à observer avec une grande précision. Il n'y a sans doute rien de plus propre à cet effet, que l'observation des *étoiles doubles*, proposée par Galilée, et exécutée par M. Herschel: ce sont des étoiles, dont la distance apparente de l'une à l'autre est si petite, que même dans les lunettes ordinaires elles paraissent composer une seule étoile, et qu'il faut employer de forts grossissemens, pour rendre visible l'intervalle de peu de secondes, qui les sépare. Comme ces deux étoiles ont la même longitude, latitude, hauteur, etc. elles sont affectées de la réfraction, aberration, etc. absolument de la même manière; ensorte que leur position relative, et leur distance apparente n'en est pas altérée du tout. Il est très-probable, que ces étoiles sont en effet fort éloignées l'une de l'autre, de manière que l'une est beaucoup plus éloignée de la terre que l'autre, quoique dans la même direction: c'est d'autant plus vraisemblable, parce qu'ordinairement l'une des étoiles qui forment une étoile double, est beaucoup plus brillante que l'autre. On conçoit, qu'en pareil cas, leur distance apparente augmentera ou diminuera, que l'étoile la

plus éloignée se détachera de l'autre ou se cachera derrière elle, aussitôt que l'oeil ou la terre change de place. Il pourrait même arriver, que dans différentes saisons, la même étoile parût double et simple; et le plus petit changement se manifesterait par la forme altérée du groupe de ces deux étoiles. Un plus grand développement de cette matière, et des calculs y relatifs, serait inutile, d'autant que jusqu'à present aucune observation n'a été publiée, qui donne un résultat sûr (1).

§. 22. Il est encore plus difficile de déterminer la *grosseur* des étoiles, parcequ'elle suppose qu'on connaît outre la distance, le diamètre apparent qui est aussi peu sensible que la parallaxe. En nommant p la parallaxe annuelle d'une étoile, ϱ et r ses demi-diamètres apparent et vrai, x sa distance, a le rayon de l'orbite de la terre; on a deux triangles rectangles sur la commune base x, qui ont le côté adjacent à cette base r, a, et l'angle ϱ, p: d'où il suit $x = \frac{r}{\varrho} = \frac{a}{p}$, donc $r = \frac{\varrho}{p}\, a$. Tout ce que nous savons jusqu'à présent, c'est que p et ϱ ne sont pas plus grands que $2''$. La grandeur apparente des étoiles diminue, à mesure que les lunettes sont plus parfaites, et les étoiles finissent par paraître comme des points sans aucune grandeur. On sait qu'un objet lumineux paraît de loin beaucoup plus grand qu'il ne l'est, parcequ'il communique à l'atmosphère qui l'environne, un éclat que l'oeil nu ne peut distinguer d'avec l'objet. L'inflexion irrégulière de la lumière, ou son aberration dans les verres de la lunette, et l'impression trop vive qu'éprouve la rétine par un point très-luisant, font qu'une étoile paraît toujours plus grande qu'elle ne l'est, et que plus les lunettes sont parfaites, plus elles font paraître les étoiles petites.

Lorsqu'une étoile est éclipsée par la lune, elle devrait disparaître peu à peu, si elle eût un diamètre sensible: conformément au mouvement moyen de la lune, il s'écoulerait environ deux secondes entre le commencement de l'éclipse et la disparition entière de l'étoile, si son diamètre était seulement de $1''$. Mais toutes les observations s'accordent à prouver, que même les étoiles de la première grandeur, lorsqu'elles sont éclipsées par la lune, disparaissent dans un instant, sans qu'on puisse apercevoir une diminution successive de

(1) Voy. mon mémoire *sur la parallaxe des étoiles fixes*, dans les *éphémérides de Berlin*, *an* 1796.

leur lumière. Une des observations les plus décisives est celle de l'occultation de l'étoile double γ m. Les deux étoiles dont elle est composée, sont si près l'une de l'autre, que même dans des lunettes de onze pieds elles paraissent former une seule étoile. Néanmoins Cassini et Messier ont observé des intervalles de 30 et de 8 secondes, entre les occultations de ces étoiles, quoique l'une et l'autre disparût en moins d'une demi-seconde. Cela prouve, que le diamètre des étoiles, même dans les lunettes, paraît infiniment plus grand qu'il ne l'est. Il en suivrait, que la grandeur apparente des étoiles serait tout-à-fait insensible; cependant cette assertion est sujette à quelques objections.

On pourrait dire que, quand-même l'étoile fût éclipsée successivement, et que l'immersion durât plus de deux secondes, l'impression que sa lumière fait sur notre oeil, est trop faible, pour que nous puissions apercevoir sa diminution successive: cela paraît être confirmé par ce qu'on a observé dans les éclipses solaires totales, que le premier rayon du soleil change tout d'un coup une nuit parfaite, en plein jour. D'ailleurs M. Herschel, à qui l'astronomie doit tant de découvertes importantes, nous assure qu'à l'aide des grossissemens étonnans que ses téléscopes supportent, il est parvenu à voir les noyaux des plus grandes étoiles, parfaitement ronds sans aucune lumière étrangére, et à mesurer leurs diamètres apparens. Suivant ses observations, le diamètre de *Wéga* est $= \frac{1}{3}''$, celui d'*Aldebaran* $= 1\frac{1}{2}''$, de la *chèvre* $= 2\frac{1}{2}''$ (1). Si l'on suppose la parallaxe annuelle de ces étoiles $= 1''$, ou le diamètre de l'orbe terrestre, vu des étoiles $= 2''$, les vrais diamètres de ces étoiles et de l'orbite de la terre seraient comme $\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, à 2; leurs diamètres seraient donc de 7 à 50 millions de milles. Le diamètre du soleil est l'arc d'un cercle, dont le rayon est la distance du soleil à la terre; il est $= 32' = 0{,}00931 = \frac{1}{107{,}4}$: d'où il suit que le rayon de l'orbite de la terre est 107,4 fois, et le diamètre 215 fois plus grand que le diamètre du soleil. Les diamètres de ces étoiles seraient donc $\frac{1}{6} \cdot 215$, $\frac{3}{4} \cdot 215$, et $\frac{5}{4} \cdot 215$, ou 36 fois, 161 fois, et 269 fois plus grands que celui du soleil. En supposant donc, qu'elles sont des sphères comme le soleil, leur volume serait 46656 fois,

(1) *Philos. Transact. Vol. LXXII. Catalogue of double stars, page* 148. 153. 157.

4'173281 fois, et 19'465109 fois plus grands que celui du soleil: la *chèvre* contiendrait presque 20 millions de corps égaux au soleil.

§. 23. Cette grosseur immense est appuyée sur des observations qui, malgré l'habilité des observateurs, admettent quelques doutes, vu qu'elles supposent les téléscopes exempts de toute irradiation, et qu'elles sont contraires à ce qu'on a observé dans les occultations des étoiles par la lune: ces occultations, observées avec les mêmes téléscopes, répandraient beaucoup de jour sur cet objet. Il est possible que ces trois étoiles ont une parallaxe plus grande, que celles qu'on a observées à d'autres étoiles: alors leur grosseur serait diminuée dans le même rapport. Du reste, le soleil n'est pas la règle pour les autres corps célestes: il est au contraire probable, qu'il y a une infinité de soleils, plus grands que le nôtre; et peut-être celui-ci est un des plus petits soleils, ainsi que notre terre est une des plus petites planètes. Le seul résultat sûr qu'on puisse tirer de ces observations, c'est qu'en général les étoiles sont aussi grandes, et peut-être beaucoup plus grandes que le soleil.

§. 24. Le plus petit diamètre apparent d'un corps opaque, qui soit perceptible à nôtre oeil, est de 40″; mais si le corps est *lumineux*, la limite de visibilité sera d'autant plus petite, que la lumière du corps est plus forte. Ainsi, puisqu'avec un diamètre de moins de 1″, les étoiles ont un éclat si grand, que quelques unes sont visibles même au commencement du crépuscule ou en plein jour, il ne peut y avoir aucun doute, qu'elles n'aient une lumière propre comme le soleil. Il est impossible que ces innombrables étoiles, qui couvrent le ciel à des distances immenses, ne brillent que d'une lumière empruntée, parceque les corps nécessairement plus brillans, dont elles emprunteraient la lumière, sont invisibles pour nous. Nos yeux sentent même la différence entre la lumière propre des étoiles fixes, et la lumière empruntée des planètes. Les étoiles de la première grandeur ont un éclat, presqu'égal à celui de Jupiter, dont le diamètre est parfois de 49″. Cette belle planète deviendrait insensible, si sa distance était doublée plusieurs fois; et c'est encore bien loin de la distance des étoiles. Il paraît donc certain, que les étoiles fixes brillent d'une lumière propre, comme le soleil, et

qu'elles l'égalent ou le surpassent en grandeur; en un mot, que ce sont de vrais *soleils*. Cela posé, l'analogie nous fait présumer, que ces soleils, ainsi que le nôtre, sont entourés de corps opaques ou de planètes sans nombre, qui leur doivent la lumière et la chaleur. On conçoit, que ces *satellites des étoiles fixes* seront tonjours invisibles pour nous, attendu que, placés à la même distance que leurs corps centraux, ils sont vraisemblablement beaucoup plus petits et opaques: aussi les observations de quelques astronomes modernes, qui prétendaient les avoir vus, ne se sont nullement confirmées.

L'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes est probablement la cause de cette *scintillation*, qui les distingue d'une manière si frappante d'avec les planètes. La moindre molécule, flottant dans les airs, suffit pour couvrir l'étoile entière: l'oeil verra donc l'étoile paraître et disparaître; et comme cette occultation ne peut durer qu'un instant, à cause de l'agitation de l'atmosphère, il en résultera le phénomène de la scintillation. Sans cacher même entièrement l'étoile, chaque molécule qui passe entre elle et notre oeil, doit nécessairement altérer la réfraction de la lumière, ensorte que le lieu apparent de l'étoile, aussi bien que sa figure, éprouvera des changemens continuels, d'où il devra naître un tremblement. Il en suit que, plus l'atmosphère est imprégnée de vapeurs, plus la scintillation sera forte; et les campagnards ont appris par l'expérience, à s'attendre, en pareil cas, à un tems pluvieux. Dans les pays, au contraire, où l'air est très-pur, comme en Perse, la scintillation n'a pas lieu.

§. 25. Les observations donnent les lieux des étoiles relativement à l'équateur; mais les catalogues des étoiles présentent aussi leur situation par rapport à l'écliptique, dont le plan est plus stable que celui de l'équateur. L'astronome est donc souvent dans le cas, de réduire une position à l'autre: conséquemment, il sera bon de rassembler ici toutes les formules de trigonométrie, dont on a besoin pour cet effet.

Soient (*Fig.* 4.) E, P, les poles de l'écliptique ♈ L et de l'équateur A Q, ♈ le point vernal, L le point solstitial du *Cancer*, F une étoile, par laquelle sont menés le cercle de latitude E C, et le cercle de déclinaison P B. En nommant donc la longitude de l'étoile ♈ C $= \lambda$, sa latitude

$CF = \beta$, son ascension droite $\Upsilon B = \varrho$, sa déclinaison $BF = \delta$, et l'*angle de position* $EFP = p$; on aura dans le triangle EFP,

$EF = 90° - \beta$, $PEF = 90° - \lambda$, $PF = 90° - \delta$, $EPF = 90° + \varrho$,

$EP = \varepsilon$ étant l'obliquité de l'écliptique.

La trigonométrie sphérique fournira donc les équations suivantes:

$$\text{I.}\ldots\ldots \sin\delta = \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \sin\lambda \cos\beta;$$

$$\text{II.}\ldots\ldots \operatorname{tang}\varrho = \frac{\cos\varepsilon \sin\lambda - \sin\varepsilon \operatorname{tang}\beta}{\cos\lambda};$$

$$\text{III.}\ldots\ldots \sin\beta = \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \sin\varrho \cos\delta;$$

$$\text{IV.}\ldots\ldots \operatorname{tang}\lambda = \frac{\sin\varepsilon \operatorname{tang}\delta + \cos\varepsilon \sin\varrho}{\cos\varrho};$$

$$\text{V.}\ldots\ldots \operatorname{tang} p = \frac{\cos\lambda}{\cot\varepsilon \cos\beta - \sin\beta \sin\lambda};$$

$$\text{VI.}\ldots\ldots \operatorname{tang} p = \frac{\cos\varrho}{\cot\varepsilon \cos\delta + \sin\delta \sin\varrho}.$$

Ayant encore mené l'arc ΥF, qui est l'hypothènuse des triangles ΥBF et ΥCF, on aura $\cos\Upsilon F = \cos\Upsilon B \cos BF = \cos\Upsilon C \cos CF$, d'où l'on tire

$$\text{VII.}\ldots\ldots \cos\varrho \cos\delta = \cos\lambda \cos\beta.$$

Pour avoir des formules disposées plus favorablement pour l'usage des logarithmes, on peut chercher d'abord les angles Φ et Ψ, au moyen des formules,

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{\sin\lambda}{\operatorname{tang}\beta}, \text{ et } \operatorname{tang}\Psi = \frac{\sin\varrho}{\operatorname{tang}\delta}. \text{ Alors on aura}$$

$$\text{(I)}\ \sin\delta = \frac{\sin\beta \cos(\Phi - \varepsilon)}{\cos\Phi}, \quad \text{(II)}\ \operatorname{tang}\varrho = \frac{\operatorname{tang}\lambda \sin(\Phi - \varepsilon)}{\sin\Phi},$$

$$\text{(III)}\ \sin\beta = \frac{\sin\delta \cos(\varepsilon + \Psi)}{\cos\Psi}, \quad \text{(IV)}\ \operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\varrho \sin(\varepsilon + \Psi)}{\sin\Psi}.$$

§. 26. Ces formules supposent, ainsi que la *Fig.* 4. le fait voir, que les latitudes et déclinaisons sont boréales, les longitudes et ascensions droites plus petites que 90°: on verra aisément, comment il faut changer les signes dans d'autres cas. Dans la même supposition, le cercle de déclinaison, dirigé vers le nord, FP, tombe à l'orient ou à gauche du cercle de latitude FE; le contraire aura lieu, si tang p aura une valeur négative.

La tangente de l'ascension droite (II) peut devenir négative dans plusieurs cas: d'abord dans le premier *quadrans*, si $\sin\lambda$ est moindre que $\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\beta$; alors le cercle de déclinaision PF tombera entre Υ et A. Cela peut arriver, lorsque λ est petit, ou que β est grand, par ex. si l'étoile est

dans le cercle EF près de E. Dans le second *quadrans*, tang ϱ est négatif, à moins que sin λ ne soit plus petit que tang ε tang β. Dans le troisième *quadrans*, tang ϱ est positif, et dans le quatrième négatif. L'ascension droite est donc toujours dans le même *quadrans* que la longitude, excepté le cas où sin λ est moindre que tang ε tang β. Enfin ϱ est négatif, ou dans le quatrième *quadrans*, si λ est nul, à moins que β ne soit aussi nul ou négatif: dans le premier cas on a $\varrho = 0$, et l'étoile est dans le point vernal Υ; dans le second cas, elle est dans le premier *quadrans*. Si λ est $= 90°$, et tang β plus grand que sin λ cot $\varepsilon = \cot \varepsilon$, ou $\beta > LP$, l'étoile est en *d*, et $\varrho = 270°$: la formule II. donne pour ce cas tang $\varrho = -\infty$.

Ces explications suffiront, pour faire voir, comment il faut procéder dans d'autres cas, et si les latitudes ou déclinaisons sont australes.

CHAPITRE II.

Mouvement apparent des étoiles fixes.

§. 27. Le lieu des étoiles est déterminé relativement à l'équateur et à l'écliptique, deux plans qui ne sont pas tout-à-fait immobiles. Si donc la longitude, latitude, ascension droite ou déclinaison éprouve des changemens, il faut dire que les étoiles changent de position, ou qu'elles ont un mouvement relativement à ces deux plans; mais il n'en suit pas un mouvement réel des étoiles. Tels sont-peut être tous les mouvemens qu'on observe dans les étoiles; et il n'est pas difficile, de trouver un caractère qui servira à reconnaître, si un mouvement est apparent ou réel. Si le mouvement est commun à toutes les étoiles, s'il ne dépend pas de leur grandeur, mais de leur situation relativement à l'équateur ou à l'écliptique, c'est évidemment un mouvement de ces plans, et non des étoiles; mais si l'on aperçoit un mouvement particulier dans quelques étoiles, dont d'autres, ayant à peu près la même position, sont exemptes, on ne peut pas douter, que cela ne soit un mouvement réel ou plutôt propre des étoiles. Dans le premier cas, il sera aisé de décider, si l'équateur ou l'écliptique est en mouvement. Celui de ces deux plans, à l'égard duquel les étoiles ne changent pas de position, est évidemment en repos; et il est facile de voir, que cela ne s'étend pas à la longitude et l'ascension droite, mais seulement à la latitude et déclinaison, parceque les premières se comptent d'un point qui peut être déplacé par le mouvement d'un seul de ces plans. Si par ex. la latitude des étoiles, ou leur distance au pole de l'écliptique est invariable, ce pole est en repos, et par conséquent aussi le plan dont il est le pole. Chaque déplacement d'un plan suppose un mouvement de son axe ou de ses poles, et tous les

dérangemens apparens des étoiles peuvent être réduits à un mouvement des poles de l'équateur ou de l'écliptique. Si par ex. l'équateur ou l'axe du monde est en mouvement, la latitude des étoiles ne change point, mais leur déclinaison et ascension droite, et même leur longitude changera, parceque les points d'intersection des deux plans, dont elle est comptée, avancent ou reculent, à moins que le mouvement entier des poles ne se fasse dans le plan du colure des solstices. Il en résulte les caractères suivans. Si l'ascension droite et la déclinaison changent seules, l'écliptique est en repos, et les poles de l'équateur se meuvent dans le plan du colure des solstices. Si la longitude change aussi, la latitude étant invariable, les poles du monde ont un mouvement autour des poles de l'écliptique. Si la latitude change, les poles de l'écliptique sont en mouvement.

§. 28. On connaît jusqu'à présent quatre mouvemens apparens des étoiles fixes.

1. La *rétrogradation des points équinoxiaux (précession des équinoxes)*, ou le mouvement des étoiles en longitude, sans changement de latitude: c'est donc un mouvement des poles de l'équateur autour de ceux de l'écliptique.

2. La *diminution de l'obliquité de l'écliptique*, ou le mouvement des étoiles en latitude, sans que la déclinaison soit changée: ce qui indique une rotation des poles de l'écliptique autour de ceux de l'équateur.

3. La *nutation*, étant un mouvement des étoiles periodique dans l'espace de 18 à 19 ans, sans que la latitude change: c'est donc le résultat d'un mouvement périodique, ou d'une osscillation de l'axe de la terre.

4. L'*aberration*, ou la variation annuelle de la position des étoiles relativement à l'écliptique, qui résulte du mouvement de la terre autour du soleil: effet purement optique.

Il a déjà été fait mention de tous ces mouvemens apparens: il faut maintenant exposer les changemens de longitude, latitude, ascension droite, et déclinaison, qui en résultent. Leur mécanisme sera expliqué dans l'astronomie physique; mais nous aurons besoin ici d'une hypothèse, pour faciliter le calcul de ces mouvemens. Que l'hypothèse soit juste ou non, cela n'importe pas; pourvu que les calculs, conformes à cette hypothèse, satisfassent aux observations.

Quand il était prouvé par des observations, éloignées l'une de l'autre de 2000 ans, que les longitudes et latitudes de toutes les étoiles avaient changé sensiblement, la quantité moyenne de ce mouvement était d'autant plus facile à déterminer, que d'autres observations, faites dans cet intervalle, indiquaient son *uniformité*. L'intervalle de 2000 ans est si grand, que les mouvemens *périodiques* (tels que la nutation), qui peuvent avoir eu lieu pendant ce tems, n'y ont aucune influence. Pour répandre plus de jour sur cet objet, il était naturel, de décomposer le mouvement des étoiles en deux autres suivant la longitude et la latitude, et d'examiner séparément chacun de ces mouvemens, quoiqu'on ignorât que c'étaient réellement deux effets différens. En calculant, à l'aide de ces deux mouvemens moyens, le lieu apparent des étoiles, pour un intervalle de quelques ans, on trouva entre le calcul et l'observation, une différence qui parvenait à son *maximum* tous les neuf ans, et qui s'évanouissait au bout de 18 ans. Il en résultait, qu'il n'était pas nécessaire, de changer le mouvement moyen qu'on avait adopté conformément aux observations fort éloignées, mais qu'il suffisait de supposer, outre ce mouvement progressif, encore un mouvement périodique de 18 ans. C'est ainsi qu'on parvint à la découverte des trois premiers mouvemens: celle du quatrième a été exposée en détail (§. 12. *suiv.*).

§. 29. Le mouvement le plus considérable des étoiles, qui par cette raison n'était pas inconnu aux anciens astronomes, est la rétrogradation des points équinoxiaux. Hipparque (128 ans avant l'ère vulgaire), ayant comparé ses observations avec celles de Timocharis, plus anciennes de 160 ans, aperçut que la longitude des étoiles avait augmenté, dans cet intervalle, de deux degrés à peu près. Ptolémée, en comparant ses observations avec celles d'Hipparque, trouva que, dans cet intervalle de 265 ans, la longitude avait augmenté de 2°40′, ce qui donne un degré par siècle (1). Ptolémée fit déjà la remarque, qu'il y a deux moyens de décider, si ce dérangement des étoiles dépend d'un mouvement de l'équateur ou de l'écliptique; en examinant, 1) si l'ascension droite ou la longitude de toutes les étoiles augmente de la même quantité, 2) si la déclinaison ou la latitude est invariable. La première

(1) *Almag. Lib. VII. Cap. 2.*

recherche demande des observations fort éloignées, à cause de la lenteur du mouvement: Ptolémée ne pouvait donc pas l'employer, mais les observations modernes ont prouvé clairement, que l'accroissement de longitude est le même pour toutes les étoiles, au lieu que le changement des ascensions droites est très-différent, surtout près du pole. Les anciens astronomes trouvèrent par la seconde méthode, que la latitude était invariable, tandis que la déclinaison éprouvait des changemens fort sensibles. Les étoiles dans les signes *ascendans* approchent du pole boréal de l'équateur, dans les lignes *descendans* elles approchent du pole austral: plus les étoiles sont près des points équinoxiaux, plus ce mouvement est rapide (1). Il fallait en conclure, que l'axe du monde décrit autour de l'axe immobile de l'écliptique un cône, et par conséquent les poles du monde un cercle dans la sphère, parce que l'obliquité de l'écliptique, ou l'angle compris par les deux axes, ne changeait pas; et que ce mouvement a une direction opposée à l'ordre des signes, parceque la longitude augmente, et que par conséquent les points équinoxiaux et solstitiaux ont un mouvement rétrograde. Le changement de la latitude des étoiles, découvert dans les tems modernes, n'a rien de commun avec ce mouvement: il est comparativement insensible, et suit d'autres loix, ainsi qu'on va le voir. Cela sera entièrement éclairci, en comparant aux observations le mouvement des étoiles, calculé d'après cette rotation supposée de l'axe de l'équateur.

Il est remarquable, que ce mouvement, malgré sa lenteur, paraît avoir été connu de tous les anciens peuples qui cultivaient l'astronomie, longtems avant Hipparque (2). Mais cela se conçoit aisément par la manière dont ils observèrent le cours du soleil. Un objet très-important de leurs observations était la première apparition d'une étoile avant le lever du soleil (*ortus heliacus*); et ils remarquaient exactement le point de l'horison, où le soleil se leva, ou la longueur de l'ombre, jetée par le gnomon, ce jour, c'est-à-dire la déclinaison, et par conséquent la longitude du soleil. Quelques ans suffisaient, pour leur faire apercevoir, que le jour où l'étoile était pour la pre-

(1) *Almag. Lib. VII. Cap.* 3.

(2) On en trouve les preuves recueillies dans l'*Histoire de l'astr. ancienne par Bailly.*

mière fois visible le matin, le soleil, quoiqu'ayant la même situation relativement à l'étoile, ne se levait pas au même point de l'horison, ou que la longueur de l'ombre n'était plus la même: d'où il suivait, que l'étoile avait changé de longitude, parcequ'elle était l'une et l'autre fois à égale distance au soleil.

Au reste, les anciens, ou du moins Ptolémée, avaient une idée peu juste de ce mouvement. Cet astronome le regarda comme un mouvement réel de la sphère des étoiles, d'où il conclut, que l'année tropique était la vraie révolution du soleil, parceque, dit-il, sa révolution relativement aux étoiles est aussi vague, que par rapport à Saturne ou telle autre planète (1). On verra dans l'astronomie physique, que la précession des équinoxes n'est autre chose qu'un déplacement du plan de l'équateur terrestre, qui est une suite nécessaire de l'action de la lune et du soleil sur les parties élevées de l'équateur du sphéroïde aplati, et qui par conséquent n'aurait pas lieu, si la terre était une sphère.

§. 30. D'après les observations (I. §. 90.), la *rétrogradation annuelle des points équinoxiaux* le long de l'écliptique, ou l'arc décrit par les poles de l'équateur autour des poles de l'écliptique, ou ce qui revient au même, l'accroissement annuel de la longitude des étoiles est 50″, 1. Les poles du monde décrivent donc, autour des poles de l'écliptique, un petit cercle, dont la distance à son pole est égale à l'obliquité de l'écliptique, en parcourant dans ce cercle un arc de 50″, 1 par an contre l'ordre des signes: ils feront donc, ainsi que les points équinoxiaux sur l'écliptique, une révolution entière en 25868 ans, dans la supposition que ce mouvement est toujours uniforme. La longitude de chaque étoile croissant de 50″, 1 par an, on trouvera pour un tems quelconque, la longitude moyenne des étoiles par une simple addition. La latitude ne change pas, mais l'ascension droite et la déclinaison éprouvent des changemens différens selon la situation de chaque étoile relativement à l'équateur. Les règles de la trigonométrie sphérique donnent le moyen de calculer pour un tems quelconque l'ascension droite et la déclinaison, la latitude et longitude étant données; mais il est plus commode pour

(1) *Almag. Lib. III. Cap.* 2. au commencement.

la pratique, et principalement pour la construction des tables, de chercher à l'aide du calcul différentiel, les petites variations de l'ascension droite et de la déclinaison, qui répondent à l'accroissement de la longitude de 50″,1.

§. 31. En différentiant les équations I. II. (§. 25.), et supposant ε et β constans, parceque la latitude ne change pas, on aura

$$\frac{\partial\delta}{\partial\lambda} = \frac{\sin\varepsilon\cos\beta\cos\lambda}{\cos\delta}, \text{ et } \frac{\partial\varrho}{\partial\lambda} = \frac{\cos^2\varrho\,(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\lambda)}{\cos^2\lambda}.$$

La comparaison des deux valeurs de tang p (V. VI. §. 25.) donne

$$\frac{\cos\varrho\,(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\lambda)}{\cos\lambda} = \frac{\cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta\sin\varrho}{\cos\beta}.$$

En substituant cette valeur et la formule VII. (§. 25.) dans les équations précédentes, elles prendront la forme

$$\text{I. } \partial\delta = \partial\lambda\sin\varepsilon\cos\varrho; \quad \text{II. } \partial\varrho = \partial\lambda\,(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\varrho).$$

La déclinaison ou l'ascension droite diminuera, au lieu d'augmenter, si la formule I. ou II. devient négative. Comme $\partial\lambda = 50'',1$ est toujours positif pour un tems postérieur à l'époque d'où l'on part, l'ascension droite ne peut diminuer, que lorsque l'étoile est australe ou dans le troisième ou quatrième *quadrans*, $\mathrm{tg}\,\delta\sin\varrho$ étant plus grand que $\cot\varepsilon$. Du reste on voit, que près du pole où $\mathrm{tg}\,\delta$ croît à l'infini, la variation de l'ascension droite peut devenir infinie.

L'équation I. nous apprend, que les déclinaisons boréales augmentent et les australes diminuent, ou que l'étoile est rapprochée du pole boréal, lorsqu'elle est dans les signes *ascendans*; c'est le contraire dans les signes *descendans*. La variation de la déclinaison est d'autant plus considérable, que $\cos\varrho$ est plus grand, c'est-à-dire que l'étoile est plus près d'un des points équinoxiaux. On voit que tout cela est parfaitement d'accord avec les observations de Ptolémée (§. 29.).

Les formules précédentes sont assés exactes, quand il s'agit de calculer la *précession* pour un tems peu éloigné de l'époque, pour laquelle on a déterminé immédiatement les argumens ε, δ, ϱ. L'an 1820 l'obliquité est $\varepsilon = 23°\,27'\,47''$: la précession annuelle en déclinaison et en ascension droite sera donc, en faisant $\partial\lambda = 50'',1$;

$$\text{I. } \partial\delta = 19'',9477.\cos\varrho; \quad \text{II. } \partial\varrho = 45'',95757 + 19'',9477.\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\varrho;$$

le terme $45'',95757$ étant commun à toutes les étoiles. Ces formules sont exactes pour plusieurs ans avant et après 1820. Mais pour des tems fort éloi-

gnés, la diminution constante de l'obliquité, quoiqu'elle ne soit que d'une demi-seconde par an (I. §. 83.), devient sensible, et il est nécessaire d'en tenir compte.

§. 32. En différentiant les équations I. II. (§. 25.) par rapport à ε, on trouvera

$\partial\delta\cos\delta = \partial\varepsilon(\cos\varepsilon\sin\lambda\cos\beta - \sin\varepsilon\sin\beta)$, et $\frac{\partial\varrho}{\cos^2\varrho} = -\frac{\partial\varepsilon(\sin\varepsilon\sin\lambda + \cos\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta)}{\cos\lambda}$

L'introduction de l'équation VII. (§. 25.) donnera

$\partial\delta\cos\delta = \partial\varepsilon(\cos\varepsilon\cos\delta\cos\varrho\,\mathrm{tg}\,\lambda - \sin\varepsilon\sin\beta)$, $\frac{\partial\varrho}{\cos^2\varrho} = -\partial\varepsilon\left(\sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\lambda + \frac{\cos\varepsilon\sin\beta}{\cos\delta\cos\varrho}\right)$.

En substituant au lieu de $\sin\beta$ et $\mathrm{tg}\,\lambda$ leurs valeurs III. IV. (§. 25.), on trouvera après toutes les réductions,

$$\partial\delta = \partial\varepsilon\sin\varrho, \text{ et } \partial\varrho = -\partial\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta\cos\varrho.$$

Si l'on joint ces corrections aux précédentes (§. 31.), il viendra

III. $\partial\delta = \partial\lambda\sin\varepsilon\cos\varrho + \partial\varepsilon\sin\varrho$;

IV. $\partial\varrho = \partial\lambda(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\varrho) - \partial\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta\cos\varrho$:

l'une et l'autre doit être multipliée par le nombre d'années, pour lequel on cherche la précession.

Il faut faire ici deux remarques. Les argumens même des deux corrections, étant composés de ε, δ, ϱ, sont variables: si donc l'intervalle est très-grand, il faut faire un calcul préalable, pour déterminer, au moyen de la précession, les valeurs de ε, δ, ϱ, ou du moins de δ, ϱ, qui conviennent à l'époque moyenne: ce calcul servira à corriger les argumens, avec lesquels on calculera la précession (III. IV.). D'ailleurs le coëfficient $\partial\lambda$ même est variable, parceque la précession des équinoxes n'est pas parfaitement uniforme. On verra dans l'astronomie physique, que l'action des planètes sur la terre produit aussi un mouvement des points équinoxiaux, beaucoup plus lent et irrégulier. Ce que les observations nous donnent, ne peut être que le résultat de ces deux mouvemens, qui n'est pas uniforme. Il n'est donc pas permis de supposer $\partial\lambda$ proportionnel au tems. Suivant M. Laplace (1), la précession en longitude, $\partial\lambda$, ou la rétrogradation des points équinoxiaux le long de l'écliptique, en nommant t le nombre d'années écoulées depuis 1750, est

(1) *Mécan. cél. T. III. p.* 112.

(1) .... $\Delta\lambda = 50'',39561.t + 1909'',82(\sin 16'',32263.t)^2 - 4333'',24\sin 14'',11474t$,

et le changement de l'obliquité de l'écliptique

(2) .... $\Delta\varepsilon = -3165'',2208.\sin 32'',64526.t - 2242'',2744(\sin 7'',05737.t)^2$.

Il faut faire t négatif pour les tems antérieurs à 1750. La substitution de ces valeurs au lieu de $\partial\lambda$, $\partial\varepsilon$, dans les formules III. IV. les rendra plus exactes. Cependant, les argumens ε, δ, ϱ, étant encore variables, on demandera, quelles valeurs il faut donner à ces angles, lorsque t est un très-grand nombre. La règle qu'on donne ordinairement, est de calculer d'abord $\Delta\delta$ et $\Delta\varrho$, au moyen des formules III. IV. et avec les valeurs que ε, δ, ϱ, avaient à l'époque d'où l'on part, en prenant $\frac{1}{2}t$ au lieu de t. En ajoutant ces corrections avec δ, ϱ, on aura leurs valeurs qui conviennent au milieu de l'intervalle t, et qui serviront d'argumens, avec lesquels les formules III. IV. donneront, par un second calcul, les valeurs de $\Delta\delta$, $\Delta\varrho$, très-exactes. Cependant, si l'intervalle t est très-grand, on aura un résultat plus exact, en employant la méthode suivante, qui est directe, et pourra être étendue au plus grand nombre t.

§. 33. Les formules précédentes ne renferment que les premières différentielles; mais si t est un très-grand nombre, il ne faut pas négliger les différentielles successives. Nous nous servirons pour cet effet de la série de *Taylor*, qui donne

$$(A)\ldots\Delta u = \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial\partial u}{\partial z^2}\cdot\frac{\Delta z^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\cdot\frac{\Delta z^3}{6} + \frac{\partial u}{\partial z'}\Delta z' + \frac{\partial\partial u}{\partial z\partial z'}\Delta z\Delta z' + \frac{\partial\partial u}{\partial z'^2}\cdot\frac{\Delta z'^2}{2} + \text{etc.}$$

u étant une fonction quelconque de z et de z', et ∂z, $\partial z'$ étant regardées comme constantes. Faisant donc $\sin\delta = u$, $z = \lambda$, $z' = \varepsilon$, on aura, en négligeant $\Delta\varepsilon^3$, $\Delta\lambda\Delta\varepsilon^2$, $\Delta\lambda^2\Delta\varepsilon$, et les quatrièmes différentielles,

$$(B)\ldots\Delta u = \frac{\partial u}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon + \frac{\partial\partial u}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\Delta\lambda^2}{2} + \frac{\partial\partial u}{\partial\lambda\partial\varepsilon}\Delta\lambda\Delta\varepsilon + \frac{\partial\partial u}{\partial\varepsilon^2}\cdot\frac{\Delta\varepsilon^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial\lambda^3}\cdot\frac{\Delta\lambda^3}{6}.$$

L'équation I. (§. 25.) donne, en faisant pour abréger, $\sin\varepsilon\cos\beta = m$, $\cos\varepsilon\cos\beta = n$, $\sin\varepsilon\sin\beta = p$, $\cos\varepsilon\sin\beta = q$,

$$(a)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial\lambda} = m\cos\lambda, & \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} = n\sin\lambda - p, & \frac{\partial\partial u}{\partial\lambda^2} = -m\sin\lambda, & \frac{\partial\partial u}{\partial\lambda\partial\varepsilon} = n\cos\lambda, \\ \frac{\partial\partial u}{\partial\varepsilon^2} = -m\sin\lambda - q, & \frac{\partial^3 u}{\partial\lambda^3} = -m\cos\lambda. \end{cases}$$

En regardant maintenant δ comme fonction de $u = \sin\delta$, on aura

$$(C)\ldots\Delta\delta = \frac{\partial\delta}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\partial\delta}{\partial u^2}\cdot\frac{\Delta u^2}{2} + \frac{\partial^3\delta}{\partial u^3}\cdot\frac{\Delta u^3}{6};$$

$\int = \int . u . = \int . \sin$

et l'on trouvera par les différentiations, en regardant ∂u comme constant, $\partial u = \partial\delta\cos\delta$, ou $\frac{\partial\delta}{\partial u} = \frac{1}{\cos\delta}$, donc

$$(b)\quad \begin{cases} \frac{\partial\delta}{\partial u} = \frac{1}{\cos\delta} = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}, & \frac{\partial\partial\delta}{\partial u^2} = u(1-u^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sin\delta}{\cos^3\delta}, \\ \frac{\partial^3\delta}{\partial u^3} = (1-u^2)^{-\frac{3}{2}} + 3u^2(1-u^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1+2\sin^2\delta}{\cos^5\delta}. \end{cases}$$

L'équation (B) donne

$$(c)\quad \begin{cases} \frac{\Delta u^2}{2} = \left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\Delta\lambda^2}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\right)\Delta\lambda\,\Delta\varepsilon + \left(\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{\Delta\varepsilon^2}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial\partial u}{\partial\lambda^2}\right) \cdot \frac{\Delta\lambda^3}{2}, \\ \frac{\Delta u^3}{6} = \left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)^3 \cdot \frac{\Delta\lambda^3}{6}. \end{cases}$$

Maintenant, en substituant (a) en (B) et (c), et les valeurs de Δu, Δu^2, Δu^3, qui en résultent, ainsi que les valeurs (b), dans l'équation (C), elle deviendra

$$(D)\quad \begin{cases} \Delta\delta = \frac{m\cos\lambda}{\cos\delta}\Delta\lambda + \frac{n\sin\lambda - p}{\cos\delta}\Delta\varepsilon + \frac{m^2\operatorname{tg}\delta\cos^2\lambda - m\cos\delta\sin\lambda}{\cos^2\delta} \cdot \frac{\Delta\lambda^2}{2} \\ \quad + \frac{mn\operatorname{tg}\delta\sin\lambda\cos\lambda - mp\operatorname{tg}\delta\cos\lambda + n\cos\delta\cos\lambda}{\cos^2\delta} \cdot \Delta\lambda\,\Delta\varepsilon \\ \quad + \frac{n^2\operatorname{tg}\delta\sin^2\lambda - 2np\operatorname{tg}\delta\sin\lambda + p^2\operatorname{tg}\delta - m\cos\delta\sin\lambda - q\cos\delta}{\cos^2\delta} \cdot \frac{\Delta\varepsilon^2}{2} \\ \quad + \frac{m^3(1+2\sin^2\delta)\cos^3\lambda - 3m^2\sin\delta\cos^2\delta\sin\lambda\cos\lambda - m\cos^4\delta\cos\lambda}{\cos^5\delta} \cdot \frac{\Delta\lambda^3}{6}. \end{cases}$$

Si l'on substitue en (D) les valeurs données par les équations III. IV. VII. (§. 25), pour éliminer λ, β, on trouvera, après toutes les réductions, en faisant pour abréger, $\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\sin\varrho = M$,

$$(E)\quad \begin{cases} \Delta\delta = \Delta\lambda.\sin\varepsilon\cos\varrho + \Delta\varepsilon.\sin\varrho - \frac{\Delta\lambda^2}{2}M\sin\varepsilon\sin\varrho + \Delta\lambda.\Delta\varepsilon.M\cos\varrho \\ \quad - \frac{\Delta\varepsilon^2}{2}\operatorname{tg}\delta\cos^2\varrho - \frac{\Delta\lambda^3}{6}\sin\varepsilon\cos\varrho(1-\sin^2\varepsilon\cos^2\varrho + 3M\sin\varepsilon\operatorname{tg}\delta\sin\varrho). \end{cases}$$

On trouvera de la même manière, en faisant $u = \operatorname{tang}\varrho$, au moyen de l'équation II. (§. 25.),

$$(a')\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial\lambda} = \frac{n - p\sin\lambda}{\cos\beta\cos^2\lambda}, & \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} = -\frac{m\sin\lambda + q}{\cos\beta\cos\lambda}, & \frac{\partial\partial u}{\partial\lambda^2} = \frac{2n\sin\lambda - p(1+\sin^2\lambda)}{\cos\beta\cos^3\lambda}, \\ \frac{\partial\partial u}{\partial\lambda\partial\varepsilon} = -\frac{m + q\sin\lambda}{\cos\beta\cos^2\lambda}, & \frac{\partial\partial u}{\partial\varepsilon^2} = \frac{p - n\sin\lambda}{\cos\beta\cos\lambda}, & \frac{\partial^3 u}{\partial\lambda^3} = \frac{2n(1+2\sin^2\lambda) - p\sin\lambda(5+\sin^2\lambda)}{\cos\beta\cos^4\lambda}, \end{cases}$$

$$(b')\quad \begin{cases} \frac{\partial\varrho}{\partial u} = \cos^2\varrho = \frac{1}{1+u^2}, & \frac{\partial\partial\varrho}{\partial u^2} = -\frac{2u}{(1+u^2)^2} = -2\sin\varrho\cos^3\varrho, \\ \frac{\partial^3\varrho}{\partial u^3} = \frac{6u^2 - 2}{(1+u^2)^3} = 2\cos^4\varrho(4\sin^2\varrho - 1); \end{cases}$$

$$(C')\quad \ldots\ldots \Delta\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\partial\varrho}{\partial u^2} \cdot \frac{\Delta u^2}{2} + \frac{\partial^3\varrho}{\partial u^3} \cdot \frac{\Delta u^3}{6}.$$

La substitution des équations III. IV. VII. en (a') donne, en faisant $\sin\varepsilon\operatorname{tang}\delta + \cos\varepsilon\sin\varrho = N$, et $N\cos\varepsilon + \sin\varrho = B$,

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{M}{\cos^2 \varrho}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \varrho}, \quad \frac{\partial \partial u}{\partial \lambda^2} = \frac{2 N^2 \sin \varrho}{\cos^3 \varrho} + \frac{B}{\cos \varrho}, \quad \frac{\partial \partial u}{\partial \lambda \partial \varepsilon} = -\sin \varepsilon - \frac{N \operatorname{tg} \delta}{\cos^2 \varrho},$$

$$\frac{\partial \partial u}{\partial \varepsilon^2} = -\operatorname{tang} \varrho, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial \lambda^3} = \frac{6 N^3 \sin \varrho}{\cos^4 \varrho} + \frac{3 N . B}{\cos^2 \varrho} + \frac{2 N \sin \varrho}{\cos^2 \varrho} + 2 \cos \varepsilon;$$

d'où il viendra

$$(E') \begin{cases} \Delta \varrho = M . \Delta \lambda - \Delta \varepsilon . \operatorname{tg} \delta \cos \varrho + \frac{\Delta \lambda^2}{2} \sin \varepsilon \cos \varrho \left(M \operatorname{tg} \delta + \frac{\sin \varepsilon \sin \varrho}{\cos^2 \delta} \right) \\ \quad + \Delta \lambda \Delta \varepsilon \left(M \operatorname{tg} \delta \sin \varrho - \frac{\sin \varepsilon \cos^2 \varrho}{\cos^2 \delta} \right) - \frac{\Delta \varepsilon^2}{2} \sin \varrho \cos \varrho \, (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \delta) \\ \quad + \frac{\Delta \lambda^3}{6} \sin \varepsilon \left[\begin{array}{l} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \, (3 \cos^2 \varrho - 1) + \operatorname{tg} \delta \sin \varrho \, (6 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varrho - 1) \\ + 3 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta \, (2 \cos^2 \varrho - 1) + 2 \sin^2 \varepsilon \operatorname{tg}^3 \delta \sin \varrho \, (4 \cos^2 \varrho - 1) \end{array} \right] \end{cases}$$

Les séries (E) E′) donnent un résultat très-exact pour plus de mille ans, en mettant à la place de δ, ϱ, leurs valeurs qui avaient lieu à l'époque d'où l'on part, et au lieu de $\Delta \lambda$, $\Delta \varepsilon$, les valeurs (1) (2) (§. 32.) qui conviennent au nombre d'années t, pour lequel la précession est cherchée. Dans les *Tables du soleil par M. Delambre* (*Tab. V.*), on trouve $\Delta \lambda$, $\Delta \varepsilon$, pour un tems quelconque, en partant de l'an 1750 relativement à $\Delta \lambda$, et de 1800 pour $\Delta \varepsilon$. Si l'intervalle n'est que de quelques ans, on peut se contenter des premiers termes, $\Delta \delta = \Delta \lambda \sin \varepsilon \cos \varrho + \Delta \varepsilon \sin \varrho$, $\Delta \varrho = M \Delta \lambda - \Delta \varepsilon \operatorname{tg} \delta \cos \varrho$, ou des formules III. IV. (§. 32.) (1).

Puisque la précession n'est pas périodique, mais va toujours en croissant, il est usité d'appeler lieu *moyen* des étoiles, celui qui est trouvé par la correction de la précession seule; il est converti en lieu *apparent* par les corrections périodiques de la nutation et aberration. Le lieu des étoiles dans la sphère est donc calculé d'une maniere semblable à celle dont on trouve le lieu du soleil dans les tables. Les observations donnent une *époque*, qui est réduite au lieu *moyen*, par la précession suivant les formules précédentes, et convertie en lieu *apparent* par la nutation et aberration. Ainsi l'on trouve dans les catalogues des étoiles, l'ascension droite et la déclinaison *moyennes* pour une certaine époque, avec la *précession* annuelle en ascension droite et en déclinaison.

§. 34. Le second mouvement des étoiles est le changement de leur situation relativement à l'écliptique, qui est intimement lié avec la diminution progressive de l'obliquité (I. §. 83.): c'est donc un véritable déplacement du plan de l'écliptique. Si l'on compare avec l'observation, le lieu des

(1) Voy. mon mémoire *De la précess. en décl. et en asc. droite*, dans les *Mém. de l'Acad. Imp. des Sc. T. VIII.*

étoiles, calculé d'après la théorie de la précession qui vient d'être développée, on s'apercevra que la déclinaison est parfaitement d'accord avec le calcul, mais que la latitude et la longitude sont sujettes a une petite anomalie qui ne peut pas être expliquée par la théorie précédente, parcequ'elle n'est pas la même pour toutes les étoiles et pour tous les tems, et qu'en général la théorie précédente ne donne aucun changement de latitude. Cela donna lieu à la découverte d'un nouveau mouvement, qui regarde l'écliptique seule, parceque les déclinaisons n'en sont point affectées. Il était réservé à l'astronomie moderne, d'en découvrir la cause: on verra dans l'astronomie physique, que c'est l'action que les planètes exercent sur la terre. Il ne sera pas inutile, d'en donner ici une idée générale.

Il est visible que, si les planètes se trouvaient toujours dans le plan de l'écliptique, la force avec laquelle elles attirent la terre, changerait la distance de la terre au soleil et sa vitesse, ou la longitude du soleil, sans écarter la terre du plan de son orbite, parceque l'action se fait entièrement dans ce plan. Mais les orbites planétaires étant inclinées sur l'écliptique, ensorte que chaque planète est toujours au-dessus ou au-dessous de ce plan, leur action tendra nécessairement à faire sortir la terre de ce plan; elle changera donc la position du plan de l'orbite de la terre. L'action de chaque planète est différente, selon sa masse, et sa distance à la terre et au plan de l'écliptique. Le déplacement total de l'écliptique sera donc composé des actions de toutes les planètes. L'action particulière de chaque planète consiste principalement, à communiquer au pole de l'écliptique un mouvement rétrograde autour du pole de l'orbite de cette planète. Les poles de l'écliptique ont, par conséquent, autant de mouvemens qu'il y a des planètes; et le résultat en est un mouvement rétrograde. Le calcul du changement de la position des étoiles par rapport à l'écliptique, qui en résulte, est bien compliqué, parceque ce mouvement ne se fait pas autour du pole de l'équateur ou de l'écliptique, ni en général autour d'un seul point. Il faut donc calculer séparément chaque action que Vénus, Jupiter, etc. exercent sur la terre, et les ajouter ensemble. Comme le mouvement se fait autour du pole d'une orbite planétaire, cette orbite est ce qu'était l'écliptique relativement à

la précession: le déplacement d'une étoile ne dépendra pas de sa position par rapport à l'écliptique, mais à cette orbite; c'est-à-dire, il dépendra des situations de l'étoile et de l'orbite planétaire relativement à l'écliptique. Le mouvement de l'étoile sera donc exprimé en fonction de sa latitude et longitude, ainsi que de la longitude des points d'intersection et de l'inclinaison de l'orbite planétaire par rapport à l'écliptique. Mais comme on peut supposer la position des orbites planétaires invariable pendant longtems, les deux derniers élémens entreront dans les coëfficiens constans, qui alors ne seront exacts que durant un certain tems. Comme ils sont indépendans de la situation de l'étoile, on peut faire la somme de tous les coëfficiens qui résultent ainsi des actions des différentes planètes; ensorte que les mouvemens de l'étoile en longitude et en latitude seront données par deux formules générales, qui ne renfermeront pas d'autre quantité variable que la longitude et latitude de l'étoile.

§. 35. En nommant λ la longitude, β la latitude de l'étoile, les calculs qui seront développés dans l'astronomie physique, donnent ces équations. L'*accroissement séculaire* de la *latitude* dans le tems actuel est

(1) ..... $\Delta\beta = 51'',1.\sin\lambda + 7'',35.\cos\lambda = 51'',626.\sin(\lambda + 8°11'6'')$;

celui de la *longitude*,

(2) ..... $\Delta\lambda = \mathrm{tg}\beta(7'',35\sin\lambda - 51'',1.\cos\lambda) = -51'',626.\mathrm{tg}\beta.\cos(\lambda + 8°11'6'')$.

Suivant M. Laplace, ces équations sont $\Delta\beta = 52''.\sin\lambda + 8''.\cos\lambda$, $\Delta\lambda = -\mathrm{tg}\beta(52''\cos\lambda - 8''\sin\lambda)$. Les coëfficiens $51'',1$ et $7'',35$ dépendent de la position des orbites planétaires par rapport à l'écliptique, ils ne peuvent donc être exacts que pour un ou deux siècles. Les mouvemens des orbites, connus par l'observation, donneront les valeurs de ces coëfficiens pour un tems quelconque. En les calculant pour le premier siècle de l'ère vulgaire, on peut prendre le milieu entre ces valeurs et celles que nous venons de trouver pour le tems actuel, pour en conclure le mouvement pendant tout cet intervalle, et par conséquent la position des étoiles dans le tems de Ptolémée. Les observations de cet astronome confirment cette théorie parfaitement, quoiqu'elles donnent un plus grand mouvement; mais cette différence est dans les limites des erreurs, dont les observations de Ptolémée sont susceptibles.

§. 36. Il est aisé de voir, que ce mouvement de l'écliptique changera aussi l'obliquité de l'écliptique et la rétrogradation des points équinoxiaux. En faisant dans l'équation (1) (§. 35). $\lambda = 90°$, elle donnera l'accroissement séculaire de la latitude boréale d'une étoile dans le colure du solstice d'été $\Delta\beta = 51'', 1$: c'est la quantité dont l'écliptique se rapproche de l'équateur, ou la diminution de l'écliptique. En multipliant $\Delta\beta$ par 19, 5; on trouve 16′ 36″, ce qui n'est pas entièrement exact, parcequ'il n'est pas permis de supposer les coëfficiens constans pendant 1950 ans (§. 35.). Mais si l'on fait $t = -1950$ dans l'équation (2) (§. 32.), on trouvera $\Delta\varepsilon = 961'', 43 - 9'', 97 = +15' 51'', 5$. C'est la quantité dont l'obliquité a diminué depuis l'an 200 avant J. C. jusqu'à l'an 1750, où elle était 23° 28′ 23″. Il s'en suit que l'obliquité a été 200 ans avant J. C. = 23° 44′ 14″,5; ce qui ne diffère que de 7′ de celle qu'Hipparque observa (I. §. 82.).

Le déplacement des points équinoxiaux, qui naît de ce mouvement, peut être direct ou rétrograde, selon la différente position de l'orbite planétaire, dont on considère l'action. Le mouvement total des points équinoxiaux pourra donc être aussi bien direct que rétrograde: on le trouvera par les raisonnemens suivans. Si les points équinoxiaux rétrogradent sur l'écliptique d'un arc ω, la longitude de chaque étoile diminuera nécessairement d'autant, quelle que soit sa situation; mais en outre elle éprouvera une variation particulière $\Delta\lambda$, qui depend de la longitude et latitude (§. 35.), ensorte que la variation totale de la longitude sera $= \omega + \Delta\lambda$. Concevons maintenant une étoile au pole de l'équateur, dont la latitude est par conséquent $\beta = 90° - \varepsilon$, la longitude $\lambda = 90°$ et constante, parceque, dans cette recherche, les poles de l'équateur sont supposés immobiles: on aura donc $\omega + \Delta\lambda = 0$, ou $\omega = -\Delta\lambda$. En mettant donc 90° et $90° - \varepsilon$ au lieu de λ et β, dans l'équation (2) (§. 35.), il viendra $\omega = -7'', 35 \cot\varepsilon = -17''$ pour le siècle présent: d'où il suit qu'en vertu de l'action des planètes, les points équinoxiaux avancent annuellement de 0″, 17.

Comme les déterminations anciennes des longitudes et latitudes des étoiles sont moins sûres que les observations des solstices par le moyen d'un gnomon, le meilleur moyen sera, de prendre pour base la diminution de l'ob-

liquité, qui a été trouvée par les observations de $o'',5$ par an (I. §. 83.). On verra dans l'astronomie physique, que le résultat des actions de toutes les planètes (§. 34.) consiste à communiquer au pole de l'écliptique un mouvement, par lequel il tourne autour du pole de l'équateur supposé immobile, en se rapprochant de lui en même tems, ensorte que l'obliquité diminue de $o'',5 = -\partial\varepsilon$ par an, pendant que les points équinoxiaux avancent de $o'',17 = \partial\Upsilon$. Mais comme dans toute cette recherche l'équateur est supposé immobile, il est plus simple, de prendre pour base l'avancement des points équinoxiaux sur l'équateur ou suivant l'ascension droite, ce qui sera en même tems le décroissement de l'ascension droite, commun à toutes les étoiles. En le nommant $-\partial\varrho$, et supposant que le point vernal est avancé sur l'équateur de $\Upsilon B = \partial\varrho$ (Fig. 4.), $\partial\Upsilon$ sera l'angle compris entre les cercles de latitude $E\Upsilon$, EB, ou l'arc Υb, Bb étant perpendiculaire à l'écliptique, d'où l'on tirera $\partial\Upsilon = \partial\varrho \cos\varepsilon$, et la diminution de l'ascension droite, $-\partial\varrho = -\frac{\partial\Upsilon}{\cos\varepsilon} = -\frac{o'',17}{\cos 23°28'} = -o'',2$; la déclinaison étant constante. Pour en déduire le changement en latitude et longitude, il faut différentier les équations III. IV. (§. 25.) par rapport à ε et ϱ, ce qui donnera

$$\partial\beta \cos\beta = -\partial\varepsilon(\sin\varepsilon \sin\delta + \cos\varepsilon \cos\delta \sin\varrho) - \partial\varrho \sin\varepsilon \cos\delta \cos\varrho,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\cos^2\lambda} = \frac{\partial\varepsilon(\cos\varepsilon \operatorname{tang}\delta - \sin\varepsilon \sin\varrho)}{\cos\varrho} + \frac{\partial\varrho(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \operatorname{tang}\delta \sin\varrho)}{\cos^2\varrho}.$$

Maintenant il faut éliminer δ et ϱ à l'aide des équations I. II. VII. (§. 25.), d'où il viendra

$$\partial\beta = -\partial\varepsilon \sin\lambda - \partial\varrho \sin\varepsilon \cos\lambda,$$

$$\partial\lambda = \partial\varepsilon \operatorname{tang}\beta \cos\lambda + \partial\varrho(\cos\varepsilon - \sin\varepsilon \operatorname{tang}\beta \sin\lambda),$$

et en substituant les valeurs, $\partial\varepsilon = -o'',5$; $\partial\varrho = -o'',2$; $\varepsilon = 23°28'$; et en multipliant par le nombre d'années t,

I. $\partial\beta = +o'',5 \,.\, t \sin\lambda + o'',08 \,.\, t \cos\lambda$,

II. $\partial\lambda = -o'',5 \,.\, t \operatorname{tang}\beta \cos\lambda - o'',2 \,.\, t\,(0,9173 - 0,3982 \,.\, \operatorname{tang}\beta \sin\lambda)$

ou II. $\partial\lambda = -o'',5 \,.\, t \operatorname{tang}\beta \cos\lambda - t \,.\, (o'',183 - o'',08 \,.\, \operatorname{tang}\beta \sin\lambda)$;

ce qui est à peu près d'accord avec les équations (1) (2) (§. 35.).

§. 37. C'est à Bradley, que l'astronomie doit la découverte du troisième et du quatrième mouvement des étoiles. Les observations délicates qui avaient le but de déterminer la parallaxe des étoiles, lui apprirent que

cette parallaxe n'avait pas lieu, mais que les étoiles avaient un autre mouvement annuel, l'aberration (§. 12. *suiv.*). Après avoir continué ces observations pendant plusieurs ans, il se convainquit, qu'en effet ce mouvement se renouvellait chaque année suivant le même ordre et les mêmes loix, mais que la déclinaison moyenne, ainsi que la plus grande et la plus petite, calculée d'après cette théorie, augmentait ou diminuait peu à peu d'un an à l'autre: que par conséquent, il existait, outre l'aberration périodique, un autre mouvement progressif, ou d'une période plus longue que l'année, période de l'aberration. C'est ainsi que, malgré les vicissitudes annuelles des saisons, on aperçoit aisément, que la température d'un pays devient plus ou moins chaude d'un an à l'autre. Pour découvrir la période de ce mouvement, Bradley continua ses observations, et trouva, que la déclinaison des étoiles augmentait pendant neuf ans, et diminuait pendant les neuf ans suivans, de sorte que tout était rétabli au bout d'une période de 18 à 19 ans. Il aperçut, que la plus grande différence des déclinaisons, qui en résultait en neuf ans, était de 18″, et que la latitude n'en était point altérée: ce qui s'expliquait, en supposant que le pole de l'équateur approche du pole de l'écliptique de 18″ en neuf ans, et qu'il s'en éloigne de la même quantité dans les neuf ans suivans. Bradley remarqua enfin, que ce mouvement était lié avec une variation ou irrégularité de la précession des équinoxes, qui suivait précisément la même période: d'où il conclut avec raison, que le mouvement des poles de l'équateur ne se fait pas dans le colure des solstices, ou ce qui revient au même, que les poles ne décrivent pas une ligne droite, ou l'arc d'un grand cercle de la sphère, mais une courbe ou un petit cercle coupant le colure des solstices. Une foule d'observations sur des étoiles différemment situées, prouva enfin, que l'on satisfait à tous ces phénomènes par l'hypothèse, que les poles de l'équateur décrivent en 18 ans un petit cercle de 18″ de diamètre, contre l'ordre des signes, ou que l'axe oscille dans ce cercle, en décrivant la surface d'un cône, dont l'axe fait avec les côtés un angle de 9″: c'est pour cela que ce mouvement a été appelé *nutation de l'axe.*

§. 38. Soit (*Fig.* 5.) E le pole de l'écliptique, autour duquel le pole de l'équateur P décrit, en vertu de la précession (§. 30.), contre l'ordre

des signes, un cercle PQR dont le rayon EP est égal à l'obliquité de l'écliptique, ensorte que le lieu *moyen* du pole P, Q, R, rétrograde de 50″,1 par an. Le pole *vrai p* décrit en même tems autour de P un petit cercle de 18″ de diamètre, suivant la même direction *p q r* (§. 37.). Le vrai mouvement du pole se fait donc sur la périphérie d'un cercle *p q r*, dont le centre P rétrograde en même tems sur la périphérie du cercle PQR, conséquemment dans un *épicycle*. Il résultera de la composition de ces deux mouvemens la courbe *a b c d e f g*, qui est la véritable route du pole. Supposons que le pole moyen soit en Q, le pole vrai en *a*, $aQ = 9''$. Au bout de 9 ans le pole moyen aura rétrogradé de $QR = 9 . 50'',1$, pendant que le pole vrai a parcouru la moitié de son épicycle: il sera donc en *c*, Rc étant $= 9''$, et il a décrit l'arc *a b c*, dont la plus grande distance au cercle PQR de 9″ est au point *b*. Au bout de 18 ans le pole moyen a encore rétrogradé de $RS = 9 . 50'',1$; et le pole vrai est revenu au même point *a* de son épicycle; il sera donc en *e*, Se étant $= 9''$. Dans cet intervalle il a été nécessairement en dedans du cercle PQR, et il s'en est également éloigné de 9″ en *d*, ensorte qu'il a parcouru en 18 ans la courbe *a b c d e*. Or on a $ac = QR + aQ + Rc = 9 . 50'',1 + 18'' = 7' 49''$, et $ce = RS - Rc - Se = 9 . 50'',1 - 18'' = 7' 13''$. Depuis *a* jusqu'à *c* la direction de son mouvement dans l'épicycle est la même que celle du pole moyen Q: son mouvement vrai ou composé est donc plus vite que le mouvement moyen, et il a devancé le pole moyen de Rc. En *c* sa direction est perpendiculaire à celle du pole moyen: il va donc suivant *c e* avec la vitesse moyenne de 50″,1 par an, et suivant *c*E avec une vitesse d'environ 3″. Cette dernière vitesse devient dans la moitié inférieure de l'épicycle, opposée à la moyenne: mais comme elle est beaucoup plus lente, n'étant que de 3″ par an, le vrai mouvement sera toujours dirigé suivant *ce*, et en *d* avec la différence des deux vitesses: c'est ainsi que naît l'arc *c d e*. En *b* et en *d* la différence entre les latitudes du pole vrai et du pole moyen (E*b* ou E*d*, et ER) est un *maximum*, tandis que la différence entre leurs longitudes est nulle; en d'autres mots, la correction de l'obliquité a sa plus

grande valeur, celle de la précession étant nulle: en *a*, *c*, et *e*, la correction de l'obliquité s'évanouit, et celle de la précession est un *maximum*.

§ 39. La période de 18 à 19 ans a une analogie si parfaite avec le mouvement de la lune, qu'on était presque forcé de regarder l'action de la lune comme la cause de la nutation: l'application de la théorie de Newton à l'attraction de la lune a mis cette supposition hors de doute. Si la terre était une sphère, l'action de la lune pourrait bien la faire avancer ou rétrograder, mais il serait impossible qu'elle tournât la terre autour de son centre, parcequ'il n'y aurait aucune raison, pour qu'elle tournât plutôt dans un sens que dans l'autre. D'ailleurs, si la lune circulait toujours dans le plan de l'équateur du sphéroïde terrestre, le plan de l'orbite de la lune, dans lequel elle exerce nécessairement son action entière, partagerait le sphéroïde terrestre en deux portions égales et semblables; par conséquent, aucune rotation de la terre ne pourrait naître de l'attraction de la lune. Mais si la lune se trouve hors du plan de l'équateur, elle attirera plus fort la masse élevée de l'équateur, en tendant à la rapprocher du plan de son orbite; elle déplacera donc, non seulement la terre elle-même, mais aussi son équateur ou son axe. Cet effet sera d'autant plus grand, que la lune s'écarte davantage du plan de l'équateur, ou que l'inclinaison de son orbite à l'équateur est plus grande. En effet, cette inclinaison est variable, à cause du mouvement des points d'intersection des plans de l'orbite lunaire et de l'écliptique, points qu'on appelle *noeuds* de la lune: l'inclinaison à l'équateur dépendra donc de la situation des noeuds relativement aux points équinoxiaux. Puisque l'écliptique coupe le plan de l'équateur sous un angle de $23\frac{1}{2}$ degrés, et celui de l'orbe lunaire sous un angle de 5 degrés, il est visible, que l'inclinaison de cette orbite relativement à l'équateur peut croître de $18\frac{1}{2}$ à $28\frac{1}{2}$ degrés, selon que l'orbe lunaire est situé entre l'écliptique et l'équateur ou autrement, c'est-à-dire selon la situation de l'intersection commune de l'orbe lunaire et de l'écliptique par rapport à celle de l'écliptique et de l'équateur, ou bien des noeuds de la lune relativement aux points équinoxiaux. La nutation de l'axe terrestre se conformera donc exactement au mouvement des noeuds de la lune: or ces noeuds faisant une révolution en 18 à 19 ans, ce tems sera la

période de la nutation, ce qui est parfaitement d'accord avec les observations. La comparaison des observations de la nutation avec les noeuds de la lune a fait voir, que l'ascension droite du pole vrai p (*Fig.* 5.), comptée du pole moyen P, ou l'angle $EPp - 90°$, devance toujours de 90° la longitude du noeud ascendant de la lune (☊), ensorte que l'ascension droite du pole vrai est constamment $\varrho = 90° + ☊$. On verra aisément, que tout cela doit être dit également de l'action du soleil, qui ne circule pas non plus dans l'équateur; mais sa distance est si grande, et le changement de l'inclinaison de son orbite à l'équateur, ou de l'obliquité de l'écliptique, est si petit, que cette action est insensible: la partie sensible de la nutation suit donc exactement la période des noeuds de la lune.

§. 40. Cette hypothèse se trouva en général très-bien d'accord avec les observations; cependant Bradley aperçut dans quelques étoiles un écart du calcul, qui montait à 2″. La différence est trop petite pour nécessiter la rejection de l'hypothèse; mais la théorie de l'attraction en a indiqué une correction qui satisfait parfaitement aux observations, et qui consiste à supposer que le pole vrai décrit autour du pole moyen, non pas un cercle, mais une *ellipse*, dont les diamètres principaux sont dans le rapport de 90 à 67, ou suivant M. Laplace, de 9″,63 et de 7″,17. Soit (*Fig.* 6.) E le pole de l'écliptique, P le lieu moyen du pole de l'équateur, autour duquel le vrai pole décrit l'ellipse BHA. Le grand demi-axe de l'ellipse, $AP = BP =$ 9″,63 est situé, suivant cette hypothèse, dans le colure des solstices EP; le petit demi-axe est $PH = AP \cdot \frac{\cos 2EP}{\cos EP} = 7'',17$. Un grand cercle, mené par E perpendiculairement à EP, est le colure des équinoxes, ♈, ♎, ♎ ♑ ♈ ou AHB étant l'ordre des signes, et BHA la direction du mouvement du pole. Si l'on décrit le cercle ACBD sur le diamètre AB, il est supposé suivant cette hypothèse, que le mouvement du pole est uniforme dans ce cercle, tandis que le vrai pole se trouve au point M, N étant le lieu du pole, donné par l'uniformité du mouvement, et NMQ perpendiculaire à AB. On a donc

$$DPN = \varrho = 90° + ☊ \text{ (§. 39.), ou } APN = ☊,$$

et en nommant $AP = a$, $PH = b$, $PQ = x$, $QM = y$, $QN = z$,

*

$$zz = aa - xx, \text{ et } yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx), \text{ ou } y = \frac{b}{a}z,$$

c'est-à-dire, $QM = \frac{717}{963} . QN$.

En nommant l'angle $APM = \Phi$, on aura

$$\text{tang}\,\Omega = \frac{z}{x}, \quad \text{tang}\,\Phi = \frac{y}{x} = \frac{717}{963}\,\text{tang}\,\Omega, \quad PQ = 9'',63\cos\Omega,$$
$$QN = 9'',63\sin\Omega, \quad QM = PQ\,\text{tang}\,\Phi = 7'',17\sin\Omega;$$

d'où l'on tire

$$PM = PQ\,.\sqrt{(1 + \text{tang}^2\Phi)} = 9'',63\,.\cos\Omega\,.\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{717}{963}\right)^2 \text{tang}^2\,\Omega\right\}}.$$

§. 41. Il est aisé de voir, que le déplacement de l'équateur doit nécessairement altérer l'obliquité, la précession, la déclinaison et l'ascension droite des étoiles, et que toutes ces altérations seront fonctions de Ω. L'obliquité moyenne est $EP = \varepsilon$, la vraie EM, conséquemment *l'accroisement de l'obliquité* de l'écliptique est $\partial\varepsilon = EM - EP = EQ - EP = PQ$, donc

$$\text{I.} \quad \partial\varepsilon = 9'',63\,.\cos\Omega.$$

Le colure moyen des solstices est EP ☋, le vrai EMG: conséquemment, les points solstitiaux et équinoxiaux ont avancé autour du pole E, ou le long de l'écliptique, de l'angle AEM, d'où il résulte une *diminution de la précession* $= AEM = \partial\Upsilon$. Or on a $QM = AEM \sin EM$ ou $AEM = \frac{QM}{\sin EM}$: donc, EM étant sensiblement égal à $EP = \varepsilon$, il viendra

$$\text{II.} \quad \partial\Upsilon = \frac{7'',17\,.\sin\Omega}{\sin\varepsilon}.$$

Il est clair, que la longitude de toutes les étoiles diminuera de la même quantité, de sorte qu'on a $\partial\lambda = -\partial\Upsilon$, ou

$$\text{III.} \quad \partial\lambda = -\frac{7'',17\,.\sin\Omega}{\sin\varepsilon}.$$

Comme ce mouvement, étant périodique, ne peut pas s'accumuler, et qu'il est renfermé dans un cercle de 9″ de rayon, les premières différentielles suffiront ici. Les premiers termes des équations (E) (E′) (§. 33.) donneront donc $\partial\delta = \partial\lambda \sin\varepsilon\cos\varrho + \partial\varepsilon\sin\varrho$, $\partial\varrho = \partial\lambda\,(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\,\text{tg}\,\delta\sin\varrho) - \partial\varepsilon\,\text{tg}\,\delta\cos\varrho$. En y substituant les valeurs I. III. on trouvera

$$\partial\delta = -7'',17\,.\cos\varrho\sin\Omega + 9'',63\,.\sin\varrho\cos\Omega,$$
$$\partial\varrho = -7'',17\,.\sin\Omega\,(\cot\varepsilon + \text{tg}\,\delta\sin\varrho) - 9'',63\,.\,\text{tg}\,\delta\cos\varrho\cos\Omega.$$

Or on a généralement $\sin\Phi\cos\Psi = \frac{\sin(\Phi+\Psi)}{2} + \frac{\sin(\Phi-\Psi)}{2}$, $\cos\Phi\cos\Psi = \frac{\cos(\Phi-\Psi)}{2} + \frac{\cos(\Phi+\Psi)}{2}$, et $\sin\Phi\sin\Psi = \frac{\cos(\Phi-\Psi)}{2} - \frac{\cos(\Phi+\Psi)}{2}$, d'où l'on tirera

$$\partial\delta = \frac{a-b}{2}\sin(\varrho+\Omega) + \frac{a+b}{2}\sin(\varrho-\Omega),$$

$$\partial\varrho = -b\cot\varepsilon\sin\Omega - \operatorname{tang}\delta\left\{\frac{a+b}{2}\cos(\varrho-\Omega) + \frac{a-b}{2}\cos(\varrho+\Omega)\right\},$$

a étant $= 9'',63$, et $b = 7'',17$ ou plutôt $b = a\frac{\cos 2\varepsilon}{\cos\varepsilon}$ (§. 40.). Il s'en suit $\frac{b}{\sin\varepsilon} = 2a\cot 2\varepsilon$, $b\cot\varepsilon = a\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}$. On aura donc

I. $\partial\varepsilon = 9'',63\,.\cos\Omega$; II. $\partial\Upsilon = 19'',26\,.\cot 2\varepsilon\sin\Omega$; III. $\partial\lambda = -\partial\Upsilon$;

IV. $\partial\delta = 4'',815\,.\frac{\cos\varepsilon-\cos 2\varepsilon}{\cos\varepsilon}\sin(\varrho+\Omega) + 4'',815\,.\frac{\cos\varepsilon+\cos 2\varepsilon}{\cos\varepsilon}\sin(\varrho-\Omega)$,

V. $\partial\varrho = -9'',63\,.\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin\Omega - 4'',815\,.\operatorname{tg}\delta\left\{\frac{\cos\varepsilon+\cos 2\varepsilon}{\cos\varepsilon}\cos(\varrho-\Omega) + \frac{\cos\varepsilon-\cos 2\varepsilon}{\cos\varepsilon}\cos(\varrho+\Omega)\right\}$,

ou en exprimant la somme et la différence de deux cosinus par le produit des sinus ou cosinus,

IV. $\partial\delta = \frac{9'',63}{\cos\varepsilon}\left\{\sin\frac{3\varepsilon}{2}\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(\varrho+\Omega) + \cos\frac{3\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}\sin(\varrho-\Omega)\right\}$,

V. $\partial\varrho = -\frac{9'',63}{\sin\varepsilon}\cos 2\varepsilon\sin\Omega - \frac{9'',63}{\cos\varepsilon}\operatorname{tang}\delta\left\{\cos\frac{3\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}\cos(\varrho-\Omega) + \sin\frac{3\varepsilon}{2}\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos(\varrho+\Omega)\right\}$.

§. 42. Comme l'obliquité change de moins de $1'$ en cent ans, on peut faire $\varepsilon = 23°\,27'$, pour avoir des formules exactes pendant le dix-neuvième et le vingtième siècle. Pour faire voir que la différence est peu considérable, nous calculerons les coëfficiens pour $\varepsilon = 23°\,28'$ et $23°\,26'$, ce qui s'étend depuis 1794 jusqu'à 2025. On trouvera, d'après les formules précédentes, selon qu'on fera $\varepsilon = 23°28'$ ou $23°26'$, a étant constamment $= 9'',63$:

$b = 7'',169$ ou $7'',176$; $\partial\varepsilon = 9'',63.\cos\Omega$; $\partial\Upsilon = 18'',002.\sin\Omega$ ou $18'',044.\sin\Omega$,

$\partial\delta = 8'',399\,.\sin(\varrho-\Omega) + 1'',231\,.\sin(\varrho+\Omega)$ ou $8'',403.\sin(\varrho-\Omega) + 1'',227\,.\sin(\varrho+\Omega)$,

$\partial\varrho = -16'',513\,.\sin\Omega - \operatorname{tang}\delta\,.(8'',399.\cos(\varrho-\Omega) + 1'',231.\cos(\varrho+\Omega))$, ou

$-16'',556\,.\sin\Omega - \operatorname{tang}\delta\,.(8'',403.\cos(\varrho-\Omega) + 1'',227.\cos(\varrho+\Omega))$.

En prenant le milieu, on aura pour le 19 me et le 20 me siècles,

I. $\partial\varepsilon = 9'',63.\cos\Omega$; II. $\partial\Upsilon = 18'',023.\sin\Omega$; III. $\partial\lambda = -\partial\Upsilon$;

IV. $\partial\delta = 8'',401.\sin(\varrho-\Omega) + 1'',229.\sin(\varrho+\Omega)$;

V. $\partial\varrho = -16'',534.\sin\Omega - \operatorname{tang}\delta\{8'',401.\cos(\varrho-\Omega) + 1'',229.\cos(\varrho+\Omega)\}$.

La latitude des étoiles n'est point altérée par la nutation (§. 37.). L'obliquité, corrigée par la nutation, s'appelle obliquité *apparente*: elle est plus ou moins grande que l'obliquité *moyenne*, que l'on trouve par la diminution progressive de $0'',5$ par an, selon que le noeud ascendant de la lune Ω est dans les signes ascendans ou descendans (Voy. I. §. 85.). Il résulte de $\partial\Upsilon$

une augmentation ou diminution des longitudes des étoiles, selon que le noeud ascendant ☊ se trouve dans la dernière ou dans la première moitié de l'écliptique: on l'appelle *équation du point équinoxial*. L'équation des déclinaisons et ascensions droites dépend nécessairement, non seulement du lieu du noeud ☊, mais encore de la position des étoiles par rapport à l'équateur.

Les formules précédentes renferment l'effet de la lune seule, ce qu'on appelle *nutation lunaire*. Mais on a déjà vu (§. 39.), que l'action du soleil doit produire un effet semblable, quoique beaucoup moins considérable: on l'appelle nutation *solaire*. On verra dans l'astronomie physique, que les équations sensibles qui en résultent, sont: $\partial\varepsilon = +0'',4345.\cos 2\odot$, $\partial\lambda = -1''.\sin 2\odot$, $\odot$ étant la longitude du soleil. On en conclura, comme ci-dessus §. 41.), en faisant $\varepsilon = 23°\,27'$,

$$\partial\delta = -0'',398.\sin 2\odot\cos\varrho + 0'',434.\cos 2\odot\sin\varrho,$$

$$\partial\varrho = -0'',917.\sin 2\odot - \operatorname{tang}\delta(0'',398.\sin 2\odot\sin\varrho + 0'',434.\cos 2\odot\cos\varrho),$$

ou $\partial\delta = +0'',018.\sin(2\odot+\varrho) - 0'',416.\sin(2\odot-\varrho)$,

$$\partial\varrho = -0'',917.\sin 2\odot - \operatorname{tang}\delta\{0'',018.\cos(2\odot+\varrho) + 0'',416.\cos(2\odot-\varrho)\}.$$

Ces termes, réunis aux précédens, donneront la *nutation luno-solaire* pour le 19me et le 20me siècles, à l'aide des formules suivantes:

I. *Accroissement de l'obliquité*, $\partial\varepsilon = +9'',63.\cos ☊ + 0'',434.\cos 2\odot$;

II. *Correction du point équinoxial et diminution des longitudes des étoiles*,

$$\partial\Upsilon = -\partial\lambda = 18'',023.\sin ☊ + 1''.\sin 2\odot;$$

III. *Accroissement des déclinaisons boréales et décroissement des déclinaisons australes*, $\partial\delta = +8'',401.\sin(\varrho-☊) + 1'',229.\sin(\varrho+☊) + 0'',018.\sin(2\odot+\varrho) - 0'',416\sin(2\odot-\varrho)$;

IV. *Augmentation des ascensions droites*, $\partial\varrho = -16'',534.\sin ☊ - 0'',917\sin 2\odot - \operatorname{tg}\delta\{8'',401.\cos(\varrho-☊) + 1'',229.\cos(\varrho+☊) + 0'',416.\cos(2\odot-\varrho) + 0'',018.\cos(2\odot+\varrho)\}$.

§. 43. Le quatrième mouvement des étoiles, ou l'*aberration*, a déjà été expliqué (§. 12 — 17.); et l'on a vu, que le lieu apparent des étoiles devance toujors le lieu vrai suivant la direction du mouvement de la terre, d'un angle ω, et qu'en nommant ϕ l'angle que fait le rayon visuel de l'étoile avec cette direction, on a (§. 16.)

$$\omega = 20'',25.\sin\phi = a.\sin\phi;$$

a étant le mouvement *moyen* du soleil en 8 min. 13 sec. au lieu duquel il faut mettre le mouvement *vrai* b. Or on verra (§. 133.) que le mouvement

vrai ou l'arc b décrit, pendant que la terre parcout, par son mouvement moyen, l'arc a, est $b = a\sqrt{\frac{1-2\gamma\cos\alpha+\gamma^2}{1-\gamma^2}}$, γ étant l'excentricité du soleil $= 0,0168$ et α l'anomalie du soleil comptée de l'apogée. Le développement de cette expression jusqu'à la seconde puissance de γ, ce qui est assés exact pour notre but, donnera $b = a\left(1-\gamma\cos\alpha+\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{\gamma^2}{4}\cos 2\alpha\right)$. En substituant donc $a = 20'',25$, on aura $\omega = b\sin\phi$, ou

$$(A)\ldots\ldots \omega = (20'',254 - 0'',34.\cos\alpha)\sin\phi.$$

La direction du mouvement de la terre changeant à chaque moment, il sera nécessaire, de décomposer l'aberration ω suivant la latitude et la longitude. Soit donc (*Fig.* 7.) S le soleil, autour duquel la terre se meut dans le sens ATB, soient les lignes parallèles SF, TG, dirigées vers une étoile, et FH, GI, perpendiculaires au plan de l'écliptique ATBS; cela posé $FSH = GTI = \beta$ sera la latitude vraie ou héliocentrique. L'étoile serait vue de la terre suivant la ligne TG, si elle était immobile en T, et la longitude et latitude apparentes seraient égales aux héliocentriques, vu que la parallaxe est insensible. Mais la terre allant suivant la tangente Tt, il en résultera l'aberration dans le plan GTt, et GTt est l'angle ϕ. Ayant donc mené dans ce plan une ligne Tf qui fait avec TG un angle $GTf = \omega = b\sin\phi$, l'étoile sera vue suivant la direction Tf: il faut donc examiner, de combien les lignes TG, Tf, diffèrent en latitude et longitude.

§. 44. En nommant $\odot$ la longitude du soleil, λ celle de l'étoile, β sa latitude, ψ l'angle STt que fait la tangente de l'orbite St avec le rayon ST, on aura $STI = \odot - \lambda = \eta$, $ITt = \psi - \eta$. Si l'orbite était un cercle, ψ serait un angle droit: en effet, nous verrons ci-après, que l'orbite de la terre est une ellipse qui diffère très-peu du cercle, et que $\text{tang}\,\psi = \frac{1-\gamma\cos\alpha}{\gamma\sin\alpha}$. Faisant donc $\psi = 90° - \xi$, on aura $\text{tang}\,\xi = \frac{\gamma\sin\alpha}{1-\gamma\cos\alpha} = \gamma\sin\alpha(1+\gamma\cos\alpha)$ $= \gamma\sin\alpha + \frac{\gamma^2}{2}\sin 2\alpha$, et $ITt = 90° - (\eta + \xi)$.

Les plans, ITt qui est l'écliptique, GTI qui est perpendiculaire à elle, et GTt le plan de ϕ, forment un triangle sphérique, rectangle en I, que représente la *Fig.* 8. Dans ce triangle on a $GI = \beta$, $It = 90° - (\eta + \xi)$, $Gt = \phi$, d'où il suit

$$\cos\Phi = \cos\beta \sin(\eta+\xi),\ \sin G = \frac{\cos(\eta+\xi)}{\sin\Phi},\ \cos G = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\Phi}.$$

Qu'on fasse $GTf = \omega$, et qu'on mène par f, les arcs fb, $f\beta$, perpendiculaires et parallèles à l'écliptique : alors on aura $G\beta = -\partial\beta$, $Ib = -\partial\lambda = \frac{f\beta}{\cos\beta}$. Comme le triangle $Gf\beta$ peut être regardé comme rectiligne, ses côtés n'étant pas plus grands que 20″, on aura $\partial\beta = -Gf\cos G$, $f\beta = Gf\sin G$, et $\partial\lambda = -\frac{Gf\sin G}{\cos\beta}$; ou substituant les valeurs de $Gf = \omega = b\sin\Phi$, de $\sin G$ et de $\cos G$,

$$\partial\beta = -b\operatorname{tg}\beta\cos\Phi,\ \partial\lambda = -\frac{b\cos(\eta+\xi)}{\cos\beta},\ \text{et } f\beta = b\cos(\eta+\xi).$$

Or on a déjà trouvé $\cos\Phi = \cos\beta\sin(\eta+\xi)$, ce qui donne

$$(B)\ldots\ldots \partial\beta = -b\sin\beta\sin(\eta+\xi),$$
$$(C)\ldots\ldots \partial\lambda = -b\sec\beta\cos(\eta+\xi),$$
$$(D)\ldots\ldots f\beta = 20'',254.\cos(\eta+\xi) \text{ a très-peu près.}$$

Pour chasser ξ de ces équations, on a, en négligeant la troisième puissance de γ,

$$\xi = \gamma\sin\alpha + \frac{\gamma^2}{2}\sin 2\alpha,\ \xi^2 = \frac{\gamma^2}{2}(1-\cos 2\alpha),\ \sin\xi = \xi,\ \cos\xi = 1-\frac{\xi^2}{2},$$
$$\cos\alpha\sin(\eta+\xi) = \cos\alpha\sin\eta,\ \cos\alpha\cos(\eta+\xi) = \cos\alpha\cos\eta,$$

d'où l'on tire,

$$\partial\beta = -b\sin\beta\left\{\left(1-\frac{\gamma^2}{4}\right)\sin\eta+\gamma\sin\alpha\cos\eta+\frac{\gamma^2}{2}\sin 2\alpha\cos\eta+\frac{\gamma^2}{4}\cos 2\alpha\sin\eta\right\},$$
$$\partial\lambda = -b\sec\beta\left\{\left(1-\frac{\gamma^2}{4}\right)\cos\eta-\gamma\sin\alpha\sin\eta-\frac{\gamma^2}{2}\sin 2\alpha\sin\eta+\frac{\gamma^2}{4}\cos 2\alpha\cos\eta\right\}.$$

En substituant $b = a\left(1-\gamma\cos\alpha+\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{\gamma^2}{4}\cos 2\alpha\right)$, ces équations deviendront

$$\partial\beta = -a\sin\beta\left\{\left(1+\frac{\gamma^2}{2}\right)\sin\eta+\gamma\sin(\alpha-\eta)\right\},\ \partial\lambda = -a\sec\beta\left\{\left(1+\frac{\gamma^2}{2}\right)\cos\eta-\gamma\cos(\alpha-\eta)\right\}.$$

En nommant ϖ la longitude de l'apogée du soleil, et substituant $a = 20'',25$; on trouvera $\eta = \odot-\lambda$, $\alpha = \odot-\varpi$, $\alpha-\eta = \lambda-\varpi$, $a\gamma = 0'',34$, $\frac{a\gamma^2}{2} = 0'',003$; d'où les dernières équations prendront cette forme :

I. *aberr. lat.* $\partial\beta = -20'',253.\sin\beta\sin(\odot-\lambda)-0'',34.\sin\beta\sin(\lambda-\varpi)$,

II. *aberr. long.* $\partial\lambda = -20'',253.\frac{\cos(\odot-\lambda)}{\cos\beta}+0'',34.\frac{\cos(\lambda-\varpi)}{\cos\beta}$.

Si la latitude β est australe, $\cos\beta$ et $\partial\lambda$ ne changent point de signe, mais $\sin\beta$ et $\partial\beta$ seront négatifs, ce qui indique également une diminution de la latitude australe. Les latitudes, soit boréales soit australes, diminuent donc, ou augmentent, selon que $\odot-\lambda$ est moins ou plus grand que 180°; les longitudes augmentent, si $\odot-\lambda$ est entre 90° et 270°, elles diminuent,

si $\odot - \lambda$ est dans le premier ou dans le dernier *quadrans*. L'aberration en latitude est nulle dans les syzygies, elle a sa plus grande valeur dans les quadratures; et l'on a dans la première quadrature après la conjonction $\partial\beta = -20'',25 \sin\beta$, dans la seconde $\partial\beta = +20'',25 \sin\beta$. La plus grande différence entre les latitudes apparentes dans une année est donc $40'',5 . \sin\beta$, ce qui fait $40'',5$ pour une étoile située dans le pole de l'écliptique, et zéro pour une étoile dans l'écliptique. L'aberration en longitude est nulle dans les quadratures; elle a sa plus grande valeur dans les syzygies: dans la conjonction on a $\partial\lambda = -20'',25 . \sec\beta$, dans l'opposition $\partial\lambda = +20'',25 \sec\beta$; la plus grande différence est $40'',5 \sec\beta$, ce qui croît à l'infini pour des étoiles près du pole de l'écliptique: dans l'écliptique même cette différence est $40'',5$: c'est aussi la corde $f\beta$ que l'étoile décrit parrallèlement à l'écliptique dans la sphère (par l'équation (D)). Tout cela est parfaitement d'accord avec les observations (§. 12. 17.)

§. 45. Pour trouver les aberrations en déclinaison et en ascension droite, on n'a qu'à différentier les équations I. II. (§. 25.) par rapport à β et λ, en substituant ensuite les valeurs tirées des équations III. IV. VII. (§. 25.). Si l'on fait pour abréger,

$$\sin\varepsilon = h,\ \cos\varepsilon = k,\ \sin\odot = m,\ \cos\odot = n,\ \sin\varpi = p,\ \cos\varpi = q,$$
$$\frac{\sin\beta}{\cos\delta} = k\tang\delta - h\sin\varrho = A,\ \cos\varrho\tang\lambda = h\tang\delta + k\sin\varrho = B,\ 20'',253 = a;\ 0'',34 = b;$$

la différentiation donnera

$$\partial\delta\cos\delta = \partial\beta\,(k\cos\beta - h\sin\beta\sin\lambda) + \partial\lambda . h\cos\beta\cos\lambda,$$
$$\frac{\partial\varrho}{\cos^2\varrho} = -\frac{h.\partial\beta}{\cos^2\beta\cos\lambda} + \frac{k - h\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\lambda}{\cos^2\lambda}\partial\lambda.$$

En substituant, en vertu des équations I. II. (§. 44.),

$$\partial\beta = -\sin\beta\,\{(am - bp)\cos\lambda - (an - bq)\sin\lambda\},$$
$$\partial\lambda = -\sec\beta\,\{(an - bq)\cos\lambda + (am - bp)\sin\lambda\},$$

on aura

$$\partial\delta\cos\delta = -(am - bp)\cos\beta\cos\lambda\,(k\sin\beta + h\cos\beta\sin\lambda)$$
$$+ (an - bq)(k\sin\beta\cos\beta\sin\lambda - h + h\cos^2\beta\sin^2\lambda),$$
$$\frac{\partial\varrho}{\cos^2\varrho} = \frac{am - bp}{\cos\beta\cos\lambda}\left(\frac{h\sin\beta}{\cos\beta\cos\lambda} - k\tang\lambda\right) - \frac{an - bq}{\cos\beta\cos\lambda}k,$$

et en substituant les valeurs de A, B, et $\cos\delta\cos\varrho = \cos\beta\cos\lambda$,

$$\partial\delta\cos\delta = -(am - bp)\cos^2\delta\cos\varrho(Ak + Bh) + (an - bq)(ABk\cos^2\delta + B^2h\cos^2\delta - h),$$

$$\frac{\partial \varrho}{\cos^2 \varrho} = \frac{a m - b p}{\cos \delta \cos^2 \varrho} (A h - B k) - \frac{a n - b q}{\cos \delta \cos \varrho} k.$$

Mais on a $A k + B h = \tang \delta$, et $B k - A h = \sin \varrho$; d'où il viendra

$$\partial \delta = -(a m - b p) \sin \delta \cos \varrho + (a n - b q)(k \sin \delta \sin \varrho - h \cos \delta),$$

$$\partial \varrho = -\frac{a m - b p}{\cos \delta} \sin \varrho - \frac{a n - b q}{\cos \delta} k \cos \varrho.$$

Pour le dix-neuvième et le vingtième siècles, on peut supposer, sans erreur sensible, $\varepsilon = 23° 27'$, ce qui donne,

$ah = 8'',06$; $ak = 18'',58$; $bh = 0'',135$; $bk = 0'',312$; d'où il résultera

$\partial \delta = \sin \delta (18'',58 . \cos \odot \sin \varrho - 20'',253 . \sin \odot \cos \varrho + 0'',34 . \sin \varpi \cos \varrho - 0'',312 . \cos \varpi \sin \varrho)$
$- \cos \delta (8'',06 . \cos \odot - 0'',135 . \cos \varpi)$,

$\partial \varrho = -\sec \delta (18'',58 . \cos \odot \cos \varrho + 20'',253 . \sin \odot \sin \varrho - 0'',34 . \sin \varpi \sin \varrho - 0'',312 . \cos \varpi \cos \varrho)$.

On peut donner à ces formules la forme suivante:

III. *aberr. décl.* $\partial \delta = \begin{cases} \sin \delta (19'',417 . \sin (\varrho - \odot) - 0'',836 . \sin (\varrho + \odot)) \\ - 4'',03 . \cos (\odot - \delta) - 4'',03 . \cos (\odot + \delta) \\ + \sin \delta (0'',326 . \sin (\varpi - \varrho) + 0'',014 . \sin (\varpi + \varrho)) \\ + 0'',068 . \cos (\varpi - \delta) + 0'',068 . \cos (\varpi + \delta) \end{cases}$

IV. *aberr. asc. dr.* $\partial \varrho = \begin{cases} -\sec \delta (19'',417 . \cos (\varrho - \odot) - 0'',836 . \cos (\varrho + \odot)) \\ + \sec \delta (0'',326 . \cos (\varpi - \varrho) - 0'',014 . \cos (\varpi + \varrho)). \end{cases}$

Ces formules, ainsi que les précédentes pour $\partial \beta$, $\partial \lambda$, se rapportent au cas, où il s'agit de convertir le lieu vrai en lieu apparent; dans le cas contraire il faut changer les signes.

§. 46. L'aberration change le lieu des étoiles de manière, qu'au bout d'un an elles reviennent occuper le même lieu: d'où il suit qu'elles ont décrit une courbe fermée. L'étoile passant de son vrai lieu G en f (Fig. 8.), on peut décomposer son mouvement en deux autres Gβ et βf, dont l'un est dans le cercle de latitude, et l'autre parallèle à l'écliptique. En négligeant les termes qui dépendent de l'excentricité, le premier mouvement Gβ est $= 20'',25 . \sin \beta \sin \eta$, le second $\beta f = 20'',25 . \cos \eta$ (§. 44. B)(D)): le premier croît jusqu'à $20'',25 \sin \beta$, l'autre jusqu'à $20'',25$; et l'on peut les regarder comme des lignes droites Imaginons (*Fig.* 9.) une droite AB, menée par le lieu vrai de l'étoile G, parallèlement à l'écliptique; alors le lieu apparent f sera déterminé par les coordonnées $GE = x$, $Ef = y$, qui sont les mêmes lignes que βf, Gβ, dans la *Fig.* 8. On a donc

$GE = x = 20'',25 . \cos\eta$, $Ef = y = 20'',25 . \sin\beta \sin\eta$.

Les plus grandes valeurs de x, y, sont $GA = GB = 20'',25 = a$, et $GC = GD = 20'',25 . \sin\beta = b$. On a donc $x = -a\cos\eta$, $y = -b\sin\eta$, d'où il suit

$$a^2 - x^2 = a^2 \sin^2\eta,\ a^2 - x^2 : y^2 :: a^2 : b^2,\ \text{donc}\ y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

ce qui est l'équation de l'*ellipse*, les abscisses x étant prises du centre sur le grand axe, les ordonnées y sur le petit axe. On voit donc, qu'en vertu de l'aberration, les étoiles paraissent décrire une ellipse, dont le centre est le lieu héliocentrique de l'étoile, le grand axe étant parallèle à l'écliptique et pour toutes les étoiles $= 40'',5$, et le petit axe, situé dans le cercle de latitude, étant au grand axe comme $\sin\beta$ à 1. Pour une étoile située dans l'écliptique, l'ellipse se changera donc en ligne *droite*, et pour une étoile au pole de l'écliptique l'ellipse devient un *cercle*. Au point C on a $x = 0$, $y = +b$, donc $\eta = \odot - \lambda = 270°$: en D on a $x = 0$, $y = -b$, ou $\odot - \lambda = 90°$; en A, x est $= -a$, $y = 0$, $\odot - \lambda = 0$; en B, x est $= +a$, $y = 0$, donc $\odot - \lambda = 180°$. Il s'en suit, que l'étoile est en A ou en B, lorsqu'elle se trouve en conjonction ou en opposition avec le soleil, et en D ou en C, dans les deux quadratures. (Voy. §. 44.).

§. 47. L'*aberration des planètes* s'exprime d'une manière extrêmement simple par leur mouvement apparent ou géocentrique. Quelle que soit la direction de ce mouvement, on peut toujours le décomposer en trois autres, dont l'un, étant dirigé suivant la droite qui réunit la planète et la terre, ne peut pas changer le lieu apparent de la planète, mais seulement la vitesse de la lumière d'une manière imperceptible; les deux autres seront parallèles et perpendiculaires à l'écliptique ou à l'équateur; ils seront donc les mouvemens apparens, et donneront immédiatement les aberrations, en longitude et latitude, ou en ascension droite et déclinaison. Il en est de même du mouvement de la terre; il sera décomposé, ainsi que l'aberration qui est l'effet de ce mouvement, suivant deux directions, parallèles à celles de la planète, et perpendiculaires à la droite menée de la terre à la planète. Soit donc (*Fig.* 10.) P la planète, T la terre, P p, T t, les mouvemens vrais suivant une direction perpendiculaire à TP, dans le tems où la lumière parcourt PT: alors le mouvement

géocentrique de la planète dans le même tems sera $= p\,t\,\pi$, $t\,\pi$ étant parallèle à TP; et l'aberration sera déterminée par le rapport des lignes Pp et Tt à PT. Si la planète et la terre étaient immobiles en P et T, la lumière frapperait l'oeil suivant la direction PT; mais elle a en même tems la direction et la vitesse Pp du mouvement de la planète, et tT qui est opposée au mouvement de la terre (§. 15.). En faisant donc $t\tau = \mathrm{P}p = \pi\mathrm{Q}$, la sensation de l'oeil sera l'effet composé des mouvemens PT ou Qτ et τT; la planète sera vue suivant TQ, et l'aberration sera $=$ PTQ. Les tables ou les éphémerides astronomiques donnent la distance de la planète à la terre TP $= r$ en rayons de l'orbe terrestre, et le mouvement géocentrique en longitude et latitude, pour 24 heures et en minutes d'un degré $= n$: en conséquence, le rayon de l'orbe terrestre, parcouru par la lumière en 8 min. 13 sec. (§. 14.), est à TP comme 1 à r: d'où il suit, que le tems que la lumière met à parcourir PT, est $t = r$ (8′ 13″), et le mouvement géocentrique de la planète dans le tems t est $= \frac{nt}{24\text{ h.}} = \frac{8'13''}{24\text{ h.}}\,rn = p\,t\,\pi = \mathrm{PTQ}$. L'aberration est donc $= \frac{8'13''}{24\text{ h.}}\,rn$ en minutes, n étant donné en minutes, partant en secondes $= \frac{8'13''}{24'}\,rn = rn\,.\,0{,}3424$ secondes. C'est l'aberration suivant la direction opposée à n, le mouvement de la planète étant πp, et l'aberration transportant la planète de P en Q: on trouve donc, sans autre réduction, l'aberration en longitude, en latitude, etc. au moyen de n qu'on trouve dans les éphémérides, ou que, pour plus de précision, on peut tirer des tables, ou calculer sur les élémens des planètes. Pour construire des tables de l'aberration des planètes, on peut substituer $rn = \frac{(n+r)^2-(n-r)^2}{4}$, n étant le nombre des minutes contenues dans le mouvement diurne de la planète, et r le nombre exprimant le rapport qui existe entre la distance de la planète à la terre et le rayon de l'orbe terrestre. Du reste, on verra aisément, que l'aberration des planètes en latitude est presque dans tous les cas insensible.

CHAPITRE III.

Mouvement propre des étoiles.

§. 48. Les mouvemens des étoiles fixes, qui viennent d'être développés, sont de deux espèces: les uns, ayant une période, ainsi que l'aberration et la nutation, résultent évidemment du mouvement annuel de la terre, ou du mouvement auquel appartient cette période; les autres dont la période est inconnue, ainsi que la précession, sont communs à toutes les étoiles, comme les premiers, et dépendent de leur position relativement à l'équateur ou à l'écliptique, ensorte qu'ils s'expliquent complètement par le déplacement de l'un ou de l'autre de ces plans. Tous ces mouvemens ne sont donc qu'apparens, parcequ'il serait inconcevable, qu'un mouvement vrai de tant de différens astres fût exactement d'accord avec celui de la terre, ou qu'il dépendît de leur position relativement à un plan qui ne se rapporte qu'à la terre. Mais si aucune de ces circonstances n'a lieu, si l'on voit un mouvement des étoiles qui n'est pas périodique, ou dont la période n'a aucune liaison avec la terre, un mouvement qui, au lieu d'être commun à toutes les étoiles et de dépendre de leurs latitudes et longitudes, paraît tout-à-fait irrégulier, étant même différent pour des étoiles qui ont la même position; bref, si l'on aperçoit des mouvemens *propres* à quelques étoiles, il faut en conclure, ou qu'elles sont réellement en mouvement, ou qu'elles ont une parallaxe qui naît d'un mouvement encore inconnu de l'oeil ou de la terre. Il n'est pas facile de décider, lequel de ces deux cas a lieu; il y a cependant un caractère général qui indique, qu'il n'y a pas de mouvement vrai, mais une parallaxe: c'est quand parmi plusieurs étoiles, très-proches l'une de l'autre, la plus grande a toujours un mouvement plus considérable que

les petites étoiles qui sont probablement plus éloignées de la terre. Il faudra donc procéder de la manière suivante.

Si, par des observations qui, à cause de la petitesse de la quantité dont il s'agit, doivent être très-exactes ou éloignées l'une de l'autre, on a déterminé le mouvement total de plusieurs étoiles, et qu'on en a retranché ce qui leur convient en vertu des quatre mouvemens, développés dans le chapitre précédent: le résidu sera un mouvement nouveau ou inconnu, et la comparaison de différentes étoiles fera voir, si c'est un mouvement commun à toutes les étoiles, ou un mouvement particulier. Les observations des étoiles très-proches l'une de l'autre, comme les *étoiles doubles*, fournissent un moyen plus simple (§. 21.). Il faut cependant observer que, parmi ces étoiles, il y en a probablement quelques-unes, qui sont réellement aussi près l'une de l'autre, qu'elles nous paraissent l'être, en formant un système isolé; il en sera parlé ci-après.

§. 49. L'idée la plus naturelle est, d'expliquer le mouvement propre des étoiles par un mouvement de la terre. Ainsi le mouvement propre sera un mouvement *vrai* ou *parallactique*, ou l'un et l'autre: mais le second, s'il satisfait aux observations, sera préféré par les astronomes, parcequ'il explique par le mouvement d'un seul corps, ce qui exigerait autrement des mouvemens d'une infinité de corps beaucoup plus grands. Comme la parallaxe est en raison inverse de la distance, le mouvement parallactique sera plus sensible dans les étoiles de la premiere grandeur. Il en est de même du mouvement vrai, qui doit nécessairement paraître plus petit, à mesure que la distance est plus grande; il y a cependant une différence. Si toutes les étoiles, formant un groupe, se meuvent avec des vitesses différentes, mais suivant la même direction, il faudra regarder leur mouvement comme parallactique; si au contraire, quelques-unes, et même de la première grandeur, restent immobiles, tandis que d'autres, moins grandes peut-être, se meuvent suivant différentes directions, il faudra leur attribuer un mouvement réel; et il est clair que le repos apparent d'une étoile peut avoir plusieurs causes, ou un vrai repos, ou un mouvement de la terre ou de l'étoile suivant la droite qui les réunit. Supposant donc d'abord le mouvement parallactique

comme le plus simple, il faut examiner ce qui en résultera. On a vu que la parallaxe annuelle des étoiles fixes est insensible (§. 13.): d'où il suit, que la position des étoiles ne peut être altérée par un mouvement de la terre, qui ne s'étend pas au delà de son orbite, c'est-à-dire, si le soleil est immobile: le mouvement parallactique des étoiles suppose donc un mouvement réel du soleil, auquel participe la terre et notre oeil, ainsi que tout le système solaire. Les étoiles étant des corps semblables au soleil, l'analogie nous porte naturellement à croire, que ces soleils sont aussi en mouvement. Cela nous ramène encore à un vrai mouvement des étoiles, qui rendra cette matière plus compliquée. Suivant cette hypothèse, une partie du mouvement propre des étoiles sera réelle, tandis que l'autre n'est qu'apparente, résultant du vrai mouvement du soleil. Il s'écoulera peut-être beaucoup de siècles, avant qu'on parviendra à séparer ces deux mouvemens l'un de l'autre, et à déterminer la grandeur de chacun. En effet, on peut se former une idée de la lenteur de ces mouvemens, en comparant la description des étoiles, que nous ont laissée Hipparque et Ptolémée, avec l'état actuel du ciel. Ptolémée nous a transmis un grand nombre de positions relatives des étoiles, ainsi que Hipparque les avait déterminées par une réunion de lignes droites, et il nous assure que 260 ans plus tard, il n'avait remarqué aucun changement de ces positions. Pour fournir à la postérité le moyen de faire de pareilles recherches, Ptolémée y ajoute beaucoup d'autres positions, déterminées par ses propres observations; et nous devons à son travail la certitude, que la situation relative des étoiles, malgré les différens déplacemens de l'équateur et de l'écliptique, est aujourd'hui à peu près la même, qu'elle était il y a deux mille ans (1). Considérant la lenteur de ces mouvemens, tout ce qu'on peut espérer jusqu'à présent, se réduit à déterminer d'une manière générale et approximative, la direction suivant laquelle se meut le soleil avec son système. Quand on l'aura déterminée par des tatonnemens, ensorte qu'elle satisfasse aux observations plus qu'une autre, il faudra prendre en considération deux circonstances qui influent sur les résultats qu'on pourrait en tirer: c'est la distance et le vrai mouvement des étoiles, l'un

(1) *Almag. Lib. VII. C. 2.*

et l'autre nous étant inconnus. Les étoiles qui s'écartent le plus de ce calcul parallactique, auront le plus grand mouvement réel. C'est ainsi qu'on parviendra peut-être par une longue suite d'observations, à déterminer la distance et le mouvement réel des étoiles, ainsi que le mouvement propre du système solaire.

§. 50. Les principes de dynamique et de la gravitation universelle suffisent pour nous convaincre, qu'aucun corps céleste ne peut être dans un repos absolu. Les attractions mutuelles de corps innombrables doivent nécessairement communiquer à ces corps un mouvement qui ne peut pas être rectiligne, parce que la direction des attractions varie d'un moment à l'autre. On verra dans l'astronomie physique, qu'il résulte de l'action des forces centrales, que tous les corps d'un système, en agissant l'un sur l'autre, décrivent des courbes autour de leur centre de gravité, d'où il suit, que le soleil aura aussi un mouvement autour du centre de gravité de sa propre masse et de celles de toutes les planètes et comètes qui appartiennent à son système. Il est vrai que, vu la grandeur de la masse solaire, ce mouvement sera peu étendu, et que son centre est apparemment dans l'intérieur du soleil. Mais ce mouvement, quelque petit qu'il soit, étant modifié par les attractions des autres systèmes, suffira pour faire décrire au soleil une courbe quelconque. Il est visible qu'on peut étendre ces raisonnemens au centre de gravité de toutes les étoiles, qui sont assés près l'une de l'autre, pour exercer des actions mutuelles, ou pour former un système. On peut y ajouter la rotation du soleil, prouvée par les observations: car il est naturel de penser, que la même cause qui lui a imprimé cette rotation, doit en même tems lui avoir communiqué un mouvement de translation. Comme il en est de même des autres étoiles, on soupçonna dans les tems modernes un mouvement propre du soleil et de toutes les étoiles, avant que les observations l'avaient indiqué (1). Quoique les observations n'ayent donné que peu d'éclaircissemens sur cette matière, il sera bon de montrer ici, comment on peut parvenir à connaître le mouvement propre du soleil et des étoiles.

(1) On trouve des idées sublimes sur cet objet dans les *lettres cosmologiques de Lambert.*

§. 51. Soit (*Fig.* 11.). le soleil en S, une étoile en c, $\Upsilon S \simeq$ le plan de l'équateur, et que le soleil avance dans un certain tems de S en C suivant la direction SD. Ayant abaissé de C et c, les lignes CB, cb, perpendiculaires à l'équateur, et de B et b, les lignes BA, ba, perpendiculaires à la ligne des équinoxes $S\Upsilon$, et nommant $Sa = a$, $ab = b$, $bc = c$, $SA = x$, $AB = y$, $BC = z$, et la distance de l'étoile au soleil $Sc = e$, le vrai mouvement du soleil $SC = u$, l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile, $\Upsilon Sb = \varrho$, $bSc = \delta$, enfin les angles d'inclinaison du mouvement du soleil relativement à l'équateur et à la ligne des équinoxes, $BSC = \psi$, $\Upsilon SB = \Phi$; les quantités inconnues Φ, ψ, u, x, y, z, seront les mêmes pour toutes les étoiles, tandis que δ, ϱ, $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{e}$, sont différentes pour chaque étoile, mais données par observation, ainsi que leurs variations. Imaginons un plan parallèle à l'équateur, et une ligne parallèle à $S\Upsilon$, l'un et l'autre passant par C; la déclinaison et l'ascension droite apparentes de l'étoile dans cette nouvelle situation du soleil, seront déterminées par les coordonnées a', b', c', de la même manière, dont elles l'étaient en S par les coordonnées a, b, c; et l'on a

$$a' = a - x,\quad b' = b - y,\quad c' = c - z,\quad \text{ou}\quad \partial a = -x,\ \partial b = -y,\ \partial c = -z.$$

Or on a $Sb = \sqrt{(a^2+b^2)} = e\cos\delta$, $SB = \sqrt{(x^2+y^2)} = u\cos\psi$; d'où l'on tire

$$a = e\cos\delta\cos\varrho,\ b = e\cos\delta\sin\varrho,\ c = e\sin\delta,\ \text{tang}\,\varrho = \frac{b}{a},\ \text{tang}\,\delta = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

$$x = u\cos\psi\cos\Phi,\ y = u\cos\psi\sin\Phi,\ z = u\sin\psi.$$

La différentielle de $\text{tang}\,\varrho = \frac{b}{a}$ est

$$\frac{\partial\varrho}{\cos^2\varrho} = \frac{a\,\partial b - b\,\partial a}{a^2} = \frac{x\cos\delta\sin\varrho - y\cos\delta\cos\varrho}{e\cos^2\delta\cos^2\varrho},\ \text{ou}$$

$$\text{I.}\quad \partial\varrho = \frac{u\cos\psi\sin(\varrho-\Phi)}{e\cos\delta}.$$

La différentiation de $c = e\sin\delta$ donne

$$\partial\delta = \frac{\partial c}{e\cos\delta} = -\frac{z}{e\cos\delta} = -\frac{u\sin\psi}{e\cos\delta},$$

ou si l'on veut regarder e aussi comme variable, on aura, à l'aide de l'équation $\text{tang}\,\delta = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$,

$$\frac{\partial\delta}{\cos^2\delta} = \frac{(a^2+b^2)\,\partial c - c\,(a\,\partial a + b\,\partial b)}{(a\,a+b\,b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\sin\delta\cos\varrho + y\sin\delta\sin\varrho - z\cos\delta}{e\cos^2\delta},\ \text{ou}$$

$$\text{II.}\quad \partial\delta = \frac{u}{e}(\sin\delta\cos\psi\cos(\varrho-\Phi) - \cos\delta\sin\psi).$$

Il résulte de l'équation I. que l'ascension droite de l'étoile croît ou décroît,

selon qu'elle est plus ou moins grande que celle de la direction, suivant laquelle le soleil avance. Sa variation croît avec la déclinaison et l'ascension droite; elle est la plus grande, lorsque ϱ et Φ diffèrent de 90°. L'équation II. à laquelle on peut donner cette forme $\partial\delta = \frac{u}{e}\cos\delta\cos\psi(\mathrm{tg}\delta\cos(\varrho-\Phi)-\mathrm{tang}\psi)$, nous apprend, que la déclinaison, soit boréale soit australe, augmente dans les cas suivans: 1) si la différence entre les ascensions droites de l'étoile et de la direction du mouvement du soleil, $\varrho-\Phi$ et $\Phi-\varrho$, est plus petite que 90°, et qu'en même tems l'étoile et la direction du mouvement sont *a*) des côtés opposés de l'équateur, ou qu'elles sont *b*) du même côté et $\mathrm{tg}\,\delta > \frac{\mathrm{tg}\,\psi}{\cos(\varrho-\Phi)}$; 2) si, la différence $\varrho-\Phi$ et $\Phi-\varrho$ étant plus grande que 90°, l'étoile et la direction du mouvement se trouvent des côtés opposés de l'équateur, $\mathrm{tang}\delta$ étant en même tems plus petit que $\frac{\mathrm{tang}\,\psi}{\cos(\varrho-\Phi)}$. Dans les cas contraires, la déclinaison diminuera. La combinaison de ces différens cas servira à déterminer les limites, entre lesquelles la direction du mouvement du soleil doit être comprise, relativement à l'ascension droite et à la déclinaison. Si l'on a trouvé par ex. toutes les étoiles, dont l'ascension droite aussi bien que la déclinaison diminue toujours, il est certain que Φ et ψ sont plus grands que les ascensions droites et les déclinaisons de toutes ces étoiles. Si l'on a trouvé une étoile, dont la déclinaison seule change, $\partial\varrho$ étant nul, on a $\Phi = \varrho$ ou $\Phi = 180° + \varrho$, ce qui sera décidé par l'équation II: on connaît donc Φ. Si la déclinaison est aussi constante, l'équation II. donne $\mathrm{tang}\,\delta = \mathrm{tang}\,\psi$, ou $\psi = \delta$, et la direction du mouvement est complètement déterminée.

§. 52. Quoiqu'on ne connaisse ni e ni u, on peut supposer qu'en ne comparant que des étoiles de même grandeur, la distance e a une valeur constante, ce qui servira au moins d'approximation: alors, en divisant les formules I. et II. par $\frac{u}{e}$, on aura le rapport entre les variations $\partial\varrho$ et $\partial\delta$ de ces étoiles. Cela posé, en calculant les équations I. II. au moyen de valeurs arbitraires de Φ, ψ, on trouvera après quelques essais, comment il faut changer Φ et ψ, pour que le rapport entre les différentes valeurs de $\partial\varrho$ et $\partial\delta$, trouvé par le calcul, soit le même que celui que donnent les observations. M. Herschel a trouvé d'une manière semblable, par une foule d'observations,

qu'on y satisfait le mieux, en supposant $\Phi = 257°$ et $\Psi = 27°$ boréal, d'où il suivrait, qu'actuellement le système solaire avance à peu près suivant une ligne dirigée vers l'étoile λ dans la constellation d'Hercule (1). La table suivante présente les mouvemens propres, $\partial\varrho$, $\partial\delta$, observées pendant cinquante ans, et les deux dernières colonnes renferment le rapport entre $\partial\varrho$ et $\partial\delta$, qui résulte du calcul, en supposant dans les formules I. et II. $\Phi = 257°$ et $\Psi = +27°$.

Etoiles	Asc. droite	Déclin.	$\partial\varrho$	$\partial\delta$	$\partial\varrho'$	$\partial\delta'$
Arcturus	211°.25′.	+20°.23′.	−1′.11″.	−1′.55″.	−679	−208
Pollux	112. 58.	+28. 33.	−0. 48.	−16.	−596	−743
Sirius	98. 53.	−16. 23.	−37.	−52.	−346	−202
Procyon	111. 57.	+5. 48.	−33.	−47.	−513	−198
Athair	294. 59.	+8. 17.	+32.	−4.	+554	−348
Castor	110. 8.	+32. 22.	−24.	−1.	−577	−783
γ Gemaux	96. 14.	+16. 35.	−8.	−24.	−306	−675
Aldebaran	65. 50.	+16. 3.	+3.	−18.	+180	−67

Cette table donne lieu à plusieurs observations importantes. 1) A l'égard des signes + et −, l'accord est parfait entre le calcul et les observations. 2) La parallaxe des deux dernières étoiles en ascension droite est la plus petite de toutes, aussi bien d'après le calcul que par observation. Il en est de même d'Arcturus, dont la parallaxe $\partial\varrho$ est la plus grande. Quant à Aldebaran, le rapport entre $\partial\varrho$ et $\partial\delta$ est aussi à peu près le même, suivant le calcul et les observations. 3) Si l'on veut entrer dans un certain détail, il ne faut comparer entre elles que des étoiles de même grandeur à peu près, telles que Sirius et Arcturus: en effet le rapport entre les valeurs de $\partial\varrho$ est le même que celui des $\partial\varrho'$ comme 1 à 2. Le même rapport existe entre les valeurs de $\partial\delta$, tandis que le rapport des $\partial\delta'$ est celui de l'égalité: d'où l'on pourrait conclure, que Sirius et Arcturus sont également éloignés du soleil, le dernier ayant vers le pole austral un mouvement, égal à celui du

(1) Voy. les mémoires de Mr. *Herschel On the construction of the Heavens*, et *On the proper motion of the Sun and solar System*, dans les *Philos. Transact. Vol. LXXV. Part I. Vol. LXXIII. Part II.*

soleil vers le pole boréal. 4) Le même accord se trouve entre les parallaxes $\partial\varrho$, $\partial\varrho'$, de Procyon et d'Athair qui sont à peu près de même grandeur; mais relativement aux parallaxes $\partial\delta$, $\partial\delta'$, il y a une grande différence qui semble prouver qu'Athair a un mouvement propre vers le pole boréal. 5) La parallaxe $\partial\varrho$ de Pollux est deux fois plus grande que celle de Castor, quoique ces deux étoiles soient de la même grandeur apparente, et à peu près dans la même situation, d'où il vient que les deux valeurs de $\partial\varrho'$ sont égales. On pourrait en conclure, que la valeur de $\frac{u}{e}$ ou $\frac{1}{e}$ est deux fois plus grande relativement à Pollux que par rapport à Castor, c'est-à-dire que Castor est deux fois plus éloigné du soleil que Pollux. En effet, M. Herschel a découvert, que Castor est une étoile double, composée de deux petites étoiles qui, ayant une lumière deux fois plus faible que celle de Pollux, paraissent être deux fois plus éloignées. 6) On voit qu'en général les parallaxes d'ascension droite s'accordent beaucoup mieux que celles de déclinaison; il est donc à présumer, que l'angle ψ a besoin d'une grande correction.

§. 53. Le mouvement *propre* d'une étoile, trouvée par observation, et séparé des mouvemens apparens (*Chap. II.*), est son mouvement *relatif*, composé des mouvemens *vrais* de l'étoile et du soleil. C'est la somme ou la différence de ces deux mouvemens, selon qu'ils sont opposés l'un à l'autre ou qu'ils ont la même direction; et ce mouvement est d'autant plus grand, que l'étoile est plus près de la terre. Ainsi, quand la comparaison des mouvemens propres des plus grandes étoiles a indiqué celle dont le mouvement, dans un certain tems, a été le plus considérable, on peut supposer, que son mouvement est le plus favorablement disposé relativement à celui du soleil, ou que ces deux mouvemens ont des directions opposées. Soient donc (*Fig.* 12.) Ff, Ss, les vrais mouvemens de l'étoile et du soleil, et $s\Phi$ parallèle à SF, de sorte que le mouvement relatif ou observé est $\Phi sf = \Phi$. Puisque F est supposée être une des plus proches étoiles, F et S seront deux soleils voisins dans leur système; ils auront donc à peu près la même distance au centre du système, et par conséquent les mêmes mouvemens Ff = Ss. Cela posé, les triangles SCs, FCf, sont égaux et semblables, parceque Ss, Ff, sont supposées parallèles. On a donc CF = CS, Φ = FCf = CFs + CsF =

$2 F sf$, ou $F sf = \frac{\Phi}{2}$, et $Ff = fs . F sf = \frac{1}{2} fs . \Phi$. En supposant la distance de la plus proche étoile $fs = 300000$ demi-diamètres de l'orbite de la terre $= f$, on aura $Ff = \frac{1}{2} f . \Phi$. La table précédente (§. 52.) montre, que le plus grand mouvement est d'environ 45″ en 50 ans, ce qui fait 0″,9 par an, et $\frac{\Phi}{2} = 0'',45 = 0,0000021816$: multipliant par 300000, on aura $Ff = 0,654$ pour le mouvement annuel. Un arc de l'orbite de la terre, égal à 0,654 est intercepté par un angle au soleil de $37\frac{1}{2}$ degrés, que la terre décrit en 38 jours. Ainsi la vitesse de l'étoile sera à celle de la terre comme 38 a 365 ou comme 1 à 9. On verra dans l'astronomie physique, que les vitesses des corps qui décrivent des cercles autour d'un centre commun, sont en raison inverse des racines carrées de leurs distances au centre, Si donc l'étoile se mouvait autour du soleil à la distance f, en vertu de la force centrale du soleil, sa vitesse serait $\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{648}$ de celle de la terre, c'est-à-dire, 61 fois moindre qu'elle n'est actuellement: elle est donc 61 fois plus grande que dans le cas, où elle dépendrait de la force centrale du soleil. On doit en conclure, qu'elle résulte d'un corps central dont la masse est beaucoup plus grande que celle du soleil, ou duquel l'étoile est beaucoup plus prés que du soleil. Le dernier cas est très-peu probable, parcequ'il suppose, que l'étoile est précisément la plus proche du corps central, et que le soleil est le corps immédiatement suivant, comme Mercure et Vénus dans le système solaire. Il s'en suit donc, que les étoiles se meuvent autour d'un corps central, dont la force centrale ou la masse est beaucoup plus grande que celle du soleil; ce qui est d'ailleurs vraisemblable.

C'est à peu près de cette manière, qu'on parviendra peut-être un jour, par la comparaison d'un grand nombre d'étoiles, à se former quelque idée de ce corps central des orbites des étoiles fixes. On verra aisément qu'il n'est pas encore tems de décider cette question, parceque les observations anciennes sont trop peu exactes. Il est vrai que plusieurs astronomes de nos jours croient avoir observé le mouvement propre d'un grand nombre d'étoiles, qu'on trouve même dans les catalogues à côté de la précession. La chose elle-même n'admet aucun doute; mais il n'en est pas de même de la grandeur et de la direction de ces mouvemens. Si l'on considère, que ces mou-

vemens propres ne sont, pour ainsi dire, que les bribes qui restent, après qu'on a appliqué à la situation de chaque étoile, les mouvemens apparens connus jusqu'à présent, dont une partie n'est pas encore bien déterminée, comme la diminution de l'obliquité, tandis que la précession est ordinairement calculée par une méthode d'approximation qui n'est pas exacte; on se convaincra aisément, qu'il faudra des siècles ou des milliers d'années, pour décider cette question.

CHAPITRE IV.

Autres propriétés remarquables du ciel étoilé.

§. 54. Un des objets du ciel étoilé, qui méritent notre plus grande attention, est la *voie lactée*, dont la lumière douce et blanchâtre fait une impression agréable sur les yeux, et produit dans l'ame des sentimens dignes de nous. Cette blancheur environne toute la sphère à peu près dans le plan d'un grand cercle, qui par la moitié de sa largeur coupe l'équateur au 100 me et au 277 me degré, sous un angle d'environ 60°. Sa largeur est de 9 à 18 degrés: elle est la plus petite vers les poles de l'équateur, principalement entre Cassiopée et Persée, et au pieds de devant du Centaure: la plus grande largeur a lieu dans l'équateur, et principalement entre le Sagittaire et l'Aigle. La voie lactée est divisée en plusieurs endroits, par un intervalle vide au milieu de sa largeur, principalement depuis 254° d'ascension droite et 40° de déclinaison australe, jusqu'à 310° d'ascension droite et 45° de déclinaison boréale; en d'autres endroits il en sort de petites branches. Sa lumière qui ne s'éteint jamais, et sa position invariable, firent déjà penser aux anciens Grecs, que cette blancheur devait être la lumière confuse d'une infinité d'étoiles trop éloignées pour être aperçues distinctement. Après l'invention des téléscopes, on s'attendit à en voir la preuve; on aperçut en effet dans la voie lactée un grand nombre de petites étoiles, invisibles à la vue simple, mais pas plus que dans d'autres parties du ciel, et elles ne paraissaient pas assés rapprochées l'une de l'autre, pour qu'on pût leur attribuer la blancheur de la voie lactée, qui disparaissait entièrement dans les téléscopes. Ce n'était donc qu'une hypothèse trés-vraisemblable, jusqu'à l'époque où M. Herschel la mit hors de doute, à l'aide de ses grands téléscopes. Cet astronome voyait distinctement, que la voie

lactée était composée d'une infinité de petites étoiles, si rapprochées l'une de l'autre, que dans des téléscopes moins grands, leur lumière se confond. Il aperçut aussi, que le nombre de ces étoiles diminuait, à mesure que le télescope s'écartait de la voie lactée. Il paraît donc certain, que c'est la véritable cause de cette blancheur. M. Herschel, ayant compté les étoiles en différentes parties de la voie lactée, à trouvé par un milieu, qu'un segment de 15° de long sur 2° de large renferme plus de 50000 étoiles, assés grandes pour être distinguées avec son grand téléscope. En supposant la largeur de la voie lactée de 14°, il s'en suit, qu'elle renferme plus de huit millions d'étoiles, sans compter celles qui, même avec ce grand téléscope, ne peuvent pas être distinguées.

§. 55. Il y a peu de probabilité, que cette infinité d'étoiles soit réellement disposée dans un cercle autour de la terre, comme le premier coup d'oeil paraît l'indiquer. Il n'y a rien qui nous autorise de supposer, que le soleil qui n'est certainement pas la plus grande étoile, soit le centre de cette voûte immense. S'il est permis de donner plus d'étendue aux conclusions que nous avons tirées ci-dessus de l'analogie, on pourra expliquer d'une manière fort simple, au moins en général, tous les phénomènes du ciel étoilé, non-seulement les étoiles depuis la première jusqu'à la 7 me ou 8 me grandeur, que l'on voit à l'oeil nu dans toutes les parties du ciel, mais aussi la voie lactée. On a vu dans le chapitre précédent, qu'apparemment les étoiles décrivent divers cercles autour d'un grand corps central, ainsi que les planètes autour du soleil. Supposons de plus, que la disposition de leurs orbites soit analogue à celle des orbites planétaires, c'est-à-dire qu'elles soient à peu près dans le même plan. Cela posé, soit (*Fig.* 13.) C le centre, ADBE, AFBG, les plans qui renferment toutes les orbites, ensorte que DAF = EAG soit le plus grand angle d'inclinaison de deux orbites. En supposant d'après les règles de probabilité, que le soleil est à peu près également distant de toutes les extrémités du système, et qu'en conséquent il se trouve placé dans un point S entre les plans ADB, AFB; l'oeil en S, étant environné d'étoiles dans tous les sens, les verra répandues sur une surface sphérique, et ne pourra distinguer que les étoiles voisines. Ces dernières étoiles qui formeront autour du centre S,

une sphère très-petite par rapport à la voie lactée, sont celles que nous voyons dispersées dans tout le ciel. Les étoiles près des extrémités du système A, D, B, E, G, F, étant très-éloignées, l'oeil ne pourra les distinguer, et n'apercevra qu'une faible lueur. Soient DSF, GSE, les angles sous lesquels les angles DAF, EAG, sont vus de S, et PQ perpendiculaire au plan du milieu entre AD et AF, ou à l'orbite du soleil; et imaginons que l'angle DSF tourne sur l'axe PQ, en décrivant un cercle ou une zone sphérique, perpendiculaire à PQ, et d'une épaisseur peu considérable. Dans toute cette zone l'oeil verra la blancheur de la voie lactée; mais comme l'épaisseur du système suivant la direction de l'axe PQ est supposée très-petite, il n'y aura pas dans cette direction, d'étoiles assés éloignées pour ne pas être distinguées, ou au moins il n'y en aura pas un nombre suffisant pour produire la blancheur de la voie lactée. Elle paraîtra donc avoir la forme d'une zone de peu de largeur qui est déterminée par les angles DSF, ESG: cette zone fera le tour du ciel entier, et les grands segmens des deux côtés de cette zone, seront remplis des étoiles assés voisines, pour pouvoir être distinguées à la vue simple ou avec des téléscopes ordinaires.

§. 56. Maintenant il sera facile d'expliquer toutes les particularités de la voie lactée. Les étoiles, situées entre les plans ADB, AFB, mais près de S, se feront voir au milieu de la voie lactée: ce sont les constellations traversées par la voie lactée, comme Cassiopée, Persée, le Cocher, Orion, les Gemeaux, le grand Chien, le Navire, etc.

Là où les intersections communes d'un grand nombre d'orbites, ou leurs noeuds coïncident, comme en A, B, la voie lactée sera plus serrée: sa largeur sera moindre, sa lumière plus forte; et ces deux points seront éloignés l'un de l'autre d'environ 180°, si le soleil S n'est pas très-loin de la ligne des noeuds AB. En effet, deux des endroits les moins larges se trouvent dans l'hémisphère boréal à 340°, et dans l'hémisphère austral à 160° d'ascension droite: le dernier point (dans le Navire) est aussi le plus brillant de la voie lactée.

La différente largeur a encore une autre source: c'est l'endroit qu'occupe l'oeil S: car on verra aisément, que l'angle DSF doit être plus grand que ESG.

A une distance aux noeuds A, B, d'environ 90°, la voie lactée aura sa plus grande largeur, et la plus faible lumière. Si les orbites sont tellement disposées, que dans cette partie en D et F, beaucoup d'orbites se trouvent à peu près dans deux plans par D et F, séparés par un intervalle qui ne renferme que peu d'orbites; la voie lactée paraîtra séparée du côté de C où l'oeil se trouve: mais de l'autre coté en E, G, la distance est trop grande pour que l'oeil puisse apercevoir un intervalle vide.

§. 57. On se fera peut-être une idée plus juste, en supposant que toutes les étoiles voisines de S, qu'on peut distinguer avec des téléscopes ordinaires, font ensemble un système particulier qu'on peut appeler *système étoilé*. Plusieurs de ces systèmes, ou les grandes masses centrales, autour desquelles se meuvent les étoiles qui forment les systèmes, décriront pareillement des orbites autour d'un corps central ou du centre commun de gravité, en formant un système plus vaste, la *voie lactée*, qui est un système composé d'une multitude de systèmes étoilés. On peut se faire quelque idée, de la situation du soleil dans le système étoilé auquel il appartient, aussi bien que du lieu que ce système occupe dans la voie lactée, par les raisonnemens suivans. 1) Notre système étoilé paraît être disposé à peu près comme le système solaire, y compris les comètes; c'est-à-dire, les orbites des étoiles sont inclinées l'une à l'autre de toutes les manières possibles, ensorte qu'elles ne forment pas un anneau comme la voie lactée, mais une sphère. C'est évident parceque le ciel est parsemé d'étoiles dans tous les sens. 2) Le soleil n'est pas fort éloigné du centre de son système étoilé, parceque nous voyons dans toutes les régions du ciel à peu près le même nombre d'étoiles de toute grandeur. Cependant, le soleil ne pouvant occuper le centre même, nous aurons une plus grande partie du système du côté du centre, et dans la même direction un plus grand nombre d'étoiles se fera voir. D'après cela le centre ou le corps central de notre système étoilé sera dans la direction du Taureau ou d'Orion, parceque ces régions sont les plus riches en étoiles: en effet, plusieurs astronomes regardent la nébuleuse au-dessous du Baudrier d'Orion comme le corps central de notre système étoilé. 3) Si l'oeil se trouvait dans l'intérieur de l'anneau formé par la voie lactée, et dans le plan qui

passe par le milieu de sa largeur, cet anneau devrait se présenter comme un *grand cercle;* si l'oeil était hors de ce plan, dans l'axe de l'anneau, il prendrait la forme d'un *petit cercle* qui s'écartera d'autant plus d'un grand cercle, que l'oeil est plus éloigné du plan de l'anneau: enfin, si l'oeil n'était, ni dans le plan ni dans l'axe de l'anneau, il se présentera comme une *ellipse,* d'autant plus alongée que l'oeil est plus éloigné de l'axe. Or comme la voie lactée se présente comme un petit cercle, peu différent d'un grand cercle, que d'ailleurs elle n'est pas tout-à-fait circulaire, mais un peu oblongue; il s'en suit, que notre système étoilé n'est situé, ni dans le plan passant par le milieu de la voie lactée ni dans son axe, mais qu'il n'est pas fort loin du centre, ensorte qu'il forme un des systèmes intérieurs ou inférieurs. 4) Il paraît résulter du peu de largeur de la voie lactée, que les systèmes étoilés qui la composent, et qui sont ici ce que dans le système solaire sont les comètes et les planètes ou les systèmes de satellites, ne sont pas inclinés l'un à l'autre sous tous les angles possibles, comme les orbites des comètes, mais qu'ils sont presque dans le même plan, comme les orbites planétaires (§. 55.). Cela paraît contraire à l'économie, avec laquelle la nature emploie l'espace, et dont nous voyons un exemple frappant dans la disposition des orbites des comètes. On est presque porté à croire, qu'ainsi que dans le système solaire, l'espace hors de l'anneau occupé par les orbites, semblables à celles des planètes, est rempli d'orbites qui ressemblent à celles des comètes, étant inclinées au plan de la voie lactée sous tous les angles depuis zéro jusqu'à 90°: alors les étoiles, décrivant ces orbites excentriques et dispersées dans tous les sens, ne se trouveraient jamais assés rapprochées les unes des autres, pour produire une lueur semblable à celle de la voie lactée. Quoiqu'il en soit, il est certain, que la véritable forme de cet amas d'étoiles que nous nommons voie lactée, n'est pas sphérique mais orbiculaire.

Il sera bon d'observer ici, que Kepler eut déjà, sur la disposition et la forme de la voie lactée, des idées très-semblables à celles que nous venons de développer (1).

---

(1) *Epitome Astron. Copern. Lib. I. Pag.* 38.

Il est probable que plusieurs des étoiles doubles forment de petits systèmes étoilés (§. 48.), composés non de corps opaques qui environnent un corps lumineux, mais de deux ou plusieurs soleils qui circulent autour de leur centre commun de gravité. Une étoile double dans le Cygne, dont M. Bessel a fait l'objet de ses observations, paraît évidemment former un pareil système de deux etoiles. Suivant les recherches de cet astronome, ces deux étoiles ont décrit une partie considérable de leurs orbites, depuis que l'on en a des observations exactes, c'est-à-dire depuis soixante ans: le grand axe de ces orbites est vu de la terre sous un angle de 25″; elles emploient 400 ans à faire une révolution; leur mouvement propre est d'environ 6″ par an, et leur parallaxe annuelle de 0″,46; d'où il suit, que le demi-diamètre de leurs orbites, ou leur distance au centre commun de gravité, est 25 fois plus grand que le rayon de l'orbe terrestre, ou d'un tiers plus grand que le demi-diamètre de l'orbite d'Uranus.

§. 58. En continuant les raisonnemens que nous avons faits au commencement du §. précédent, on peut imaginer pareillement un nombre de voyes lactées qui forment ensemble un *système de voyes lactées*. Celle d'entre elles, à laquelle appartient le soleil et notre système étoilé, environne tout le ciel comme une ceinture; les autres, hors desquelles nous nous trouvons à une distance immense, nous paraîtront très-petites, et elles seront à la notre comme une étoile est au soleil. Ces petites voyes lactées seront dispersées dans toutes les régions du ciel; leur grandeur et leur figure apparente seront différentes, selon leurs distances et leurs situations relativement à notre voye lactée. C'est en effet l'explication la plus vraisemblable de ce grand nombre de *nébuleuses* qu'on a découvertes depuis longtems. Dans l'espace de sept ans (depuis 1782 jusqu'à 1788) Mr. Herschel a découvert 2000 nébuleuses, et depuis ce tems il en a augmenté le nombre. La grande variété qu'il a observée relativement à leur forme, leur couleur, et l'intensité de leur lumière, prouve qu'ici la nature est aussi inépuisable que partout ailleurs. Suivant les observations de cet astronome, il y a de grandes nébuleuses, dont la lumière jaunâtre ou rougeâtre est décomposée, avec les grands téléscopes, en une multitude d'étoiles qu'on distingue aisé-

ment: d'autres, entièrement semblables aux premières, sont plus petites de la moitié, et exigent des grossissemens plus forts, pour faire reconnaître des étoiles; il y en a d'autres beaucoup plus petites, où l'on ne distingue des étoiles qu'avec la plus grande peine, mais dont la lumière est encore un peu colorée. Mr. Herschel est persuadé, que les nébuleuses de la première classe sont au moins 600 fois plus éloignées que les étoiles les plus proches; que celles des deux classes suivantes sont deux et quatre fois plus éloignées que les premières; et qu'en général elles ne sont pas moins grandes que notre voye lactée. Les nébuleuses qui ne sont pas comprises dans ces trois classes, diminuent successivement de grandeur, la couleur de leur lumière se perd, les étoiles qui les composent, disparaissent, et aux plus petites il ne reste qu'une blancheur de lait. Mr. Herschel pense que la distance de ces dernières est 8000 fois plus grande que celle d'une étoile de la première grandeur: d'où il suit, que la lumière que nous voyons aujourdh'ui, est partie de ces nébuleuses il y a vingt ou trente mille ans.

§. 59. Le même astronome a encore découvert d'autres nébuleuses, qui ressemblent plutôt à un corps planétaire, qu'à la lumière d'une multitude d'étoiles; il a observé aussi un *anneau nébuleux*, ayant au centre une tache noire et circulaire. Un objet non moins remarquable est ce que Mr. Herschel appelle *étoiles nébuleuses proprement dites:* elles sont formées par une seule étoile placée dans le centre d'une blancheur presque circulaire de 3′ à 5′ de diamètre. Il est difficile d'expliquer ce phénomène par la lumière d'une infinité d'étoiles, parcequ'alors l'étoile centrale devrait être d'une grandeur dont on ne peut pas se faire une idée; ou il faudrait supposer, ce qui est très-improbable, que dans tous ces phénomènes le hazard eût placé une étoile précisément dans la direction du centre de la nébuleuse. Mr. Herschel, ayant aperçu des blancheurs semblables, dispersées par-ci par-là, sans étoile centrale, pense que ces nébuleuses sont des parties d'une matière lumineuse éparse dans l'immensité du ciel, qui s'accumule par des attractions mutuelles, ou autour d'une étoile voisine. Il serait possible, que cette matière fût la lumière, qui est lancée continuellement par une infinité de soleils, et qui, par la réflexion, réfraction, ou par d'autres opérations de la nature que nous

ne connaissons pas, est rassemblée pour être employée autrement, peut-être pour former de nouveaux soleils, après avoir été condensée (1).

Il faut convenir, que la forme sphérique, et l'accroissement de la densité ou de l'éclat vers le centre, paraît indiquer l'action de forces centrales; et Mr. Herschel a très-bien développé cette idée (2). Il y joint l'hypothèse, que les étoiles, dans leur état primitif, ont été dispersées irrégulièrement, et que l'attraction les a forcées de former successivement des groupes sphériques. Quelques objections qu'on puisse faire contre cette hypothèse, elle mérite notre attention par l'heureuse application qu'en fait cet astronome. Cette origine et formation successive des différens systèmes et de régularité dans l'univers, nous fournirait le moyen, de juger de l'age plus ou moins avancé des différens groupes, par leur forme plus ou moins sphérique. Ils nous présenteraient, pour ainsi dire, des végétaux dans toutes les stations de leur vie, des plantes qui commencent à s'épanouir, des arbres en fleurs, des fruits mûrs, et des fleurs fanées. Nous nous trouverions dans un jardin, où l'art aurait réuni tous les climats et toutes les saisons, pour nous présenter à la fois les plantes dans chaque état de leur végétation, ensorte que les observations d'un seul age renfermeraient l'expérience de milliers d'années (3).

§. 60. Les *étoiles changeantes* sont un des phénomènes les plus remarquables, que le ciel nous présente. Plusieurs étoiles qui brillaient jadis dans le ciel, ont disparu; d'autres ont apparu, qu'on n'avait jamais aperçues; il y en a quelques-unes qui disparaissent de tems en tems, ou dont l'éclat éprouve des changemens très-sensibles. Il est donc possible, que celles qui ont disparu entièrement, existent encore, quoiqu'invisibles, dans le même endroit, et qu'il y a peut-être dans le ciel, autant d'étoiles fixes opaques que de soleils. La plus remarquable parmi les étoiles changeantes est celle

(1) Voy. le mémoire de Mr. *Herschel, On nebulous stars, properly so called,* dans les *Philos. Trans. Vol. LXXXI. Part. I.*

(2) *Catalogue of a second Thousand of new Nebulae etc. Philos. Trans. Vol. LXXIX. Part. 2.*

(3) Voy. *loc. cit.* pag. 226. „By this method of viewing the Heavens, we can extend the range „of our experience to an immense duration. For, is it not almost the same thing, whether „we live successively to witness the germination, blooming, foliage, fecundity, fading, „withering, and corruption of a plant, or whether a vast number of specimens, selected from „every stage thro' which the plant passes in the course of its existence, be brought at once „to our view?"

qui, en 1572, se fit voir subitement dans la constellation de Cassiopée, avec un éclat qui surpassa beaucoup celui de Sirius; cet éclat diminua successivement, elle disparut entièrement dans l'année 1574, et depuis cette époque on ne l'a jamais vue. Pendant tout ce tems elle n'avait ni mouvement propre ni parallaxe; sa distance n'était donc pas moindre que celle des étoiles fixes.

On a observé depuis longtems un grand nombre d'étoiles, dont la lumière éprouve des changemens périodiques; il y en a même, qui disparaissent tout-à-fait pendant cette période qui est souvent de moins d'une année. Il y a dans la Baleine une étoile qui, dans la période de 333 à 334 jours, éprouve des changemens si considérables, qu'après avoir été de la seconde grandeur, elle devient si petite, qu'on ne la voit qu'avec de bons téléscopes. La courte durée de quelques périodes n'est pas moins remarquable: l'étoile Algol a une période de deux jours, γ Céphée de $5\frac{1}{3}$ jours, β Lyre de $6\frac{2}{5}$ jours. Comme ces changemens suivent des périodes régulières, il est évident qu'il ne peut pas être question d'une déstruction réelle. Un changement de la distance des étoiles ne suffit pas non plus pour expliquer ce phénomène, parceque les variations se font trop vite, et que les étoiles, n'ayant point de mouvement propre, devraient avancer et rétrograder sur une ligne droite passant par la terre. Il est probable, que les changemens de différentes étoiles sont produits par différentes causes. Si ces étoiles tournent sur un axe, comme le soleil, et que leur surface n'est pas également brillante dans toute son étendue, ou si leur surface, comme celle du soleil, est couverte de taches, qui peuvent s'étendre tellement qu'elles rendent l'étoile invisible; ces phénomènes s'expliquent en général, et c'est ainsi que Newton les expliqua (1). D'après cette explication, il est possible que notre soleil même est une étoile changeante, à cause des taches qui couvrent sa surface de tems en tems. On peut aussi expliquer ces phénomènes, en supposant que les étoiles font des révolutions autour d'un grand corps opaque qui les éclipse parfois.

(1) *Philos. Nat. Princ. Math. Lib. III.* à la fin de la dernière *Proposit.* „Tales fixae videntur revolvendo partem lucidam et partem obscuram per vices ostendere".

LIVRE III.

DES PLANÈTES.

CHAPITRE I.

Phénomènes généraux des Planètes.

§. 61. Il est permis au philosophe, de s'élever à ces vastes régions du ciel étoilé, que nous venons de parcourir; il lui est permis, de se livrer un moment aux rêveries de son imagination, d'arranger par la pensée l'univers de la manière qui lui paraît la plus digne de la sagesse infinie, et de jouir d'un plaisir, dont peu de personnes sont capables de jouir. Mais il serait indigne de lui, de s'arrêter à ces productions de l'imagination, de les faire valoir plus qu'elles ne valent, ou de s'aviser d'élever des monumens destinés à l'éternité, sur ce fondement qu'un souffle peut détruire. Il faut qu'il se sépare sans regret de la compagne agréable, la fantaisie, pour suivre la voix plus tranquille de la raison: il faut qu'il descende des objets, trop sublimes pour son esprit borné, au grain de sable qu'il habite. Le vrai philosophe ne fait aucun pas sans le flambeau de l'expérience, et l'astronome ne reconnaît d'autres vérités, que celles qui sont fondées sur des observations: le grand objet, situé hors de sa sphère d'observation, lui importe moins, que le petit objet qui est assés près pour être mesuré. La multitude

des étoiles que nous voyons dispersées sur le ciel, n'est rien par rapport à la voye lactée et aux nébuleuses, le système solaire s'évanouit parmi le nombre et la grandeur des étoiles fixes; mais le globe terrestre, ce point insensible même dans notre système solaire, est la seule échelle qui puisse nous conduire à mesurer ces quantités immenses, la seule base sur laquelle nous puissions nous élever de soleil en soleil jusqu'aux limites les plus éloignées de l'univers. Aucun effort, aucune exactitude, aucune correction, quelque minutieuse qu'elle soit, n'est inutile, si elle peut servir à vérifier cette base, parceque la moindre erreur qui y serait commise, influerait sur toutes les mesures suivantes, et par conséquent croîrait à l'infini. C'est ici que toutes les ressources de la géométrie doivent être employées; et l'objet le plus important pour l'astronome sera la théorie des planètes, et principalement le mouvement de la terre.

§. 62. Les *Planètes* se distinguent des étoiles fixes, par leur lumière plus faible ou plus tranquille, par leurs diamètres sensibles, mais surtout par leur mouvement propre, avec lequel elles paraissent errer d'une étoile à l'autre, et faire le tour du ciel entier. Les particularités les plus remarquables de ce mouvement apparent sont le sujet de ce Chapître.

Les orbites de toutes les planètes, excepté trois ou quatre qui ne sont visibles qu'avec des lunettes, et qui ont été découvertes dans le siècle présent, ne s'écartent jamais de plus de 8 ou 9 degrés du plan de l'orbite de la terre, de sorte que les planètes sont toujours renfermées dans une zone qui environne l'écliptique des deux côtés à une distance de 9 degrés, et qui a été appelée le *Zodiaque*. La terre étant aussi en mouvement, il est visible que le mouvement apparent des planètes sera fort différent de leur mouvement vrai; mais comme il est modifié par les vrais mouvemens de la terre et de la planète, on pourra trouver par le problème inverse, la véritable route de la planète, son mouvement apparent et le mouvement vrai de la terre étant donnés. La méthode, employée avec tant de succès dans toute l'astronomie, qui consiste à commencer par une détermination générale et approximative, pour y fonder des recherches plus exactes et plus détaillées, est singulièrement propre à ce problème. Le premier point à déterminer est la disposition de l'orbite en général, le

centre vers lequel elle tourne sa concavité, et l'ordre de succession qui a lieu entre plusieurs orbites qui ont un centre commun. Ces deux points ensemble font ce qu'on appelle assés improprement *Système du monde*; et les hypothèses, relativement au centre des orbes planétaires, et à l'ordre suivant lequel elles sont disposées autour de ce centre, qu'on a imaginées pour expliquer leurs mouvemens apparens, ont fait naître les différens systèmes dont il sera parlé dans le Chapitre suivant.

Il est naturel, que le mouvement apparent des planètes, étant composé des mouvemens vrais de la terre et de la planète, dont le dernier est encore inconnu, doit être fort irrégulier. Cependant toutes les planètes, dans la plus grande partie de leurs orbites, vont ainsi que la terre ou le soleil, de droite à gauche, c'est-à-dire de l'ouest par le sud à l'est: et c'est alors qu'elles sont *directes*. Mais ce mouvement se rallentit peu à peu, jusqu'à devenir nul; alors les planètes sont *stationnaires*. Au bout de quelque tems leur mouvement prend la direction opposée, elles reculent vers l'occident, ou sont *rétrogrades*. Ces phénomènes singuliers que les anciens appelaient la *seconde inégalité*, reviennent toujours dans le même ordre, à chaque révolution d'une planète, et suffisent pour nous convaincre, que la terre ne peut pas être le centre de leurs orbites: car il serait difficile d'imaginer un autre point, où leur mouvement paraîtrait plus irrégulier.

§. 63. Ces phénomènes sont communs à toutes les planètes; mais il y en a d'autres qui distinguent les unes des autres d'une manière si marquante, qu'il a fallu les diviser en deux classes. Deux d'entre elles, *Mercure* et *Vénus*, ne s'écartent jamais du soleil, soit à l'orient soit à l'occident, au-delà d'une certaine limite qu'on appelle leur *plus grande digression:* elle n'est pas la même dans chaque révolution, la plus grande digression de Mercure changeant de 17° 36′ à 28° 20′, celle de Vénus depuis 44° 57′ jusqu'à 47° 48′. Après cette digression elles se rapprochent du soleil, jusqu'à être en *conjonction* avec lui; et dans ces conjonctions il arrive quelquefois, qu'on les voit passer entre le soleil et la terre. En les observant continuellement à l'époque où elles se rapprochent du soleil, jusqu'à ce qu'elles disparaissent à cause de la proximité de cet astre, on pourra déterminer exactement la direction

et la vitesse de la planète à cette époque, et l'on verra aisément, si sa direction passe par le soleil, ou par-dessus ou par-dessous de lui, c'est-à-dire si sa latitude dans la conjonction est plus ou moins grande que le demi-diamètre du soleil. Dans le cas où la direction va par le disque solaire, la vitesse observée servira à calculer le tems, où la planète doit se trouver derrière ou devant le soleil: et à cette époque, on a vu passer la planète sur le disque solaire, sous la forme d'une tache noire de la même grandeur qu'on avait mesurée peu auparavant, et suivant la même direction et avec la même vitesse qu'on avait calculée. Au bout de quelque tems, la planète s'étant assés éloignée du soleil, pour que l'éclat de cet astre permette de la voir, elle reparaît dans la prolongation de sa direction précédente, en continuant sa route avec la même vitesse qu'elle avait avant de disparaître: d'où il est certain, que c'est la planète qu'on a vue dans le disque solaire. Dans la conjonction immédiatement suivante, et dans la plupart des conjonctions, on ne la verra pas sur le soleil, quand même sa direction passe par cet astre: ce qui prouve que la planète a passé derrière le soleil. Ces *passages* de Vénus et de Mercure sur le soleil sont très-importans pour l'astronomie: les derniers sont assés fréquens, et arrivent infailliblement après trois ou dix ans; ceux de Vénus sont plus rares, l'un succédant ordinairement à l'autre au bout de huit ans qui sont suivis par un siècle entier où il n'y a point de passage.

§. 64. Les observations précédentes donnent lieu à plusieurs conclusions importantes. 1) Ces planètes sont des corps opaques, qui empruntent du soleil la lumière qui nous les fait voir; parcequ'elles paraissent toutes noires sur le soleil, lorqu'elles nous présentent le côté qui n'est pas éclairé par cet astre. 2) Le centre de leurs orbites n'est pas la terre mais le soleil, et leurs orbites sont comprises entre celle de la terre et le soleil; parcequ'elles passent entre le soleil et la terre, et qu'elles ne s'éloignent jamais du soleil au-delà d'une certaine limite. C'est pour cela qu'on leur a donné le nom de planètes *inférieures*: la conjonction qui les fait passer entre le soleil et la terre, est appelée conjonction *inférieure*, la *supérieure* étant celle où le soleil se trouve entre la planète et la terre. 3) La manière dont ces deux

orbites sont disposées, est déterminée par les plus grandes digressions: celle de Vénus étant beaucoup plus grande que celle de Mercure, il est visible, qu'elle s'éloigne davantage du soleil, et que par conséquent son orbite environne celle de Mercure. Comme la planète, dans sa conjonction, est dans la ligne droite qui joint la terre et le soleil, elle nous paraît alors dans le même lieu, où elle est vue du soleil, le centre de son orbite. Les observations des conjonctions donnent donc l'arc que la planète a décrit d'une conjonction à l'autre, ce qui fournit le moyen de comparer leurs vitesses et leurs révolutions. De cette manière on trouve que la vitesse de Mercure est presque trois fois plus grande que celle de Vénus, ce qui ne laisse aucun doute, qu'il ne soit plus près du soleil que Vénus. Les occultations d'une de ces planètes par l'autre, en donnent une preuve encore plus frappante. Ainsi le 17 May 1737, Mercure fut occulté par Vénus, près de leur conjonction inférieure: d'où il suit, que Vénus était plus près de la terre, et par conséquent plus éloigné du soleil que Mercure. Cette vérité était déjà connue des anciens sous le nom du *Système des Egyptiens;* et si ce système n'a pas été généralement adopté, c'est qu'il manquait aux anciens astronomes une des plus fortes preuves, savoir les passages qui n'ont été observés que dans les tems modernes. Nous connaissons donc maintenant la disposition de trois orbites planétaires autour du soleil qui est leur centre commun: l'orbite de Mercure est la plus proche du soleil, ensuite vient celle de Vénus, qui est renfermée par l'orbe terrestre.

§. 65. Les autres planètes, tant celles qui sont connues depuis les plus anciens tems, savoir *Mars, Jupiter, Saturne,* que celles découvertes nouvellement, s'éloignent du soleil d'un cercle entier, ensorte qu'elles sont parfois opposées au soleil, et par conséquent plus éloignées de lui que la terre. Dans les conjonctions on ne les voit jamais, comme les planètes inférieures, passer sur le disque solaire, quand même la direction de leur mouvement traverse le soleil, parcequ'elles passent derrière cet astre. Il suit de là, que leurs orbites environnent celle de la terre: c'est pourquoi on les a nommées planètes *supérieures.* Mais il n'en suit pas encore, que le soleil, et non la terre, soit le centre de leurs orbites; quoiqu'il soit peu vraisembla-

ble, que leur mouvement soit réellement aussi irrégulier que celui qui est vu de la terre, ou que la terre soit le centre de leurs orbites. Les circonstances particulières de leur mouvement le rendent encore plus improbable. Il est aisé de se convaincre par la mesure de leurs diamètres apparens, ou par l'observation de leurs parallaxes, qu'elles sont beaucoup plus près de nous dans l'opposition que dans la conjonction: on trouve même, que la différence de ces distances est égale au diamètre de l'orbe terrestre. C'est une preuve géométrique, qu'elles tournent autour du soleil, et que leurs orbites environnent celle de la terre. Quand même la terre serait le centre de leurs orbites, elles devraient nécessairement accompagner la terre dans sa course autour du soleil, ensorte qu'elles auraient deux mouvemens au lieu d'un seul. On n'hésitera donc pas à supposer, que toutes les planètes tournent autour du soleil, comme la terre, dont l'orbite est la troisième, renfermant celles de Mercure et de Vénus, et étant environnée des autres orbites. Ce système sera prouvé ci-aprés d'une manière plus détaillée.

§. 66. L'ordre dans lequel les orbites des planètes supérieures environnent le soleil et la terre, sera conclu de la même manière que celui des planètes inférieures (§. 64.). Lorsque les planètes sont opposées au soleil, leur vitesse apparente, combinée avec la vitesse vraie ou héliocentrique de la terre qui est connue, donnera leur vitesse héliocentrique par rapport à celle de la terre, d'où il résulte le rapport qui existe entre les vitesses héliocentriques des différentes planètes. Les observations des oppositions, où la planète se trouve sur la même ligne avec le soleil et la terre, donne aussi l'angle au soleil, que la planète a parcouru d'une opposition à l'autre, et par conséquent le tems qu'il emploie à faire une révolution entière. Or il n'admet aucun doute, que la planète qui a une plus grande orbite à parcourir, doit avoir moins de vitesse angulaire, que la planète inférieure; d'autant plus que cette loi est constatée par les orbites de Mercure, de Vénus, et de la terre, ainsi qu'on la vu. Ainsi ces observations donnent le résultat, que les planètes tournent autour du soleil dans cet ordre: la *Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus;* car les périodes de leurs révolutions autour du soleil sont à peu près comme les nombres 1, 2, 12, 29, 83. Le même ordre suit de leur grandeur ap-

parente, vu que celle de Mars en opposition change beaucoup plus vite que celle de Jupiter, et ainsi de suite: d'où il est clair, que le changement de la distance de Mars à la terre est plus grand par rapport à cette distance, ou que Mars est plus près de la terre que Jupiter. Les diamètres apparens dans les conjonctions et dans les oppositions sont à peu près dans le rapport suivant: ceux de Saturne comme 10 à $12\frac{1}{3}$, de Jupiter comme 10 à 15, de Mars comme 10 à 48; d'où il suit, que le diamètre de l'orbe terestre est aux diamètres des orbites de Saturne, Jupiter, et Mars, comme la différence des nombres précédens est à leur somme, c'est-à-dire comme $2\frac{1}{3}$ à $22\frac{1}{3}$, 5 à 25, 38 à 58, ou comme l'unité est aux nombres $9\frac{1}{2}$, 5, et $1\frac{1}{2}$. Les occultations d'une planète par l'autre viendraient à l'appui de ce résultat, si elles étaient moins rares. Le 9 Janvier 1591 on observa le passage de Mars sur Jupiter.

§. 67. Il sera bon d'exposer ici en détail les principales circonstances du mouvement apparent ou géocentrique des planètes, attendu qu'elles donnent une règle qui servira à vérifier tous les systèmes, qui ne sont autre chose que l'explication de ces phénomènes.

Aussitôt que les planètes inférieures sont parvenues à la plus grande digression *occidentale* (§. 63.), elles se rapprochent de la conjonction *supérieure* (§. 64.), avec une vitesse croissante et un mouvement direct. A l'époque même de la conjonction la vitesse du mouvement direct est un *maximum,* et commence à décroître de plus en plus, jusqu'à ce que la planète est parvenue à sa plus grande digression *orientale.* Alors elle se rapproche du soleil, parceque son mouvement direct est devenu plus lent que celui du soleil. Au bout de quelque tems la planète devient *stationnaire:* après quelques jours, pendant lesquels elle a changé de place d'une manière insensible, elle approche de la conjonction *inférieure*, avec un mouvement *rétrograde* et une vitesse croissante. Après cette conjonction, le mouvement rétrograde se rallentit de plus en plus; et quelques semaines avant la plus grande digression occidentale la planète est *stationnaire* pour la seconde fois. Au bout de quelques jours son mouvement redevient *direct,* mais étant d'abord plus lent que celui du soleil, la planète s'en éloigne encore, et ne

parvient à sa plus grande digression occidentale, que lorsque son mouvement direct est plus vite que celui du soleil. Alors tous ces phénomènes reviennent dans le même ordre, et l'on observera ce qui suit.

1) Le *maximum* de la vitesse directe dans la conjonction supérieure est à peu près deux fois plus grand que le *maximum* de la vitesse rétrograde dans la conjonction inférieure.

2) Le mouvement rétrograde de Mercure dure environ 23 jours, et renferme un arc de 9 à 16 degrés; celui de Vénus durant environ 42 jours renferme 14 à 17 degrés. Or l'intervalle entre deux conjonctions supérieures ou inférieures étant d'environ 116 jours pour Mercure, et de 584 jours pour Vénus; les durées des mouvemens rétrograde et direct sont à peu près comme 1 à 5 pour Mercure, et comme 1 à 14 pour Vénus.

§. 68. Les phénomènes que présentent les planètes supérieures, sont les mêmes, en substituant l'opposition au lieu de la conjonction inférieure: car il est visible, que dans l'opposition la planète supérieure verra la terre dans sa conjonction inférieure. Le mouvement des planètes superieures, étant en conjonction, est *direct* et a sa plus grande vitesse: il se rallentit de plus en plus, le soleil s'éloignant de la planète vers l'orient, à cause de sa plus grande vitesse, ensorte que la planète s'éloigne de plus en plus vers l'occident. Peu de tems après qu'elle est parvenue à la *quadrature occidentale* (90° du soleil), elle devient *stationnaire*, et ensuite *rétrograde*. Ce mouvement rétrograde devient plus vite, à mesure que la planète approche de l'opposition, où il parvient à son *maximum*. Alors la planète se rapproche du soleil, en étant éloignée vers l'orient de moins de 180°: le mouvement rétrograde va en diminuant, et devient nul, lorsque la planète est d'environ deux signes au-delà de l'opposition, ou ce qui revient au même, quatre signes à l'orient du soleil. Après avoir été *stationnaire* pendant quelques jours, la planète se rapproche de la conjonction par un mouvement *direct* et avec une vitesse croissante, ensorte que sa distance *orientale* au soleil diminue, le soleil allant à l'orient plus vite que la planète. Après la conjonction les mêmes phénomènes reviennent, et l'on y observe ce qui suit.

1) Le *maximum* de la vitesse directe dans la conjonction est à peu près deux fois plus grand que la vitesse rétrograde dans l'opposition.

2) La période entière d'une conjonction à l'autre est d'environ 780 jours pour Mars, de 399 jours pour Jupiter, de 378 jours pour Saturne, et de 370 jours pour Uranus. Le mouvement rétrograde de ces quatre planètes dure 61 à 81 jours, 117 à 122, 135 à 139, et 150 à 153 jours; il renferme des arcs de 10 à 20 degrés, de 10°, d'à peu pres 7°, et de $3\frac{3}{4}$ degrés. Les durées des mouvemens rétrogrades et directs de Mars, Jupiter, Saturne, et Uranus, sont donc entre elles à peu près comme 1 à 10, 1 à $2\frac{1}{3}$, 1 à $1\frac{3}{4}$, et 1 à $1\frac{1}{5}$.

CHAPITRE II.

Les différens systèmes planétaires.

§. 69. Dès que les premiers astronomes avaient fait l'observation aisée, que tout le ciel étoilé tourne en 24 heures autour de la terre de gauche à droite, ils ne tardèrent pas à s'apercevoir, que le soleil, la lune, et cinq autres astres, demeuraient chaque jour un peu en arrière relativement aux étoiles fixes, que par conséquent ils se mouvaient plus lentement que le reste du ciel, qu'enfin leur mouvement n'était pas parallèle à celui des autres astres ou à l'équateur, étant tantôt au nord tantôt au sud de l'équateur: d'où il suivait que leur route apparente était une spirale. On s'aperçut bientôt, que ce mouvement devenait beaucoup plus simple, s'il était décomposé en deux autres, en attribuant aux planètes, outre le mouvement diurne, commun à tous les astres, un mouvement propre qui fût opposé au premier, et qui n'eût pas pour pole celui de l'équateur. On désigna ces deux mouvemens par les noms du *premier* et du mouvement *propre*, dont l'un est commun à tous les astres, tandis que celui-ci ne convient qu'à un petit nombre, étant différent pour chacun; l'un est parfaitement régulier, au lieu que l'autre est sujet à plusieurs irrégularités, devenant à différentes époques plus ou moins vite, et même nul ou négatif, ainsi qu'on l'a vu dans le chapitre précédent. Ce qui devait surtout frapper les observateurs, c'est qu'à chaque nouvelle révolution, les points des conjonctions et oppositions, du mouvement le plus et le moins vite, de la distance la plus et la moins grande, répondaient à un autre point de l'écliptique, qui avançait continuellement suivant l'ordre des signes. Il en résulta deux vérités importantes, dont on n'aperçut qu'une: 1) que ces irrégularités ne dépendaient pas de la longitude des planètes,

mais de leur situation apparente relativement au soleil; 2) que probablement leur mouvement, vu du soleil, serait beaucoup plus régulier, et exempt des plus frappantes bizarreries, comme les stations et rétrogradations, attendu que les oppositions, les seuls lieux héliocentriques qu'on pouvait observer immédiatement, avançaient continuellement et d'une manière assés uniforme. C'était une preuve forte et évidente, que le soleil est le centre des orbites planétaires; cependant il s'écoula beaucoup de siècles, avant qu'on s'en aperçut.

Des observations plus exactes des stations, des rétrogradations, et des oppositions, firent voir de nouvelles irrégularités, quoique bien moins considérables. Les arcs interceptés et les tems écoulés entre deux stations ou oppositions, ainsi que les durées des rétrogradations, surtout de celles de Mars, ne se trouvèrent de même grandeur, que lorsque ces phénomènes eurent lieu dans la même région du ciel. Leur différence était la plus grande dans les deux points opposés de l'écliptique, et elle diminuait avec la distance à ces deux points. Ces irrégularités qu'on pouvait regarder comme une correction des irrégularités plus considérables qui viennent d'être développées, ne dépendaient donc pas de la situation des planètes relativement au soleil, mais de leur longitude; ce qui était précisément le contraire de ce qu'on avait observé à l'égard des premières irrégularités. Cette correction parut donc être du même genre, que l'irrégularité du soleil, connue sous le nom d'*équation du centre;* et il était naturel de penser, qu'elle s'expliquerait de la même manière par la situation de la planète relativement aux apsides, ou par son anomalie (I. §. 137 — 139.). On appela cette irrégularité la *première,* et la *seconde* celle qui dépend uniquement de la situation apparente des planètes relativement au soleil.

§. 70. En supposant la terre immobile en T (*Fig.* 14.), le soleil mu suivant A, B, C, D, pendant qu'une planète supérieure tourne autour de lui suivant *a b c d,* la planète est stationnaire avant l'opposition en *b,* elle est rétrograde par l'arc *b c* dans l'opposition au soleil qui est en A, et elle redevient stationnaire en *c* (§. 68.). Puis elle devient directe, et s'éloigne de la terre de plus en plus, en parcourant l'arc *d e f g h,* jusqu'à arriver en *h* à sa conjonction avec le soleil B, et à sa plus grande distance à la

terre. En parcourant l'arc *h i k l*, la planète se rapproche de la terre, et se trouve en *m* en opposition au soleil C: puis elle devient stationnaire, rétrograde, etc. comme ci-dessus, en décrivant à chaque opposition un pareil noeud *l m n* (§. 68. 69.). Ainsi, en supposant la terre immobile, la route des planètes est une courbe extrêmement compliquée, ne se fermant jamais, et étant composée d'une infinité de noeuds. Kepler a déterminé avec soin, par des observations continuées pendant seize ans, l'orbite relative de Mars autour de la terre (1); et l'on n'a qu'a jeter un coup d'oeil sur la figure qu'il a dessinée, pour se convaincre de l'improbabilité que ce soit la *vraie* route: une pareille irrégularité et profusion de l'espace est contraire à la marche ordinaire de la nature. Mais cette irrégularité sera encore plus grande, si l'on tient compte aussi de la latitude des planètes. Leur plus grande latitude géocentrique, ou inclinaison à l'écliptique, étant tantôt plus tantôt moins grande, il s'en suit, ou que leurs orbites ne sont pas dans un plan, mais des courbes à double courbure, ou que l'intersection de ce plan avec celui de l'écliptique ne passe pas par l'oeil, c'est-à-dire que la planète ne tourne pas autour de la terre, qui est même hors du plan de son orbite, et par conséquent regarde cette orbite de côté. Il est vrai qu'on peut imaginer des hypothèses, à l'aide desquelles ce mouvement compliqué des planètes sera décomposé en plusieurs mouvemens simples; mais le mouvement résultant sera toujours le même, si la terre est supposée immobile.

§. 71. Le problème principal de l'astronomie, »trouver pour un tems »donné le lieu apparent des corps célestes relativement à la terre", se réduit à déterminer le point de l'orbite relative *a b c d e f*, dans lequel la planète se trouvera à l'époque donnée. Pour résoudre ce problème, il faut connaître la nature de la courbe *a b c d e f*, et la loi suivant laquelle la planète la décrit: il faut au moins déduire des observations, les règles suivant lesquelles le lieu relatif de la planète *h*, c'est-à-dire sa distance T*h* et l'angle A T*h*, peuvent être trouvés par le calcul ou par une construction. On n'a qu'à regarder la courbe *a b c d e f g h*, pour être frappé de sa ressemblance avec l'*épicycloïde:* du moins on ne saurait imaginer une manière plus simple

(1) *De stella Martis, Cap. I. pag.* 4.

de construire cette courbe, que par la supposition que la planète se meut sur la périphérie d'un cercle ou *épicycle*, dont le centre décrit en même tems un cercle autour de la terre. Dans un tems, où l'on n'admettait que le cercle et la ligne droite, pour la solution des problèmes de géométrie, il était très-naturel d'essayer, si cette hypothèse pouvait être modifiée de manière à satisfaire aux observations. En ce cas le calcul devenait d'une extrême simplicité, et l'on n'eut pas besoin de faire des hypothèses ou des recherches sur la *vraie* orbite des planètes: on s'en tint aux orbites apparentes, en employant les hypothèses seulement pour faciliter le calcul. On adopta conséquemment la disposition des orbites, qui était la plus conforme aux mouvemens apparens autour de la terre. Ainsi naquit le *Système de Ptolémée*, l'auteur astronomique le plus célèbre de l'antiquité. Ce grec, né en Egypte, le digne successeur d'Hipparque dans le *muséum* d'Alexandrie vers le milieu du second siècle de notre ère, a développé ce systéme dans son *Almageste* (*μαθηματικη σύνταξις*), avec la solidité du géomètre et la précision de l'astronome. Suivant ce système, ou cette construction du problème, la terre est immobile au centre commun des orbites de la lune, du soleil, et des planètes. Il était naturel, de donner la première place auprès de la terre, à la lune qui, dans les éclipses solaires, passe entre la terre et le soleil, et dont la révolution est la plus courte de toutes; les autres planètes furent disposées, suivant les durées de leurs révolutions, dans l'ordre suivant: ☿, ♀, ☉, ♂, ♃, ♄. Quelques philosophes grecs, comme Platon, placèrent l'orbite solaire immédiatement après celle de la lune, en transportant Mercure et Vénus au-delà du soleil, parce qu'on n'avait jamais vu ces planètes sur le disque solaire. Mais Ptolémée fait déjà la remarque, que cette raison est très-faible, parceque les planètes peuvent passer entre le soleil et la terre, sans apparaître précisément dans le disque solaire, ainsi que la nouvelle lune éclipse rarement le soleil. Or les planètes n'ayant point de parallaxe sensible qui pourrait servir à déterminer leurs distance, Ptolémée est d'avis, qu'il est naturel d'adopter l'opinion des anciens philosophes qui assignèrent au soleil sa place entre les planètes qui ne le quittent jamais, et celles qui s'en écartent d'un cercle entier (1). En général il est aisé de voir que, dans le système de

OBSERVATOIRE DE TOULOUSE 181

(1) *Almag. Lib. IX. Cap. I.*

Ptolémée, il est tout-à-fait indifférent, si l'on place ces deux planètes deça ou delà le soleil, parcequ'elles sont effectivement tantôt d'un côté tantôt de l'autre. C'est sans doute une des plus fortes objections contre ce système, qui aurait nécessairement convaincu les anciens astronomes, que le soleil était au moins le centre des deux orbites inférieures, si l'on avait alors eu les moyens de connaître les distances des planètes, que nous avons aujourd'hui.

Si l'on suppose (*Fig.* 15.) qu'une planète décrit le cercle P*p* Q*q* dans l'intervalle entre deux conjonctions avec le soleil, tandis que le centre C de cet épicycle parcourt le cercle entier ACBA autour de la terre T, dans le tems que la planète emploie à faire une révolution dans l'écliptique; tous les phénomènes précédens seront expliqués en général. En P la planète est en conjonction avec le soleil, et dans sa plus grande distance à la terre; de P en *p* elle est directe. En *p* sa route coïncide avec la tangente *p* T, et la planète serait stationnaire, si l'épicycle était immobile; mais comme il avance suivant l'ordre des signes, la planète sera encore directe, jusqu'au point où son mouvement rétrograde dans l'épicycle, *p*Tπ, est égal au mouvement direct de l'épicycle, CT*c*. Dans l'opposition ou la conjonction inférieure Q, la planète est le plus près de la terre, et son mouvement rétrograde est le plus vite, parceque les deux mouvemens QT$\varkappa$ et CT*c* sont diamétralement opposés: en $\varkappa q$ elle redevient stationnaire, et ensuite directe, conformément aux observations (§. 67. 68.). Ce système sera développé ci-après.

§. 72. La liaison intime qui existe entre les deux planètes inférieures et le soleil, dont elles ne se séparent jamais, est une preuve frappante, qu'elles sont des satellites du soleil et non pas de la terre: la dernière hypothèse serait aussi absurde, que de supposer que la terre, au lieu de Jupiter, fût le centre des orbites des quatre satellites de cette planète. Plusieurs anciens philosophes étaient convaincus de cette vérité qui est connue sous le nom du *système des Egyptiens*, parceque les Grecs l'avaient appris en Egypte. Suivant ce système, la lune, le soleil, Mars, Jupiter, et Saturne, tournent autour de la terre, au lieu que Mercure et Vénus se meuvent immédiatement autour du soleil, et médiatement avec lui autour de la terre, ainsi que suivant le système de Tychon. Elles décrivent l'épicycle P*p*Q*q* autour du soleil C, pendant que

le soleil parcourt le cercle ACB autour de la terre, en entrainant l'épicycle. Ce système se distingue de celui de Ptolémée, par ce que le centre C de l'épicycle des planètes inférieures est le soleil même qui, suivant Ptolémée, est également toujours dans la ligne TC, vu que la planète, étant en conjonction avec le soleil, se trouve en P ou en Q. Toute la différence se réduit donc à la grandeur de la ligne TC, par rapport au diamètre de l'orbite solaire: et l'on verra ci-après que, même suivant Ptolémée, le point C est effectivement le lieu du soleil; ce dont il ne se douta pas, parceque le rapport entre les distances planétaires était alors inconnu.

§. 73. Tycho de Brahé, l'un des plus grands astronomes, mais peut-être plus astronome que philosophe, fut frappé de la beauté du système de Copernic, qui était déjà adopté par un grand nombre d'astronomes. Mais, soit qu'il n'eût pas assés de force pour se délivrer des préjugés que l'éducation lui avait donnés, soit qu'il fût entrainé par le désir de rendre son nom immortel par un nouveau système du monde, lequel pouvait compter sur l'approbation des théologiens qui, à cette époque, avaient encore une voix décisive dans les sciences; Tycho ne put se résoudre à adopter le mouvement de la terre. Les objections qu'il fit contre ce mouvement, ne convainquirent que peu de personnes même dans son tems; aujourd'hui il serait inutile de les réfuter, ce qui a été fait en partie dans le premier Livre de ce Tome. La distance immense des étoiles fixes, qu'il faut supposer pour expliquer la petitesse de leur parallaxe annuelle; l'improbabilité, qu'une masse aussi lourde que la terre ait un mouvement aussi rapide; quelques passages de la sainte écriture, qui semblent supposer le mouvement du soleil, et non de la terre: voilà les principales raisons qui portèrent Tycho, à supposer que la terre était immobile au centre des orbites lunaire et solaire, et que le soleil était le centre de toutes les orbites planétaires, avec cette différence, que les orbites des planètes inférieures seraient plus petites, et celles des planètes supérieures plus grandes, que l'orbite solaire, pour que les dernières fussent en opposition, quand les premières étaient en conjonction. Comme nous avons prouvé (I. §. 101. 102.), que le mouvement apparent du soleil est le même, soit qu'il tourne autour de la terre, soit que celle-ci tourne autour du

soleil, il est clair que, sans rien changer aux phénomènes, on peut substituer à l'orbite solaire du système de Tycho, un mouvement de la terre autour du soleil; et alors ce système ne diffère en rien de celui de Copernic. Tous les mouvemens et toutes les irrégularités des planètes seront donc expliqués, dans les deux systèmes, de la même manière qui sera développée, quand il sera parlé du système de Copernic: la seule circonstance qui distingue le système de Tycho, savoir l'immobilité de la terre, est une erreur, réfutée par les preuves du mouvement de la terre, développées dans le premier Livre.

§. 74. Ce qui précède, renferme les preuves du *système de Copernic*. Suivant Ptolémée, les planètes ne tournent pas effectivement autour de la terre, mais elles décrivent un épicycle qui ne comprend point la terre, ensorte qu'elles n'ont que médiatement un mouvement autour de la terre, à la suite du centre de leur épicycle. Ce que c'est proprement que ce centre, un point géométrique, ou le siège d'une force mouvante, un corps: c'était entièrement indéterminé ou un secret, dans le système de Ptolémée. Comme, suivant les principes de la physique et de la dynamique, il est impossible qu'un mobile décrive un cercle autour d'un point, dans lequel il ne réside point de force, point de corps; il n'admettait aucun doute, que ce corps devait être le soleil. La *seconde* inégalité des planètes, ou leur mouvement dans l'épicycle, ne dépend point de leurs orbites autour de la terre, mais de leurs situations relativement au soleil (§. 69.): c'est pourquoi Ptolémée était forcé de supposer, que le soleil se trouvait toujours sur la même ligne droite avec la terre et le centre de l'épicycle, ou de chaque orbite planétaire (§. 71.). Cela suffisait pour prouver d'une manière très-plausible, qu'effectivement le soleil était le commun centre de tous les épicycles; mais pour le prouver d'une manière sure, il fallait que les observations eussent donné le rapport du rayon TC (*Fig.* 15.) au demi-diamètre de l'orbite solaire, en faisant voir que l'un est égal à l'autre, ainsi qu'on le verra ci-après. On était presque forcé par ces réflexions, de penser que le soleil était le commun centre des orbites planétaires: d'où il résulta le système des Egyptiens, lequel, étant étendu aux planètes supérieures, donna celui de Tycho. Il ne manqua plus qu'un pas pour approcher de la vérité, c'est la connaissance du mouvement

de la terre, dont les preuves physiques furent trouvées beaucoup plus tard, mais qui a une probabilité interne si grande, qu'il s'en trouve des traces dans les tems les plus anciens. Le détail avec lequel Ptolémée tâche de réfuter le mouvement *diurne* de la terre (1), suffit pour prouver, que cette opinion était non-seulement connue, mais très-répandue parmi les anciens. La vraie orbite des planètes est dans chaque système, qui n'attribue pas à la terre un mouvement annuel, une *épicycloïde* très-compliquée, qui ne présente aucune régularité, aucune économie de l'espace, aucune loi physique (§. 70.); mais dès qu'on suppose un mouvement annuel de la terre autour du soleil, l'ordre le plus parfait se développe, les phénomènes en découlent de la manière la plus simple, et ce mouvement devient la source des plus belles loix de la nature, découvertes par Kepler et Newton. Cela ne pouvait échapper à la sagacité des anciens philosophes, et l'on sait que nommément Nicétas (2), Philolaus, et Aristarque de Samos, avaient adopté ce système au moins en partie. Il est même probable, qu'il a été le système général de l'antiquité, et peut-être le reste d'une astronomie plus ancienne, dont les preuves étaient perdues, tandis que les théorèmes s'étaient conservés jusqu'à l'école d'Alexandrie, où Hipparque entreprit une réforme entière de l'astronomie. Ce grand astronome soumit tous les théorèmes à un examen rigoureux, et rejeta tout ce qui n'était pas prouvé par observation, et par conséquent aussi le mouvement de la terre, dont les preuves étaient perdues, ou pas encore trouvées. Copernic, au commencement du seizième siècle, trouva donc presque en entier, dans les écrits des anciens, le système auquel il a donné le nom; mais il eut le grand mérite, de réduire en système ces idées isolées, de les rétirer des dépôts où elles avaient été cachées si longtems, et d'y répandre un nouveau jour; il eut la perspicacité, de voir d'un coup l'ordre beau et simple,

(1) *Almag. Lib. I. Cap.* 7.

(2) *Nicétas de Syracuse*, qui vecut environ 400 ans avant J. C. est celui des Pythagoréens, qui a enseigné de la manière la plus claire et précise, le système de Copernic, du moins à l'égard du mouvement diurne. *Cicéron* s'exprime à cet effet, en des termes qui n'admettent aucun doute (*Academ. Quaest. IV.* 39. ed. *Ernesti*): „Nicetas Syracusius, ut ait Theophrastus, coelum, „solem, lunam, stellas, supera denique omnia, *stare* censet: *neque praeter terram, rem ullam „in mundo moveri:* quae cum *circum axem se* summa celeritate *convertat*, et torqueat, eadem „effici omnia, quasi stante terra coelum moveretur."

et les suites importantes, qui résultent de cette hypothèse; il eut le courage, de soutenir la vérité dont il était pénétré, contre le pouvoir des préjugés. Les principales raisons qui attestent la vérité de son système, sont les preuves du mouvement de la terre, qui ont été développées plus haut; mais toute la théorie suivante des planètes, et son accord avec les observations, en donnent la preuve la plus complète. Il ne reste donc qu'à montrer, comment il explique les mouvemens apparens des planètes. Suivant ce système, le soleil est le commun centre des orbites de toutes les planètes, qui tournent autour de lui dans l'ordre suivant: Mercure (☿), Vénus (♀), la Terre (♁), Mars (♂), Jupiter (♃), Saturne (♄). Il est représenté dans la *Fig.* 16. où l'on trouve ajoutées les orbites d'Uranus et des satellites. L'espace étroit n'a pas permis d'observer le rapport qui existe entre les orbites.

CHAPITRE III.

Le Système de Copernic.

§. 75. Soit (*Fig.* 17.) S le soleil, autour duquel tournent, une planète inférieure que je nommerai Vénus, suivant VNOM, et la terre suivant la même direction TE, en décrivant des cercles concentriques d'une manière uniforme, ce qui peut être admis ici, où il ne s'agit que de l'explication générale. La terre étant en T, et Vénus en O dans la conjonction supérieure, allant de O en *o* à l'orient: cette dernière décrirait par un mouvement direct, l'angle O T *o* autour de la terre, si celle-ci était immobile. Mais la terre ayant en même tems parcouru un arc T *t* à l'orient, Vénus sera vue de la terre suivant la ligne *t o*, laquelle fait avec la ligne des syzygies T O vers l'orient, l'angle $O\omega o = OTo + Tot$, O T *o* étant le vrai mouvement de Vénus, vu de la terre, et T *o t* le vrai mouvement de la terre, vu de Vénus: d'où il suit que, dans la conjonction supérieure, la vitesse directe géocentrique de Vénus est égale à la somme des vitesses angulaires que chacune de ces planètes aurait autour de l'autre, supposée immobile. Ayant mené la droite S *t*, la vitesse précédente est aussi $T\omega t = TSt + Sto$; elle est donc égale à la somme du vrai mouvement de la terre ou du soleil, et de l'élongation de Vénus du soleil ou de la conjonction. Environ 220 jours après la conjonction supérieure, Vénus parvient à sa plus grande digression orientale du soleil: comme cet intervalle renferme une demi-année plus 37 jours, la terre aura parcouru plus d'un demi-cercle, et sera arrivée au point R, BR étant à peu près 37 degrés. Ayant donc mené de R, à l'orient ou à gauche du soleil, une tangente RA de l'orbite de Vénus, cette planète sera en A, et sa plus grande digression ARS est, suivant les observations, à peu près 46°22′ (§. 63.). Or A étant

un angle droit, on aura $AS = R'S.\sin 46°22'$; d'où il suit que le demi-diamètre de l'orbite de Vénus est 0,72377 de celui de l'orbe terrestre, ce qui ne diffère que très-peu de la valeur exacte $= 0,72333$. L'angle ASR est 43°38′, et le mouvement moyen de la terre en 220 jours, $180° + BSR$ est $180° + 36°50\frac{1}{2}'$, d'où l'on tire $BSR = 36°50\frac{1}{2}'$ et $ASO = 6°48'$. Vénus a donc décrit en 220 jours, un arc de $360° - 6°48' = 353°12'$ autour du soleil, attendu que O est la conjonction supérieure dont elle était partie: conformément à ce rapport elle emploiera 4 jours 5 heur. 39 min. pour parcourir les 6°48′ qui manquaient encore pour faire une révolution entière de Vénus autour du soleil, laquelle sera donc de 224 jours 5 h. 39 m. ce qui ne diffère que de 11 heures de la véritable révolution. On voit par-là, que le système de Copernic fournit des moyens très-simples, d'approcher de la connaissance des vraies orbites planétaires.

§. 76. Il est visible, que Vénus a été directe pendant tout ce tems. En effet, la ligne TO qui joint les deux planètes, rencontra d'abord Vénus dans la partie supérieure de son orbite; et il est impossible qu'elle la rencontre dans la partie inférieure, avant que d'avoir touché l'orbite. Il est donc évident que, depuis la conjonction supérieure O jusqu'à la plus grande digression orientale A, cette ligne rencontre toujours Vénus dans un point N de la partie supérieure de son orbite, c'est à dire Vénus est plus éloignée de la terre que le soleil: en ce cas, Vénus va de N à gauche, et la terre de B en R à droite; par conséquent, Vénus aura un mouvement direct a double raison. Cela sera même le cas encore en A: car pendant que Vénus avance sur la tangente de A en *a*, la terre parcourt l'arc R*r*, et la ligne *ra* décline de RA vers l'orient. Mais bientôt après il viendra un instant, où les droites menées de la terre à la planète, dans deux instans consécutifs, seront parallèles, où par conséquent la planète, ne changeant pas de direction, paraîtra *stationnaire*. Il est aisé de trouver la digression d'une planète inférieure du soleil à l'époque où elle est stationnaire, en supposant que les deux orbites sont des cercles concentriques, parcourus uniformément. Soit (*Fig.* 18.) S le soleil, autour duquel les deux planètes décrivent les arcs V*v*, T*t*, dans un tems très-petit; TV et *tv* seront parallèles lors de la station. En nommant T, *t*,

*

les périodes des révolutions des planètes supérieure et inférieure, les demi-diamètres de leurs orbites $ST = R$, $SV = r$, la digression $STV = \Phi$, et l'angle $SVT = \psi$; on aura, à cause de l'uniformité des mouvemens,

$T : t :: VSv : TSt$, et à cause du parallélisme des lignes TV, tv,

$\Phi = Suv = Stv + TSt = \Phi + \partial\Phi + TSt$, donc $\partial\Phi = -TSt$.

On trouvera de la même manière

$\psi = S\tau t = Svt - VSv = \psi + \partial\psi - VSv$, donc $\partial\psi = VSv$;

d'où l'on conclut $\partial\psi : \partial\Phi :: T : t$.

Le triangle STV fournit l'équation $\sin\psi = \frac{R}{r}\sin\Phi$,

et en différentiant, $\partial\psi \cos\psi = \frac{R}{r}\partial\Phi \cos\Phi$,

d'où il suit $\partial\psi : \partial\Phi :: R\cos\Phi : r\cos\psi$;

ce qui étant comparé à la valeur précédente, $\frac{\partial\psi}{\partial\Phi} = \frac{T}{t}$, donne

$r^2\cos^2\psi = \frac{t^2}{T^2}R^2\cos^2\Phi$. En y ajoutant $r^2\sin^2\psi = R^2\sin^2\Phi$, on aura

$r^2T^2 = R^2(t^2\cos^2\Phi + T^2\sin^2\Phi)$, donc $\sin\Phi = \frac{\sqrt{(r^2T^2 - R^2t^2)}}{R\sqrt{(T^2 - t^2)}}$,

ou en faisant $\frac{r}{R} = \varrho$, $\frac{t}{T} = \tau$, $\sin\Phi = \sqrt{\frac{(\varrho+\tau)(\varrho-\tau)}{(1+\tau)(1-\tau)}}$.

Relativement à Vénus et la terre, nous avons trouvé (§. 75.) $\varrho = 0{,}723$; $\tau = \frac{224{,}7}{365{,}25} = 0{,}6152$: d'où l'on tire $\sin\Phi = \sqrt{\frac{1{,}338.\ 0{,}108}{1{,}615.\ 0{,}385}} = 0{,}48208$; et $\Phi = 28°49'$.

C'est l'élongation géocentrique de la planète stationnaire du soleil, l'angle à la planète ψ étant donné par l'équation $\sin\psi = \frac{\sin\Phi}{\varrho}$, ce qui donne $\psi = 138°11'$.

L'angle au soleil VST, ou la distance héliocentrique d'une planète à l'autre, est $180° - (\Phi + \psi) = 13°$.

§. 77. Après que la planète a été stationnaire, l'angle Φ diminue, parceque $\partial\Phi$ est négatif, la planète devient rétrograde, en approchant de la conjonction inférieure V (*Fig.* 17.). Alors Vénus va suivant Vv, la terre suivant Tt; or le premier mouvement, étant plus vite, l'emportera; la planète paraîtra avancer à droite, elle sera donc rétrograde. En effet, menant tu parallèle à TV, Vénus récule de l'angle $utv = Vtv - Vtu = Vtv - TVt$, ce qui est la différence entre les deux mouvemens apparens qui auraient lieu, si l'oeil était immobile: or il est aisé de voir, que cette différence sera un *maximum*, lorsque TV ou tv, est perpendiculaire à l'orbite de Vénus. Le mouvement rétrograde est

donc un *maximum* dans la conjonction inférieure, et il est nul après la conjonction, lorsque Φ est encore une fois 28°49′. Alors il redevient direct, et sa vitesse va en croissant, à mesure que Vénus approche de la conjonction supérieure; parceque l'angle OTo aussi bien que Tot, et par conséquent aussi leur somme (§. 75.) augmente, à mesure que la droite TO approche de la direction perpendiculaire aux deux orbites, qui a lieu dans les syzygies. Au reste on verra, que les deux orbites peuvent être tellement disposées, que le mouvement rétrograde n'a pas lieu du tout. En effet, si l'angle Φ qu'on a calculé pour l'époque de la station (§. 76.) est nul, la station coïncide avec la conjonction inférieure, et la rétrogradation se convertit en station momentanée, parceque nous venons de voir, qu'elle ne peut avoir lieu, que si l'angle à la terre Φ diminue, et qu'il ne peut devenir plus petit que zéro. C'est le cas (§. 76.), lorsque $r\,T = R\,t$, ou $r : R :: t : T$, c'est-à-dire si les distances des planètes au soleil sont en raison de leurs révolutions. Si Rt était plus grand que rT, Φ deviendrait imaginaire, et les stations n'auraient pas lieu non plus. Ainsi, les observations nous ayant appris que *toutes* les planètes sont parfois rétrogrades, il est probable qu'il existe une loi générale dans notre système planétaire, suivant laquelle $\frac{T}{t}$ est plus grand que $\frac{R}{r}$. Relativement à Vénus et la terre nous avons trouvé (§. 76.) $\frac{T}{t} = \frac{1}{0,6152} = 1,6255$; et $\frac{R}{r} = \frac{1}{0,723} = 1,383$; donc $\frac{T}{t} > \frac{R}{r}$: nous verrons ci-après, qu'entre ces deux rapports il existe cette loi générale, $\frac{T}{t} = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire $\frac{T}{t}$ est la raison sesquialtère de $\frac{R}{r}$.

Les phénomènes des planètes supérieures s'expliquent absolument de la même manière, en transportant la terre dans l'orbite VNM, et la planète supérieure, par ex. Mars, dans l'orbite TEB: ce qui transforme la conjonction supérieure O de la terre dans la conjonction T de Mars avec le soleil, et la conjonction inférieure V de la terre en l'opposition T de Mars. La terre, vue de Mars, sera donc directe dans la conjonction (§. 76.), et rétrograde dans l'opposition; or il est aisé de voir, que Mars, vu de la terre, sera direct, stationnaire, ou rétrograde, lorsque la terre, vue de Mars, est l'un ou l'autre. La distance géocentrique de la planète supérieure au soleil lors de la station, ou l'angle S V T $= \psi$

(*Fig.* 18.) est donné par l'équation $\sin\psi = \frac{R}{r}\sin\phi$ (§. 76.), d'où l'on conclura de la même manière $\sin\psi = \sqrt{\frac{(\tau'+\varrho')(\tau'-\varrho')}{(\tau'+1)(\tau'-1)}}$, r et t étant la distance au soleil et la révolution de la terre, et $\varrho' = \frac{R}{r}$, $\tau' = \frac{T}{t}$.

§. 78. Un autre phénomène qui est très-apparent dans Vénus, s'explique avec la même facilité par le système de Copernic, et fut déja regardé par Galilée comme une des preuves les plus satisfaisantes de ce système. Lorsque Vénus est dans la conjonction supérieure O (*Fig.* 17.), elle tourne vers la terre T le côté qui est éclairé par le soleil S, et paraît comme la pleine lune; dans la conjonction inférieure V elle tourne vers la terre le côté qui n'est pas éclairé, et paraît opaque, ainsi qu'on le voit dans ses passages sur le soleil. Depuis la conjonction supérieure jusqu'à l'inférieure, sa lumière décroît peu à peu, parcequ'elle nous présente une plus petite partie de son côté éclairé: aussi les lunettes ont fait voir, que Vénus prend successivement toutes les *phases* depuis la nouvelle lune jusqu'à la pleine lune. Mercure et Mars présentent également ces phases, mais elles sont beaucoup moins sensibles, et Mars ne paraît jamais en croissant, mais toujours rond ou bossu comme la lune trois jours avant ou après son plein. Le système de Ptolémée se distingue de ceux de Tycho et de Copernic, par la supposition, que le soleil est, ainsi que suivant ces derniers systèmes, dans la ligne TP (*Fig.* 15.), mais deçà Q ou delà P, au lieu d'être au dedans de l'épicycle PpQ. Il faudrait donc suivant Ptolémée, qu'à égales digressions du soleil dans la partie supérieure et inférieure de l'orbite, comme en r et π, les phases de Vénus fussent les mêmes, et sa lumière ne pourrait décroître continuellement de P en Q, ce qui est effectivement le cas. Si le soleil était en deçà de Q ou au delà de P, Vénus paraîtrait pleine ou opaque, aussi bien en P qu'en Q. On ne peut donc satisfaire aux observations, qu'en supposant que le soleil est en dedans de l'épicycle, ou ce qui revient au même, que la planète tourne autour du soleil. C'est donc une confirmation complète du système de Copernic ou de Tycho, et les preuves précédentes du mouvement de la terre font voir, que le dernier système n'est pas admissible.

§. 79. Le développement des différentes phases suppose quelques théorèmes de la perspective, qu'il sera bon de rassembler ici, parcequ'ils sont d'un fréquent usage dans l'astronomie.

Si la distance d'un objet est telle, que l'oeil ne peut pas distinguer les distances des différentes parties de cet objet, on attribuera à toutes les parties le même éloignement, c'est-à-dire on supposera que l'objet entier est situé dans un plan perpendiculaire au rayon visuel; ou ce qui revient au même, on confondra l'objet avec la figure qui naît des points d'intersection des droites, menées de l'oeil à chaque point de l'objet, avec un plan perpendiculaire à la droite, menée de l'oeil au centre de la figure. Cela posé, si DAE (*Fig.* 19.) est un cercle décrit du centre C et du rayon $CA = a$, et que l'oeil se trouve en O; ayant mené $OC = c$, OF perpendiculaire au plan du cercle, FC qui rencontre la circonférence en A, et le diamètre DE perpendiculaire à FA: $OCF = ACB = \phi$ sera l'inclinaison du rayon visuel OC relativement au plan du cercle, et DE est perpendiculaire au plan OCF, d'où il suit que OCD, OCE, ACD, ACE, sont des angles droits. Imaginons qu'un plan passant par DE et perpendiculaire à OC, soit coupé par les droites OA, OY, etc. en *a*, *y*, etc. alors le cercle paraîtra à un oeil fort éloigné comme la courbe D*y*a E, et ayant mené YX perpendiculairement à DE, O*Ca*, O*Xy*, seront des angles droits. Les coordonnées perpendiculaires seront donc, pour le cercle $CX = x$, $XY = Y$, pour la projection $CX = x$, $Xy = y$, et le cercle fournit l'équation $Y^2 = a^2 - x^2$. A cause de la grande distance il faut supposer les lignes OC, OX, parallèles entre elles; or CA, XY, étant aussi parallèles, on a $OXY = OCA = 180^\circ - \phi$, d'où l'on conclura à l'aide du triangle XY*y*, $Y = \frac{y}{\sin \phi}$; ce qui étant substitué dans l'équation $Y^2 = a^2 = x^2$, donne pour la projection cette équation:

$$y^2 = (a^2 - x^2) \sin^2 \phi,$$

qui est celle de l'*ellipse*, dont le grand axe est $2a = DE$, le petit axe $= 2a \sin \phi = 2Ca$. Il en résulte, qu'un cercle très-éloigné, ayant une situation oblique relativement à l'oeil, paraît comme une ellipse, dont le grand axe est au petit axe comme l'unité au sinus de l'angle ϕ, sous lequel la droite, menée de l'oeil au centre du cercle, est inclinée à son plan; le petit axe C*a* étant

situé dans le plan OCF qui passe par le rayon visuel OC perpendiculairement au plan du cercle.

§. 80. Soit (*Fig.* 20.) V le centre d'une planète ACBD, S le soleil, T la terre, AB, CD, deux cercles passans par V perpendiculairement à SV, TV: il est visible, que AEDB représente l'hémisphère de la planète qui est illuminé par le soleil, et CAED celui qui est visible sur la terre. Ainsi le segment AC, étant opaque, ne sera pas visible sur la terre, ensorte que le demi-cercle VA est la limite de la portion du disque planétaire qu'on peut voir sur la terre; et cette limite paraîtra en forme d'une demi-ellipse, dont le petit axe est au grand, ou au diamètre apparent de la planète, comme sin AVT à 1 (§. 79.). L'oeil en T verra donc le demi-cercle DVE plus la demi-ellipse EVA; et cette surface est, suivant la nature de l'ellipse, à la première, comme le petit axe est au grand, c'est-à-dire comme sin AVT à 1, ou comme VF à VC, AF étant perpendiculaire à CD. Tout le disque visible est donc au disque entier, comme

$$DF : DC :: 1 + \sin AVT : 2 :: 1 + \cos \phi : 2,$$

$\phi = TVS$ étant l'élongation de la terre du soleil vue de la planète. Si l'on veut introduire l'élongation géocentrique de la planète du soleil $VTS = \psi$, il faut connaître le rapport des distances $TS = r$, $VS = R$, d'où l'on tirera $\sin \phi = \frac{r}{R} \sin \psi$, donc

$$DF : DC :: 1 + \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \psi\right)} : 2.$$

Dans la conjonction supérieure O (*Fig.* 17.) on a $\phi = TOS = 0$, et $1 + \cos \phi = 2$: l'ellipse se transforme donc en cercle, et l'on voit le disque entier de la planète illuminé. Dans la conjonction inférieure V on a $\phi = TVS = 180°$, et $1 + \cos \phi = 0$: la planète disparaît.

Si la terre est en A (*Fig.* 17.), et une planète supérieure en R, ϕ ne peut jamais aller au delà de la plus grande digression de la terre du soleil SRA, pour laquelle on a $\sin \phi = \frac{SA}{SR} = \frac{r}{R}$, ce qui a la plus grande valeur relativement à Mars, où $\frac{R}{r} = 1,5237$, donc $\sin \phi = 0,6563$; $\phi = 41°1'$, $\cos \phi = 0,7545 = \frac{3}{4}$: conséquemment, le segment visible de Mars, lorsqu'il est un *minimum*, est au disque entier, comme 7 à 8; et ce rapport est assés

différent de l'égalité, pour rendre les phases de Mars sensibles. Relativement à Jupiter $\frac{R}{r} = 5{,}2$ est trop grand, pour que ses phases soient sensibles: en effet, cela donne $\Phi = 11°5'$ et $\cos\Phi = 0{,}98133$: le segment visible de Jupiter est donc toujours au disque entier dans un rapport plus grand que 198 à 200, qui ne peut être distingué de l'égalité. C'est à plus forte raison le cas de Saturne et Uranus.

Aucune planète n'a de phases aussi sensibles que *Vénus*. Près de la conjonction supérieure elle paraît entièrement ronde et éclairée, après avoir été à l'occident du soleil, et par conséquent brillé avant le lever du soleil, sous le nom de *Phosphore* ou de *Lucifer*. Après la conjonction supérieure Vénus est à l'orient du soleil, et brille après le coucher du soleil, ayant le nom d'*Hesper*. En approchant de la conjonction inférieure, son disque illuminé par le soleil prend la forme de croissant, qui, en devenant plus mince, ressemble à un fil courbé, qui disparaît entièrement dans la conjonction inférieure. La portion de la planète, qui renvoie de la lumière à la terre, diminue de plus en plus, mais l'intensité de cette lumière augmente en même tems, à mesure que Vénus approche de la terre. Il y aura donc une certaine digression, où sa lumière sera la plus grande; et il est aisé de la trouver, en supposant que les deux orbites sont des cercles concentriques.

§. 81. Il est connu par les principes de la *Photométrie*, que la quantité de lumière qu'un point ou corps lumineux renvoie à l'oeil, est en raison inverse du carré de sa distance. Or la lumière que Vénus renvoie à la terre, ne partant pas du disque entier, mais seulement d'une partie qui est à la surface d'un grand cercle du globe de Vénus, comme $1 + \cos TVS$ à 2 (§. 80.) (*Fig.* 20.), il est visible que la lumière que Vénus nous renvoie, sera comme $\frac{1+\cos TVS}{TV^2}$, ce qui doit être un *maximum*. En faisant $ST = R$, $SV = r$, $TV = x$, on a

$$\cos TVS = \frac{x^2 + r^2 - R^2}{2rx}, \text{ et } 1 + \cos TVS = \frac{(x+r)^2 - R^2}{2rx},$$

et la lumière sera comme $\frac{(x+r)^2 - R^2}{x^3}$. En différentiant cette expression par rapport à x, r et R étant supposés constans, le cas du *maximum* donnera l'équation: $0 = x^2 + 4rx - 3(R^2 - r^2)$, d'où l'on tire

$$x = -2r + \sqrt{(3R^2 + r^2)},$$

et en substituant $r = R \cdot 0{,}72333$;

$$x = R \cdot 0{,}43.$$

Or $\cos VTS$ étant $= \frac{x^2 + R^2 - r^2}{2Rx}$, si l'on y substitue $r = R.0{,}72333$ et $x = R.0{,}43$; on aura $\cos VTS = 0{,}76913$ et $VTS = 39°43'$, ce qui est la digression de Vénus du soleil, lorsque sa lumière est la plus brillante. Comme Vénus parvient à cette digression deux fois de chaque côté du soleil, avant et après la plus grande digression qui est de 46°, il faut observer que la plus grande lumière répond à la digression de 39°43', qui arrive entre la plus grande digression et la conjonction inférieure, attendu que x est moins grand que R.

§. 82. Les orbites planétaires, en s'écartant des deux côtés de l'écliptique, ne peuvent pas être situées dans le plan de l'écliptique: elles le couperont donc sous un angle qui est appelé l'*inclinaison* de l'orbite planétaire, et qui est égal à la plus grande latitude de la planète. Si le plan de l'orbite passe par la terre, les plus grandes latitudes géocentriques des deux côtés de l'écliptique doivent nécessairement être égales; et si ce n'est pas le cas, il est certain que la terre n'est pas toujours dans le plan de l'orbite planétaire (§. 70.). Or les observations ayant prouvé, que les plus grandes latitudes des planètes, dans chaque révolution, sont fort différentes l'une de l'autre, au point que celle de Vénus change de 1° à 8°; et ce changement ne dépendant pas de la longitude de la planète, mais de sa situation relativement au soleil: c'est une preuve géométrique que le système de Ptolémée n'est pas admissible, et il était naturel d'après cela, de rapporter les planètes au soleil et non à la terre. On chercha à déduire les latitudes héliocentriques des géocentriques que les observations donnent, et qui changeaient trop irrégulièrement pour pouvoir être les véritables latitudes: on trouva, que les plus grandes latitudes héliocentriques des deux côtés de l'écliptique étaient constamment égales, et que le changement de latitude, étant comparé avec les longitudes héliocentriques, suivait exactement la loi qui, conformément à la géométrie, doit avoir lieu, lorsque deux plans se coupent. Il fallait donc conclure, que les plans de toutes les orbites planétaires traversent le soleil et non la terre, et que par conséquent les planètes tournent autour du soleil et non pas autour de la terre. Cette recherche suppose qu'on peut trouver la longitude et lati-

tude héliocentriques d'une planète, les géocentriques étant données, et réciproquement; et il est aisé de voir, que chaque observation ne donne qu'un seul angle. Pour trouver les autres angles du triangle, il faut connaître le rapport des côtés; ensorte que toute la théorie des planètes dépend du probléme, de trouver leurs distances au soleil ou à la terre par rapport à celle de la terre au soleil. Les méthodes ingénieuses, imaginées par Kepler, pour résoudre ce problème, seront exposées ci-après: elles sont fondées sur les formules trigonométriques qui servent à comparer entre eux les lieux géocentriques et héliocentriques des planètes; pour éviter des répétitions inutiles, ces formules vont être rassemblées ici. Elles serviront non-seulement à calculer pour une époque quelconque le lieu apparent d'une planète, à l'aide des tables, son orbite étant connue, mais aussi à corriger ses élémens par le moyen des observations: elles sont donc la base de la théorie des planètes, et nous indiquent la route, par laquelle on est parvenu à connaître le vrai système planétaire.

§. 83. Soit (*Fig.* 21.) ♈AB l'écliptique, coupée en A et B par le plan ou la projection de l'orbite planétaire sur la sphère, MADB, ♈ le point vernal, ♈AB l'ordre des signes, suivant lequel les longitudes se comptent, et le mouvement de toutes les planètes se dirige. Les points d'intersection A, B, sont appelés les *noeuds* de la planète, et spécialement le noeud *ascendant* (☊) est le point A, où la planète s'élève au dessus de l'écliptique vers le nord, et B est le noeud *descendant* (☋), où la planète descend vers le sud. L'angle sphérique CAD = ν, sous lequel ces deux plans se coupent, est l'*inclinaison* de l'orbite. Maintenant il est aisé de voir que, ACB, ADB, étant les communes sections des plans des orbites de la terre et de la planète avec la sphère céleste, dont le centre est occupé par le soleil, et par conséquent de grands cercles, tous les problèmes dont il s'agit ici, pourront être résolus à l'aide de la trigonométrie sphérique. En effet, la planète étant en P, et PL un cercle de latitude, PL = β sera la *latitude*, et ♈AL = λ la *longitude* héliocentrique de la planète, ♈A = J la longitude du noeud ascendant: L est le lieu *réduit* à l'écliptique, P le lieu héliocentrique de la planète *dans son orbite*. Afin que ce dernier soit peu différent de la longitude dans l'écliptique ♈AL, il n'est pas compté du noeud A, mais d'un autre point M dans

l'orbite, duquel le noeud A est aussi éloigné que du point vernal ♈, ensorte qu'en ajoutant AP avec ♈A, on a la *longitude* de la planète *dans son orbite* MAP = L = J + AP. La distance de la planète au noeud ascendant, ou AP = α = L − J, est appelé l'*argument de latitude*, parceque la latitude en dépend immédiatement; et la différence entre les longitudes dans l'orbite et dans l'écliptique, AP − AL = α − AL = L − λ = ϱ, est la *réduction à l'écliptique*, à l'aide de laquelle on trouve chacun des angles L, λ, l'autre étant donné, par une simple addition ou soustraction, L = λ + ϱ, λ = L − ϱ. L'inclinaison ν étant connue, le triangle ALP fournit les équations suivantes:

$$\text{I. } \sin\beta = \sin\nu \sin\alpha = \sin\nu \sin(L-J),$$

$$\text{II. } \operatorname{tang}(\lambda - J) = \cos\nu \operatorname{tang}(L-J) = \cos\nu \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\text{III. } \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\nu \sin(\lambda - J),$$

$$\text{IV. } \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}(L-J) = \frac{\operatorname{tang}(\lambda - I)}{\cos\nu}.$$

L'équation II. donne $\operatorname{tang}\{(L-J)-(\lambda-J)\} = \operatorname{tang}(L-\lambda) = \operatorname{tang}\varrho = \frac{\operatorname{tg}(L-J)-\operatorname{tg}(\lambda-J)}{1+\operatorname{tg}(L-J)\operatorname{tg}(\lambda-J)} = \frac{\operatorname{tang}\alpha(1-\cos\nu)}{1+\cos\nu\operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tang}\alpha(\sin\frac{1}{2}\nu)^2}{\sec^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha(\sin\frac{1}{2}\nu)^2} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha(\sin\frac{1}{2}\nu)^2}{1-2\sin^2\alpha(\sin\frac{1}{2}\nu)^2} = \sin 2\alpha\,(\sin\tfrac{1}{2}\nu)^2\left\{1 + 2\sin^2\alpha\left(\sin\frac{\nu}{2}\right)^2 + 4\sin^4\alpha\left(\sin\frac{\nu}{2}\right)^4 + \text{cet.}\right\}$.

A l'égard de toutes les planètes de notre système, excepté une ou deux des nouvelles planètes, il suffit de développer l'expression précédente jusqu'à la sixième puissance de ν, leurs inclinaisons étant au dessous de 7 ou 8 degrés, dont la sixième puissance est 0,0000074 ou $1\frac{1}{2}$ secondes. On aura donc

$$\sin\frac{\nu}{2} = \frac{\nu}{2} - \frac{\nu^3}{48} + \frac{\nu^5}{3840},\quad \left(\sin\frac{\nu}{2}\right)^2 = \frac{\nu^2}{4} - \frac{\nu^4}{48} + \frac{\nu^6}{1440},\quad \left(\sin\frac{\nu}{2}\right)^4 = \frac{\nu^4}{16} - \frac{\nu^6}{96},$$

$$\operatorname{tang}\varrho = \frac{\nu^2}{4}\sin 2\alpha\left(1 - \frac{\nu^2}{12} + \frac{\nu^4}{360}\right)\left(1 + \frac{\nu^2}{2}\sin^2\alpha\left(1 - \frac{\nu^2}{12}\right) + \frac{\nu^4}{4}\sin^4\alpha\right) =$$

$$\frac{\nu^2}{4}\sin 2\alpha\left\{1 + \frac{\nu^2}{12}(6\sin^2\alpha - 1) + \frac{\nu^4}{360}(1 - 30\sin^2\alpha + 90\sin^4\alpha)\right\}.$$

Or ϱ étant $= \operatorname{tang}\varrho - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\varrho$, on trouvera

$$\varrho = \frac{\nu^2}{4}\sin 2\alpha\left\{1 + \frac{\nu^2}{12}(6\sin^2\alpha - 1) + \frac{\nu^4}{360}\left(1 - 30\sin^2\alpha + 90\sin^4\alpha - \frac{15}{2}(\sin 2\alpha)^2\right)\right\}.$$

En substituant ici $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 4\alpha}{8}$, $(\sin 2\alpha)^2 = \frac{1-\cos 4\alpha}{2}$, il viendra

$$\text{V. } \varrho = \frac{\nu^2}{4}\left(1 + \frac{\nu^2}{6} + \frac{17\cdot\nu^4}{720}\right)\sin 2\alpha - \frac{\nu^4}{32}\left(1 + \frac{\nu^2}{3}\right)\sin 4\alpha + \frac{\nu^6}{192}\sin 6\alpha.$$

Pour une planète comme Pallas, dont l'inclinaison est de 34° à 35°, il fau-

drait développer l'expression précédente au moins jusqu'à la huitième puissance, ou calculer immédiatement $\text{tang AL} = \cos v \, \text{tang} \, \alpha$, ce qui donnera $\varrho = \alpha - \text{AL}$.

§. 84. Soit (*Fig.* 22.) S le soleil, T la terre, P une planète hors du plan de l'ecliptique: les parallèles SΥ, TΥ, étant dirigées vers le point vernal duquel se comptent les longitudes suivant la direction ΥP; on connaît, par les tables ou par observation, la longitude du soleil $\Upsilon\text{TS} = \odot$ et $\Upsilon\text{ST} = 180° - \odot$, d'où l'on conclura la longitude héliocentrique de la terre suivant la direction ΥP, $360° - \Upsilon\text{ST} = 180° + \odot$. Ayant abaissé PL perpendiculairement à l'écliptique, la longitude héliocentrique de la planète sera $\Upsilon\text{SL} = \lambda$, sa latitude héliocentrique $\text{PSL} = \beta$, la longitude et latitude géocentriques seront $\Upsilon\text{TL} = \lambda'$, $\text{PTL} = \beta'$; $\text{PS} = \text{R}$, $\text{PT} = \text{R}'$, sont les *vraies distances de la planète* au soleil (à laquelle on donne aussi le nom de *rayon vecteur*) et à la terre, $\text{LS} = \text{D}$, $\text{LT} = \text{D}'$, sont appelés distances *accourcies*. Si TL et SΥ se coupent en l, on aura $\text{SLT} = \Upsilon l\text{L} - \Upsilon\text{SL} = \Upsilon\text{TL} - \Upsilon\text{SL} = \lambda' - \lambda$; cet angle au lieu de la planète réduit à l'écliptique L, qui est la différence entre les longitudes géocentrique et héliocentrique, a été appelé *parallaxe annuelle* de la planète (*prostaphaeresis orbis*): en effet, c'est le rayon de l'orbe terrestre ST, vu de la planète L. Les deux autres angles du triangle TSL sont désignés dans les calculs astronomiques par les termes suivans. L'angle au soleil TSL est appelé *commutation*: c'est la différence des longitudes héliocentriques de la planète et de la terre. L'angle à la terre LTS est l'*élongation* de la planète du soleil, ou la différence des longitudes géocentriques du soleil et de la planète. Si P ou L est une planète inférieure, la parallaxe annuelle SLT est susceptible de toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à 360°: elle est nulle dans la conjonction supérieure, et 180° dans l'inférieure. Mais si L est une planète supérieure, la plus grande valeur de la parallaxe annuelle $= \xi$ a lieu, lorsque la droite menée de la planète a la terre touche son orbite: nommant donc r le demi-diamètre de l'orbe terrestre, on aura $\sin \xi = \frac{r}{\text{R}}$ ou $\frac{r}{\text{D}}$; et dans toute autre situation on aura *sin parall. ann.* $= \frac{r}{\text{R}}$ *sin élongation:* la parallaxe est donc nulle dans les syzygies, et un *maximum* dans les quadratures.

Tous les calculs des planètes dépendent de la solution des triangles TSL, PSL, PTL, dont le premier est dans l'écliptique, et les deux autres sont perpendiculaires à ce plan. Maintenant il faut distinguer deux cas. Si l'on cherche, par la théorie ou les tables, le lieu apparent de la planète, c'est-à-dire le lieu géocentrique par le moyen du lieu héliocentrique, on connaît $\odot$, λ, β, et le rapport entre les distances de la planète et de la terre au soleil, $PS = R$, $TS = r$: ces distances sont exprimées dans les tables, par des nombres dont l'unité est la valeur moyenne de $r = 1$; l'angle $\odot$ donne en même tems la longitude héliocentrique de la terre, $\delta = 180° + \odot$. En nommant donc γ la commutation TSL, et η l'élongation LTS, on aura dans les triangles TSL et PSL,

$$\text{VI. } \gamma = \lambda - \delta = \lambda - \odot - 180°,$$

$$\text{VII. } D = R \cos \beta,$$

$$\text{VIII. } \operatorname{tang} \eta = \frac{D \sin \gamma}{r - D \cos \gamma},$$

$$\text{IX. } D' = D \frac{\sin \gamma}{\sin \eta} = \sqrt{(D^2 + r^2 - 2 D r \cos \gamma)}.$$

$$\text{X. } \lambda' = \odot - \eta.$$

Dans les triangles PSL et PTL, on a $PL = D \operatorname{tang} \beta = D' \operatorname{tang} \beta'$, d'où l'on tire $D : D' :: \operatorname{tg} \beta' : \operatorname{tg} \beta$; et dans le triangle LST on a $D : D' :: \sin \eta : \sin \gamma$, d'où il suit $\sin \eta : \sin \gamma :: \operatorname{tang} \beta' : \operatorname{tang} \beta$; le *sinus de l'élongation est au sinus de la commutation, comme la tangente de la latitude géocentrique est à la tangente de la latitude héliocentrique.* Cela donne encore les équations suivantes:

$$\text{XI. } \operatorname{tang} \beta' = \frac{\sin \eta \operatorname{tg} \beta}{\sin \gamma} = \frac{D}{D'} \operatorname{tg} \beta,$$

$$\text{XII. } R' = D' \sec \beta'.$$

Pour disposer la formule VIII. plus favorablement à l'usage des logarithmes, on cherchera l'angle subsidiaire Φ au moyen de l'équation $\operatorname{tang} \Phi = \frac{D - r}{D + r} \cot \frac{\gamma}{2}$, après quoi l'on aura $\eta = 90° + \Phi - \frac{\gamma}{2}$, et $SLT = 90° - \Phi - \frac{\gamma}{2}$. Si les tables ne donnent que les logarithmes de D et r, on cherchera deux angles ψ et Φ, à l'aide des équations, $\operatorname{tang} \psi = \frac{D}{r}$, $\operatorname{tang} \Phi = \operatorname{tang} (\psi - 45°) \cot \frac{\gamma}{2}$, et $\eta = 90° + \Phi - \frac{\gamma}{2}$, $SLT = 90° - \Phi - \frac{\gamma}{2}$.

Quand il s'agit de déterminer les élémens d'une planète par observation, ou de déduire le lieu hèliocentrique du géocentrique, les observations et la théorie du soleil donnent les angles λ', β', η, et le rayon vecteur r; ainsi l'on ne connaît que deux parties du triangle LST; il faut donc déterminer la distance de la planète à la terre $PT = R'$, par le moyen de la parallaxe, ou par d'autres méthodes qui seront expliquées ci-après. Les quantités connues, λ', β', η, r, R', donneront alors

$$\text{XIII. } D' = R' \cos \beta',$$

$$\text{XIV. } \operatorname{tang} \gamma = \frac{D' \sin \eta}{r - D' \cos \eta},$$

$$\text{XV. } D = \sqrt{(rr + D'D' - 2rD' \cos \eta)} = D' \frac{\sin \eta}{\sin \gamma},$$

$$\text{XVI. } \operatorname{tang} \beta = \frac{\sin \gamma \operatorname{tg} \beta'}{\sin \eta},$$

$$\text{XVII. } R = D \sec \beta.$$

La formule XIV. sera disposée plus favorablement, en calculant, comme ci-dessus, $\operatorname{tang} \Phi' = \frac{D' - r}{D' + r} \cot \frac{\eta}{2}$, ou $\operatorname{tang} \psi' = \frac{D'}{r}$ et $\operatorname{tang} \Phi' = \operatorname{tang} (\psi' - 45°) \cot \frac{\eta}{2}$, ce qui donnera $\gamma = 90° + \Phi - \frac{\eta}{2}$, et $\angle LT = 90° - \Phi - \frac{\eta}{2}$.

§. 85. Pour que les recherches détaillées sur la nature des orbites planétaires, que nous allons entreprendre, soient solides et instructives, elles doivent suivre le même ordre, dans lequel on a successivement découvert les vérités qui composent le système actuel de l'astronomie théorique. Il n'y a peut-être aucune découverte en astronomie, faite par une méthode directe. On essaya des conjectures, pour expliquer les phénomènes; on détruisit tout ce qui ne supporta pas l'examen le plus rigoureux; et l'on construisit de nouvelles hypothèses, jusqu'à ce qu'on en eût trouvé une, qui était parfaitement d'accord avec les observations, ou qui donnait des différences si inconsidérables, qu'on pouvait, sans hésiter, les attribuer aux erreurs des observations, ou à des causes inconnues qu'on tâcha de découvrir de la même manière. On calcula ce qui devait résulter d'une supposition arbitraire qu'on avait faite, on compara ce résultat avec les observations, et la différence qui se trouva entre le calcul et les observations, servait à vérifier et corriger la supposition: ainsi on trouva la vérité à l'aide d'une fausse supposition, ou de

ce qu'on appelle *regula falsi*. Les écrits de Kepler prouvent, que cette méthode indirecte l'a guidé dans toutes ses grandes découvertes. C'est à lui que nous devons presque toute la théorie de l'astronomie; et la route que se fraya ce grand homme avec tant de succès, doit conduire encore aujourd'hui, quiconque désire partager la jouissance de faire des découvertes, et qui ne se contente pas de remplir la mémoire des théorèmes astronomiques. Les bornes que je me suis prescrites, ne me permettront que rarement, de développer tous les détours qui ont conduit Kepler à dévoiler les secrets de la nature; mais je me ferai un devoir, d'indiquer au moins l'ordre dans lequel une vérité découla de l'autre. Pour apprécier les mérites et les travaux pénibles de Kepler, il ne suffit pas de connaître ses découvertes par la lecture des ouvrages modernes; il faut avoir lu ses propres écrits, principalement celui *de stella Martis*. Il est impossible qu'un auteur d'élémens d'astronomie suive le fondateur de l'astronomie moderne pas à pas; mais il ne doit jamais le perdre de vue. Copernic et Tycho ne changèrent au fond rien ou peu de chose aux hypothèses de Ptolémée, pour expliquer la première inégalité des planètes, et Kepler les prit également pour base de ses recherches; mais en les comparant avec des observations exactes, il les soumit à un examen rigoureux, il essaya différentes manières de les corriger; mais, s'étant enfin convaincu après un grand nombre d'essais, qu'elles n'étaient pas admissibles, il découvrit la nature des orbites planétaires. Il faudra donc commencer ici par exposer la théorie de Ptolémée, et ensuite montrer, comment Kepler procéda pour la miner successivement, pour la détruire, et pour fonder sur ses ruines la sienne.

CHAPITRE IV.

Hypothèse du cercle excentrique, appliquée au Soleil.

§. 86. Comme le soleil est de tous les corps célestes le plus important pour nous, et par conséquent celui dont le mouvement a été examiné le premier, les propriétés individuelles de son orbite ont eu une grande influence sur toute l'astronomie théorique. Le mouvement apparent étant le même, soit que la terre tourne autour du soleil, soit que cet astre se meuve autour de la terre, l'observateur sur la terre verra le mouvement tel qu'il est en effet, et comme s'il était placé au centre du mouvement. Il est donc possible, de déduire immédiatement des observations géocentriques le mouvement du soleil, ainsi qu'on l'a vu dans le premier Tome; mais tout cela ne se rapporte qu'au mouvement *sphérique*, c'est-à-dire aux angles que la terre décrit autour du soleil, ou à sa *vitesse angulaire*, très-différente de sa vitesse réelle qui dépend à la fois de ces angles et de la distance. C'est de cette distance que dépend la nature de la courbe décrite par la terre; nous avons dit relativement à cette distance, tout ce qu'on peut conclure de la grandeur apparente du soleil (I. §. 135. suiv.); c'est que la distance varie sensiblement, et toujours en raison inverse de la vitesse du soleil. Mais les observations du diamètre du soleil ne suffisent pas, pour déterminer les distances avec quelque précision: cela ne peut se faire qu'en comparant le soleil avec les planètes. Il faut donc commencer ici par déterminer l'orbe terrestre, autant que cela peut se faire sans le secours d'autres planètes, ce qui donnera lieu à l'exposition de l'hypothèse du cercle excentrique, adoptée par Ptolémée. Cette hypothèse qui n'était destinée qu'à expliquer ou plutôt à calculer les inégalités du soleil, détermine en même tems les différentes distances du soleil; et cet-

te circonstance fournit le moyen de vérifier l'hypothèse par le moyen des distances, conclues des observations indépendamment de l'hypothèse. Kepler employa pour cet effet particulièrement la comparaison du soleil avec Mars qui approche beaucoup de la terre dans l'opposition; et par ce moyen il parvint à la fois à découvrir les véritables orbites du soleil et de Mars, dont les distances à la terre et au soleil devaient nécessairement être déterminées par les mêmes observations.

Après le mouvement rectiligne, le plus simple est sans doute le mouvement *circulaire* et *uniforme*, qui est aussi le seul qui, d'après la rigueur des anciens, puisse être construit géométriquement. Il était donc bien naturel, de supposer ce mouvement dans les corps célestes, auxquels on attribua une perfection singulière (1), et d'adopter cette hypothèse, jusqu'à ce que le contraire serait démontré. Mais pour expliquer les changemens de la distance et de la vitesse, il fallait supposer, ou que le mouvement, quoique effectivement circulaire et uniforme, ne nous paraît pas tel, parceque la terre n'est pas placée dans le centre de ce cercle, ou ce qui revient au même, parceque le mouvement réel est composé de plusieurs mouvemens simples; ou que le mouvement est effectivement irrégulier; ou enfin, qu'il ne se fait pas dans le cercle, mais dans une autre courbe. Kepler, après avoir examiné successivement chacune de ces hypothèses, aperçut enfin, que toutes les trois avaient lieu; c'est-à-dire que le soleil n'occupe pas le centre des orbites planétaires, et que ces orbites ne sont ni circulaires ni parcourues d'une manière uniforme. Mais aussi longtems que cela n'était pas démontré, il était naturel de s'en tenir à la première hypothèse.

§. 87. Supposons (*Fig.* 23.) que le soleil décrive uniformément le cercle ASGB, et que la terre ne soit pas dans le centre C, mais dans un autre point T. Cela posé, et ayant joint les points C, T, par la ligne droite AE, il suit de la nature du cercle, que A et B sont les points de la circonférence, le plus et le moins éloignés de la terre T: ASB est le *cercle excentrique*, CT l'*excentricité*, A l'*apogée* ou l'*aphélie*, B le *périgée* ou *périhélie*, et

(1) *Almag. Lib. IX. Cap. 2.* „ *Aequales* enim *circulares*que motus divinorum corporum naturae conveniunt, unde inordinatio et dissimilitudo longe abest."

AB la *ligne des apsides*. Si, d'un lieu quelconque du soleil S, on a mené les droites SC, ST, ATS $= v$ est la distance apparente du soleil à l'apogée, ou l'*anomalie vraie*; ACS $= \mu$ est l'anomalie vue du centre, laquelle, suivant l'hypothèse de l'uniformité du mouvement, est proportionnelle au tems, et par cette raison a été appelée *anomalie moyenne*: la différence entre ces deux anomalies, ou l'angle CST $= \mu - v$, est l'*équation du centre*. Ayant mené les parallèles CΥ, TΥ, vers le point vernal, ΥCS et ΥTS seront les *longitudes moyenne* et *vraie* du soleil, et leur différence est égale à l'équation du centre $\mu - v$. En nommant AC $= a$, CT $= c$, et la distance variable du soleil à la terre, ou le *rayon vecteur* TS $= r$, on aura dans le triangle CST,

$$\sin(\mu - v) = \frac{c}{a} \sin v,$$

c et a étant des quantités constantes. L'équation du centre $\mu - v$ est donc nulle, et les deux anomalies sont égales, dans les apsides A et B, où $v = 0$ ou $v = 180°$; elle est un *maximum*, $\sin(\mu - v) = \pm\frac{c}{a}$, si $v = 90°$ et $v = 270°$; elle est positive, l'anomalie vraie étant moins grande que la moyenne, dans le demi-cercle ASB depuis l'apogée jusqu'au perigée; elle est négative, et l'anomalie vraie est plus grande que la moyenne, dans le second demi-cercle du périgée à l'apogée; l'équation a les mêmes valeurs à égales distances à l'apogée et au périgée, pour v et $180° - v$, par ex. en S et en R, ATS étant $=$ BTR. On a dans le même triangle

$$\text{tang } v = \frac{a \sin \mu}{c + a \cos \mu},$$

dont la différentielle est $\frac{\partial v}{\cos^2 v} = \frac{a\,\partial\mu\,(a + c \cdot \cos\mu)}{(c + a\cos\mu)^2}$, ou à cause de $\cos^2 v = \frac{(c + a\cos\mu)^2}{a^2 + 2ac \cdot \cos\mu + c^2}$,

$$\partial v = \frac{a\,\partial\mu\,(a + c\cos\mu)}{a^2 + 2ac\cos\mu + c^2},$$

∂v et $\partial\mu$ étant les *vitesses angulaires* du soleil, vraie et moyenne ou constante. La vitesse vraie est donc égale à la moyenne, lorsque $\cos\mu = -\frac{c}{a}$: alors on a $c + a\cos\mu = 0$, donc $\cos v = 0$, et $v =$ ATG $= 90°$. La vitesse vraie est plus grande que la moyenne, si $\cos\mu$ a une valeur négative plus grande que $\frac{c}{a}$; elle est plus petite que la moyenne, si $\cos\mu$ est positif, ou que sa valeur négative est moins grande que $\frac{c}{a}$: dans le premier cas v est un angle

*

obtus, dans le second v est aigu. Conséquemment, la vitesse vraie est plus petite que la moyenne de A en G, et plus grande de G en B: elle est donc plus petite que la moyenne dans une partie de l'orbite solaire, plus grande que la moitié, et le soleil emploie plus de tems, à parvenir du mouvement le plus lent en A au mouvement moyen en G, que de celui-ci au mouvement le plus vite en B.

En nommant les vitesses vraie et moyenne, u et m, et différentiant l'équation précédente entre ∂v et $\partial \mu$, on trouvera, parceque m ou $\partial \mu$ est constant,

$$\partial u = \frac{a\, c\, m\, \partial \mu \sin \mu\, (a^2 - c^2)}{(a^2 + 2\, a\, c \cos \mu + c^2)^2},$$

d'où l'on voit que les variations de la vitesse dans chaque point de l'orbite sont à peu près en raison de $\sin \mu$, et toujours de même espèce. La vitesse va donc en croissant depuis l'apogée A jusqu'au périgée B, et en décroissant dans l'autre demi-cercle: elle ne change qu'insensiblement dans les apsides, et par conséquent est un *minimum* dans l'apogée, un *maximum* dans le périgée; elle change le plus rapidement à 90 degrés des apsides.

La distance du soleil à la terre, ou le rayon vecteur est

$$r = \sqrt{(a^2 + c^2 + 2\, a\, c \cos \mu)} = \frac{a \sin \mu}{\sin v},$$

ce qui est en A un *maximum*, $TA = a + c$, en B un *minimum*, $TB = a - c$. La distance moyenne est donc a, ou le demi-diamètre de l'orbite: cette valeur a lieu en H, où $\sin \mu = \sin v$, $\mu = 180° - v$, et $\cos \mu = -\frac{c}{2a}$: le point H se trouve donc, en élevant sur CT comme base un triangle isoscèle.

§. 88. Toutes ces particularités du mouvement excentrique sont tellement d'accord avec les observations, que le mouvement du soleil en général s'explique parfaitement par le moyen du cercle excentrique: c'est pourquoi Ptolémée l'employa, non-seulement pour cet effet, mais aussi pour expliquer la *première* inégalité des planètes (1). Plusieurs des anciens préféraient cependant l'*épicycle*, que Ptolémée réserva pour expliquer la *seconde* inégalité des planètes; car il est aisé de voir, que ces deux hypothèses sont équivalentes. En effet, le soleil parcourant l'épicycle AIK *contre* l'ordre des signes de A en I, pendant que le centre de l'épicycle D avance sur la périphérie

(1) *Almag. Lib. III. Cap.* 3. *L. IX. C.* 5.

d'un cercle DFE dont le centre T est occupé par la terre, *suivant* l'ordre des signes de D en F, ce cercle a été appelé le *concentrique* (ὁμοκέντρος), et à l'égard de l'épicycle, le cercle *portant* ou *déférent* (φέρων). La loi du mouvement du soleil, conformément à cette hypothèse, est que les deux angles, décrits en même tems par le soleil autour de D, et par D autour de T, sont toujours égaux et en raison du tems. Le soleil est donc le plus et le moins éloigné de la terre T, en A et en K ou B, lorsqu'il se trouve dans la droite qui joint les deux centres T, D. Le centre de l'épicycle ayant parcouru de D en F l'anomalie moyenne $DTF = \mu$, l'apogée sera en L, et le soleil aura décrit l'angle $LFS = \mu$: l'anomalie vraie est donc $DTS = v$, la distance $TS = r$. Or LFS étant $= FTD$, les lignes FS, TA, sont parallèles entre elles: on peut donc expliquer le mouvement entier, en imaginant que l'épicycle est un disque solide, et que le soleil est fixe dans un point S ou A de ce disque qui fait une révolution autour de T, sans tourner autour de son centre D ou F; ensorte que le soleil, demeurant toujours dans le rayon de l'épicycle FS qui est parallèle à TA, n'a lui-même aucun mouvement, mais prend part à celui de l'épicycle. L'équation du centre est donc, suivant cette hypothèse, $FTS = \mu - v$, et en nommant le rayon du cercle concentrique $TD = TF = b$, celui de l'épicycle $DA = ES = e$, on aura $\sin(\mu - v) = \frac{e}{b}\sin FST = \frac{e}{b}\sin DTS = \frac{e}{b}\sin v$; et le rayon vecteur sera $TS = r = \frac{b \sin LFS}{\sin TSF} = \frac{b \sin \mu}{\sin v}$. En comparant ces formules avec les précédentes (§. 87.), on verra qu'elles sont équivalentes, si l'on fait $b = a$, $e = c$, ou $\frac{e}{b} = \frac{c}{a}$. Le rayon de l'épicycle est donc ici, ce que dans les premières formules était l'excentricité; et l'anomalie moyenne étant donnée, l'équation du centre, l'anomalie vraie, et le rayon vecteur, bref, le lieu vrai du soleil est trouvé, suivant les deux hypothèses, par les mêmes formules: elles donnent donc absolument les mêmes résultats (1).

§. 89. Il suit de ce qui précède que, quelque hypothèse qu'on adopte, le mouvement du soleil est entièrement déterminé, si l'on connaît l'excentricité $\frac{c}{a}$ du cercle excentrique, et la position des apsides, ainsi que l'é-

(1) *Almag. Lib. III. Cap. 3.*

poque où le soleil a passé par l'apogée. La méthode des anciens, que Ptolémée nous a transmise (1), est fondée sur la différence entre les tems que le soleil emploie à parcourir chaque *quadrans* de son orbite, ou sur la vitesse du soleil, qui augmente, à mesure qu'il approche du périgée (§. 87.). Soit (*Fig.* 24.) T la terre, T♈, T♋, T♎, T♑, étant dirigées vers les points de printems, d'été, d'automne, et d'hiver; le soleil, en parcourant son orbite ADBE, sera au commencement de ces quatre saisons dans les points H, D, G, E. Les observations des équinoxes et des solstices donneront donc les durées des quatre saisons: appelons donc τ, ϑ, Θ, les tems que le soleil emploie à décrire les arcs HAD, DG, et GEH. Suivant les observations d'Hipparque, il était $\tau = 94\frac{1}{2}$ jours, $\vartheta = 92\frac{1}{2}$ jours, et le reste de l'année $\Theta = 178\frac{1}{4}$ jours: donc, à cause de l'uniformité du mouvement, les arc HAD, DG, GEH, étaient entre eux comme les nombres 94,5; 92,5; 178,25. Or HDG $= 187$ étant plus grand que GEH, et HAD plus grand que DG, il en résulta, que le centre C de l'orbite était nécessairement dans le *quadrans* du printems ♈T♋. Le mouvement moyen du soleil est pour 94,5 jours $=$ 93°8′37″ $=$ HD $= \alpha$, pour 92,5 jours $=$ 91°10′21″ $=$ DG $= \beta$, partant HDG $=$ 184°18′58″, et GEH $=$ 175°41′2″ $= \gamma$. Ayant donc mené ICd, HL, parallèles à ♋T♑, et FCh, DK, parallèles à ♈T♎, on aura

$$Hd = \frac{HDG}{2} = 92°9'29'', \quad Dd = \alpha - Hd = 59'8'', \quad Hh = Hd - 90° = 2°9'29''.$$

Faisant donc, comme ci-dessus, CA $=$ CB $= a$, CT $= c$, on aura

$$DK = CF = a \sin Dd = a \,.\, 0{,}0172; \text{ et}$$

$$HL = TF = a \sin Hh = a \,.\, 0{,}037656; \text{ donc}$$

$$c = \sqrt{(CF^2 + TF^2)} = a \,.\, 0{,}0414, \text{ ou}$$

$$\text{l'excentricité } \frac{c}{a} = 0{,}0414.$$

C'est aussi le sinus de la plus grande équation du centre (§. 87.), laquelle est par conséquent $= 2°22'21'',5$. On a aussi $\text{tang CTF} = \frac{CF}{TF} = \frac{172}{377}$, d'où l'on tire CTF $= 24°32'58'',6$; et la

$$\text{longitude de l'apogée } A = 65°27'1'',4.$$

Ptolémée trouve par le même calcul,

$$\alpha = 93°9', \quad \beta = 91°11', \quad Dd = 59', \quad Hh = 2°10', \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{24} = 0{,}041666,$$

(1) *Almag. Lib. III. Cap.* 4.

CTF = 24° 30′, la longitude de l'apogée = 65° 30′, et la plus grande équation du centre = 2° 23′.

Si l'on applique cette méthode au tems actuel, où τ = 92 jours 22 heures, t = 93 jours 13 $\frac{3}{4}$ h. partant α = 91° 35′, β = 92° 14′, HDG = 183° 49′, GEH = 176° 11′, Hd = 91° 54′,5, Dd = — 19′,5, Hh = 1° 54′,5; le centre C se trouvera au dessous de F dans le *quadrans* ♋T♎, et l'on aura $\text{tang FTC} \frac{\sin 19' 30''}{\sin 1° 54' 30''}$, ce qui donne FTC = 9° 40′, et la longitude de l'apogée = 99° 40′, ce qui est précisément sa longitude pour l'an 1811. L'excentricité se trouvera $\frac{c}{a}$ = 0,03378 et la plus grande équation du centre = 1° 56′ 9″, trop grande de 25″. Il s'en suivrait que, depuis le tems d'Hipparque, la longitude de l'apogée eût augmenté de 34° 13′, et l'excentricité diminué de 0,0076; ce qui donnerait les variations séculaires de + 1° 48″ et de — 0,0004.

Cette méthode suppose, non seulement que les observations des équinoxes et des solstices sont très-exactes, mais aussi que l'orbite solaire est un cercle parfait. Si l'on prend pour base des observations, faites hors des équinoxes, on trouve des différences considérables, surtout à l'égard de la position des apsides; ce qui fait naturellement soupçonner, que l'hypothèse du mouvement circulaire n'est pas juste. Pour décider cette question, il faut des méthodes qui ne supposent pas l'observation des équinoxes ou des solstices, et qui, au lieu d'être bornées au cercle, puissent être appliquées à une courbe quelconque.

§. 90. La meilleure méthode pour déterminer la ligne des apsides, est due à Kepler qui en fit la première application à Mars (1). Elle ne suppose rien, si non que l'apogée et le périgée soient avec la terre sur une ligne droite, ou éloignés l'un de l'autre de 180°, et que la ligne des apsides partage l'orbite solaire en deux portions égales et semblables que le soleil parcourt en tems égaux. Ces conditions sont légitimes d'après les observations, et les seules qu'on puisse supposer comme une hypothèse qui sera soumise à un examen rigoureux, parce qu'autrement l'orbite solaire serait une courbe si irrégulière, qu'elle n'admettrait aucune recherche astronomique.

(1) *De stella Martis*, Cap. XLII.

L'orbite solaire étant la courbe ADBE (*Fig.* 25.) et la terre en T, toutes les droites menées par T, comme ♈♎, *ab*, AB, DE, partageraient l'orbite en deux portions égales, si elle était un cercle décrit du centre T. Mais si le centre est dans un autre point C, il n'y a qu'une seule droite par T, qui puisse partager l'orbite en deux moitiés, savoir celle AB qui passe par C: toute autre ligne divisera l'orbite en deux parties inégales, dont la plus grande renfermera le centre C et l'apogée A. Il est vrai qu'il y a des cas, où, la distance du soleil à la terre changeant continuellement, néanmoins chaque droite par T coupera l'orbite en deux parties égales et semblables; ce qui a lieu dans toutes les courbes douées de diamètres et d'un centre, par ex. l'orbite solaire étant une ellipse autour du centre T. Mais alors toutes les droites par T seraient des diamètres de l'ellipse, donc l'apogée et le périgée, la plus grande et la plus petite vitesses, etc. ne seraient pas éloignés l'un de l'autre de 180°, mais de 90°: ce qui est contre l'expérience. Si donc l'orbite solaire est une courbe douée de diamètres, il est certain que la terre n'est pas placée au centre, mais dans un diamètre principal: ce qui suffit pour autoriser les suppositions précédentes.

La portion ♈A♎ est plus grande que ♎B♈; ou plutôt, le soleil mettra plus de tems, à decrire autour de T les 180 degrés qui répondent à l'arc ♈A♎, que ceux qui répondent à l'arc ♎B♈, non-seulement parceque le premier arc est plus grand, mais encore parceque, d'après les observations, il comprend le mouvement retardé aux environs de l'apogée A, tandis que le dernier arc contient le mouvement accéléré près du périgée B. Il est aisé de voir, que cette différence croîtra, à mesure que les droites ♈♎, AB, s'éloignent l'une de l'autre, et qu'elle sera la plus grande possible, lorsque ces deux lignes se coupent perpendiculairement, de sorte que ♈♎ coïncide avec DE. De l'autre côté, si ♈♎ approche de la ligne des apsides AB, usqu'à parvenir à la situation *ab*, la portion ♈A♎ acquiert les degrés d'accélération compris dans l'angle ♎T*b*, en perdant les degrés de retardement de l'angle ♈T*a*, qui entrent dans la moitié ♎B♈: les tems, employés à décrire ces deux moitiés, approcheront donc de l'égalité, mais ils ne seront pas parfaitement égaux, à moins que ♈♎ ne coïncide avec la ligne des apsides

AB; la valeur plus ou moins grande de ces deux tems servira donc à juger de la grandeur des angles ♈TA, aTA, aTA, etc.

Si parmi les observations du soleil, faites journellement pendant une année entière, on compare deux à deux toutes celles qui sont diamétralement opposées, comme ♈, ♎, et a, b; l'intervalle de tems sera toujours plus grand qu'une demi-année, si la première observation a été faite avant l'apogée, et la seconde après; et l'intervalle ne pourra être une demi-année exacte, que dans le cas où les deux observations ont été faites dans les apsides mêmes, ce qui donnera immédiatement leur position. En faisant abstraction de ce cas, trop rare pour qu'on puisse y compter, l'intervalle entre les deux observations différera d'une demi-année, d'autant moins qu'elles sont plus près des apsides: on trouvera donc deux observations qui, étant éloignées l'une de l'autre de 180°, sont plus près des apsides que toutes les autres, et par conséquent éloignées de A, B, de moins d'un degré, parceque le soleil est supposé avoir été observé tous les jours; et l'on verra aisément que, la position des apsides étant à peu près connue, on n'a qu'à observer le soleil quelques jours avant et après le passage par les apsides. Soient donc a, b, les lieux du soleil, les plus proches des apsides, c'est-à-dire que l'intervalle entre les observations en a et b diffère d'une demi-année moins que celui entre deux autres observations quelconques, diamétralement opposées. Les observations journalières donnent le mouvement diurne du soleil en a et en b, qu'il est permis de supposer uniforme pendant une journée, d'autant plus que les vitesses ne changent pas sensiblement aux environs de A et B (§. 87.). Or les tems, employés à décrire des angles égaux autour de T, étant en raison inverse des vitesses, et les angles aTA, bTB, étant égaux, on aura, en nommant t, τ, les tems que le soleil emploie à parcourir les arcs aA, bB, et a, b, les mouvemens diurnes en a et b, cette proportion:

$$t : \tau :: b : a, \text{ ou } \tau = \frac{a}{b}\, t.$$

Soit la demi-durée de l'année = A, le tems écoulé entre les observations en a et b = T: cela posé, le tems employé à décrire l'arc ADB est = A, et T = A + t − τ, ou $t - \tau = \frac{b-a}{b}\, t$ = T − A, donc

$$t = \frac{b}{b-a}\,(\mathrm{T} - \mathrm{A}).$$

§. 91. Comme les observations du soleil se font ordinairement à midi, il n'arrivera guères que la différence des longitudes en a et b soit précisément 180°. Soit donc l'une des deux observations le point α, l'autre b, $\alpha T b = 180° + \omega$; T le tems écoulé entre les observations, T′ le tems que le soleil emploiera à parcourir l'arc aAb, et a, b, les mouvemens diurnes en α et b. Cela posé le soleil parcourra l'arc αa en $\frac{24\omega}{a}$ heures, d'où l'on tirera $T' = T - \frac{24\omega}{a}$ heures; en mettant donc T′ à la place de T dans la formule précédente, on aura

$$t = \frac{b}{b-a}\left(T - A - \frac{24\omega}{a}\text{ heures}\right),$$

ce qui est le tems dans lequel est parcouru l'arc aA. En nommant donc t' le tems que le soleil emploie à parvenir de α à l'apogée A, on aura $t' = t + \frac{24\omega}{a}$ heures, donc

$$t' = \frac{b(T - A) - 24\omega.\text{ heures}}{b-a}.$$

En ajoutant le tems t' à l'époque de l'observation en α, on aura l'instant du passage du soleil par l'apogée; or le mouvement par αA étant sensiblement uniforme, il viendra

$$\alpha T A = \frac{t'}{24\text{h.}}\, a,$$

et cet angle, ajouté à la longitude du soleil en α, donnera la longitude de l'apogée A. Il faut cependant observer ce qui suit.

Il est visible, que les 24 heures qui ont servi à déterminer les vitesses a, b, doivent être de longueur égale: or les observations étant faites à midi *vrai*, il faut convertir le tems vrai en tems moyen à l'aide de l'équation du tems.

§. 92. Nous avons supposé que les apsides A, B, sont sur une même ligne droite, et que l'intervalle entre A et B est une demi-année juste. Mais si, pendant le tems qui s'écoule entre les observations a et b, le périgée a avancé de B en β, l'intervalle entre A et β sera plus grand qu'une demi-année tropique, et précisément la moitié de ce qui a été appelé année *anomalistique*, (I. §. 124.), ou de la révolution du soleil relativement aux apsides. Si la durée de l'année anomalistique est connue, on la mettra à la place de $2A$; et l'on trouvera cette durée par le mouvement des apsides,

qui sera connu, si l'on appliquera la méthode que nous venons d'exposer, à différentes époques. Quoique la méthode des anciens (§. 89.) ne soit pas très-exacte, elle l'est assés, pour déterminer le mouvement des apsides pour une demi-année, par un intervalle de plusieurs siècles. La comparaison des observations d'Hipparque avec les modernes nous a donné un mouvement direct des apsides de 65″ par an (§. 89.). Suivant les observations de Walther la longitude de l'apogée était en $1496 = 3^s\,3°\,57'\,57''$, et suivant Lacaille en $1750 = 3^s\,8°\,38'$, d'où il résulte un mouvement annuel de 66″. En comparant entre elles les observations modernes, M. Delambre trouve le mouvement annuel $= 61'',9$ ou $11'',8$ relativement aux étoiles fixes; d'où il est facile de conclure la durée de l'année anomalistique. Le soleil emploie 25 min. 10 sec. pour décrire un arc de 62″ (I. §. 126.): en conséquence, après avoir achevé une révolution tropique, il lui faudra encore 25′ 10″, pour compléter sa révolution relativement aux apsides. En ajoutant donc ces 25 m. 10 s. à la durée de l'année tropique (I. §. 123.), on aura la durée de

l'*année anomalistique* = 365 jours 6 h. 14 m. 1,6 sec.

§. 93. Soit donc A le lieu de l'apogée à l'époque de la première observation, soient a, b, les deux lieux du soleil observés, $\odot$, $\odot'$, ses longitudes, bTa, ATB, des lignes droites, et supposons que, dans l'intervalle entre les deux observations, la ligne des équinoxes soit reculée de $T\Upsilon$ en $T\Upsilon'$, et la ligne des apsides avancée de TB en $T\beta$. En faisant donc $aTA = bTB = \alpha$, $aTa = \omega$, $\Upsilon T\Upsilon' = \phi$, $BT\beta = \psi$, ϕ étant $= 25''$, $\psi = 6''$, vu que l'intervalle est une demi-année; on connaît $\odot = \Upsilon Ta$, $\odot' = \Upsilon Ta + \omega + aTb + \phi$, d'où l'on tire

$$(1) \ldots . \omega = \odot' - \odot - \phi - 180°.$$

Puis, les observations donnent les mouvemens diurnes, en $a = a$, en $b = b$: en nommant donc t, τ, les tems que le soleil emploie à parcourir les arcs $\alpha A = \omega + \alpha$, et $b\beta = \alpha + \psi$, on aura $t = \frac{\alpha+\omega}{a}\,24$ h. et $\tau = \frac{\alpha+\psi}{b}\,24$ h. La première équation donne $\alpha = \frac{t}{24\,\text{h.}}\,a - \omega$, ce qui étant substitué dans la seconde, donne

$$\tau = \frac{a}{b}\,t - \frac{\omega-\psi}{b}\,24\,\text{h.} \quad \text{donc} \quad (2) \ldots . t - \tau = \frac{b-a}{b}\,t + \frac{\omega-\psi}{b}\,24\,\text{h.}$$

En nommant $A = 182$ j. 15 h. 7 m. la demi-année anomalistique, et T le tems écoulé entre les deux observations en α et b, les arcs $A\beta$, Ab, $b\beta$, seront décrits dans les tems A, $T-t$, τ, d'où il suit $A = T - t + \tau$, et $t - \tau = T - A$; ce qui étant substitué dans l'équation (2) donnera $\frac{b-a}{b}\, t = T - A - \frac{\omega - \psi}{b}\, 24\text{h.}$ partant $t = \frac{b\,(T-A) - (\omega-\psi)\,24\text{h.}}{b-a}$. En ajoutant le tems t à l'époque de la première observation α, on aura le passage du soleil par l'apogée; et l'arc que le soleil décrit dans le tems t avec la vitesse a, étant ajouté avec $\odot$, donnera la longitude de l'apogée $= \odot + \frac{ta}{24\text{h.}} = \varpi$, donc

$$(3) \ldots\ldots \varpi = \odot + \frac{ab}{b-a} \cdot \frac{T-A}{24\text{h.}} - \frac{a}{b-a}\,(\omega - \psi).$$

Il est aisé de voir que dans tout ce calcul, on peut faire abstraction de la précession des équinoxes Φ, en mettant à la place de ψ le mouvement des apsides relativement aux points équinoxiaux, ou $31''$ au lieu de $6''$: car alors l'équation (1) donnera $\omega = \odot' - \odot - 180°$, trop grand de Φ; mais $\psi = 31''$ sera trop grand de la même quantité Φ, par conséquent, $\omega - \psi$, t, et ϖ, n'éprouveront aucun changement.

§. 94. On trouvera par cette méthode, pour l'instant du passage du soleil par l'apogée, le tems et la longitude vraie du soleil; or la longitude vraie étant égale à la moyenne dans les apsides (§. 87.), on aura la longitude moyenne avec le tems qui lui répond, c'est-à-dire l'*époque* du soleil, laquelle, le mouvement moyen étant connu, donnera, par une simple addition ou soustraction, la longitude moyenne du soleil pour tous les tems futurs et passés. Ces longitudes, combinées avec le mouvement des apsides, donneront pour un tems quelconque, l'anomalie moyenne du soleil $= \mu$; or les observations donnant les longitudes et les anomalies vraies v, on aura l'*excentricité* $\frac{c}{a} = \frac{\sin(\mu - v)}{\sin v}$ (§. 87.), et par là tous les élémens de l'orbite solaire sont connus. Mais le mouvement moyen, ou la durée de l'année tropique, exige une petite correction, à cause du mouvement des apsides (I. §. 123.) On y a vu, que la durée de l'année tropique est trouvée par le moyen de deux longitudes vraies du soleil, égales entre elles, d'où, en supposant que les longitudes moyennes étaient aussi égales, l'on a conclu le mouvement moyen. On suppose donc, qu'entre les deux observations, le soleil a fait une révolution

entière de 360°, non-seulement par le mouvement vrai, mais aussi par le mouvement moyen, ou ce qui revient au même, que la différence entre les longitudes vraie et moyenne, ou l'équation du centre a été la même dans les deux observations. Mais cela n'a lieu que dans le cas, où l'anomalie est la même, ou que la ligne des apsides n'a pas changé de position relativement aux équinoxes. En vertu du mouvement annuel des apsides de 62″, l'anomalie à changé, dans l'intervalle entre les deux observations, de la même quantité multipliée par le nombre des années: l'équation du centre a augmenté ou diminué à proportion; et les deux longitudes moyennes ne peuvent pas être différentes l'une de l'autre de 360°, comme il est supposé, puisque les longitudes vraies le sont. Il faut donc calculer le changement de l'équation du centre ou des longitudes moyennes, par le moyen du mouvement des apsides, ou du changement de l'anomalie vraie. Ces deux longitudes moyennes, avec l'intervalle de tems, donneront exactement la durée moyenne de l'année tropique. Il en est de même des autres inégalités du soleil, qui dépendent de l'action de la lune et des planètes: il faut, ou que dans les deux observations, le soleil ait eu la même situation relativement aux corps perturbateurs, ce qui n'est guères possible, ou que l'on connaisse les corrections qui en résultent, pour convertir les longitudes vraies en moyennes. C'est à l'aide de toutes ces petites corrections, que M. Delambre a trouvé la durée de l'année tropique = 365 j. 5 h. 48. m. 51,6 sec. (I. §. 123.).

§. 95. Si à l'aide de l'équation $\frac{c}{a} = \frac{\sin(u-v)}{\sin v}$, on calcule l'excentricité pour différens points de l'orbite solaire, ou pour différentes anomalies v, on trouvera pour $\frac{c}{a}$ des valeurs différentes, d'où il suit, que l'hypothèse du cercle excentrique n'est pas exacte. Ces différences que les observations indiquaient d'une manière qui n'admettait aucun doute, principalement quand on compara le soleil avec les planètes, étaient si considérables, qu'elles firent penser déjà à Tycho, que l'orbite solaire n'était pas constamment de même grandeur (1). Kepler, jugeant cette variabilité de l'orbite peu vraisemblable, en chercha une autre explication, et la trouva dans la *double excentricité*

(1) Il écrivit à Kepler: „Orbis annuus non videtur ejusdem semper magnitudinis, quoad ipsum ec„centricum collatione facta." *De stella Martis, Cap. XXII. pag.* 124.

(*bisectio* eccentricitatis). Ptolémée avait déjà trouvé que, pour expliquer la première inégalité des planètes, il était nécessaire, de placer le point auquel le mouvement parait uniforme, non pas au centre C de l'excentrique (*Fig.* 25.), mais du côté opposé à la terre en F. Kepler, croyant en avoir découvert la cause physique, se fit lui-même l'objection, que cette cause devait agir également sur toutes les planètes, et par conséquent aussi sur la terre, pour laquelle Ptolémée s'était contenté de l'excentricité *simple*. Ayant trouvé que toutes les observations confirmaient sa supposition, il fut enfin convaincu, que le mouvement du soleil et de toutes les planètes était uniforme, non pas autour du centre, mais autour d'un point F, situé sur la droite qui joint C et T, et distant du centre de $CF = CT$; que du moins cette hypothèse satisfaisait aux observations beaucoup mieux que l'excentricité simple. On en trouvera les preuves ci-après; mais il est à propos de montrer ici, comment le mouvement du soleil est calculé suivant cette nouvelle hypothèse.

§. 96. La première question qu'il fallait décider, était, si le point F d'où le mouvement paraît uniforme, et qu'on a appelé point de l'*équant* ou d'*égalité* (*punctum aequantis*), était exactement à la même distance au centre C que la terre T, ensorte que l'excentricité entière TF fût partagée par C en deux portions égales, ainsi que Ptolémée l'avait supposé pour les planètes supérieures: Kepler décida cette question, à l'aide des observations, de la manière suivante. Soit (*Fig.* 25.) $CA = CB = a$, $CT = c$, $CF = e = nc$, le soleil étant en S: les anomalies moyenne et vraie seront $AFS = \mu$, $ATS = v$, l'équation du centre sera $FST = \mu - v$, et $TF = (1+n)c$. En donnant successivement à n différentes valeurs arbitraires, on calculera, à l'aide de ces valeurs et des anomalies connues, μ, v, dans le triangle FTS le rayon vecteur

$$TS = r = \frac{c(1+n)\sin\mu}{\sin(\mu - v)} = \nu c,$$

$\nu = \frac{(1+n)\sin\mu}{\sin(\mu - v)}$ étant fonction de n; et dans le triangle CTS le côté

(1) . . . . $CS = a = \sqrt{(c^2 + r^2 - 2cr\cos v)} = c\sqrt{(1+\nu^2 - 2\nu\cos v)}$.

Ayant fait ce calcul pour plusieurs points de l'orbite, ou pour différentes valeurs de μ, v, on verra, si $\frac{c}{a}$ ou $1+\nu^2-2\nu\cos v$ est une quantité con-

stante: si ce n'est pas le cas, on changera la valeur de n, jusqu'à ce que $\frac{c}{a}$ devienne constante, quelles que soient les valeurs de μ et v. Kepler trouva, que cette condition est satisfaite, en faisant $n = 1$ ou $e = c$; et l'on verra plus bas, que cette hypothèse qui à la vérité n'est pas rigoureusement exacte, s'accorde cependant assés bien, non-seulement avec les observations, mais aussi avec la théorie de l'ellipse.

En faisant donc $CT = CF = c$, $TF = 2c$, $\frac{c}{a} = \gamma$, on aura $\sin CST = \gamma \sin v$,

$$(2) \ldots . TS = r = \frac{a \sin (v + CST)}{\sin v} = a \sqrt{(1 - \gamma^2 \sin^2 v)} + c \cos v,$$

partant dans le triangle FST,

$$(3) \ldots . \text{tang } (\mu - v) = \frac{2\gamma \sin v}{\sqrt{(1 - \gamma^2 \sin^2 v)} - \gamma \cos v}.$$

La plus grande valeur de r est $TA = a + c$, la plus petite $TB = a - c$, donc la moyenne $= a$. En faisant donc dans l'équation (2) $TS = a$, on trouvera $(a - c \cos v)^2 = a^2 - c^2 \sin^2 v$, d'où il viendra $\cos v = \frac{c}{2a}$. Divisant donc CT en deux parties égales par la perpendiculaire cs, on aura $Ts = Cs = a$, $\cos cTs = \frac{c}{2a}$; en conséquence, s sera le point de la distance moyenne. En faisant pour abréger, $\sqrt{(1 - \gamma^2 \sin^2 v)} = u$ et $u - \gamma \cos v = V$, on aura, par l'équation (3), $\text{tang } (\mu - v) = \frac{2\gamma \sin v}{V}$, dont la différentielle est

$$\frac{\partial \mu - \partial v}{\cos^2 (\mu - v)} = \frac{2\gamma \partial v}{V^2} \left(u \cos v - \gamma + \frac{\gamma^2 \sin^2 v \cos v}{u} \right) = \frac{2\gamma \partial v}{V^2} \left(\frac{\cos v}{u} - \gamma \right).$$

Or $\cos^2 (\mu - v)$ étant $= \frac{V^2}{V^2 + 4\gamma^2 \sin^2 v}$, on aura

$$(4) \ldots . \partial \mu - \partial v = \frac{2\gamma \partial v (\cos v - \gamma u)}{u (1 - 2\gamma u \cos v + \gamma^2 (3 - 2\cos^2 v))}.$$

En faisant donc $\partial \mu = \partial v$, on aura $\cos v = \gamma u$, ou $\cos^2 v = \gamma^2 - \gamma^4 \sin^2 v$, d'où l'on tire $\cos v = \frac{\gamma}{\sqrt{(1 + \gamma^2)}}$, ce qui donne le point où le mouvement vrai est égal au moyen, et où l'équation du centre est un *maximum*. Ayant élevé sur CT la perpendiculaire $C\sigma$, on aura

$$\sin C\sigma T = \cos CT\sigma = \cos v = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + c^2)}} = \frac{\gamma}{\sqrt{(1 + \gamma^2)}},$$

par conséquent σ est le point cherché. Il en résulte, que le mouvement moyen est plus grand que le mouvement vrai de A à σ, et moins grand de σ à B; et il en est de même dans l'autre demi-cercle BEA. Tant que $\sin v$ a une valeur positive, l'équation du centre (3) est positive: la longitude moyenne est donc plus grande que la longitude vraie dans le demi-

cercle BEA. Pour calculer l'anomalie vraie, ou l'équation du centre, par le moyen de l'anomalie moyenne, on a dans le triangle CSF, $\sin CSF = \gamma \sin \mu$, et dans le triangle CST, $FCS = \mu - CSF$, $\text{tang } CST = \frac{\gamma \sin FCS}{1 + \gamma \cos FCS}$, et $\mu - v = CSF + CST$.

Kepler donna à l'angle ATS que nous appelons l'anomalie *vraie*, le nom d'*anomalia coaequata*, et il divisa l'équation entière FST en les équations *optique* CST, et *physique* CSF. En effet, la première, résultant de ce que l'observateur se trouve hors du centre C, est purement optique; au lieu que la seconde, étant une inégalité réelle dans le mouvement du soleil autour du centre C, doit nécessairement avoir des causes physiques. Si l'on différentie l'équation $\sin CST = \gamma \sin v$, et qu'on fasse $\partial . CST = 0$, on trouvera que l'équation optique est un *maximum*, lorsque $\cos v = 0$, c'est-à-dire dans les points D, E. Il résulte pareillement de l'équation $\sin CSF = \gamma \sin \mu$, que l'équation physique est un *maximum*, lorsque $\cos \mu = 0$, c'est-à-dire dans les points G, H. Il est donc naturel, que la plus grande valeur de l'équation entière $\mu - v$ tombe au milieu entre ces deux points en σ, ainsi que nous l'avons trouvé (1).

§. 97. Puisque la longitude moyenne du soleil pour une époque quelconque est connue par le mouvement moyen, et que les observations donnent les longitudes vraies, on connaît, pour l'époque de chaque observation, l'anomalie moyenne ou vraie, et l'équation $\mu - v$. Si l'on a donc calculé pour la même époque, l'équation $\mu - v$ suivant une hypothèse, la comparaison de cette valeur avec l'observation servira à vérifier l'hypothèse. Pour faciliter cette comparaison, nous avons calculé la table suivante qui, pour les anomalies moyennes de cinq en cinq degrés, présente l'équation du centre, suivant les hypothèses de l'excentricité *simple* (§. 87.), de l'excentricité *double* (§. 96.), et de l'*ellipse*. La dernière peut remplacer les observations, étant parfaitement d'accord avec elles. L'excentricité elliptique a été supposée $= 0{,}016802$; ce qui donne pour la première hypothèse $\frac{c}{a} = 0{,}033604$.

(1) *De stella Martis, Cap. XXIX.*

Anomalie	*Equation du centre*		
	Exc. *simple*	Exc. *double*	*Ellipse*
0^s. 0°.	0°. 0′. 0″.	0°. 0′. 0″.	0°. 0′. 0″.
5.	9. 45.	9. 54.	9. 52.
10.	19. 25.	19. 44.	19. 39.
15.	28. 57.	29. 25.	29. 18.
20.	38. 18.	38. 53.	38. 45.
25.	47. 22.	48. 5.	47. 55.
1. 0.	56. 7.	56. 56.	56. 44.
5.	1. 4. 29.	1. 5. 22.	1. 5. 8.
10.	12. 23.	13. 18.	13. 4.
15.	19. 47.	20. 43.	20. 29.
20.	26. 36.	27. 33.	27. 18.
25.	32. 49.	33. 43.	33. 30.
2. 0.	38. 22.	39. 12.	39. 0.
5.	43. 12.	43. 56.	43. 46.
10.	47. 17.	47. 55.	47. 46
15.	50. 35.	51. 5.	50. 58.
20.	53. 4.	53. 25.	53. 20.
25.	54. 42.	54. 53.	54. 51.
3. 0.	1. 55. 29.	1. 55. 30.	1. 55. 30.

La table précédente fait voir, que la première équation est partout trop petite, et la seconde trop grande, et que la plus grande erreur a lieu, lorsque l'anomalie est 45°; mais que l'excentricité double ne s'écarte de l'ellipse que de 15″ tout au plus, et que par conséquent elle est trois fois plus exacte que l'excentricité simple qui s'en écarte de 42″, ensorte que la différence entre les deux hypothèses est toujours au dessous de 1′. Il est donc visible, que l'orbite solaire s'écarte très-peu du cercle, et qu'il faut des observations très-exactes, pour apercevoir cet écart. Mais quand même il serait tout-à-fait insensible, au point que le calcul suivant l'hypothèse du cercle excentrique fût toujours d'accord avec les observations, il ne faudrait pas en conclure que l'orbite solaire soit en effet un cercle parfait, principalement si les observations des autres planètes indiquent le contraire. Tout ce qu'on serait autorisé d'en conclure, c'est que l'orbite solaire diffère si peu du cer-

cle, qu'avec les instrumens actuels il est impossible d'apercevoir cette différence, et qu'en conséquence on peut calculer les longitudes du soleil suivant l'hypothèse du cercle excentrique, sans erreur sensible (1). La conclusion précédente serait d'autant moins fondée, que nous n'avons mis l'orbite solaire qu'à une seule épreuve, savoir par rapport à la vitesse angulaire qui ne donne que la projection sur la sphère; pour déterminer la courbe elle-même, il faut encore examiner, si les *distances* de la terre au soleil s'accordent aussi avec l'hypothèse circulaire; et ces distances ne peuvent être déterminées, qu'en combinant le soleil avec les planètes, ainsi qu'on va le voir dans le Chapitre suivant. Cela prouve en même tems, combien les plus grandes découvertes dépendent des circonstances. Si l'orbite solaire était aussi excentrique que celle de Mars, il est probable que les véritables lois des mouvemens célestes auraient été découvertes longtems avant Kepler, attendu la facilité et la simplicité des observations solaires. Mais dans l'état actuel des choses, on crut ne devoir pas abandonner une hypothèse qui, relativement au corps de notre système, le plus important, et le plus facile à observer, était parfaitement d'accord avec les observations. D'un autre côté, Kepler, d'après son propre aveu, n'eût peut-être pas fait ses découvertes, si l'orbite de Mars ne se fût trouvée six fois plus excentrique que celle du soleil, et si Tycho, dans le tems où Kepler vint le seconder, ne se fût occupé exclusivement de cette planète. Si Kepler a le premier fait ces grandes découvertes, c'est en partie l'effet des excentricités du soleil et de Mars, mais principalement du génie inépuisable de Kepler, de son activité infatigable, et de sa passion invincible pour la vérité, qui, malgré les difficultés contre lesquelles il avait à lutter, et après un grand nombre d'essais manqués, le portèrent à se frayer un chemin à travers un labyrinthe, dans lequel tant d'autres s'étaient égarés, et à imaginer des méthodes ingénieuses qui lui fournirent le moyen de tirer des observations de Mars le même avantage, qu'avant lui les observations du soleil seules avaient offert.

(1) „Non ideo idem est effectus (*circa solam* etiam *longitudinem*) et verae hypotheseos adhuc „incognitae et falsae a nobis assumtae, quod ad sensum effectus idem videtur. Potest enim „minimum aliquid deesse quod sensus non capiat. (*De stella Martis, Cap XXI. p.* 118.)

CHAPITRE V.

Hypothèse du cercle excentrique, appliquée aux Planètes.

§. 98. Les inégalités des planètes, dont le calcul et l'explication composent toute leur théorie, ne sont autre chose que leurs écarts de cette vitesse uniforme qui est le milieu entre la plus grande et la plus petite, et avec laquelle la planète, dans le plus grand espace de tems, ferait le même nombre de révolutions, et en général les mêmes progrès, qu'avec la vitesse vraie: et c'est ce qu'on appelle le mouvement *moyen*. C'est donc l'élément qu'il faut connaître le premier, et qui doit servir de base à toute la théorie des planètes: et l'on se rappellera ce qui a été dit à l'égard du soleil (I. §. 122.). En supposant que toutes les révolutions sont égales entre elles, ou que la planète décrit constamment la même courbe suivant des lois invariables, chaque révolution vraie de 360° donne en même tems la révolution moyenne, et par conséquent le mouvement moyen; ensorte que deux observations, éloignées l'une de l'autre de 360°, suffiraient pour cet effet. Mais comme chaque observation est sujette à des erreurs inévitables, et qu'il y a des causes, peut-être inconnues encore, qui peuvent altérer le mouvement vrai, sans influer sur le mouvement moyen; le résultat sera d'autant plus exact, que le nombre des révolutions, comprises entre les deux observations, est plus grand, parceque l'erreur d'observation est divisée par ce nombre, et que les fractions de secondes etc. deviennent sensibles en s'accumulant (1). Voilà en quoi consiste l'utilité inappréciable des observations anciennes, et l'avantage qu'ont les astronomes modernes sur les anciens.

(1) *Almag. Lib. III. Cap. 2.*

Puisque la visibilité des planètes en général, ainsi que leurs inégalités, dépendent de leur situation relativement au soleil; il était naturel, qu'on commença par chercher leur mouvement apparent par rapport au *soleil*, qui a été appelé le mouvement *synodique*, et duquel il était aisé de conclure le vrai mouvement, celui du soleil étant connu. En conséquence, l'intervalle de tems entre une conjonction ou opposition de la planète avec le soleil, et la suivante, ou ce qui revient au même, la durée d'une *révolution synodique*, est le premier objet de ces recherches, que Ptolémée, en comparant ses observations avec les anciennes, avait déjà déterminé avec une précision, à laquelle les observations modernes ont peu ajouté. Suivant ses observations et calculs (1), les planètes ont été en conjonction avec le soleil:

Saturne	57	fois	en	59	années	tropiques	1	jour	18	heures,
Jupiter	65	—	—	70	—	—	360	—	4	—
Mars	37	—	—	79	—	—	3	—	4	—
Vénus	5	—	—	7	—	—	362	—	18	—
Mercure	145	—	—	46	—	—	1	—	1	—

Dans les périodes précédentes, les planètes ont donc parcouru, par leur moyen mouvement synodique,

♄ 20520°, ♃ 23400°, ♂ 13320°, ♀ 1800°, ☿ 52200°;

d'où il résulte le moyen *mouvement synodique diurne* des planètes,

♄ = 57′7″44‴, ♃ = 54′9″3‴, ♂ = 27′41″40‴, ♀ = 36′59″26‴, ☿ = 3°6′24″7‴;

ce qui est peu différent des déterminations les plus récentes.

§. 99. Les quantités précédentes serviront aussi à trouver le mouvement moyen des planètes en longitude, qui est appelé *periodique*, et leur mouvement *sidéral*, ainsi que les tems qu'elles employent à parcourir 360° de longitude, ou par rapport aux étoiles fixes, c'est-à-dire leurs révolutions périodiques et sidérales. Les dernières sont les plus importantes pour la théorie des planètes, parcequ'elles déterminent leurs vraies orbites autour du soleil. Elles ont donc été déterminées avec le plus grand soin, telles qu'on les trouvera dans la table suivante; et l'on en a déduit immédiatement le mouvement sidéral diurne. En nommant T, P, les révolutions sidérales de

(1) *Almag. Lib. IX. Cap.* 3.

la terre et d'une planète, exprimées en jours et ses parties décimales, a, b, leur moyen mouvement sidéral pour un jour, on aura

$$a = \frac{360^\circ}{T} = \frac{1296000''}{T}, \text{ et } b = \frac{1296000''}{P}.$$

En ajoutant a et b avec le mouvement diurne des points équinoxiaux $= \frac{50'',1}{365,2422} = 0'',1372$; on aura le mouvement diurne en longitude, ou périodique, $a + 0'',1372$ et $b + 0'',1372$: ce qui donne les révolutions périodiques,

$$\frac{360^\circ}{a+0'',1372} \text{ jours et } \frac{360^\circ}{b+0'',1372} \text{ jours.}$$

Maintenant on peut trouver la révolution synodique $= S$ de deux manières. Le mouvement synodique pour un jour étant $a - b$ ou $b - a$, selon qu'il s'agit d'une planète supérieure ou inférieure; on aura

$$S = \frac{360^\circ}{a-b} \text{ jours, ou } S = \frac{360^\circ}{b-a} \text{ jours.}$$

Si l'on a calculé a, b, avec un nombre suffisant de décimales, cette méthode donne la même exactitude que la suivante. En nommant x, y, les arcs que la terre et la planète décrivent pendant une révolution synodique de celle-ci, on aura $x = \frac{S}{T} 360^\circ$, et $y = \frac{S}{P} 360^\circ$. Or on a pour les planètes supérieures $x = 360^\circ + y$, et pour les planètes inférieures $y = 360^\circ + x$: ce qui donne les équations, $\frac{S}{T} = 1 + \frac{S}{P}$, et $\frac{S}{P} = 1 + \frac{S}{T}$. On a donc

pour les planètes supérieures, $S = \frac{PT}{P-T}$,

et pour les planètes inférieures, $S = \frac{PT}{T-P}$.

La table suivante a été calculée sur ces formules, à l'aide de la première colonne.

Planètes	Révolution sidérale en jours	Mouvement sidéral diurne	Mouvement périodique diurne
♄	10758, 9698400	120″,457629263	2′. 0″,5947985
♃	4332, 5963076	299, 127799589	4.59,2649688
♂	686, 9796186	1886, 518849920	31.26,65601915
☿	365, 2563835	3548, 192608111	59. 8,329777343
♀	224, 7008240	5767, 669102985	1°.36′. 7″,806272217
☿	87, 9692584	14732″, 419364046	4°. 5′.32″,556533278 8

Planètes	Révolution périodique *jours. heur. min. sec. tier.*	Révolution synodique *jours. h. m. s. t.*	Mouvement synodique diurne
♄	10746.17. 34.19. 3,4	378. 2.12.49.37,9	0°.57'. 7",73497885
♃	4330.14. 39. 2.32,1	398.21.12.58.28,5	0. 54 9, 0646o852
♂	686.22. 18.43.38,6	779.22.28.32.44,7	0. 27. 41, 67375819
☿	365. 5. 48.51.34,5	. . . . .	. . . . .
♀	224.16. 41.29.28,3	583.22. 6.55.52,8	0. 36. 59,476494874
☿	87.23. 14.33. 7,3	115.21. 3.24.11,1	3. 6. 24,226755935

§. 100. La *première* inégalité des planètes, moins considérable que la seconde, dépend de la longitude des planètes, et non de leur situation relativement au soleil: en conséquence, sa période n'est pas la révolution synodique, mais la révolution périodique ou sidérale, et elle ressemble tellement à l'équation du centre de l'orbite solaire, qui dépend de son excentricité, que Ptolémée choisit pareillement le cercle excentrique pour l'expliquer. Mais la *seconde* inégalité qui, dépendant de la situation des planètes relativement au soleil, a pour période la révolution synodique, ne pouvait être représentée par le cercle excentrique, à cause d'une circonstance singulière. En effet, soit qu'on prenne pour le point d'où le mouvement paraît uniforme, le centre C ou le point F (*Fig.* 25., le point de l'orbite, où le mouvement vrai est égal au moyen, sera dans le premier cas D, dans le second en σ §. 87. 96.): donc, depuis le mouvement le plus lent en A, jusqu'au mouvement moyen en D ou σ, la planète décrit l'anomalie moyenne ACD ou AFσ, l'une et l'autre étant plus grande que 90°. Il en résulte que, dans le cercle excentrique, quelque hypothèse qu'on adopte, la planète emploie plus de tems, pour parvenir du mouvement le plus lent au mouvement moyen, que de celui-ci au mouvement le plus rapide en B. Or Ptolémée ayant observé le contraire, c'est-à-dire que le tems écoulé entre le mouvement moyen et le mouvement direct le plus rapide était toujours plus long, que celui qui s'écoulait entre le plus grand mouvement rétrograde et le mouvement moyen (§. 67. 68. n. 2.), il choisit l'*épicycle*, pour expliquer la seconde inégalité (1).

(1) *Almag. Lib. IX. Cap.* 5.

Soit donc (*Fig.* 26.) C le centre du cercle excentrique, dont la circonférence est parcourue par le centre A de l'épicycle suivant l'ordre des signes AQB, T la terre, et F le point d'*égalité* (*punctum aequantis*), autour duquel le centre de l'épicycle décrit des angles proportionnaux au tems. Cela posé, AB sera la ligne des apsides relativement à la première inégalité, A l'apogée, B le périgée, A, B, étant les points des mouvemens le plus lent et le plus rapide, et D celui où le mouvement moyen a lieu, la première inégalité étant un *maximum*, laquelle est nulle en A et B. L'anomalie moyenne est l'angle AFE ou A T*e*, T*e* étant parallèle à FE; ATE est l'anomalie corrigée par la première inégalité, et par conséquent FET est la *première* inégalité ou l'*équation du centre*. Le lieu moyen des planètes, ainsi que celui du soleil, s'il s'agit d'une planète inférieure, est donc toujours sur la ligne FE ou T*e*.

Une autre ligne des apsides naît du mouvement dans l'épicycle: c'est la ligne *a b* qui se transporte en ET, passant toujours par la terre et le centre de l'épicycle; la *seconde* inégalité dépend donc de la situation de la planète relativement à la ligne TE. Puisque le mouvement dans l'épicycle équivaut absolument à celui dans le cercle excentrique (§. 88.), la planète emploiera plus de tems, pour parvenir de l'apogée *a* au point du mouvement moyen *c* ou *d*, que de celui-ci au périgée *b*. En effet, le mouvement vrai qui est composé des deux mouvemens dans l'épicycle et dans le cercle excentrique, doit nécessairement être égal au mouvement moyen qui, par hypothèse, est le même que celui du centre de l'épicycle sur la circonférence de l'excentrique, lorsque le mouvement apparent de la planète dans l'épicycle est nul, c'est-à-dire lorsque la ligne T*c* ou T*d*, qui joint la terre et la planète, est tangente à l'épicycle: d'où il suit que *b c* est moins grand, et *a c* plus grand qu'un *quadrans*. Afin donc que le mouvement dans l'épicycle soit d'accord avec les observations, suivant lesquelles le mouvement direct des planètes dure plus longtems que le mouvement rétrograde (§. 67. 68. n. 2.), il faut que l'apogée *a* soit le point du plus grand mouvement direct, et le périgée *b* celui du mouvement rétrograde; ou ce qui revient au même, il faut que la planète parcoure l'épicycle *a c b d* aussi suivant l'or-

dre des signes. Or les planètes étant directes dans la conjonction, et rétrogrades dans l'opposition ou la conjonction inférieure (§. 67. 68.), il est clair, que *a* est le point des conjonctions, el *b* celui des oppositions ou conjonctions inférieures: ce qui est aussi conforme à ce qui a été dit (§. 65.), que les planètes sont plus éloignées de la terrre dans la conjonction que dans l'opposition.

Pour expliquer la première inégalité de Mercure, qui est plus considérable que celle des autres planètes, Ptolémée jugea nécessaire, de supposer le point d'*égalité* non pas en F, mais en *f* à égales distances de C et de T, et d'attribuer au point *f* un mouvement circulaire autour du centre C; ce qui rendit cette hypothèse encore plus compliquée (1). Cela eût suffi pour rendre suspecte l'hypothèse des épicycles, puisqu'il était tout naturel de penser, qu'elle ne s'accordait aux observations des autres planètes, que parceque les erreurs étaient trop petites, pour être aperçues avec les instrumens de ce tems, tandis qu'elles se manifestaient dans l'orbite de Mercure.

La *seconde* inégalité provient de ce que la planète n'est pas sur la périphérie de l'excentrique ou au centre de l'épicycle, mais dans un point P de sa circonférence: elle est donc égale à l'angle ETP. Le centre de l'épicycle ayant avancé de A en E, en décrivant par le moyen mouvement périodique l'angle AFE, la *ligne des syzygies* FA a pris la position FEL; et dans le même tems la planète a décrit uniformément l'arc LP ou l'angle LEP, d'où il suit que LEP est le moyen mouvement synodique: en effet, lorsque LEP est $=180°$, ou LEP $=360°$, P se trouve dans la ligne des syzygies FL, et la planète est en conjonction ou opposition moyenne.

§. 101. Supposons que le centre de l'épicycle ait avancé de l'apogée A en E (*Fig.* 27.), le lieu moyen d'une planète inférieure et du soleil étant sur la droite FE ou T*e* qui lui est parallèle, et que la planète se trouve en P ou en Q: l'angle *e*TP sera la *digression* apparente du lieu moyen du soleil vers l'occident, et *e*TQ vers l'orient. Quelle que soit donc la situation de l'épicycle, les deux digressions seront les plus grandes, lorsque TP, TQ,

(1) *Almag. Lib. IX. Cap.* 6.

touchent l'épicycle; mais ces *plus grandes* digressions augmenteront à mesure que E s'écarte de A, parcequ'elles sont vues de T à une moins grande distance: elles sont donc un *minimum* en A, et un *maximum* en B. La différence des deux digressions est le double de l'angle ET*e* ou FET, ou de l'équation du centre: la digression occidentale est de 2FET plus grande que l'orientale, si E est entre A et B, l'anomalie étant plus petite que 180°; dans l'autre demi-cercle en G, l'anomalie étant plus grande que 180°, la digression orientale *p*T*g* est plus grande de la même quantité que la digression occidentale *g*T*q*.

Ayant donc observé des côtés opposés de la ligne des apsides AB, deux lieux E, G, où la plus grande digression occidentale *e*TP était égale à la plus grande digression orientale *p*T*g*, ou la digression orientale *e*TQ égale à l'occidentale *g*T*q*; il est clair, que les deux longitudes moyennes de la planète ou du soleil en *e* et *g*, sont également distantes de la ligne des apsides. Ptolémée trouva par ex. les plus grandes digressions de Vénus du lieu moyen du soleil, vers l'orient et vers l'occident, égales à 47° 15′, lorsque les longitudes moyennes du soleil étaient de 11^{s}14° 15′ et de 4^{s}5° 45′, d'où il résultait, que la ligne des apsides de Vénus était dirigée vers 1^{s}25° et 7^{s}25° (1). En observant les plus grandes digressions, quand le soleil est à peu près à 1^{s}25° et à 7^{s}25°, on verra, où elles sont plus et moins grandes: le premier lieu donnera le périgée, le second l'apogée. Ptolémée trouva la plus grande digression de 44° 48′, lorsque le soleil était à 1^{s}25°, et de 47° 20′, le soleil étant à 7^{s}25°, d'où il conclut, que l'apogée devait être à 1^{s}25°, et le périgée à 7^{s}25° (2). Un grand nombre d'observations des plus grandes digressions dans d'autres parties de l'écliptique, firent voir à Ptolémée, que ces digressions n'étaient jamais plus grandes ni plus petites, que lorsque la longitude moyenne du soleil était de 7^{s}25° et de 1^{s}25°; mais que les plus grandes digressions de Mercure arrivaient dans différentes régions du ciel: d'où il conclut que les lignes des apsides des autres planètes étaient invariables, au lieu que celle de Mercure faisait un tour entier

(1) *Almag. Lib. X. Cap.* 1.
(2) *Almag. Lib. X. Cap.* 2.

pendant une révolution périodique de cette planète (§. 100.). Ptolémée commit deux erreurs, en supposant le mouvement des apsides de Mercure beaucoup trop vite, et en expliquant par le seul mouvement des apsides, cette irrégularité qui en partie naît de la forme elliptique de l'orbite de Mercure: car il est aisé de voir, que les digressions doivent nécessairement paraître plus ou moins grandes, selon que l'ellipse se nous présente suivant la direction du grand ou du petit axe.

Les plus grandes digressions dans les apsides donnèrent à Ptolémée aussi l'excentricité du cercle excentrique $\frac{CT}{CA}$. Relativement à Vénus, il avait trouvé $ATa = \alpha = 44°48'$, et $BTb = \beta = 47°20'$. En faisant donc $CA = a$, $CT = c$, le demi-diamètre de l'épicycle $Aa = Bb = e$, et $\frac{c}{a} = \gamma$, $\frac{e}{a} = \varepsilon$; on aura $\frac{Aa}{AT} = \sin\alpha = \frac{e}{a+c} = \frac{\varepsilon}{1+\gamma}$, et $\frac{Bb}{BT} = \sin\beta = \frac{\varepsilon}{1-\gamma}$, donc

$$\gamma = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\sin\beta + \sin\alpha} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\tang\frac{1}{2}(\beta+\alpha)} = \frac{\tang\ 1°16'}{\tang 46°4'} = 0,0213028,$$

$$\varepsilon = \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\beta+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = 0,7196448\ (1).$$

L'excentricité γ est trois fois plus grande que suivant les observations modernes; et le demi-diamètre de l'épicycle est à très-peu près égal à celui de l'orbite de Vénus en parties du rayon de l'orbite de la terre. Relativement à Mercure, Ptolémée avait trouvé $\alpha = 19°3'$, $\beta = 23°15'$, d'où il suit $\gamma = 0,1088215$ (2); ce qui donne $\varepsilon = (1-\gamma)\sin\beta = 0,3517872$. Mais pour plus de précision, il détermina le rayon de l'épicycle par les plus grandes digressions orientale et occidentale dans le même point de l'orbite, le soleil moyen étant éloigné des apsides de l'angle $Afe = ATe = 90°$ (*Fig.* 26.); et il trouva $eTp = 26°15'$, $eTq = 20°15'$. On a donc $pTq = 46°30'$, $eTp = eTq = 23°15'$, donc $eTe = feT = 3°$; d'où il suit $Tf = Te\sin 3°$, $\frac{Tf}{a} = \frac{\gamma}{2}$, partant

$$\frac{Te}{a} = \frac{\frac{1}{2}\gamma}{\sin 3°} = \frac{0,0544}{\sin 3°},\ eq = Te\sin 23°15',\ \text{ou}$$

$$\varepsilon = 0,0544\,\frac{\sin 23°15'}{\sin 3°} = 0,4104\ (3).$$

Le milieu entre ces deux résultats donne $\varepsilon = 0,3811$, ce qui est à très-peu

(1) *Almag. Lib. X. Cap.* 2.
(2) *Almag. Lib. IX. Cap.* 8.
(3) *Almag. Lib. IX. Cap.* 9.

près le demi-diamètre de l'orbite de Mercure en parties de celui de l'orbe terrestre. Mais la différence considérable entre ces deux résultats rend toute la théorie de Ptolémée fort suspecte.

On trouve par la même méthode, le point F (*Fig.* 27.) autour duquel le mouvement est uniforme. Ptolémée observa les plus grandes digressions de Vénus du lieu moyen du soleil vers l'orient et vers l'occident, dans le point G où le lieu moyen de Vénus et du soleil est distant de 90° des apsides, la première inégalité étant par conséquent à son *maximum;* et il trouva $gTp = 48°20'$, $gTq = 43°35'$. On a donc

$$AFG = ATg = 90°,\ pTq = 91°55',\ GTp = GTq = 45°57'30'',$$
$$GTg = FGT = 2°22'30'',\ \text{d'où il suit}$$
$$TG = \frac{Gq}{\sin GTq} = \frac{a\varepsilon}{\sin 45°57'30''},\ TF = TG \sin FGT,\ \text{ou}$$
$$\frac{TF}{a} = \frac{\varepsilon \sin 2°22'30''}{\sin 45°57'30''} = 0,041864;\ \text{donc à très-peu près}$$
$$\frac{TF}{a} = 2\gamma,\ TF = 2CT,\ \text{et}\ CF = CT\ (1):$$

l'excentricité double a donc lieu dans l'orbite de Vénus.

§. 102. Les élémens des planètes *supérieures* se trouvent à peu près par la même méthode, avec cette différence, qu'on ne peut pas employer les plus grandes digressions, et que le moyen mouvement des planètes en longitude, ou ce qui revient au même, le mouvement du centre de l'épicycle E autour du point d'égalité F, est différent du moyen mouvement du soleil. Soit (*Fig.* 28.) T la terre, C le centre du cercle excentrique, F le point autour duquel le centre E de l'épicycle tourne d'une manière uniforme. Imaginons, qu'à une certaine époque la planète (Mars) ait été dans l'apogée A du cercle excentrique, et en conjonction avec le soleil moyen, dans le point de l'épicycle le plus éloigné a (§. 100.); et qu'au bout d'un certain tems t, le centre de l'épicycle se trouve en E, Mars en P, et le lieu moyen du soleil sur la droite FS ou T⊙. Cela posé,

$AFE = \beta$ sera le moyen mouvement périodique de la planète dans le tems t,

$AT\odot = \alpha$ le mouvement moyen du soleil,

(1) *Almag. Lib. X. Cap.* 3.

FML la ligne des syzygies moyennes, ou de la conjonction L et de l'opposition M.

LEP $=\gamma$ le moyen mouvement synodique de Mars,

ATE $=\delta$ le mouvement périodique, corrigé avec la première inégalité,

FET $=\beta-\delta$ la première inégalité ou l'équation du centre.

Or le mouvement synodique de la planète n'étant autre chose que son mouvement par rapport au soleil, on aura (§. 99.)

$$\gamma=\alpha-\beta, \text{ donc } LEP=AFS-AFE=LFS:$$

d'où il suit que la droite EP est constamment parallèle à FS ou T$\odot$. Si donc la planète est en I, le lieu moyen du soleil sera sur la droite TK; mais il sera sur TN, lorsque la planète est en K: dans le premier cas Mars est en conjonction avec le soleil moyen, dans le second cas il est en opposition. Or la longitude apparente de la planète dans les syzygies, I, K, étant la même que celle du centre E, une observation des syzygies donne immédiatement l'angle ATE, ou l'anomalie vraie, laquelle, étant combinée avec l'anomalie moyenne AFE, donnera l'équation du centre FET, et par conséquent l'excentricité. C'est pourquoi Ptolémée se servit des observations dans les oppositions K, pour déterminer les élémens de l'excentrique (1). Au moyen de trois oppositions observées, il trouve par une méthode indirecte, semblable à celle qui vient d'être développée, CF $=$ CT ou l'excentricité $\frac{CT}{CA}=\gamma$, et la position des apsides A, B, comme il suit (2):

	Longitude de l'apogée	Excentricité
Mars	$3^s.\ 25°.\ 30'.$	$\frac{1}{10}=0,1$
Jupiter	5. 11. 0.	$\frac{2,75}{60}=0,046$
Saturne	7. 23. 0.	$\frac{3\frac{4}{12}}{60}=0,057$

Les excentricités sont parfaitement d'accord avec les résultats qu'ont trouvés les astronomes modernes.

(1) *Almag. Lib. X. Cap.* 6.

(2) *Almag. Lib. X. Cap.* 7. *Lib. XI. Cap.* 1. 5.

Maintenant, la longitude de l'apogée A étant connue, on trouve pour chaque observation, l'anomalie vraie ATE, et à l'aide de l'excentricité γ l'équation FET qui répond à cette anomalie, par conséquent l'anomalie moyenne AFE = ATE + FET; ce qui donne, pour une époque quelconque, l'anomalie moyenne à l'aide du moyen mouvement périodique. Si la planète a été observée dans l'opposition K, l'équation du centre KEM donne la distance de la planète dans son épicycle à la droite FE ou LE; d'où l'on trouve, à l'aide du mouvement synodique, pour une époque quelconque où elle est en P, sa distance à la même ligne ou l'angle LEP, vu que la planète parcourt l'épicycle d'une manière uniforme pendant une révolution synodique. C'est avec ces données que Ptolémée trouve le demi-diamètre de l'épicycle de la manière suivante.

La longitude observée de Mars = $8^s\,1°\,36'$, combinée avec celle du périgée = $9^s\,25°\,30'$, lui donna (*Fig.* 29.)

la distance vraie au périgée BTP = $53°\,54'$;

il conclut du tems de l'observation et du mouvement moyen,

l'anomalie moyenne du périgée, BFE = $42°\,49'$,

et suivant la méthode qui vient d'être exposée,

FEP = $7°\,14'$.

Maintenant on connaît dans le triangle FEC, le rapport des deux côtés $\frac{CF}{CE} = \gamma = 0,1$ et l'angle CFE = $42°\,49'$, d'où l'on conclura

l'angle CEF = $3°\,54'\,38''$.

On connaît donc dans le triangle CET, le rapport des côtés $\frac{CT}{CE} = \gamma = 0,1$ et

l'angle ECT = EFC + CEF = BFE + CEF = $46°\,43'\,38''$,

d'où l'on tirera

CET = $4°\,28'\,11''$ et ET = $a \cdot 0,93427$, donc

l'équation FET = CEF + CET = $8°\,22'\,49''$.

Cela donne

BTE = BFE + FET = $51°\,11'\,49''$,

ETP = BTP − BTE = $2°\,42'\,11''$,

PET = FET − FEP = $1°\,8'\,49''$.

Maintenant on connaît dans le triangle PTE, tous les angles et le côté ET = $a \cdot 0,93427$; d'où l'on conclura

le demi-diamètre de l'épicycle $EP = e = a \cdot 0,6562$ (1).

D'après les observations modernes, la distance moyenne de Mars au soleil est $a = 1,5236935$: le rayon de l'orbe terrestre en parties de celui de l'orbite de Mars est donc $= \frac{1}{1,52369} = 0,6563 = \frac{e}{a}$; de sorte que le demi-diamètre de l'épicycle est exactement égal à celui de l'orbite de la terre. De même les demi-diamètres des épicycles de Jupiter et de Saturne, que Ptolémée trouve de cette manière, sont précisément égaux au rayon de l'orbe terrestre en parties des moyennes distances de ces planètes au soleil suivant les observations des astronomes modernes (2).

§. 103. Il est facile d'expliquer par le système de Ptolémée, le phénomène remarquable des stations et rétrogradations des planètes. Pour voir en général, si cette explication satisfait aux observations, il suffit de considérer les mouvemens moyens, en faisant abstraction de l'excentricité du cercle excentrique. Soit donc (*Fig.* 29.) la terre au centre C de l'excentrique, autour duquel le centre de l'épicycle décrit l'angle ACa dans le tems ∂t, pendant lequel la planète parcourt l'arc Qq de son épicycle. On connaît le rapport des côtés $\frac{AQ}{AC} = \varepsilon$, les mouvemens synodique $QAq = s$, et périodique $ACa = p$. La planète paraîtrait rétrograder de l'angle $QCq = q$, si le centre de l'épicycle était immobile durant le tems ∂t; mais celui-ci avançant en même tems de l'angle p, le mouvement apparent de la planète sera direct et égal à $p - q$. En faisant le moyen mouvement synodique depuis l'opposition en K, ou l'angle $CAQ = \alpha$, et l'élongation $ACQ = \beta$, le triangle ACQ fournira ces équations,

$$\text{tang}\,\beta = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{1 - \varepsilon \cos \alpha}, \quad \text{donc} \quad \cos^2\beta = \frac{(1 - \varepsilon \cos \alpha)^2}{1 - 2\varepsilon \cos \alpha + \varepsilon^2},$$

$$\partial \beta = \cos^2\beta \cdot \partial \,\text{tang}\,\beta = \frac{\varepsilon\, \partial \alpha\, (\cos \alpha - \varepsilon)}{1 - 2\varepsilon \cos \alpha + \varepsilon^2},$$

ou à cause de $s = -\partial \alpha$ et $q = -\partial \beta$,

$$q = \frac{\varepsilon s (\cos \alpha - \varepsilon)}{1 - 2\varepsilon \cos \alpha + \varepsilon^2}.$$

Soit $n : 1$ le rapport des moyens mouvemens synodique et périodique, ensorte que $s = np$: alors la dernière équation donnera

$$p - q = \frac{s}{n} - \frac{\varepsilon s (\cos \alpha - \varepsilon)}{1 - 2\varepsilon \cos \alpha + \varepsilon^2}.$$

(1) *Almag. Lib. X. Cap.* 8.
(2) *Almag. Lib. XI. Cap.* 2. 6.

Cette valeur de $p - q$ sera nulle, et la planète stationnaire, lorsque $1 - 2\varepsilon\cos\alpha + \varepsilon^2 = n\varepsilon\cos\alpha - n\varepsilon^2$, ou $\cos\alpha = \frac{1+(1+n)\varepsilon^2}{(2+n)\varepsilon}$. Cela donne pour les cinq planètes les valeurs suivantes.

	ε	n	α
♄	0, 10483	28, 4264	65°.29′.12″.
♃	0, 19227	10, 8568	54. 25. 10.
♂	0, 65630	0, 8807	16. 47. 0.
♀	0, 72333	0, 6255	12. 59. 40.
☿	0, 38710	3, 1520	35. 34. 20.

Le tems que chaque planète emploie à parcourir l'angle α avec son mouvement synodique, donnera la demi-durée de la rétrogradation, ou la moitié de l'intervalle entre la station Q avant l'opposition ou la conjonction inférieure K, et la station R consécutive, attendu que $\cos\alpha$ convient à $+\alpha$ et à $-\alpha$. Ainsi on trouvera la durée moyenne de la rétrogradation

de Saturne = 137 jours 13 heur. 0 min. ou 138 jours,
de Jupiter = 120 — 14 — 16 — 121 —
de Mars = 72 — 17 — 20 — 73 —
de Vénus = 42 — 3 — 42 — 41 — 16 heur.
de Mercure = 22 — 21 — 36 — 22 — 12 —

les derniers nombres étant ceux que Ptolémée a calculés (1). Ces résultats sont très-bien d'accord avec les observations, ainsi qu'on le verra ci-après.

§. 104. On a déjà vu (§. 70.), que les *maxima* des latitudes géocentriques des planètes, à 90° de leurs noeuds, sont tantôt plus tantôt moins grands, d'où il suit, que les plans de leurs orbites ne passent pas par la terre: en effet, suivant le système de Ptolémée, l'épicycle qui est proprement l'orbite planétaire, n'environne pas la terre. D'après les observations, le *maximum* de la latitude des planètes supérieures, est plus grand dans les oppositions que dans les conjonctions, et celui des planètes inférieures est plus grand, lorsqu'elles disparaissent à l'orient du soleil pour paraître de nouveau à l'occident, c'est-à-dire dans la conjonction inférieure, et moins grand dans la con-

(1) *Almag. Lib. XII. Cap.* 2. 3. 4. 5. 6.

jonction supérieure, quand elles disparaissent à l'occident du soleil. Il s'en suit qu'en général, le *maximum* est plus grand, si la planète est dans le périgée *b* de l'épicycle (*Fig.* 28.), que dans l'apogée *a*. C'est à la vérité une suite nécessaire de ce que le plan de l'épicycle ne passe pas par la terre, le point *b* étant plus près de la terre que *a*: car il est évident que, quoique la plus grande latitude, vue du centre de l'épicycle, soit toujours la même, elle paraîtra sur la terre d'autant plus grande, que la planète est moins éloignée. Mais outre cela, il se trouve une différence entre les plus grandes latitudes, qui ne dépend point du lieu de la planète dans l'épicycle, ou de sa situation relativement au soleil, mais du lieu dans le cercle excentrique, ou de sa longitude: ce qui provient de la même cause, savoir des différentes distances dans l'excentrique; et il aurait lieu, quand même le plan du cercle excentrique ne serait pas incliné sur l'écliptique, ce qui est en effet le cas. Ptolémée eut donc tort de supposer, que l'excentrique était incliné à l'écliptique, et l'épicycle incliné à l'excentrique, et par cette double inclinaison il augmenta inutilement les difficultés du calcul des latitudes (1). Il est aisé de voir, que cette hypothèse explique très-bien les phénomènes des latitudes; mais Kepler découvrit, à l'aide des observations plus exactes de Tycho, que dans l'application à des cas spéciels, cette hypothèse était aussi insuffisante, que le cercle excentrique pour les longitudes. Comme cette matière sera développée ci-après, il serait inutile de nous y arrêter ici.

§. 105. Le rapport qui existe entre l'épicycle et le cercle excentrique, est une preuve évidente du système de Copernic, et réunit le système de Ptolémée à celui de Copernic. Dès que les méthodes de l'astronomie moderne avaient fourni le moyen de déterminer immédiatement le rapport entre les distances des planètes au soleil, leur comparaison avec les demi-diamètres des épicycles, tels que Ptolémée lui-même les avait calculés, donna le résultat, que dans le fond le système de Ptolémée n'était pas différent de celui de Copernic ou de Tycho, et que celui-ci en découlait nécessairement. On a vu (§. 100. 101.) que, s'il s'agit d'une planète *inférieure*, le soleil est constamment sur la droite TE (*Fig.* 27.), qui joint la terre et le centre de l'épicycle, et

(1) *Almag. Lib. XII.*

qu'en faisant abstraction de la première inégalité ou de l'excentricité CT (qui n'a rien de commun avec le *système* planétaire, mais regarde seulement la nature des courbes décrites, ou les lois du mouvement), la distance moyenne de la planète à la terre, CE ou TE, est au demi-diamètre de l'épicycle EP, comme la distance du soleil à la terre est à la distance de la planète P au soleil (§. 101.): d'où il suit, que le centre de l'épicycle A, la planète étant en a, est en même tems le lieu moyen du soleil. Car en supposant que le soleil soit dans un autre point S de la droite TA, on aura $TS:Sa::TA:Aa$, donc $Sa = \frac{TS}{TA}Aa = \frac{CS}{CA}Aa$ est une quantité constante qui ne change pas, pendant que la planète fait le tour de son épicycle; ce qui est impossible, à moins que S ne soit le centre A. Le mouvement de la planète dans l'épicycle n'est donc autre chose que sa révolution autour du soleil A: en conséquence, le mouvement dans le cercle excentrique est la révolution du soleil A autour de la terre T, ou ce qui revient au même, la révolution de la terre autour du soleil, dans un cercle passant par T, et ayant A pour centre.

Si P (*Fig.* 28.) est une planète *supérieure*, soit le soleil dans un point quelconque s d'une ligne arbitraire $T\odot$. Cela posé, on a vu (§. 102.), que les demi-diamètres du cercle excentrique et de l'épicycle sont entre eux (a à e), comme les distances moyennes de la planète et de la terre au soleil (Ps à Ts); d'où il suit que $Ps = \frac{a}{e}Ts$ est une quantité qui n'éprouve aucun changement, par la révolution de la planète dans son épicycle, et que par conséquent le soleil occupe le centre de la vraie orbite planétaire. En le supposant en T, ou en transportant s en T, il faut déplacer la planète et la terre de la même manière. En effet, pour que les positions géocentriques du soleil et de la planète n'éprouvent aucun changement par ce déplacement, il faut placer la terre dans un point t de la droite sT, et il faut transporter la planète, parallèlement à sT, c'est-à-dire sur le rayon PE (§. 102.), de P en e, Pe étant $= Tt$. Or comme nous venons de trouver que TE est à la fois la distance moyenne de la planète au soleil et le rayon du cercle excentrique, et que le rayon de l'épicycle PE est égal à la distance de la terre au soleil Tt; on aura $PE = Pe$, et le point e tombe en E: la planète est donc constamment sur la circonférence du cercle excentrique et au centre de l'épi-

cycle, d'où il résulte que la *seconde* inégalite (l'épicycle) disparaît tout-à-fait; de plus, le soleil est au centre T de l'excentrique, en tournant autour de la terre *t*, ou ce qui revient au même, la terre *t* tournant autour du soleil T. Le soleil est donc immobile au centre T des orbites de la terre *t* et des planètes supérieures E, et la *seconde* inégalité provient de l'épicycle qui, étant transporté en T*t*, n'est autre chose que l'orbite de la terre: ce qui est entièrement conforme au système de Copernic.

Ainsi nous avons prouvé que, relativement aux planètes *inférieures*, l'épicycle est l'orbite planétaire, et le cercle excentrique celle de la terre, d'où il suit que l'inclinaison de l'épicycle au cercle excentrique est l'inclinaison de l'orbite planétaire sur l'écliptique. Par rapport aux planètes *supérieures*, l'épicycle est l'orbite de la terre, l'excentrique celle de la planète; l'inclinaison de ces deux plans est donc pareillement l'inclinaison de l'orbite planétaire sur l'écliptique. Après avoir prouvé que les systèmes de Ptolémée et de Copernic donnent absolument les mêmes résultats, on pourra considérer dans la suite le dernier seul, et tout ce qui sera prouvé relativemeut au dernier, pourra également être appliqué au premier.

§. 106. Puisqu'il faut donc regarder le soleil, et non la terre, comme le centre des orbites planétaires, elles ne pourront être déterminées que par des observations héliocentriques, et il sera nécessaire de conclure les observations héliocentriques des géocentriques, les seules que nous puissions faire. Comme cette réduction, généralement parlant, suppose que l'orbite planétaire est déjà connue: il faut commencer par choisir des observations, où l'on est certain, sans connaître l'orbite, que la longitude héliocentrique est égale à la géocentrique. C'est ce qui a lieu, lorsque le soleil et la planète se trouvent sur la même ligne droite avec la terre, par conséquent dans les oppositions des planètes supérieures, et dans les conjonctions inférieures des autres planètes; car les rayons du soleil ne permettent pas d'observer les conjonctions supérieures. Cette raison seule suffit, pour nous faire voir l'importance des observations des *oppositions* et des *pasages* des planètes sur le soleil; mais il y a encore une autre raison. Pour connaître la *première* et la *seconde* inégalités des planètes, il est nécessaire de les séparer l'une de l'autre. Or le mou-

vement des planètes, relativement à la *seconde* inégalité, étant le plus rapide dans les conjonctions, le plus lent dans les oppositions, et de même grandeur à égales distances à la conjonction, ce mouvement est divisé en deux parties égales et semblables par la *ligne des syzygies*, comme le mouvement par rapport à la *première* inégalité est divisé par la *ligne des apsides*. La seconde inégalité est donc nulle dans les syzygies, ainsi que la première disparaît dans les apsides; et les oppositions donneront la première inégalite seule, sans la seconde. C'est sur ces réflexions, que Ptolémée fonda sa théorie.

Supposons (*Fig.* 19.) que le soleil soit en O, la terre en C, une planète supérieure en A, et AB perpendiculaire à l'écliptique: la planète étant en opposition avec le soleil, le point B sera diamétralement opposé au soleil, OCB sera une droite, et la longitude héliocentrique de la planète OB égale à la géocentrique CB; ainsi l'observation de l'opposition donne immédiatement la longitude héliocentrique. Pour trouver l'instant où la planète était opposée au soleil, ainsi que la longitude géocentrique qu'elle avait à cette époque, il faut l'observer assidument quelques jours avant et après l'opposition, afin qu'on puisse en conclure la vitesse avec laquelle sa longitude géocentrique a changé dans l'opposition, ainsi que les deux observations entre lesquelles l'opposition est comprise, ensorte que la différence entre sa longitude et celle du soleil était, dans l'une de ces observations un peu plus, et dans l'autre un peu moins grande que 180°. Le mouvement du soleil étant connu par la théorie, ou par les observations qu'on en a faites les mêmes jours, on trouvera également sa vitesse lors de l'opposition: or la planète étant rétrograde, la somme de ces deux vitesses donnera la vitesse *relative*, avec laquelle la planète se rapproche ou s'éloigne du point B. On trouvera donc le tems vrai et la longitude vraie dans l'opposition, par le moyen d'une *interpolation*, où il faut tenir compte des secondes différences (I. §. 165.) Le même procédé donnera la latitude géocentrique ACB dans l'instant de l'opposition. Quand on a des tables des planètes assés exactes, qu'on se propose de corriger par ces observations, on calculera pour l'époque de l'opposition, la longitude et la latitude de la planète; et en les comparant avec les observations, on découvrira les erreurs des tables en longitude et en latitude.

*

§. 107. Avant d'entreprendre les recherches sur la nature des courbes que la planète décrit dans le plan de son orbite, il faut connaître ce plan, ou sa position relativement à un plan connu, comme l'écliptique. Cette position est déterminée, par la ligne de la commune section des deux plans (la *ligne des noeuds*), et par l'angle qu'ils font entre eux (l'*inclinaison* de l'orbite sur l'écliptique) (§. 83.). La longitude des noeuds est la longitude héliocentrique de la planète dans l'instant où elle est dans l'écliptique, et que par conséquent, sa latitude héliocentrique et géocentrique est nulle. Si la planète était dans le même instant opposée au soleil, sa longitude géocentrique serait le lieu héliocentrique du noeud. Mais comme cela n'arrivera guères, on trouvera du moins une valeur approchée de la position des noeuds, en observant la planète dans une opposition qui est près du noeud. La variation diurne des latitudes observées donnera, par interpolation, le tems t avant au après l'opposition, où la latitude était nulle. Puisque les révolutions des planètes, ou leurs mouvemens moyens sont connus (§. 99.), on trouverait la longitude du noeud, en combinant le mouvement moyen qui convient au tems t, avec la longitude dans l'opposition, si le mouvement vrai depuis l'opposition jusqu'au noeud était égal au moyen (1). L'erreur ne peut pas être considérable, si l'opposition est très-près du noeud; et il est aisé de voir, comment la longitude du noeud peut être corrigée, si l'on connaît à peu près la position des apsides et l'excentricité de la planète. Cette méthode est principalement applicable aux passages des planètes inférieures sur le soleil, où elles sont très-près du noeud.

Cette détermination des noeuds est assés exacte, pour en conclure, sans erreur sensible, non-seulement l'inclinaison, mais aussi les élémens de l'orbite excentrique, ainsi qu'on le verra plus bas. Mais ces élémens étant connus, il est facile de calculer la longitude et la latitude héliocentriques, à l'aide d'une observation géocentrique quelconque (§. 84.). Ayant donc observé la planète plusieurs fois avant et après son passage par le noeud, ensorte que sa latitude était dans une observation boréale, et dans l'autre australe; le mouvement diurne en longitude et en latitude donnera, par interpolation,

(1) *Kepler de stella Martis, Cap. XII.*

l'instant où la latitude était nulle, la planète passant par le noeud. La longitude héliocentrique, calculée pour cet instant, donne celle du noeud (1). Au moyen de cette valeur plus exacte, on peut corriger les autres élémens, et en répétant l'opération précédente avec ces élémens corrigés, on trouvera une valeur encore plus exacte de la longitude des noeuds. Ces méthodes indirectes qui servent à corriger mutuellement un élément par l'autre, sont d'un grand usage dans toute l'astronomie, et ont donné les élémens des orbites planétaires avec plus de précision, qu'aucune méthode directe.

La planète ayant la même latitude héliocentrique à égales distances au noeud, cela donne lieu à une autre méthode. En observant la planète à la même distance avant et après le noeud, et calculant pour chaque observation la longitude et la latitude héliocentriques, on cherchera deux latitudes égales: alors la longitude héliocentrique qui est le milieu entre celles qui répondent aux deux latitudes, sera la longitude du noeud, aux époques de chaque observation, si la ligne des noeuds est immobile, et à l'époque moyenne entre les deux observations, si les noeuds ont un mouvement.

§. 108. La longitude des noeuds étant connue, chaque observation d'une longitude et latitude géocentrique de la planète donnera son *inclinaison*, par une méthode extrêmement simple (2). Qu'on observe la planète P (*Fig.* 30.) et le soleil S, au moment où sa longitude est exactement égale à celle du noeud N, et que par conséquent la terre T est sur la ligne des noeuds N*n*. Ayant abaissé la perpendiculaire PQ sur l'écliptique NQ*n*, on connaît par l'observation, l'élongation de la planète $NTQ = \alpha$, et sa latitude géocentrique $PTQ = \beta$. On connaît donc les deux côtés qui comprennent l'angle droit Q du triangle sphérique NQP, d'où l'on conclura l'inclinaison $PNQ = \nu$, à l'aide de la formule

$$\text{tang } \nu = \frac{\text{tang } \beta}{\sin \alpha}.$$

Quand même la longitude du noeud, ou l'angle α ne serait pas parfaitement juste, il en résulterait, pour l'inclinaison, une erreur peu sensible. En effet,

(1) *De stella Martis, Cap. LXI.*

(2) *Ibid. Cap. XIII.*

différentiant l'équation précédente par rapport à α et v, on trouvera, à cause de $\cos^2 v = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \text{tg}^2 \beta}$,

$$\partial v = \cos^2 v . \partial \text{ tang } v = - \frac{\partial \alpha \cos \alpha \text{ tang } \beta}{\sin^2 \alpha + \text{tang}^2 \beta}.$$

L'erreur sera donc d'autant plus petite, que α est plus grand; elle sera nulle, si la distance géocentrique de la planète aux noeuds, α, est 90°. Ainsi de même que la ligne des noeuds est trouvée par des observations près du noeud, de même l'inclinaison sera déterminée d'autant plus exactement, que la planète est plus près de sa plus grande latitude, ou des *limites* (*terminus borealis vel australis*). Kepler trouva par ex. par une observation de Mars, $\alpha = 80°$, $\beta = 1°\,49'\,20''$, d'où il résulte $\frac{\cos \alpha \text{ tang } \beta}{\sin^2 \alpha + \text{tg}^2 \beta} = 0{,}0057$: donc s'il s'était trompé d'un degré sur la longitude du noeud, l'erreur qui en résulterait sur l'inclinaison, ne serait que de 18″. Si α est $= 90°$, on a $v = \beta$, et le résultat est aussi exact que l'observation même.

Après avoir corrigé les autres élémens avec l'inclinaison et la position des noeuds, ils serviront réciproquement à rectifier l'inclinaison, ainsi qu'on l'a vu relativement aux noeuds (§. 107.). Si l'on a observé une opposition très-près des limites, on connaît la longitude héliocentrique et la latitude géocentrique. Au moyen de la théorie de la planète et du soleil, on conclura, pour l'instant de l'opposition, les distances de la planète et de la terre au soleil, SP (*Fig.* 31.) et ST; on connaît la latitude géocentrique $PTQ = \beta'$, et l'on trouve la latitude héliocentrique $PSQ = \beta$, à l'aide de l'équation

$$\sin (\beta' - \beta) = \sin SPT = \frac{ST}{SP} \sin \beta', \text{ donc } \beta = \beta' - (\beta' - \beta).$$

Maintenant, la longitude héliocentrique de la planète et du noeud, et par conséquent sa distance au noeud $= \alpha$, ainsi que sa latitude $= \beta$, étant connues, l'équation $\text{tang } v = \frac{\text{tang } \beta}{\sin \alpha}$ donnera l'inclinaison. Si l'observation est hors de l'opposition, mais à peu près 90° du noeud, on peut calculer, sur les élémens de la planète, sa longitude héliocentrique qui, étant ajoutée avec le supplément de la longitude du soleil à 180°, donne la commutation γ. L'élongation η et la latitude géocentrique β' étant données par l'observation, on aura (§. 84. XVI.) $\text{tang } \beta = \frac{\sin \gamma \text{ tg } \beta'}{\sin \eta}$, et $\text{tang } v = \frac{\text{tang } \beta}{\sin \alpha}$ (1).

(1) *De stella Martis, Cap. LXII.*

Par cette méthode, Kepler conclut des observations des planètes, faites dans les conjonctions, oppositions, et quadratures, que les inclinaisons et les plus grandes latitudes héliocentriques étaient invariables, au lieu que les plus grandes latitudes géocentriques étaient tantôt plus, tantôt moins grandes: ce qui prouve, que les plans des orbites planétaires passent par le soleil, et que les planètes tournent autour du soleil, et non pas autour de la terre, comme Ptolémée avait pensé, ni autour du lieu moyen du soleil suivant Copernic et Tycho (1).

§. 109. Puisque l'orbite planétaire n'est pas située dans l'écliptique, mais dans un plan incliné, on ne connaîtra la courbe décrite par la planète, qu'après avoir trouvé son lieu sur l'orbite à chaque époque, c'est-à-dire, sa vraie distance au soleil, et les directions de ces rayons vecteurs, ou l'angle qu'ils font entre eux, et que la planète a décrit autour du soleil. Cet angle est donné par les *longitudes sur l'orbite:* or les observations donnant les longitudes sur l'écliptique, il s'agit d'en déduire la *réduction* à l'écliptique: ce qui n'a aucune difficulté, si l'observation a été faite dans l'opposition, parcequ'elle donne la longitude héliocentrique λ, et que la longitude du noeud ascendant $= J$ et l'inclinaison $= \nu$ sont supposées connues. En effet on trouvera l'argument de latitude α par l'équation $\text{tang}\,\alpha = \frac{\text{tang}\,(\lambda - J)}{\cos \nu}$ (§. 83. IV.); ce qui étant ajouté à J, donnera la longitude héliocentrique dans l'orbite L. Si l'angle $\lambda - J$ est défectueux, il en résultera à peu près la même erreur sur α, parceque $\cos \nu$ est peu différent de l'unité. Comme il n'est pas question ici des erreurs d'observations, on peut supposer exacte la longitude λ observée dans l'opposition, de sorte que l'erreur ne peut naître que de la longitude J du noeud. Supposons donc que J soit trop grand d'un arc ω: alors $\lambda - J$ et α seront trop petits du même arc; en ajoutant donc J à α, l'erreur est compensée, et la longitude dans l'orbite L est sans faute. Ainsi les observations de différentes oppositions donneront les angles que la planète a parcourus autour du soleil d'une opposition à l'autre.

---

(1) *De stella Martis, Cap. XIV.*

Quant au *rayon vecteur,* il faut se rappeler que ce qu'on cherche proprement ici, est le rapport des différentes distances de la planète entre elles, et à celle de la terre au soleil; attendu que le premier rapport donne la nature de la courbe que décrit la planète, abstraction faite de sa grandeur, et le second est le rapport qui existe entre les orbites de la planète et de la terre relativement à leur grandeur. Il faut donc supposer connue la distance de la terre au soleil, et nommément la distance *moyenne,* pour avoir une mesure fixe; alors on trouvera la distance de la planète au soleil, et celle de la terre qui a lieu dans chaque observation, en parties du demi-diamètre de l'orbe terrestre, la dernière étant donnée par l'hypothèse du cercle excentrique (§. 96.). Soit donc (*Fig.* 19.) O le soleil, C la terre, A la planète en opposition, $AOC = \beta$, $ACB = \beta'$: on connaît J et ν, et par l'observation, β', la longitude héliocentrique λ, et $\lambda - J$, ce qui donne (§. 83. III.)

$$\text{tang}\,\beta = \text{tang}\,\nu \sin(\lambda - J), \quad \text{et} \quad OAC = \beta' - \beta.$$

En nommant donc $OC = a$, $CA = z$, $OA = x$, on aura

$$x = \frac{a \sin \beta'}{\sin(\beta' - \beta)} = \frac{\alpha}{\cos\beta - \cot\beta' \sin\beta}, \quad \text{et} \quad z = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta' - \beta)}.$$

Si les observations sont exactes, l'erreur ne peut provenir que de J ou de $\lambda - J = \alpha$. Or on a

$$\sin\beta = \frac{\text{tang}\,\nu \sin\alpha}{\sqrt{(1 + \text{tg}^2\,\nu \sin^2\alpha)}} \quad \text{et} \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tg}^2\,\nu \sin^2\alpha)}}, \quad \text{donc}$$

$$x = \frac{a\sqrt{(1 + \text{tg}^2\,\nu \sin^2\alpha)}}{1 - \cot\beta' \text{tg}\,\nu \sin\alpha}, \quad \text{et} \quad \partial x = \frac{a\,\partial\alpha\,\text{tang}\,\nu \cos\alpha\,(\text{tang}\,\nu \sin\alpha + \cot\beta')}{(1 - \cot\beta' \text{tg}\,\nu \sin\alpha)^2 \sqrt{(1 + \text{tg}^2\,\nu \sin^2\alpha)}}.$$

L'erreur est donc nulle, si $\alpha = 90°$; et la distance de la planète au soleil sera d'autant plus exacte, que l'opposition est plus près des limites (1).

§. 110. Cette méthode qui suppose qu'on connaît la position des noeuds et l'inclinaison, est aussi applicable hors des oppositions; et une seule observation suffit, pour déterminer à la fois la distance, la longitude, et la latitude héliocentriques. Soit (*Fig.* 32.) N*n* la ligne des noeuds, ou la commune section des plans de l'orbite planétaire NP*n* et de l'écliptique NQ*n*, S le soleil, T la terre, P la planète, PQ perpendiculaire à l'écliptique, et que la prolongation de QT rencontre la ligne des noeuds en A: les plans QSP, QAP, étant perpendiculaires à l'écliptique, A sera le centre d'un triangle

(1) *De stella Martis, Cap. XIX.*

sphérique PNQA, rectangle en Q, dont l'hypothénuse PAN fait avec le côté QAN un angle qui est l'inclinaison ν: on a donc

$$\text{tang QAP} = \text{tang}\,\nu \sin \text{QAS}.$$

L'observation donne la latitude géocentrique $PTQ = \beta'$, les longitudes connues du noeud et du soleil donnent l'angle $AST = \delta$, et l'élongation $QTS = \eta$, et par conséquent aussi $QAS = \eta - \delta$, sont connues par la longitude géocentrique observée. On a donc

$$\text{tang QAP} = \text{tang}\,\nu \sin(\eta - \delta), \text{ et } APT = \beta' - QAP;$$

d'où il viendra la distance de la planète à la terre

$$R' = PT = \frac{AT \sin QAP}{\sin(\beta' - QAP)} = \frac{AT \cdot \text{tang QAP}}{\sin\beta' - \cos\beta' \text{ tg QAP}}.$$

Or on a dans le triangle AST,

$$AT = \frac{ST \sin\delta}{\sin(\eta - \delta)} = \frac{a \sin\delta}{\sin(\eta - \delta)},$$

d'où l'on tirera

$$R' = \frac{a \text{ tang}\,\nu \sin\delta}{\sin\beta' - \cos\beta' \text{ tg}\,\nu \sin(\eta - \delta)}.$$

Maintenant on trouvera, par le moyen de R', la commutation $QST = \gamma$, la latitude héliocentrique $QSP = \beta$, et le rayon vecteur $SP = R$, suivant les formules (§. XIII—XVII.).

On peut même trouver tout cela, sans rien supposer que la longitude des noeuds. En effet, le mouvement du soleil étant connu, on sait, à quelle époque la longitude du soleil sera égale à celle du noeud, la terre étant par conséquent sur la ligne des noeuds dans un point A. Ayant donc observé la planète à cette époque, ou plusieurs fois avant et après, de manière qu'on puisse interpoler les observations, on connaît la latitude géocentrique $PAQ = \beta'$, et l'élongation $QAS = \eta$; d'où l'on tirera $\text{tang PAQ} = \text{tang}\,\nu \sin \text{QAS}$, donc $\text{tang}\,\nu = \frac{\text{tang}\,\beta'}{\sin\eta}$. Maintenant, la longitude des noeuds et l'inclinaison étant connues, on peut, par la méthode précédente, déduire de chaque autre observation la distance, la longitude et la latitude héliocentrique de la planète.

CHAPITRE VI.

Théorie de Kepler.

§. 111. Lorsque Kepler soumit à de nouvelles recherches la théorie des planètes, elle était fondée sur les propositions suivantes :

1. Les orbites de toutes les planètes sont des cercles.
2. Le soleil n'occupe pas le centre de ces cercles.
3. Il y a au dedans de chaque cercle un point d'égalité, d'où le mouvement de la planète paraît uniforme (*punctum aequantis*).
4. Ce point est dans l'orbite de la terre, le centre même.
5. Dans les autres orbites, ce point est situé sur la droite qui joint le centre et le soleil ou la terre, ensorte que le centre se trouve entre lui et le soleil, également éloigné de l'un et de l'autre suivant Ptolémée, ou à des distances différentes suivant Copernic et Tycho.

La seconde proposition avait été mise hors de doute par un grand nombre d'observations; la troisième était si vraisemblable, que Kepler chercha seulement à déterminer ce point qu'il supposait exister quelque part. Il n'eut donc a examiner que les questions suivantes:

1. Les orbites planétaires sont-elles des cercles ou une autre courbe, et quelle est cette courbe?
2. Le point d'égalité est-il le centre de l'orbite de la terre?
3. Est-il dans toutes les orbites sur la même droite avec le centre et le soleil, et à la même distance au centre que le soleil, ensorte que la *double excentricité* a lieu?

Il était naturel, que Kepler fit la première application de cette théorie au soleil, dont la théorie doit nécessairement être la base de celle de toutes les

planètes. La méthode ingénieuse qu'il imagina, pour vérifier la théorie du soleil par sa comparaison avec une planète, mérite d'être exposée ici dans tout son détail. La seule chose qu'elle suppose, c'est qu'on connaît la durée d'une révolution de la planète, et qu'on en a *quatre* observations, éloignées l'une de l'autre d'une révolution sidérale, ensorte que dans chaque observation, la planète a occupé le même point de son orbite, étant par conséquent à la même distance au soleil. Si les intervalles entre les quatre observations ne sont pas exactement égaux à la révolution sidérale, il est facile de réduire, par interpolation, les lieux géocentriqes observés à cet intervalle, les vitesses étant connues par les observations qu'on a faites avant et après l'époque où une révolution était achevée. Kepler choisit en outre des observations, où la latitude de la planète était fort petite, pour rendre insensible l'erreur qu'il aurait pu commettre dans la réduction à l'écliptique. Il ne sera pas inutile de suivre pas à pas la méthode indirecte, par laquelle Kepler parvint enfin à découvrir la vérité, que peut-être personne n'a cherché avec plus d'impartialité, et avec un zèle plus infatigable. La théorie de *Mars* étant déjà déterminée assés exactement, surtout par les observations de Tycho, Kepler commença par la supposer connue; mais on va voir, que cette supposition n'avait pas d'autre effet, que d'abréger le calcul, ou de le diriger dans les essais qu'il devait faire, conformément à sa méthode indirecte.

§. 112. Soit (*Fig.* 33.) S le soleil, C le centre de l'orbite circulaire de la terre, donc AB la ligne des apsides, et supposons que Mars ait été observé *trois* fois en P, la terre étant en T, t, τ. Kepler calcula, d'après la théorie de Mars, sa longitude héliocentrique qui détermina la direction de la droite SP, celle des lignes ST, St, Sτ, TP, tP, τP, étant donnée par les observations. On connaît donc les angles TSP, tSP, τSP, STP, StP, SτP, et par conséquent tous les angles des triangles TSP, tSP, τSP, d'où l'on trouve le rapport des côtés, c'est-à-dire, dans chaque triangle les côtés ST, St, Sτ, en parties de SP, et par conséquent le rapport des côtés ST$=a$, S$t=b$, S$\tau=c$ entre eux (1). Les angles TSt, TSτ, tSτ, étant donnés par les lieux du soleil, on connaît dans les triangles TSt, TSτ, tSτ, les côtés a et

(1) *De stella Martis, Cap.* XXIV.

b, a et c, b et c, ainsi que les angles interceptés, d'où l'on tirera le côté $Tt = e$, et les angles STt, $S\tau T$, $S\tau t$, ce qui donne $T\tau t = \gamma = S\tau t - S\tau T$. Maintenant on connaît dans le triangle TCt l'angle $TCt = 2\gamma$, l'angle $CTt = CtT = 90° - \gamma$, et le côté $Tt = e$, d'où l'on conclura

le rayon du cercle $CT = f = \frac{e}{2 \sin \gamma}$.

Les deux côtés a, f, du triangle STC, et l'angle compris $STC = STt - CTt$ étant connus, on calculera CS, ou l'excentricité $\frac{CS}{f}$, et l'angle TSC qui donne la position des apsides A, B. Mais comme la longitude de l'aphélie $A = 9^s 5° 30'$ était mieux connue que la théorie de Mars, et qu'une petite erreur relativement au lieu héliocentrique P pouvait rendre très-défectueuse la détermination des lignes a, b, c, et des autres quantités; Kepler donna successivement différentes valeurs au lieu P, jusqu'à ce que la longitude de l'aphélie se trouva égale à $9^s 5° 30'$, ce qui lui donna

l'excentricité $\frac{CS}{f} = 0{,}018$.

Comme c'est précisément la moitié de l'excentricité que Tycho avait trouvée, en supposant que le soleil tourne d'une manière uniforme autour de C, il s'en suivit la distance du point d'égalité à $S = 2CS = 0{,}036$; et il était prouvé que la *double excentricité* avait lieu pour le soleil aussi bien que pour les autres planètes (1).

§. 113. Il fallait donc supposer connu le lieu héliocentrique de Mars, ou l'aphélie de la terre, si l'on se bornait à *trois* observations. Pour éviter cela, Kepler combina avec ces trois observations une quatrième, où la terre était en θ, et il calcula avec le lieu P supposé, l'angle $T\theta t$, de la même manière dont il avait calculé l'angle $T\tau t$. Ces deux angles devront être égaux, parcequ'ils sont inscrits dans le même segment Tt. S'il se trouve donc une différence, le lieu héliocentrique de Mars sera changé, jusqu'à ce que ces deux angles soient parfaitement égaux, et alors le calcul se fera avec la direction corrigée de SP, comme ci-dessus. Kepler trouva de cette manière, l'excentricité un peu plus petite que 0,018, mais les apsides comme précédemment (2).

(1) *Ibid. Cap. XXVI.*
(2) *Ibid. Cap. XXVII.*

Il vérifia ce résultat par le procédé suivant. Si T, t, sont deux autres lieux de la terre, où Mars a été également observé en P, on connaît par observation, les angles

$$TSt = \alpha,\ STP = \beta,\ StP = \gamma.$$

Au moyen de la position des apsides, et de l'excentricité qu'on vient de trouver, on calculera pour chaque observation, l'anomalie vraie du soleil, et les rayons vecteurs en parties du demi-diamètre CT,

$$ST = a,\ St = b,$$

lesquels, avec l'angle compris α, donneront les angles STt, StT, et le côté Tt. On connait donc dans le triangle TPt, les angles

$$PTt = STt - \beta,\quad PtT = StT + \gamma,$$

et le côté compris Tt, avec lesquels on calculera TPt et TP. Maintenant on connaît dans le triangle STP, les côtés TP, $ST = a$, et l'angle intercepté $STP = \beta$, d'où l'on conclura le rayon vecteur de Mars SP, et la commutation TSP qui donne sa longitude héliocentrique. Si l'on calcule de la même manière deux autres observations de Mars en P, la terre étant en τ et θ, le calcul doit donner les mêmes valeurs de la longitude et de la distance de Mars, si la supposition qu'on a faite relativement aux élémens du soleil, est exacte. Kepler, ayant combiné de cette manière cinq observations, trouva toujours, à de très-petites différences près, la même longitude et distance du point P; d'où il résulta, que l'excentricité du soleil était exactement 0,018; que le point d'égalité était distant du centre de la même quantité, et que l'orbite solaire s'écartait insensiblement du cercle ([1]).

§. 114. La théorie du soleil étant maintenant vérifiée, la même méthode donnera la longitude héliocentrique et le rayon vecteur de la planète P à l'aide de deux observations. Connaissant dans le triangle TSt le côté Tt, les angles STt, StT, et par conséquent les angles PTt, PtT (§. 112.), on calculera dans le triangle PTt le côté PT. Alors on connaît dans le triangle PST, les côtés PT, ST, et l'angle compris STP, d'où l'on conclura le rayon vecteur SP, et l'angle TSP qui donne la longitude héliocentrique de P. En combinant deux à deux plusieurs observations, le milieu donnera

(1) *Ibid. Cap. XXVIII.*

un résultat plus juste. Kepler employa cinq observations de Mars, faites en T, ι, τ, θ, Θ, et éloignées l'une de l'autre de 686 jours 23 heures et demie: cette période n'est que de 36 secondes plus petite que la vraie année sidérale de Mars (§. 99.), et ces 36 secondes produisent, suivant le mouvement moyen, une erreur de $0'',78$ seulement. Les cinq observations étaient des années 1583, 1585, 1587, 1588, 1590. Par la combinaison de la seconde avec la troisième, Kepler trouva $SP = 1,66208$ et la longitude héliocentrique de Mars pour $1585 = 5^s8°14'32''$; par la première et la quatrième, $SP = 1,66179$ et la longitude pour $1583 = 5^s8°11'31''$, ou en ajoutant la précession des équinoxes en 677 jours $= 1'35''$, la longitude pour $1585 = 5^s8°13'6''$; la différence ou l'erreur était donc, pour la longitude $= 1'26''$, et pour la distance $= 0,00029$. Pour la cinquième observation, Kepler, en supposant la distance SP, telle qu'elle vient d'être trouvée, calcula l'angle au soleil, et trouva la longitude de Mars pour $1590 = 5^s8°19'52''$: en retranchant la précession depuis $1585 = 4'44''$, on trouve pour $1585 = 5^s8°15'8''$, ce qui donne une erreur de $36''$ seulement, qu'il faut attribuer aux erreurs d'observations, et à la valeur de SP qui n'est pas proprement le rayon vecteur mais la distance *accourcie* (§. 84.). Pour trouver une valeur moyenne, Kepler choisit, pour déterminer la distance, les observations les plus éloignées de SP, Θ, ι, τ, parcequ'il est aisé de voir, que l'erreur qu'on peut avoir commise dans la détermination des angles, aura sur la grandeur de SP une moindre influence, en Θ, ι, τ, qu'en T ou θ. Par la même raison il choisit, pour déterminer la longitude, les observations T, θ. Ce qu'il trouva de cette manière, était la distance accourcie $SP = D$, et la longitude sur l'écliptique $= \lambda$, qu'il était facile de réduire à l'orbite. En effet, l'observation donne la latitude β' et la longitude géocentriques; la dernière, combinée avec le lieu du soleil observé et la longitude héliocentrique de Mars, donne l'élongation η et la commutation γ, d'où l'on conclura, à l'aide des formules (§. 83. 84.), $\operatorname{tang}\beta = \frac{\sin\gamma \operatorname{tg}\beta'}{\sin\eta}$, et $R = D \sec\beta$. Comme l'inclinaison ν peut être supposée assés bien connue, on aura $\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin\nu}$, ce qui donnera la réduction ϱ, et $L = \lambda + \varrho$. C'est ainsi que Kepler trouva la distance accourcie

SP = 1,6618; le rayon vecteur = 1,66228; et la longitude sur l'orbite pour le 31 Octobre 1590 à 6 heur. 15 min. du matin = $5^s 8^\circ 19' 20''$ (1).

Au moyen de cette méthode on peut, sans le secours d'aucune hypothèse, trouver la longitude, la latitude, et la distance, héliocentriques de la planète, dans chaque point de son orbite, où elle a été observée deux fois: ce qui suffit pour déterminer toute l'orbite.

§. 115. Maintenant il s'agissait d'examiner, si l'hypothèse adoptée jusqu'alors (§. 111.), et que toutes les observations paraissaient confirmer relativement au soleil, avait aussi lieu à l'égard des planètes, c'est-à-dire, si leurs orbites étaient circulaires; et Kepler fit cette vérification, en comparant l'hypothèse, 1) avec les longitudes héliocentriques, observées immédiatement dans les oppositions, 2) avec les longitudes géocentriques hors des oppositions, 3) avec les latitudes, 4) avec les distances. La longitude des noeuds et l'inclinaison étaient connues, par les méthodes précédentes, assés exactement, pour réduire à l'orbite les longitudes observées dans les oppositions, sans erreur sensible. La précession étant aussi connue, Kepler trouva de cette manière l'angle que Mars avait décrit autour du soleil d'une opposition à l'autre, et quatre oppositions lui servirent à déterminer l'orbite de Mars.

En supposant (*Fig.* 34.) que le soleil est en S, et que Mars a été observé dans les quatre oppositions M, N, O, P, on connaît la direction des lignes SM, SN, SO, SP, et les angles MSN, NSO, OSP, PSM, dont la somme fait 360°; mais les points M, N, O, P, sur ces lignes sont inconnues. Si l'hypothèse est juste, que ces quatre points sont situés sur la circonférence d'un cercle, il faut que la somme de deux angles opposés, NMP + NOP = MNO + MPO soit égale à 180°. De plus, si C est le centre de ce cercle, chaque angle au centre doit être le double de l'angle inscrit dans le même segment, MCN = 2MON = 2MPN, etc. Enfin, s'il existe sur la droite SC un point E, autour duquel le mouvement est uniforme, il faut que les angles MEN, NEO, OEP, soient entre eux comme les tems

(1) *Ibid. Cap. XXVIII.*

écoulés d'une opposition à l'autre. Kepler résolut ces problèmes de la manière suivante. Faisons, pour abréger,

l'anomalie vraie $ASM = \alpha$,

l'équation du centre $EMS = \phi$,

l'anomalie moyenne $AEM = \gamma = \alpha + \phi$,

le demi-diamètre du cercle $CA = CB = a$,

l'excentricité $CS = c$,

la distance du point d'égalité $CE = e$.

Kepler commence par donner à α une valeur arbitraire qu'il détermine cependant, pour approcher plus vite de la vérité, conformément à la position des apsides AB connue à peu près. La différence entre la longitude moyenne, aussi connue à très-peu près, et la longitude observée, donne ϕ et $\gamma = \alpha + \phi$. La durée d'une révolution de Mars, et les tems écoulés entre deux oppositions, font connaître les angles MEN, NEO, OEP, et par conséquent $AEN = \gamma + MEN$, $AEO = 360° - (AEN + NEO)$, $AEP = AEO - OEP$. Connaissant par observation, les angles MSN, NSO, OSP, on aura $ASN = MSN + \alpha$, $ASO = 360° - (ASN + NSO)$, $ASP = ASO - OSP$; ce qui donne les équations du centre $ENS = AEN - ASN$, $EOS = AEO - ASO$, $EPS = AEP - ASP$. Maintenant le triangle EMS fournira les équations

$$SM = \frac{(c+e)\sin\gamma}{\sin\phi}, \quad SN = \frac{(c+e)\sin AEN}{\sin ENS}, \quad SO = \frac{(c+e)\sin AEO}{\sin EOS}, \quad SP = \frac{(c+e)\sin AEP}{\sin EPS}.$$

Au moyen de ces valeurs on aura dans le triangle MSN,

$$\text{tang } MNS = \frac{SM \sin MSN}{SN - SM\cos MSN} = \frac{\sin\gamma . \sin MSN . \sin ENS}{\sin\phi \sin AEN - \sin\gamma \cos MSN . \sin ENS},$$

et l'on trouvera de la même manière les angles NMS, ONS, NOS, POS, OPS, PMS, MPS, MOS, OMS. Maintenant la somme de $MNO = MNS + ONS$ et de $MPO = MPS + OPS$, ainsi que $NMP + NOP = NMS + PMS + NOS + POS$, doivent être 180°. S'il se trouva une différence, Kepler donna successivement différentes valeurs à α, sans changer γ, jusqu'à ce que ces deux sommes étaient égales à 180°. Alors il était certain, que les points M, N, O, P, était sur la circonférence d'un cercle, mais que cela ne pouvait plus avoir lieu, quand α prendrait une autre valeur, γ restant invariable: d'où il suivait qu'il ne fallait changer aucun de ces angles, ou qu'il fallait changer tous les deux à la fois. Cela posé, on a

$$MN = \sqrt{(SM^2 + SN^2 - 2SM.SN.\cos MSN)},$$

$$MON = MOS + NOS, \quad MCN = 2MON,$$

$$CM = CN = \frac{MN}{2\sin MON}, \text{ et } MNC = NMC = 90° - MON;$$

$$\text{tang } NMS = \frac{\sin\phi . \sin AEN . \sin MSN}{\sin\gamma \sin ENS - \sin\phi \sin AEN \cos MSN},$$

$$CMS = NMC - NMS,$$

$$\text{tang } CSM = \frac{CM \sin CMS}{SM - CM \cos CMS}.$$

Le facteur $c + e$ étant commun à tous les côtés SM, SN, MN, CM, il disparaîtra de la dernière formule, et l'on a trouvé CSM, sans faire aucune hypothèse relativement aux excentricités c, e. Cet angle devrait être égal à $ASM = \alpha$: s'il se trouve donc une différence, cela prouve que la valeur supposée de α est fautive; il faudra donc changer à la fois γ et α, et réitérer tous les calculs précédens. Après avoir donné à γ une valeur différente de la première, l'angle α seul est changé, jusqu'à ce que la somme des deux angles opposés soit 180°. Au moyen de ces deux valeurs correspondantes de α et γ, l'angle CSM ou α est calculé, de la manière qui vient d'être développée; et tous ces calculs seront refaits, jusqu'à ce que la valeur calculée de CSM soit parfaitement d'accord avec la valeur supposée de α. Kepler assure (1) qu'il a fait 70 fois tous ces calculs, ou 70 différentes suppositions; et le calcul de la dernière supposition, qu'il donne en détail, remplit dix pages in-folio.

Les anomalies α et γ étant enfin trouvées de cette manière, la longitude héliocentrique en M donne celle de l'aphélie A et l'équation du centre $\phi = \gamma - \alpha$. Dans le triangle MSC on a

$$c = \frac{a . \sin CMS}{\sin CSM}, \quad ACM = CSM + CMS, \quad CME = \gamma - ACM,$$

ce qui donne

$$e = \frac{a \sin CME}{\sin\gamma}.$$

Kepler trouva de cette manière,

la longitude de l'aphélie pour $1587 = 4^s\,28°\,48'\,55''$,

$\frac{c}{a} = 0,11332$, $\frac{e}{a} = 0,07232$; donc $\frac{c+e}{a} = 0,18564$.

Il appelle $\frac{c}{a}$ *eccentricitas eccentrici*, $\frac{e}{a}$ *eccentricitas æquantis*, $\frac{c+e}{a}$ *eccentricitas tota*:

(1) *Ibid. Cap. XVI. pag.* 95.

la *demi*-excentricité était donc 0,09282 (1). Après avoir déterminé de cette manière l'excentricité et la position des apsides, il pouvait calculer pour une époque donnée, la longitude moyenne, l'équation du centre, et par conséquent la longitude vraie. Il calcula ainsi douze longitudes héliocentriques, observées dans les oppositions, et trouva partout le calcul si bien d'accord avec les observations, que la plus grande différence n'était que de 2′ 12″, ou en excluant une seule observation, de 1′ 47″ (2). Il avait donc prouvé que, dans l'orbite de Mars, l'hypothèse s'accordait parfaitement avec les longitudes dans les conjonctions; et il restait à examiner, si elle était aussi bien d'accord avec les latitudes, et les longitudes hors des oppositions.

§. 116. Pour déterminer les *latitudes* héliocentriques, Kepler choisit les oppositions, où Mars était à la fois près des limites et des apsides, attendu que les lignes des noeuds et des apsides de cette planète, ainsi que de Jupiter, se coupent presque perpendiculairement. Il en résulta deux avantages, 1) que la latitude calculée ne pouvait être fort défectueuse, parce qu'aux limites les latitudes changent insensiblement; 2) qu'il était facile de déduire de la distance de Mars au soleil dans l'opposition, celle qui devait avoir lieu dans les apsides mêmes.

Soit (*Fig.* 31.) S le soleil, et supposons que Mars ait été observé deux fois en opposition en P et *p*, la terre étant en T et *t*, près des limites boréale et australe, ainsi que de l'aphélie et du périhélie. Ayant abaissé PQ, *pq*, perpendiculairement à l'écliptique, la théorie du soleil et les observations donnent

$ST = a$, $St = b$, et les latitudes géocentriques $PTQ = \alpha$, $ptq = \beta$.

La position des noeuds et l'inclinaison étant connues, ainsi que la longitude héliocentrique, on calculera (§. 109.)

les latitudes héliocentriques $PSQ = \gamma$, $pSq = \delta$,

et les distances $SP = a'$, $Sp = b'$.

Kepler calcula deux observations de cette espèce, et trouva

$$a = 0{,}975;\quad b = 1{,}014;\quad \alpha = 4°\,32'\,10'',\quad \beta = 6°\,3'\,0'',$$

(1) *Ibid. Cap. XVI.*
(2) *Ibid. Cap. XVIII.*

les longitudes héliocentriques en $Q = 4^s\,21°$, en $q = 11^s\,12°$,

le noeud ascendant $= 1^s\,16°$, donc

les argumens de latitude $95°$ et $-64°$,

d'où l'on tire, à l'aide de l'inclinaison $= 1°\,50'$,

$\gamma = 1°\,49'\,30''$, $\delta = 1°\,39'$; ce qui donne

$TPS = \alpha - \gamma = 2°\,42'\,40''$, $tpS = \beta - \delta = 4°\,24'$,

$a' = \frac{a \sin \alpha}{\sin SPT} = 1{,}63$; $b' = \frac{b \sin \beta}{\sin Spt} = 1{,}393$.

Or l'aphélie étant à peu près dans $4^s\,29°$ (§. 115.), et par conséquent les anomalies $-8°$ et $193°$, on trouvera l'accroissement et le décroissement de la distance depuis les observations jusqu'aux apsides, quand même l'excentricité ne serait connue qu'à peu près, parceque les distances changent insensiblement aux apsides. Au moyen de l'excentricité précédente (§. 115.) Kepler calcula, que le rayon vecteur dans l'aphélie, devait être plus grand de 0,0015 que a', et dans le périhélie plus petit de 0,003 que b'; ensorte qu'en supposant l'aphélie de Mars en P, le périhélie en p, et le centre de l'orbite en C, il était

$SP = 1{,}6315$; $Sp = 1{,}39$; $CP = Cp = 1{,}51075$;

en parties du rayon de l'orbe terrestre. Cela donne

$CS = SP - CP = 0{,}12075$, donc l'excentricité de l'excentrique $\frac{CS}{CP} = 0{,}08$.

Si l'on employait la distance moyenne $= 1$ au lieu des rayons vecteurs de la terre a et b, on trouverait l'excentricité $= 0{,}09943$: le milieu entre ces deux valeurs est à très-peu près $= 0{,}09$. Par la méthode précédente (§. 115.) Kepler avait trouvé

l'excentricité de l'*excentrique* $= 0{,}11332$;

l'excentricité de l'*équant* $= 0{,}07232$;

l'excentricité *entière* $= 0{,}18564$.

La première est beaucoup plus grande que celle qu'on vient de trouver; la moitié de la dernière $= 0{,}09282$ est peu différent du milieu 0,09. Il s'en suivait, que l'hypothèse précédente, qui suppose que les deux excentricités c, e, sont inégales, s'accorde bien avec les longitudes, mais non avec les latitudes dans les oppositions, les dernières supposant plutôt, à ce qu'il paraît, la *double* excentricité (*bisectio* eccentricitatis). En conséquence, Kepler

essaya de calculer les longitudes avec la double excentricité, et il trouva que, dans les oppositions qui arrivaient à 90° des apsides, le calcul ne s'écartait des observations que de 2′, mais que la différence se montait à 8′ dans les oppositions qui arrivaient dans les apsides, ou à une distance de 45°. La différence de 2′ pouvait naître des erreurs d'observation; mais une erreur de 8′ parut à Kepler assés considérable, pour rendre suspecte l'hypothèse circulaire, ou du moins pour la soumettre à un nouvel examen. Ces 8′, et la précision des observations de Tycho, qui n'admit pas une erreur aussi grande, furent, du propre aveu de Kepler (1), la raison qui le porta à reprendre ses recherches; et c'est à ces nouvelles recherches, ou à ces 8 minutes que nous devons la découverte des véritables mouvemens célestes.

§. 117. On peut se servir de deux procédés, pour examiner, si les élémens de l'orbite excentrique, qui ont été déterminés par le moyen des longitudes et latitudes dans les oppositions, s'accordent aussi avec les longitudes observées hors des oppositions. Ayant observé Mars deux fois au même point de son orbite, on peut en conclure sa longitude, latitude, et distance, héliocentriques (§. 114.); et la comparaison du lieu ainsi observé avec celui que donne le calcul fait avec les élémens, servira à les vérifier. Kepler préféra le procédé suivant. Pour que le calcul, fait avec les élémens supposés, donnât un résultat plus exact, il choisit des observations où Mars était très-près des apsides, et par conséquent l'équation du centre très-petite. A l'aide du tems de l'observation, du lieu des apsides, et de l'excentricité, il calcula la longitude moyenne, l'anomalie moyenne, l'équation du centre, et la longitude héliocentrique vraie. Il connaissait donc dans le triangle TSL (*Fig.* 22.) les angles à la terre et au soleil, T, S, et le côté compris, d'où il conclut la distance accourcie SL. Maintenant, le lieu des noeuds et l'inclinaison étant connus, on trouvera le rayon vecteur SP bien exactement (§. 83. 84.), quand même ces élémens seraient un peu défectueux. Ayant ainsi calculé deux observations très-proches de l'aphélie et du périhélie, Kepler en conclut, comme ci-dessus (§. 116), les distances dans les apsides

(1) *Ibid. Cap. XIX. pag.* 114. „Sola igitur haec octo minuta viam praeiverunt ad totam Astronomiam reformandam.“

même, dont la demi-somme, étant ôtée de la plus grande distance, donne l'excentricité. Il la trouva constamment, ainsi que par le moyen des latitudes (§. 116.), plus petite que 0,11332 (§. 115.), et à peu près égale à la moitié de l'excentricité entière. Il fallait en tirer la même conclusion, que Ptolémée avait eu raison de diviser l'excentricité des planètes en deux parties égales, et que, si l'on ne voulait pas abandonner l'hypothèse circulaire, il n'existait sur la ligne des apsides aucun point fixe, autour duquel le mouvement fût uniforme, parceque la distance de ce point au centre se trouvait tantôt plus tantôt moins grande. C'était cependant une des hypothèses adoptées par Ptolémée, Copernic et Tycho: on pouvait donc présumer, que l'autre hypothèse, celle de l'orbite circulaire, n'était pas plus juste. Kepler pensa à bonne raison, que les distances étaient les plus propres à décider cette question, ainsi qu'on va le voir (1).

Cela expliqua en même tems le paradoxe, que la première hypothèse, dont la fausseté était prouvée, donna cependant la vraie longitude dans toutes les oppositions, de manière qu'il semblait que la vérité découlait de fausses prémisses. En effet, cette hypothèse ne présente que les longitudes, ou la direction dans laquelle se trouve la planète, mais non pas le point qu'elle occupe sur cette ligne, ou sa distance au soleil. Il est visible que dans les oppositions, les distances n'influent pas sur les longitudes qui sont observées immédiatement, mais seulement sur les latitudes qui sont converties en latitudes héliocentriques moyennant les distances: aussi les latitudes dans les oppositions indiquaient-elles l'erreur de l'hypothèse (§. 116.). Mais quand il s'agit de convertir les longitudes géocentriques, observées hors des oppositions, en héliocentriques, les distances ont une grande influence, et les erreurs de l'hypothèse circulaire se manifestent. Il est vrai que ces erreurs doivent aussi altérer les longitudes dans les oppositions, vu que les angles doivent nécessairement éprouver des changemens, si l'on substitue au cercle une autre courbe; mais cette différence est trop petite, pour être aperçue avec les instrumens de ce tems, ainsi que Kepler l'a montré avec la plus grande clarté (2).

(1) *Ibid. Cap. XX.*
(2) *Ibid. Cap. XXI.*

§. 118. La méthode du §. 114. donne la distance et la longitude héliocentrique de la planète, sans rien supposer. Mais pour déterminer par ces distances la nature de l'orbite, il faut chercher d'abord la position des apsides, afin que les observations, faites vers ces points, donnent la distance la plus grande et la plus petite. Il est aisé de trouver cela, dans la supposition que l'orbite est circulaire, dès qu'on a déterminé de cette manière trois lieux héliocentriques d'une planète. Soient (*Fig.* 33.) ces lieux en T, t, τ, le soleil en S. Connaissant les angles TSt, $TS\tau$, $tS\tau$, et les côtés ST, St, $S\tau$, on calculera Tt, et les angles STt, $S\tau T$, $S\tau t$, donc $T\tau t = S\tau t - S\tau T$, et $TCt = 2T\tau t$; d'où l'on tire

$$CT = \frac{Tt}{2 \sin T\tau t}, \quad CTt = CtT = 90° - T\tau t, \quad STC = STt - CTt.$$

Les côtés ST, CT, et l'angle compris STC, donnent dans le triangle CST le côté CS et l'angle AST, ce qui fait connaître l'excentricité et la position des apsides. Les distances ST, etc. d'où dépend tout le reste, sont données en demi-diamètres de l'orbe terrestre (§. 114.): CT sera donc exprimé par le même demi-diamètre, ce qui donne le rapport entre les orbites de la terre et de la planète. En réduisant ainsi divers lieux héliocentriques de Mars, Kepler trouva des valeurs fort différentes, pour le demi-diamètre de l'orbite, l'excentricité, et le lieu des apsides. Comme cette méthode ne suppose rien, si non que l'orbite est circulaire, il en conclut avec raison, que l'orbite de Mars n'était pas circulaire (1).

Cela posé, trois lieux héliocentriques ne suffisent plus, pour déterminer l'orbite. Kepler employa donc des lieux très-proches des apsides, Mars ayant été observé deux fois dans chaque point, ensorte qu'on pouvait égaler les distances, conclues des observations, à celles dans les apsides, ou qu'il était aisé d'en déduire celles-ci. Si le soleil est en S (*Fig.* 35.), et que Mars ait été observé deux fois en P, la terre étant en T et t, on connaît les angles STP, StP, TSt, et les côtés ST, St. La distance SP étant à peu près connue, Kepler la changea successivement, jusqu'à ce que les angles TSP, tSP, calculés avec SP, ST, et STP, donnaient une somme égale à l'angle TSt, et que les deux longitudes héliocentriques de P qui en résultaient, ne

(1) *Ibid. Cap. XLI.*

différaient l'une de l'autre que de la précession des équinoxes dans l'intervalle entre les deux observations. Par ce moyen il trouva la longitude héliocentrique et la distance de Mars près des apsides, avec une grande précision; et deux longitudes opposées, l'une près de l'aphélie, l'autre près du périhélie, lui donnaient, à l'aide de la méthode qu'il avait imaginée pour cet effet (§. 90. 91.), le lieu des apsides, et l'époque du passage de Mars par ces points. Mais comme les vitesses vraies de la planète, a, b, que cette méthode exige, ne pouvaient pas être observées immédiatement, comme celles du soleil, Kepler les chercha de la manière suivante. Soit (*Fig.* 36.) S le soleil, AB la ligne des apsides, C le centre, E le point d'égalité, CE = CS: Mars ayant été observé deux fois en P et en Q, la méthode précédente donne à peu près $SA = q$, $SB = p$. En nommant donc $ASP = a$, $BSQ = b$, les vitesses vraies dans l'aphélie et le périhélie, la vitesse moyenne $AEP = BEQ = m$, on aura

$$a = \frac{AP}{q}, \quad b = \frac{BQ}{p}, \quad AP = AE.m = pm, \quad BQ = BE.m = qm, \text{ donc}$$

$$a : b :: \frac{p}{q} : \frac{q}{p} :: p^2 : q^2,$$

c'est-à-dire, *les vitesses angulaires dans les apsides sont en raison inverse des carrés des distances*. On a d'ailleurs

$$BEQ = m = \frac{BQ}{q}, \text{ donc } a : m :: AP : BQ :: p : q,$$

ou en faisant $AC = BC = c$, $CS = CE = e$,

$$e : m :: c - e : c + e :: c^2 - e^2 : (c + e)^2;$$

or e étant très-petit en comparaison de c, on aura à peu près

$$a : m :: c^2 : (c + e)^2 :: AC^2 : AS^2, \text{ et } a = \frac{m}{\left(1 + \frac{e}{c}\right)^2}.$$

A l'aide de cette formule, Kepler conclut du mouvement moyen m qui était bien exactement connu, et de l'excentricité supposée $\frac{e}{c}$, les vraies vitesses aphélie et périhélie, a, b, lesquelles, étant substituées dans les formules (§. 90. 91.), donnaient la longitude de l'aphélie de Mars $= 4^s\,28^\circ\,39'\,46''$, d'où Kepler conclut

$$q = 1{,}6678; \quad p = 1{,}385; \quad c = \frac{p+q}{2} = 1{,}5264; \quad \frac{e}{c} = \frac{q-c}{c} = \frac{0{,}1414}{1{,}5264} = 0{,}09264.$$

L'excentricité *totale* qui résultait des longitudes dans les oppositions (§. 115.) =

0,18564 est à très-peu près le double de $\frac{e}{c}$; ce qui était une nouvelle preuve, que l'excentricité de Mars SE était divisée par le centre en deux parties égales, ainsi que Ptolémée l'avait supposé. Cette méthode donna donc l'excentricité et l'anomalie vraie ASP, ce qui suffisait pour calculer l'équation du centre et la longitude moyenne ou l'*époque* (1).

§. 119. Maintenant, l'époque étant connue, le moyen mouvement de Mars donnait, pour chaque moment, l'anomalie moyenne, et à l'aide de l'excentricité, l'équation du centre, et l'anomalie vraie ASP $= v$ (*Fig.* 34.), avec laquelle Kepler calcula le rayon vecteur SP. Connaissant dans le triangle CSP, les côtés CP $= c$, CS $= e$, CSP $= v$, on trouvera $\sin \text{CPS} = \frac{e \sin v}{c}$, et $\text{SP} = \frac{c \sin (v + \text{CPS})}{\sin v}$. Pour la même époque, il calcula, suivant la méthode précédente (§. 114.), la distance SP; et en comparant entre elles les deux valeurs du rayon vecteur, calculées sur les élémens et sur les observations, en différens points de l'orbite, il trouva le résultat constant, que les distances, conclues des observations, étaient partout plus petites que celles calculées suivant l'hypothèse circulaire, ainsi que le font voir les trois observations suivantes (2).

Anomalie vraie	9° 37′ 24″	36° 42′ 41″	104° 24′ 48″
Distance calculée	1,66605	1,63883	1,48539
Distance observée	1,66255	1,63100	1,47750
Différence	0,00350	0,00783	0,00789

On voit que les différences augmentent, ou que la vraie orbite s'écarte du cercle de plus en plus, à mesure qu'elle s'éloigne des apsides; d'où il suit que l'orbite est une courbe alongée ou *ovale* qui, depuis chaque apside, rentre au dedans du cercle, comme ADB (*Fig.* 36.) (3). On aura observé que, dans toutes les opérations qui ont été développées jusqu'ici, Kepler a toujours employé les vraies longitudes du soleil, en substituant le lieu *vrai*

(1) *Ibid. Cap. XLII.*

(2) *Ibid. Cap. XLIV. pag.* 213.

(3) *Ibid. pag.* 213. 214. „ Orbita Planetae non est circulus, sed ingrediens ad latera utraque „ paulatim, iterumque ad circuli amplitudinem in perigaeo exiens: cujusmodi figuram itineris „ *ovalem* appellitant."

au lieu moyen que ses prédécesseurs avaient employé. En suivant le même procédé, il compara principalement les distances de Mars, où cette planète avait eu la même situation relativement à la ligne des apsides qui passe par le vrai lieu du soleil, et il trouva toujours les mêmes distances, quand l'anomalie vraie de la planète était égale avant et après l'aphélie: d'où il suivait,

1. que la ligne des apsides divise l'orbite de Mars en deux parties égales et semblables,
2. que cette ligne passe par le lieu *vrai* du soleil, et non par le lieu moyen, et que par conséquent Kepler avait eu raison de réduire les mouvemens des planètes, non pas au lieu *moyen* du soleil, ainsi que Ptolémée, Copernic, et Tycho l'avaient fait, mais au lieu *vrai* (1).

Kepler se servit encore d'une autre méthode qui mérite d'être exposée ici. Si Mars a été observé peu de tems avant et après son opposition avec le soleil S, en M et *m* (*Fig.* 35.), la terre étant en T et en *t*, et que les droites TM, *tm*, se rencontrent en P; on connaît les angles STP, S*t*P, TS*t*, et les côtés ST, S*t*. Or MS*m* étant un angle fort petit, les élémens de l'orbite de Mars, établis alors, donnaient avec une exactitude suffisante, le vrai mouvement diurne et l'angle MS*m*, ainsi que le rapport entre les distances SM, S*m*, quoique le lieu héliocentrique M et le rayon vecteur SM ne fussent pas connus exactement. En donnant à ces deux quantités, pour un premier essai, les valeurs conformes à la théorie, on a les angles TSM, *t*S*m* = TS*t* − TSM − MS*m*, et les côtés ST, SM, S*t*, S*m*. Kepler calcula avec ces valeurs, les angles STP et S*t*P, en changeant les valeurs de SM et du lieu M, jusqu'à ce que les angles STP, S*t*P, étaient égaux aux élongations observées STM, S*tm*: alors les véritables distances SM, S*m*, et les longitudes héliocentriques de Mars en M et *m* étaient connues (2).

§. 120. Après avoir établi ainsi l'orbite de Mars, Kepler appliqua les mêmes méthodes aux autres planètes, et il trouva partout le même résultat: la théorie de Mars, modifiée selon les élémens des différentes planètes, se

(1) *Ibid. Cap. LI. LII.*
(2) *Ibid. Cap. LIII.*

se trouva dans tous les cas d'accord avec les observations. Cette théorie consistait dans ces trois propositions ou hypothèses: 1. les orbites planétaires ne sont pas des cercles parfaits, mais aplatis ou alongés; 2. le soleil n'en occupe pas le centre; 3. il y a du côté opposé du centre, et à même distance que le soleil, un point, d'où le mouvement paraît, du moins à très-peu près, uniforme. En comparant les révolutions entières avec les mouvemens vrais, Kepler trouva par la méthode, développée ci-dessus (§. 90.), le lieu des apsides; et les distances, observées près des apsides (§. 114.), lui firent connaître la plus grande distance, la plus petite, et la moyenne, donc le rayon de l'orbite, ou le demi-grand axe qui est la ligne des apsides, et l'excentricité. Si nous avons à présent des élémens des planètes plus exacts, nous le devons aux observations, faites depuis le tems de Kepler avec des instrumens plus parfaits, aux nouvelles méthodes qni seront expliquées ci-après, et même à la découverte de Kepler relativement au rapport qui existe entre les différentes orbites: ce rapport que Kepler avait déduit des observations imparfaites des distances, a été pris par les astronomes modernes pour base, dont ils se sont servis pour déterminer les distances avec une précision dont les observations n'étaient pas susceptibles. La table suivante présente les élémens, tels qu'ils ont été déterminés par Kepler et par les observations les plus modernes: les derniers sont ajoutés, pour qu'on puisse juger du degré de précision que donnent les observations de Tycho et les méthodes de Kepler; on verra ci-après, comment ils sont trouvés.

Elémens excentriques des Planètes suivant Kepler

	La plus grande distance	La plus courte distance	Distance moyenne	Excentricité
Saturne	10,05147	8,96860	9,510035	0,056933
Jupiter	5,45074	4,94926	5,200000	0,048219
Mars	1,66465	1,38234	1,523495	0,092652
La Terre	1,01800	0,98200	1,000000	0,018000
Vénus	0,72914	0,71912	0,724130	0,006919
Mercure	0,46956	0,30656	0,388060	0,210019

suivant les astronomes modernes				
Saturne	10,07404702	9,00299398	9,5387705	0,05616830
Iupiter	5,45345325	4,95212895	5,2027911	0,04817840
Mars	1,66560117	1,38178583	1,5236935	0,09313400
La Terre	1,01677976	0,98322024	1,0000000	0,01677976
Vénus	0,72828928	0,71837532	0,7233323	0,00685298
Mercure	0,46665254	0,30754366	0,3870981	0,20551494

Les deux premières colonnes sont les seules qui aient été déterminées immédiatement par observation. Leur demi-somme donne les nombres de la troisième colonne, et leur demi-différence, divisée par ces derniers nombres, donne ceux de la quatrième colonne. En conséquence, les quantités, renfermées dans les trois premières colonnes, sont exprimées en demi-diamètres de l'orbite terrestre, celles de la quatrième colonne en parties du demi-diamètre de l'orbite à laquelle elles appartiennent, pour qu'on puisse voir d'un coup, combien chaque orbite s'écarte du cercle: on voit par ex. que l'orbite de Vénus approche le plus du cercle, et que celle de Mercure s'en écarte le plus.

§. 121. Dès qu'il était prouvé que les orbites planétaires ne sont pas des cercles, il était naturel de penser à la courbe qui est la plus simple après le cercle, et qui s'en écarte le moins, savoir l'*Ellipse*; cependant, pour ne rien supposer sans l'avoir prouvé, Kepler chercha à déterminer cette courbe immédiatement par observation; et il était clair, que les distances, qui avaient fait voir que la courbe s'écartait du cercle, seraient aussi les plus propres à indiquer sa nature. Après avoir essayé inutilement diverses lignes fermées et ovales, il trouva une ellipse qui donnait les distances trop petites, tandis que le cercle les avait données trop grandes (§. 119.); d'où il conclut que la vraie orbite devait nécessairement tomber entre le cercle et *cette* ellipse; et comme le milieu entre ces deux courbes ne peut être qu'une *autre* ellipse, il n'hésita plus à reconnaître pour une vérité démontrée, que toutes les orbites planétaires sont des *Ellipses*, mais que la nature individuelle de cette ellipse, son excentricité, ou le plus et le moins dont elle s'é-

carte du cercle, doit être déterminé pour chaque orbite par des observations ultérieures (1).

Kepler avait démontré que, C étant le centre de l'orbite elliptique (*Fig.* 37.), le soleil est placé hors du centre en S, et qu'en prenant sur la droite CS, CF = CS, le mouvement de la planète, vu du point F, paraît uniforme. Voilà donc, outre le centre de l'ellipse, deux points sur le grand axe, S, F, dont dépend entièrement le mouvement des planètes, et qui sont également distans du centre: il était bien naturel de supposer, que ces deux points importans étaient les foyers de l'ellipse, les seuls points marquans au dedans de cette courbe, et qui sont doués de tant de propriétés remarquables. Il ne restait donc qu'à examiner, si c'était réellement le cas, c'est-à-dire si le soleil occupait un des foyers de l'ellipse; et cela pouvait se faire par le procédé suivant. En nommant le grand et le petit demi-axe de l'ellipse, $CA = a$, $CD = b$, la distance des foyers au centre, qui est supposée égale à l'excentricité, $CS = CF = c$; les observations donnent:

$$AS,\ BS,\ a = \frac{AS + BS}{2},\ c = \frac{AS - BS}{2},\ \text{et}\ b = \sqrt{(a^2 - c^2)},$$

ce qui suffit pour déterminer l'ellipse. Si la planète est en p, on peut calculer avec l'anomalie vraie $ASp = v$, le rayon vecteur Sp, ainsi qu'on le verra ci-après. A l'aide des méthodes développées ci-dessus, on peut déterminer par observation la distance Sp, sans supposer l'orbite elliptique. La comparaison de cette distance observée avec le rayon vecteur, calculé suivant la nature de l'ellipse, décidera donc la question. La route par laquelle Kepler parvint à la découverte des trois fameuses lois du mouvement planétaire, auxquelles nous devons toute l'astronomie moderne, est à la vérité plus longue; mais elle mérite sous plusieurs points de vue, d'être éclaircie ici, d'autant plus qu'on a besoin de toute l'attention possible, pour suivre le fil des idées et des raisonnemens de Kepler, qui le conduisit enfin à travers un labyrinthe, dans lequel il pensa souvent s'égarer (2).

(1) *Ibid. Cap. LVIII. pag.* 284. 285. „ Circulus Cap. 43. peccat excessu, ellipsis Cap. 45. peccat defectu. Et sunt excessus ille et hic defectus aequales. Inter circulum vero et ellipsin „ nihil mediat nisi ellipsis alia. Ergo *ellipsis est Planetae iter.*

(2) *Ibid. Cap. LVIII.* au commencement.

§. 122. Soit (*Fig.* 25.) C le centre du cercle ASB, S une planète, T le soleil, F le point d'égalité, et CF = CT; les recherches précédentes ayant prouvé, que cette hypothèse satisfait exactement aux anomalies et aux équations du centre, mais non pas aux distances. Si donc $Aa = s$ est un très-petit arc près de l'aphélie, on aura $AFa = \frac{s}{AF}$: or les angles, décrits autour de F, étant proportionnels au tems, il s'en suit que les tems dans lesquels le même arc s est décrit aux deux apsides A, B, sont en raison inverse de AF, BF, ou ce qui revient au même, en raison directe des distances au soleil, AT, BT. Cette proportion n'a lieu que dans les apsides; mais Kepler la prit pour une loi générale dans toute l'orbite. Supposant donc, que le tems que la planète emploie à parcourir un arc infiniment petit, est partout en raison de sa distance au soleil, il résulte de la théorie des proportions, que le tems que la planète emploie à parcourir un arc quelconque (la somme de tous les arcs infiniment petits dont il est composé), doit être proportionnel à la somme de toutes les distances, ou de tous les rayons vecteurs, renfermés dans cet arc. Kepler, pensant que cette *somme* n'était autre chose que la surface couverte par tous ces rayons vecteurs, ou l'*aire* du secteur décrit autour du soleil, en conclut, que les tems dans lesquels les planètes décrivent des arcs quelconques, étaient proportionnels à l'aire des secteurs elliptiques dont le sommet est dans le soleil, et que par conséquent l'anomalie *moyenne*, étant aussi proportionnelle au tems, pouvait être exprimée par ce secteur. Il s'en suit que le tems, employé à parcourir un arc infiniment petit, est pareillement proportionnel à son secteur: or comme Kepler supposait, que ce tems était aussi proportionnel à la distance au soleil, il s'en suivrait, que les secteurs infiniment petits fussent en raison des distances au soleil; mais cela n'a lieu que dans les apsides, ou dans le cas où le soleil est au centre du cercle. Ayant abaissé sur $T\sigma$ la perpendiculaire sz, et nommant $Ts = r$, $s\sigma = \partial s$, l'aire du secteur $AT\sigma = S$; l'aire σTs sera ∂S, et l'on aura

$$\partial S = \frac{1}{2} r . sz = \frac{1}{2} r \partial s \sin s\sigma z = \frac{1}{2} r \partial s \cos C\sigma T,$$

$C\sigma T$ étant l'équation *optique* (§. 96.): l'aire du secteur n'est donc pas proportionnelle à la distance r, mais au produit $r \cos C\sigma T$. Kepler rejéta donc

cette supposition, non seulement par la raison précédente, mais aussi parceque l'orbite n'est pas circulaire, comme on l'avait supposé dans le calcul précédent; mais il observa en même tems, que ces deux raisons se détruisaient mutuellement, ensorte que le rapport susdit des aires était d'accord avec les observations, par la raison même que l'orbite n'est pas un cercle mais une ellipse. Mais il faut encore observer, que la supposition qui sert ici de base, savoir la proportion entre les tems et les distances au soleil, est également fausse dans l'ellipse. C'est cependant de cette manière, que Kepler parvint à découvrir sa *seconde* loi, dont il se servit aussi pour calculer l'équation *physique* (§. 96.) dans le cercle excentrique. En faisant pour abréger (*Fig.* 25.),

le rayon du cercle $CS = a$, l'excentricité $CT = CF = c$,
la période d'une révolution entière $= T$,
le tems employé à parcourir l'arc $AS = t$,
l'anomalie *moyenne* $AFS = \mu$, l'anomalie *excentrique* $ACS = \varepsilon$,
l'anomalie *vraie* (*cœquata*) $ATS = v$, l'arc $AS = s$,
l'équation *optique* $CST = \omega$, l'équation *physique* $CSF = \Phi$,
l'aire du secteur $AST = S$, celle du triangle $CST = CSF = \Delta$,
et le rapport de la circonférence au diamètre $= \pi = 3,141\ldots.$,

on aura en vertu de cette loi,

$$S = \frac{t}{T}\pi a^2, \quad \mu = \frac{t}{T}2\pi, \quad \text{donc } 2S = \mu a^2.$$

Or ε étant $= \mu - \Phi = \frac{s}{a}$, et l'aire $ASC = S - \Delta = \frac{1}{2}as = \frac{1}{2}a^2(\mu - \Phi)$, il viendra

$$2S = 2\Delta + a^2(\mu - \Phi) = a^2\mu, \text{ d'où l'on tire}$$

$$\Phi = \frac{2\Delta}{a^2} \text{ en parties du rayon, ou en degrés } \Phi = \frac{360\,\Delta}{aa\pi},$$

$aa\pi = C$ étant la surface du cercle entier. On a donc

$$C : \Delta :: 360° : \Phi.$$

Ayant abaissé sur AB la perpendiculaire SR, l'aire Δ est $\frac{1}{2}CT.SR = \frac{1}{2}ca\sin\varepsilon$. En faisant par ex. par rapport au soleil, suivant Kepler,

$$a = 1, \quad c = 0,018; \text{ il viendra}$$

$$\Delta = 0,009.\sin\varepsilon, \text{ et } \Phi = \frac{180\,ac\sin\varepsilon}{C} = \frac{3,24.\sin\varepsilon}{3,14159..} \text{ degrés.}$$

§. 123. Après avoir donné à l'anomalie excentrique $ACS = \varepsilon$ une valeur arbitraire, Kepler calcula avec cette valeur l'équation physique, ou l'aire $\Delta = \frac{1}{2}ac\sin\varepsilon$, laquelle, étant ajoutée à l'aire du secteur $ASC = \frac{1}{2}a^2\varepsilon$, don-

na S, d'où il conclut l'anomalie moyenne $\mu = \frac{2S}{aa}$, et le tems répondant à l'anomalie ε. Les côtés $CS = a$, $CT = c$, et l'angle compris $TCS = 180° - \varepsilon$, donnent $\text{tang } CST = \frac{c \sin \varepsilon}{a + c \cos \varepsilon}$ et l'équation optique $\omega = CST$. Or, $\phi = \mu - \varepsilon$ étant connu, on a l'équation du centre $\omega + \phi$, et l'anomalie vraie $v = \mu - (\omega + \phi)$. A l'aide des méthodes précédentes, Kepler calcula sur les observations seules, le rayon vecteur TS et l'anomalie vraie ATS, pour l'époque qui répond à l'anomalie ε; et il trouva l'anomalie constamment plus petite que l'anomalie $v = \mu - (\omega + \phi)$ dans le segment DAE, et plus grande que v dans le segment DBE. Après un grand nombre d'essais, il découvrit que l'anomalie, aussi bien que la distance, dépendait de la loi suivante.

Soit (*Fig.* 37.) S le soleil, ASP l'anomalie vraie calculée $v = \mu - (\omega + \phi)$, PM perpendiculaire à la ligne des apsides; que du centre C et du rayon $CA = a$ on décrive un cercle qui rencontre SP en P, et que SE soit perpendiculaire à la prolongation de PC. Cela posé, Kepler trouva partout PE égale à la distance vraie, indiquée par les observations: en nommant donc $SP = r$, on avait $PE = r \cos \omega$, SPE étant l'équation optique ω. En comparant entre elles les valeurs $PE = r \cos \omega$ et $\partial S = \frac{1}{2} r \partial s \cos \omega$ (§. 122.), on trouve $\partial S = \frac{1}{2} PE . \partial s$, d'où il suit, que les aires des secteurs circulaires infiniment petits sont en effet proportionnelles aux distances PE; et c'est ce qui, probablement, conduisit Kepler à cette loi. En faisant la plus grande distance $AS = q$, on trouvera une expression extrèmement simple pour la quantité, dont la vraie distance PE hors de l'aphélie est plus petite que q. En effet, on a $CA = CP$, donc $SA - PE = CS - CE = c\ (1 - \cos \varepsilon) = c \text{ sin vers } \varepsilon$. Kepler donna à cette différence $CS - CE$ le nom de *libration*, parcequ'il l'expliqua par un mouvement de la planète, non pas sur la circonférence, mais le long du diamètre d'un épicycle, attendu que cette différence n'altère pas les longitudes, mais les distances seules. (1).

La loi qu'il découvrit relativement à l'anomalie vraie, est intimement liée avec la précédente. En ôtant $c\ (1 - \cos \varepsilon)$ de $AS = a + c$, il vient la distance vraie $PE = a + c \cos \varepsilon$. En faisant donc $SQ = PE$, la planète serait en Q, si l'anomalie n'éprouvait aucun changement. Mais Kepler trouva

(1) *Ibid. Cap. LVI.*

qu'en décrivant du centre S avec le rayon $SQ = PE$ un arc circulaire Qp qui coupe l'ordonnée PM, perpendiculaire à la ligne des apsides, en p, Sp était, d'après les observations, non-seulement la véritable grandeur, mais aussi la vraie direction du rayon vecteur, ensorte que $ASp = v$ était l'anomalie vraie (1).

§. 124. L'anomalie excentrique $ACP = \varepsilon$, et la valeur qu'on vient de trouver, $Sp = a + c\cos\varepsilon$, donne $CM = a\cos\varepsilon$, $SM = c + a\cos\varepsilon$, donc dans le triangle SMp,

$$\cos v = \frac{SM}{Sp} = \frac{c + a\cos\varepsilon}{a + c\cos\varepsilon}.$$

Ayant construit sur le diamètre AB une ellipse ADB, telle que la demi-distance de ses foyers $CS = CF$ soit égale à l'excentricité c; le petit demi-axe sera $CD = b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$: en faisant donc $CM = x$, $Mp = y$, on aura

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

L'anomalie excentrique $ACP = \varepsilon$ étant donnée, on a

$$Sp^2 = SM^2 + y^2 = c^2 + 2cx + x^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = \frac{a^4 + 2a^2cx + c^2x^2}{a^2}, \text{ donc}$$

$$Sp = \frac{a^2 + cx}{a} = a + \frac{x}{a}c.$$

Mais le triangle CMP donne $\frac{x}{a} = \cos\varepsilon$, d'où il suit

$$(1) \ldots . Sp = a + c\cos\varepsilon.$$

Enfin le triangle MSp fournit l'équation, $\cos MSp = \frac{c + x}{Sp}$, donc

$$(2) \ldots . \cos MSp = \frac{c + a\cos\varepsilon}{a + c\cos\varepsilon}.$$

Les valeurs (1) (2) étant les mêmes qu'on a trouvées pour le rayon vecteur et l'anomalie vraie v, il s'en suit que l'ellipse satisfait exactement aux observations, tant par rapport aux distances qu'aux anomalies ou aux longitudes (§. 123.). Or le point p étant entièrement déterminé par ces deux élémens, il est évident, que tous les points d'une orbite planétaire sont dans une ellipse, dont les foyers sont distans du centre, de l'excentricité de l'orbite, c'est-à-dire,

les planètes décrivent des ellipses, dont le centre du soleil occupe un des foyers.

C'est la *première* des *lois de Kepler*, sur lesquelles est fondée la théorie de l'astronomie moderne (2).

(1) *Ibid. Cap. LVIII.*
(2) *Ibid. Cap. LIX. n. XI.*

§. 125. On a déjà vu (§. 122.), par quels raisonnemens Kepler fut conduit à découvrir la *seconde* loi, savoir que

les aires des secteurs que les planètes décrivent autour du soleil, sont proportionnelles aux tems qu'elles emploient à les décrire.

Cette loi est beaucoup plus générale que la première, et l'on a vu que Kepler la conclut de fausses prémisses. Soit (*Fig.* 36.) S le soleil, C le centre, E le point d'égalité, $CE = CS$, et qu'on mène par E la droite PEQ, faisant avec AB un très-petit angle: le mouvement moyen en A et B sera $AEP = BEQ = m$, donc les arcs AP, BQ, seront décrits en tems égaux; et il est aisé de voir, que les secteurs correspondans APS, BQS, sont aussi égaux. En effet on a à peu près,

$$APS = \tfrac{1}{2} AP \cdot AS,\ BQS = \tfrac{1}{2} BQ \cdot BS,\ AP = m \cdot AE = m \cdot BS,$$

$$BQ = m \cdot EB = m \cdot AS, \text{ d'où l'on tire}$$

$$APS = \tfrac{1}{2} m \cdot BS \cdot AS,\ BQS = \tfrac{1}{2} m \cdot AS \cdot BS, \text{ donc } APS = BQS;$$

ce qui donne la *seconde* loi de Kepler pour les apsides. Il en suit encore

$$AP : BQ :: BS : AS;$$

c'est-a-dire, *les vitesses linéaires sont en raison inverse des distances au soleil.* On a de plus

$$AP = AS \cdot ASP = m \cdot BS,\ BQ = BS \cdot BSQ = m \cdot AS, \text{ donc}$$

$$m = \frac{AS}{BS} \cdot ASP = \frac{BS}{AS} BSQ, \text{ ou } ASP : BSQ :: BS^2 : AS^2,$$

c'est-à-dire, *les vitesses angulaires*, que les astronomes appellent ordinairement vitesses *vraies*, *sont en raison inverse des carrés des distances au soleil.* Par exemple, le plus grand diamètre apparent du soleil en B est $= 32'36''$, le plus petit en $A = 31'31''$ (I. §. 135.): les distances AS, BS, auront donc entre elles le même rapport; d'où il suit $AS^2 : BS^2 :: 3825936 : 3575881$. Les tables du soleil donnent le plus grand mouvement horaire du soleil $= 2'33''$, le plus petit $= 2'23''$. En faisant donc $BSQ = 2'33''$, on trouvera $ASP = \frac{BS^2}{AS^2} 2'33'' = 2'23''$.

Ainsi cette loi n'était prouvée que par des observations aux apsides, et à l'aide d'un principe qui n'est pas rigoureusement vrai, que le mouvement autour de E est uniforme. Le raisonnement précédent n'est point applicable aux points situés hors des apsides, et Kepler n'a pas prouvé parti-

culièrement, que la loi a lieu dans l'ellipse. Mais elle a été confirmée par une infinité d'observations, depuis le tems de Kepler. Toutes les tables modernes qui sont parfaitement d'accord avec les observations, ayant été calculées sur ce principe, sont autant de témoins pour cette loi. Enfin Newton, en appliquant la géométrie à la dynamique, a prouvé que cette loi doit nécessairement avoir lieu dans tous les mouvemens qui sont dirigés par une force centrale, quelle que soit la nature de cette force.

La précision des observations modernes, relativement à la détermination des lieux aussi bien qu'à la mesure des diamètres des corps célestes, donne un moyen extrèmement simple de prouver cette loi, du moins à l'égard du soleil. Les observations font voir que, dans tous les points de l'orbite du soleil, ses vitesses apparentes sont en raison des carrés de ses diamètres apparens; d'où il suit d'abord, que le mouvement du soleil est réellement irrégulier, et non seulement en apparence à cause de la situation excentrique de l'oeil, parce qu'alors les vitesses seraient en raison des diamètres et non de leurs carrés, les uns et les autres étant en raison inverse des distances. De plus, le secteur que le soleil décrit autour de la terre dans chaque instant, étant proportionnel à l'angle, multiplié par le carré de la distance, lequel est en raison inverse du carré du diamètre apparent, donc par l'observation précédente, en raison inverse des vitesses, et l'angle étant égal à la vitesse apparente multipliée par le tems; il s'en suit que les secteurs sont proportionnels au tems, multiplié et divisé par la vitesse, c'est-à-dire au tems même. Soit (*Fig.* 37.) $vq = \psi$ l'angle décrit autour de la terre dans le tems t, le diamètre apparent du soleil $= \varrho$, la distance $Sp = r$: la vitesse apparente sera $\frac{\psi}{t}$, et les observations donnent le rapport $\frac{\psi}{t} = A\varrho^2$. Or on a suivant les élémens de l'optique, $\varrho = \frac{B}{r}$, A et B étant des quantités constantes; d'où il suit $\frac{\psi}{t} = \frac{AB^2}{r^2}$. Le secteur psq étant $= \frac{1}{2}\psi r^2 = \frac{1}{2}AB^2t$, il en résulte que les secteurs sont proportionnels aux tems: ce qui est la *seconde* loi de Kepler.

§. 126. Après avoir établi la théorie de chaque orbite, considérée séparément, Kepler dirigea son attention vers le système planétaire, composé des différentes orbites, enchainées les unes avec les autres par une commune loi; il compara donc entre elles leurs distances moyennes au soleil, et cher-

cha une loi générale pour leurs rapports. Comme de son tems on ne connaissait que six planètes, ou cinq intervalles entre leurs orbites, la première idée qui se lui présenta, fut de comparer ces intervalles aux cinq corps *réguliers* ou *Platoniques* de la géometrie. Cette spéculation, ou si l'on veut, ce jeu était celui d'un grand homme, et n'est pas tout-à-fait indigne de remplir une place parmi les nombreux monumens de son génie et de son esprit de recherches. C'était un relachement après une suite d'années laborieuses, et après des calculs pénibles, par lesquels il avait élevé un batiment impérissable: il y a peu de personnes qui cherchent le delassement dans de pareils jeux. Après avoir montré, que le *cube* est le plus simple des polyèdres réguliers, ensuite le *tétraèdre,* le *dodécaèdre,* l'*icosaèdre,* et l'*octaèdre,* il prend le cube ou l'hexaèdre pour mesure de l'intervalle entre Saturne et Jupiter, le tétraèdre pour l'intervalle entre Jupiter et Mars, le dodécaèdre entre Mars et la Terre, l'icosaèdre entre la Terre et Vénus, et l'octaèdre entre Vénus et Mercure. En supposant pour chacun de ces intervalles, que les orbites supérieure et inférieure représentent des grands cercles des sphères *circonscrite* et *inscrite* au polyèdre régulier qui répond à l'intervalle entre les deux planètes, on peut déterminer le rapport entre leurs distances moyennes. En nommant a et b les rayons des sphères circonscrite et inscrite au polyèdre, on sait qu'il est

pour l'hexaèdre et l'octaèdre, $a : b :: \sqrt{3} : 1$, à peu près $= 1\frac{3}{4} : 1$;

pour le tétraèdre, ... $a : b :: 3 : 1$,

pour le dodécaèdre et l'icosaèdre, $a : b :: \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{3+\sqrt{5}}\sqrt{6} : 1$ à peu pres $= 1\frac{1}{4} : 1$.

Les distances moyennes de ♄ et ♃, ainsi que de ♀ et ☿, devraient donc être comme $1\frac{3}{4}$ à 1, celles de ♃ et ♂ comme 3 à 1, et celles de ♂ et de la terre, ainsi que de la terre et ♀, comme $1\frac{1}{4} : 1$. Il est vrai que ces valeurs approchent assés des rapports, connus par observation; mais il s'en faut beaucoup qu'elles soient exactes (1).

Kepler se mit ensuite à comparer les distances des planètes avec les périodes de leurs révolutions, et il ne tarda pas à apercevoir, que les périodes changeaient dans un plus grand rapport que les distances. Ces dernières

(1) *Keplori Epit. Astron. Copern. Lib. IV. pag.* 456 — 471.

sont, par exemple, en comparant ♃ avec ♁, ♂ avec ♀, ♀ avec ☿, à peu près comme 2 à 1 (§. 120.), au lieu que les révolutions de ces planètes sont à peu-près comme 3 à 1 (§. 99.). Jupiter est cinq fois plus éloigné du soleil que la terre, mais sa période est douze fois plus longue que l'année. Puisque les circonférences des orbites sont comme leurs diamètres, en faisant abstraction de leur ellipticité, il s'en suit, que le mouvement des planètes supérieures est effectivement plus lent que celui des inférieures, et que par conséquent la force centrale qui dirige leurs mouvement, diminue à mesure que les planètes s'éloignent du soleil. En effêt, les rapports trouvés par Kepler ont suffi, pour découvrir la loi générale, suivant laquelle cette force décroit. Le simple rapport n'ayant pas lieu entre les périodes et les distances, Kepler essaya diverses puissances de ces quantités; mais malheureusement, en comparant les puissances qui constituent la véritable loi de la nature, il fit, par impatience ou par précipitation, quelque faute de calcul qui lui cacha la vérité: il abandonna donc ces recherches comme inutiles. Mais ayant repris ces calculs au bout de deux mois, il trouva enfin le 15 May 1618, avec un ravissement et un étonnement qu'on peut bien s'imaginer, ce rapport exact, que

les carrés des révolutions sont entre eux comme les cubes des distances moyennes au soleil, ou des grands axes des orbites.

Il est aisé de se convaincre de la précision de cette *troisième loi de Kepler*, en comparant les carrés des nombres renfermés dans la première colonne de la table (§. 99.), avec les cubes des nombres de la troisième colonne de la table (§. 120.). En effêt, cette table a été construite sur la troisième loi de Kepler, qui est une suite nécessaire de la loi genérale de la force centrale du soleil, ainsi qu'on le verra dans l'astronomie physique. C'est un des principes fondamentaux de l'astronomie moderne, à l'aide duquel on trouve les diamètres des orbites des nouvelles planètes et des satellites, dès qu'on connaît leur révolution qui est beaucoup plus facile à déterminer. C'est en même tems une des plus fortes preuves du mouvement annuel de la terre. En effêt, si l'on calcule la période d'un corps, placé à la même distance au soleil, qu'on sait être celle de la terre, suivant cette

loi, on trouvera précisément l'année sidérale. Il est donc évident, que la terre est un chainon de la chaine de planètes qui entourent le soleil: autrement il faudrait supposer, que cette loi qui est en vigueur dans tout le système planétaire, fût sans effet à la distance de la terre, et que peu après elle reprît son activité à la distance de Mars ou de Vénus. D'un autre côté, si l'on fait tourner les planètes autour de la terre, on ne trouvera aucun rapport général entre leurs périodes et leurs distances.

CHAPITRE VII.

Calcul elliptique du mouvement des Planètes.

§. 127. Soit (*Fig.* 37.) ADB la moitié de l'orbite elliptique d'une planète, C son centre, S le soleil au foyer, la planète en p, APB un cercle décrit sur le diamètre AB, pM perpendiculaire à AB, et prolongée jusqu'au cercle en P, et employons les dénotations suivantes:

CA $= a$, CD $= b$, le grand et le petit demi-axe,

CS $= c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, l'excentricité,

S$p = z$ la distance vraie au soleil, ou le rayon vecteur,

AS$p = v$ l'anomalie vraie, ACP $= \varepsilon$ l'anomalie excentrique,

AS $= a + c = q$ la plus grande distance,

BS $= a - c = p$ la plus courte distance.

Le milieu arithmétique entre p et q est $= a$: c'est pourquoi on a appelé la moitié a du grand axe la *distance moyenne* ou le *demi-diamètre de l'orbite.* L'anomalie moyenne $= \mu$ ne peut pas être exprimée par un angle, compté d'un point fixe, tel que serait l'angle AFp qu'on prit pour l'anomalie moyenne jusqu'à la réforme de l'astronomie par Kepler: nous avons vu qu'elle est mesurée par l'aire du secteur elliptique ApS, ou plutôt par son rapport à l'ellipse entière, suivant la seconde loi de Kepler. Or il est connu par la nature de l'ellipse, que les aires ApS, APS, sont entre elles comme Mp : MP :: CD : CG, c'est-à-dire comme le petit axe au grand axe; et ce rapport a aussi lieu entre les surfaces entières de l'ellipse et du cercle, d'où il suit que APS est au cercle entier, comme ApS à l'ellipse, et que par conséquent l'anomalie moyenne peut être mesurée par le secteur circulaire APS, aussi bien que par le secteur elliptique ApS.

Soient, relativement à deux planètes,

R, r, les révolutions sidérales,

A, a, les grands demi-axes,

B, b, les petits demi-axes;

S, s, les aires des secteurs décrits dans les tems T, t,

E, e, les surfaces des ellipses entières,

K, k, les aires des cercles décrits avec les rayons A, a,

F, f, les paramètres des ellipses.

Cela posé, on aura

$$B = \sqrt{\frac{AF}{2}},\quad K = \pi A^2,\quad E = \frac{B}{A}K = \frac{K\sqrt{F}}{\sqrt{2A}} = \pi A\sqrt{\frac{AF}{2}}.$$

Or la seconde loi de Kepler donne

$$R : T :: E : S,\ \text{ou}\ T = \frac{RS\sqrt{2}}{\pi A\sqrt{AF}},\ \text{donc}\ T : t :: \frac{RS}{A\sqrt{AF}} : \frac{rs}{a\sqrt{af}}.$$

Mais on a suivant la troisième loi de Kepler,

$$R : r :: A\sqrt{A} : a\sqrt{a},\ \text{d'où il suit}$$

$$T : t :: \frac{S}{\sqrt{F}} : \frac{s}{\sqrt{f}};\ \text{donc}$$

les tems que différentes planètes emploient à parcourir des portions quelconques de leurs orbites, sont en raison directe des secteurs décrits, et en raison inverse des racines carrées de leurs paramètres.

Si les petites lettres se rapportent à la terre, on peut prendre pour t une révolution entière r, d'où il viendra

$$t = 365,2563835\ \text{jours};\quad a = 1,\quad c = 0,01677976;$$

$$b = \sqrt{(1 - c^2)} = 0,99985921;\ f = \frac{2b^2}{a} = 1,99946793,$$

$$K = \pi = 3,14159\ldots,\ e = \frac{b}{a}\pi = 3,14115034776 = s.$$

On a donc $\frac{t\sqrt{f}}{s} = 164,42314086666 = n$, ce qui donne

$$T = \frac{nS}{\sqrt{F^3}},\ \text{et}\ F = \frac{n^2S^2}{T^2},$$

S et F étant exprimés en demi-diamètres de l'orbe terrestre $= a$, et T en jours. En substituant pour T la révolution entière R, on a $S = E$, $F = \frac{n^2E^2}{R^2} = \frac{n^2\pi^2A^3F}{2R^2}$, d'où l'on tire

$$A = \sqrt[3]{\frac{2R^2}{\pi^2n^2}} = 0,01957048.\ R^{\frac{2}{3}},$$

R étant exprimé en jours et ses parties decimales (§. 99.): on a donc

$$\log A = \tfrac{2}{3}\log R + 8{,}2916014.6 - 10.$$

§. 128. En nommant l'excentricité $\frac{c}{a} = \gamma$, et conservant les autres notations (§. 127.), on a par la nature de ellipse (§. 124.),

$$(1) \ldots . z = a + c\cos\varepsilon = a(1+\gamma\cos\varepsilon).$$

Le rayon vecteur a donc sa plus grande et sa plus petite valeur, lorsque $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 180°$, c'est-à-dire en A et en B, où $SA = a(1+\gamma)$, $SB = a(1-\gamma)$: sa valeur moyenne $= a$, a donc lieu en D, où $\varepsilon = ACG = 90°$.

La mesure de l'anomalie moyenne $APS = S$ est composée du secteur circulaire APC et du triangle CPS. Le premier est au cercle entier πa^2 comme ε est à 360° ou à 2π; le second est $= \frac{1}{2}SC.PM = \frac{1}{2}c.a\sin\varepsilon$: leur somme est

$$S = \tfrac{1}{2}a^2\varepsilon + \tfrac{1}{2}ac\sin\varepsilon = \frac{a^2}{2}(\varepsilon + \gamma\sin\varepsilon).$$

Or le cercle entier étant à S comme 360° ou 2π est à l'anomalie moyenne μ, on a $\mu = \frac{2S}{a^2}$, et en substituant la valeur de S,

$$(2) \ldots . \begin{cases} \mu = \varepsilon + \gamma\sin\varepsilon, \text{ en parties du rayon,} \\ \mu = \varepsilon + \frac{180°}{\pi}\gamma\sin\varepsilon, \text{ en degrés, ou} \\ \mu = \varepsilon + 206264{,}8.\gamma\sin\varepsilon, \text{ en secondes d'un degré.} \end{cases}$$

L'anomalie vraie $MSp = v$ est donnée par l'équation $\cos v = \frac{SM}{Sp} = \frac{c + a\cos\varepsilon}{a + c\cos\varepsilon}$, ou

$$(3) \ldots . \cos v = \frac{\cos\varepsilon + \gamma}{1 + \gamma\cos\varepsilon}, \text{ ou } \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}} = \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}.$$

Il est vrai que le cas ne se rencontre guéres, où ε soit donné; mais les formules précédentes sont très-utiles pour la solution des problèmes suivans.

§. 129. Si les élémens de l'orbite sont déjà connus, et qu'il s'agit de convertir une longitude ou anomalie vraie exactement observée en anomalie moyenne, pour en conclure l'*époque*, ou pour vérifier les tables; le problème est, v étant donné, trouver ε, μ, z: ce qui peut se faire de deux manières.

L'équation (3) (§. 128.) donne

$$(4) \ldots . \cos\varepsilon = \frac{\cos v - \gamma}{1 - \gamma\cos v}.$$

Pour disposer cette formule plus favorablement à l'usage des logarithmes, on en tirera $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}} = \sqrt{\frac{(1+\gamma)(1-\cos v)}{(1-\gamma)(1+\cos v)}}$, donc

$$(5) \ldots . \text{tang}\frac{\varepsilon}{2} = \text{tang}\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} = \text{tang}\frac{v}{2}\sqrt{\frac{q}{p}};$$

les racines carrées de la plus petite et de la plus grande distance sont entre elles, comme les tangentes des moitiés des anomalies vraie et excentrique. Après avoir trouvé ε, on a (§. 128.) (2) $\mu = \varepsilon + \gamma \sin\varepsilon$, et (1) $z = a(1+\gamma\cos\varepsilon)$. En substituant la valeur (4) qui donne $\sin\varepsilon = \frac{\sin v\sqrt{(1-\gamma^2)}}{1-\gamma\cos v}$, on aura

$$(6) \ldots . \mu = \text{Arc}\left(\cos = \frac{\cos v - \gamma}{1-\gamma\cos v}\right) + \frac{\gamma \sin v\sqrt{(1-\gamma^2)}}{1-\gamma\cos v},$$

$$(7) \ldots . z = \frac{a(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v} = \frac{pq}{a(1-\gamma\cos v)}.$$

On fera bien de calculer pour chaque planète, les quantités p, q, $\frac{pq}{a}$, $\sqrt{\frac{q}{p}}$, ou $1-\gamma$, $1+\gamma$, $1-\gamma^2$, $\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}$, qui sont d'un usage fréquent. Comme la distance moyenne a est toujours donnée, on calculera ce qu'il faut ajouter ou ôter de a pour avoir la distance vraie z, savoir $a\gamma\cos\varepsilon$; mais pour trouver $\mu = \varepsilon + \gamma\sin\varepsilon$, il sera commode d'avoir γ exprimé en secondes, ou $206264{,}8.\gamma$. La table suivante renferme tous les logarithmes dont on a besoin.

	log. γ en parties du rayon	log. γ en secondes	log. $\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}$	log. $\sqrt{(1-\gamma^2)}$
♄	8,74949.13	4,06391.64	0,02441.92	9,99931.38
♃	8,68285.24	3,99727.75	0,02093.98	9,99949.54
♂	8,96910.83	4,28353.34	0,04056.51	9,99810.82
☿	8,22478.57	3,53921.09	0,00728.80	9,99993.88
♀	7,83587.94	3,15030.45	0,00297.63	9,99998.98
☿	9,31284.34	4,62726.85	0,09054.34	9,99062.91

La méthode précédente qui consiste à employer ε comme un angle subsidiaire, est très-usitée dans le calcul trigonométrique, et c'est sans doute la plus simple. Mais dans l'analyse il est souvent nécessaire, d'avoir μ en fonction de v: il faut donc se servir de la méthode suivante.

§. 130. Pour exprimer immédiatement μ par v, on pourrait chercher l'arc ε dont le cosinus est $\frac{\cos v - \gamma}{1-\gamma\cos v}$, par une série ordonnée suivant les puissances de ce cosinus ou de γ: en y ajoutant $\frac{\gamma\sin v\sqrt{(1-\gamma^2)}}{1-\gamma\cos v}$, on aurait μ (6). Mais il sera plus simple, de chercher μ par l'intégration.

Soit (*Fig.* 38.) P*p* un arc infiniment petit de l'ellipse APB, donc PS*p* $= \partial v$: l'aire du petit secteur PS*p* $= \frac{1}{2} z z \partial v$ sera la différentielle du secteur APS $= S$ qui est la mesure de l'anomalie moyenne $\mu = \frac{S}{E} 2\pi$ (§. 127.). Or E étant $= \pi ab = \pi a \sqrt{(a^2 - c^2)} = \pi a^2 \sqrt{(1 - \gamma^2)}$, on aura $\mu = \frac{2S}{a^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}}$, d'où l'on tire

$$\partial \mu = \frac{2 \partial S}{a^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}} = \frac{z^2 \partial v}{a^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}},$$

et en substituant la formule (7), et en intégrant,

$$\mu = (1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}} \int \frac{\partial v}{(1 - \gamma \cos v)^2}.$$

En faisant pour abréger,

$\operatorname{tang} \frac{1}{2} v = u$, $1 - \gamma = \alpha$, $1 + \gamma = \beta$, $1 - \gamma^2 = \alpha\beta = \delta^2$, on aura

$\operatorname{tang} v = \frac{2u}{1-u^2}$, $\cos v = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\partial v = \cos^2 v . \partial \operatorname{tg} v = \frac{2 \partial u}{1+u^2}$, et

$$\partial \mu = 2\delta^3 \frac{\partial u (1+u^2)}{(\alpha + \beta u^2)^2} = \frac{2\delta^3}{\beta} \left(\frac{2\gamma \partial u}{(\alpha + \beta u^2)^2} + \frac{\partial u}{\alpha + \beta u^2} \right).$$

L'intégration donnera

$$\int \frac{\partial u}{(\alpha + \beta u^2)^2} = \frac{u}{2\alpha(\alpha + \beta u^2)} + \frac{1}{2\alpha \sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{Arc\ tang} u \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial u}{\alpha + \beta u^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{Arc\ tang} u \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \text{ donc}$$

$$\int \left(\frac{2\gamma \partial u}{(\alpha + \beta u^2)^2} + \frac{\partial u}{\alpha + \beta u^2} \right) = \frac{\gamma u}{\alpha(\alpha + \beta u^2)} + \frac{1}{\alpha \delta} \operatorname{Arc\ tang} u \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \text{ et}$$

$$\mu = \frac{2\gamma \delta u}{\alpha + \beta u^2} + 2 \operatorname{Arc\ tang} u \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},$$

ou en substituant $u = \operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \frac{1 - \cos v}{\sin v}$,

$$(8) \ldots . \mu = \gamma \sqrt{(1-\gamma^2)} \frac{\sin v}{1 - \gamma \cos v} = 2 \operatorname{Arc} \left(\operatorname{tang} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} . \sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \right).$$

Cette formule est exacte, et facile à calculer à l'aide des logarithmes de γ, $\sqrt{(1-\gamma^2)}$, et $\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}$, que renferme la table précédente.

§. 131. Il est plus commode pour la pratique, de développer l'intégrale en série suivant les puissances de l'excentricité et les angles multiples de v. Pour cet effet on a

$$\frac{1}{(1 - \gamma \cos v)^2} = 1 + 2\gamma \cos v + 3\gamma^2 \cos^2 v + 4\gamma^3 \cos^3 v + \ldots + (n+1)\gamma^n \cos^n v,$$

et les formules trigonométriques donnent

$$\cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2v, \quad \cos^3 v = \frac{3}{4} \cos v + \frac{1}{4} \cos 3v, \text{ etc.}$$

en général, n étant un nombre *pair*,

$$2^{n-1}\cos^n v = \cos nv + \frac{n}{1}\cos(n-2)v + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)v + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1.2.3\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2v + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{n}{2}};$$

et si n est un nombre *impair*,

$$2^{n-1}\cos^n v = \cos nv + \frac{n}{1}\cdot\cos(n-2)v + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)v + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cos v.$$

La substitution de ces valeurs donnera à la série précédente la forme:

$$\frac{1}{(1-\gamma\cos v)^2} = 1 + 2\gamma\cos v + \frac{3}{2}\gamma^2(\cos 2v + 1) + \frac{4}{2^2}\gamma^3(\cos 3v + 3\cos v)$$
$$+ \frac{5}{2^3}\gamma^4(\cos 4v + 4\cos 2v + 3) + \frac{6}{2^4}\gamma^5\left(\cos 5v + \frac{5}{1}\cos 3v + \frac{5.4}{1.2}\cos v\right)$$
$$+ \frac{7}{2^5}\gamma^6\left(\cos 6v + \frac{6}{1}\cos 4v + \frac{6.5}{1.2}\cos 2v + \frac{1}{2}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3}\right) + \text{cet.}$$

La loi de cette série est évidente: son terme général est $\frac{n+1}{2^{n-1}}\gamma^n.N$, N étant la valeur précédente de $2^{n-1}.\cos^n v$. En ordonnant la série suivant les angles multiples de v, on trouvera

$$\frac{1}{(1-\gamma\cos v)^2} = 1 + \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3.5}{2.4}\gamma^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\gamma^6 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\gamma^8 + \ldots\ldots$$
$$+ 2\gamma\cos v\left(1 + \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3.5}{2.4}\gamma^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}\gamma^6 + \text{cet.}\right)$$
$$+ \frac{\gamma^2}{2^6}\cos 2v\left(3 + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2^2}\gamma^2 + \frac{5.6}{1.2}\cdot\frac{7}{2^4}\gamma^4 + \frac{6.7.8}{1.2.3}\cdot\frac{9}{2^6}\gamma^6 + \text{cet.}\right)$$
$$+ \frac{\gamma^3}{2^2}\cos 3v\left(4 + \frac{5}{1}\cdot\frac{6}{2^2}\gamma^2 + \frac{6.7}{1.2}\cdot\frac{8}{2^4}\gamma^4 + \frac{7.8.9}{1.2.3}\cdot\frac{10}{2^6}\gamma^6 + \text{cet.}\right)$$
$$+ \frac{\gamma^4}{2^4}\cos 4v\left(5 + \frac{6}{1}\cdot\frac{7}{2^2}\gamma^2 + \frac{7.8}{1.2}\cdot\frac{9}{2^4}\gamma^4 + \frac{8.9.10}{1.2.3}\cdot\frac{11}{2^6}\gamma^6 + \text{cet.}\right)$$
$$+ \frac{\gamma^5}{2^4}\cos 5v\left(6 + \frac{7}{1}\cdot\frac{8}{2^2}\gamma^2 + \frac{8.9}{1.2}\cdot\frac{10}{2^4}\gamma^4 + \frac{9.10.11}{1.2.3}\cdot\frac{12}{2^6}\gamma^6 + \text{cet.}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on fait pour abréger, $\frac{1}{(1-\gamma\cos v)^2} =$

$$A + 2A^{(1)}\gamma\cos v + \frac{\gamma^2}{2}A^{(2)}\cos 2v + \frac{\gamma^3}{2^2}A^{(3)}\cos 3v + \ldots + \frac{\gamma^n}{2^{n-1}}A^{(n)}\cos nv,$$

il est aisé de voir que $A = A^{(1)} = (1-\gamma^2)^{-\frac{3}{2}}$, et le terme général

*

$$A^{(n)} = (n+1) + \frac{n+2}{1}\cdot\frac{n+3}{2^2}\gamma^2 + \frac{(n+3)(n+4)}{1.\quad 2}\cdot\frac{n+5}{2^4}\gamma^4 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\left(n+\frac{m}{2}+1\right)\left(n+\frac{m}{2}+2\right)\left(n+\frac{m}{2}+3\right)\ldots\ldots(n+m)(n+m+1)}{1.\qquad 2.\qquad 3.\qquad\qquad \frac{m}{2}\cdot\quad 2^m}\gamma^m.$$

En multipliant donc la série par

$$(1-\gamma^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}\gamma^4\left\{1 + \frac{\gamma^2}{6} + \frac{3.\gamma^4}{6.8} + \frac{3.5.\gamma^6}{6.8.10} + \frac{3.5.7.\gamma^8}{6\quad 8.10.12}\right\} + \text{cet.}$$

le terme général étant $= + \frac{3}{8}\cdot\frac{3.5.7\ldots.(r-5)}{6.8.10\ldots.(r-2)}\cdot\frac{\gamma r}{r}$, il viendra

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = \frac{(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\gamma\cos v)^2} = 1 + 2\gamma\cos v$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2}\cos 2v\left(3 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{2.3}{1.2}\cdot\frac{\gamma^4}{2^4} + \frac{2.3.6}{1.2.3}\cdot\frac{\gamma^6}{2^6} + \frac{2.3.7.8}{1.2.3.4}\cdot\frac{\gamma^8}{2^8} + \ldots.\right)$$

$$+ \frac{\gamma^3}{2^2}\cos 3v\left(4 + \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{2.3.4}{1.2.2^4}\gamma^4 + \frac{2.3.4.7}{1.2.3.2^6}\gamma^6 + \frac{2.3.4.8.9}{1.2.3.4.2^8}\gamma^8 + \ldots.\right) + \text{cet.}$$

En faisant pour abréger,

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = 1 + 2\gamma\cos v + \frac{\gamma^2}{2}B^{(2)}\cos 2v + \frac{\gamma^3}{2^2}B^{(3)}\cos 3v + \ldots. + \frac{\gamma n}{2^{n-1}}B^{(n)}\cos nv,$$

multipliant cette serie par ∂v, et intégrant, on aura

$$(9)\ldots.\ \mu = v + 2\gamma\sin v + \frac{\gamma^2}{2}\cdot\frac{B^{(2)}}{2}\sin 2v + \frac{\gamma^3}{2^2}\cdot\frac{B^{(3)}}{3}\sin 3v + \ldots. + \frac{\gamma n}{2^{n-1}}\cdot\frac{B^{(n)}}{n}\sin nv,$$

$B^{(n)}$ étant $= (n+1) + \frac{(n-1)n}{1.\ 2^2}\gamma^2 + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.\quad 2.\quad 2^4}\gamma^4 + \frac{(n-1)n(n+1)(n+4)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 2^6}\gamma^6 + \ldots.$

$$+ \frac{(n-1)n(n+1)\left(n+1+\frac{m}{2}\right)\left(n+2+\frac{m}{2}\right)\left(n+3+\frac{m}{2}\right)\ldots.(n+m-2)}{1.\ 2.\ 3.\quad 4.\quad 5.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{m}{2}\cdot\quad 2^m}\gamma^m.$$

Dans l'application de cette formule à un cas particulier, on commencera par déterminer la puissance de l'excentricité, jusqu'à laquelle il faut développer la série, pour que les termes négligés ne produisent pas une erreur sensible, et alors on réduira les coëfficiens $B^{(n)}$ à la forme la plus simple. S'il suffit, par exemple, de porter la précision jusqu'à la sixième puissance de γ, on aura

$$\mu = v + 2\gamma\sin v + \frac{\gamma^2}{4}\left(3 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{3\gamma^4}{16}\right)\sin 2v + \frac{\gamma^3}{12}\left(4 + \frac{3}{2}\gamma^2\right)\sin 3v$$

$$+ \frac{\gamma^4}{32}(5 + 3\gamma^2)\sin 4v + \frac{3}{40}\gamma^5\sin 5v + \frac{7}{192}\gamma^6\sin 6v.$$

La valeur de μ qu'on vient de trouver, donne en même tems l'*équation du*

centre $\mu - v = 2\gamma \sin v +$ cet. dont tous les termes sont exprimés en parties du rayon: pour les avoir en secondes, on les multipliera par 206264,79; ou on les divisera par $\sin 1''$, en ajoutant à leurs logarithmes 5,3144251.

Cela donnera encore le mouvement angulaire *vrai* w pour une heure ou un jour. En effet, m étant le mouvement *moyen*, horaire ou diurne, on a

$$w = \frac{\partial v}{\partial \mu} m = \frac{(1-\gamma\cos v)^2}{(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} m.$$

Or on a trouvé $(1-\gamma^2)^{-\frac{3}{2}} = A$, et l'on a

$$(1-\gamma\cos v)^2 = \left(1+\frac{\gamma^2}{2}\right) - 2\gamma\cos v + \frac{\gamma^2}{2}\cos 2v;$$ d'où l'on tire

$$(10)\ldots w = m\left\{\begin{array}{l} 1+2\gamma^2+\frac{3.7}{2.4}\gamma^4+\frac{3.5.10}{2.4.6}\gamma^6+\ldots+\frac{1.3.5.7\ldots(n-1)}{2.4.6.8\ldots\ n}\cdot\frac{3n+2}{2}\gamma^n \\ -2\gamma\cos v\left(1+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3.5}{2.4}\gamma^4+\ldots+\frac{3.5.7\ldots(n+1)}{2.4.6\ldots\ldots n}\gamma^n\right) \\ +\frac{\gamma^2}{2}\cos 2v\left(1+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3.5}{2.4}\gamma^4+\ldots+\frac{3.5.7\ldots(n+1)}{2.4.6\ldots\ldots n}\gamma^n\right) \end{array}\right\}$$

ou en développant jusqu'à la sixième puissance de γ,

$$w = m\left\{\begin{array}{l} 1+2\gamma^2+\frac{21}{8}\gamma^4+\frac{25}{8}\gamma^6-2\gamma\cos v\left(1+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{15}{8}\gamma^4\right) \\ +\frac{\gamma^2}{2}\cos 2v\left(1+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{15}{8}\gamma^4\right) \end{array}\right\}.$$

Le *rayon vecteur* est (7)

$$z = a(1-\gamma^2)(1+\gamma\cos v+\gamma^2\cos^2 v+\gamma^3\cos^3 v+\ldots+\gamma^n\cos^n v),$$

ou en mettant les cosinus des angles multiples de v à la place de $\cos^n v$,

$$(11)\ldots\frac{z}{a} = 1-\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\gamma^4}{8}-\frac{4}{2}\cdot\frac{\gamma^6}{2^5}-\frac{6.5}{2.3}\cdot\frac{\gamma^8}{2^7}-\ldots-\frac{(n-2)(n-3)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2.\ 3.\ 4\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\frac{\gamma n}{2^{n-1}}$$

$$+\gamma\cos v\left(1-\frac{\gamma^2}{4}-\frac{\gamma^4}{8}-\frac{5}{2}\cdot\frac{\gamma^6}{2^5}-\ldots-\frac{(n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{2.\ 3.\ 4\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\frac{\gamma n}{2^{n-1}}\right)$$

$$+\frac{\gamma^2}{2}\cos 2v\left(1-\frac{\gamma^4}{16}-\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\gamma^6}{2^5}-\frac{8.7}{2.3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\gamma^8}{2^7}-\ldots-\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{2.3.\ 4\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{\gamma n}{2^{n-1}}\right)$$

$$+\frac{\gamma^3}{2^2}\cos 3v\left(1+\frac{\gamma^2}{4}+\frac{\gamma^4}{16}-\frac{9.8}{2.3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\gamma^8}{2^7}-\ldots-\frac{(n+1)n\ldots\left(\frac{n}{2}+4\right)}{2.\ 3.\ 4\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cdot\frac{n-6}{n}\cdot\frac{\gamma n}{2^{n-1}}\right)$$

$$+\frac{\gamma^4}{2^3}\cos 4v\left(1+\frac{\gamma^2}{2}+\frac{\gamma^4}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\gamma^6}{2^5}+\ldots.-\frac{(n+2)(n+1)\ldots\left(\frac{n}{2}+5\right)}{2.\ 3.\ 4\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cdot\frac{n-12}{n}\cdot\frac{\gamma n}{2^{n-1}}\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\gamma m}{2^{m-1}}\cos mv\left\{1+\frac{m-2}{1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{m(m-1)-4}{1.2}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^4+\frac{(m+4)(m(m-1)-6)}{1.2.3}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^6+\ldots.\right.$$
$$\left.+\frac{(m+n-2)(m+n-3)\ldots\left(m+\frac{n}{2}+1\right)}{2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\frac{n}{2}}\cdot(m(m-1)-n)\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n\right\}.$$

Le dernier terme général servira à continuer la série aussi loin qu'on veut. Si elle est développée jusqu'aux termes de l'ordre γ^6, il viendra

$$z=a\left\{1-\frac{\gamma^2}{2}-\frac{\gamma^4}{8}-\frac{\gamma^6}{16}+\gamma\cos v\left(1-\frac{\gamma^2}{4}-\frac{\gamma^4}{8}\right)+\frac{\gamma^2}{2}\cos 2v\left(1-\frac{\gamma^4}{16}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma^3}{4}\cos 3v\left(1+\frac{\gamma^2}{4}\right)+\frac{\gamma^4}{8}\cos 4v\left(1+\frac{\gamma^2}{2}\right)+\frac{\gamma^5}{16}\cos 5v+\frac{\gamma^6}{32}\cos 6v\right\}.$$

Par rapport au soleil, il est inutile de développer les séries précédentes au delà de γ^2 ou γ^3. En effet, les valeurs $a=1$, $m=147'',847074$ pour une heure, et $\gamma=0,01677976$ (§. 99. 120.) donneront

$$\mu-v=6922'',143.\sin v+43'',559.\sin 2v+0'',325.\sin 3v+0'',003.\sin 4v,$$
$$w=147'',930-4'',964.\cos v+0'',021.\cos 2v,$$
$$z=0,99985921+0,01677858.\cos v+0,00014079.\cos 2v$$
$$+0,00000116.\cos 3v+0,00000001.\cos 4v.$$

§. 132. Relativement aux comètes, qui ne sont visibles que près de leur périhélie, il est naturel de compter les anomalies de ce point, au lieu de l'aphélie: on a même adopté cet usage dans les tables modernes du soleil et des planètes: il faut donc connaître les changemens que nos formules éprouveront par cette manière de compter les anomalies. Les trois équations qui font la base de tous ces calculs, sont, en comptant les anomalies ε, μ, v, de l'aphélie, (1) (2) (3) (§. 128.),

$$\mu=\varepsilon+\gamma\sin\varepsilon,\qquad z=a(1+\gamma\cos\varepsilon),\qquad \text{tang}\,\frac{v}{2}=\text{tang}\,\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}.$$

Si les anomalies sont comptées du périhélie, il faut ajouter à ε, μ, v, 180 degrés: ce qui donne une valeur négative à $\sin\varepsilon$ et à $\cos\varepsilon$, et change $\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{v}{2}$ en $90°+\frac{\varepsilon}{2}$ et $90°+\frac{v}{2}$, $\text{tang}\,\frac{\varepsilon}{2}$ et $\text{tang}\,\frac{v}{2}$ en $-\cot\frac{\varepsilon}{2}$ et $-\cot\frac{v}{2}$, ou

en $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon}$ et $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}$. Les équations précédentes prendront donc cette forme:

I. $\mu = \varepsilon - \gamma \sin \varepsilon$, II. $z = a(1 - \gamma \cos \varepsilon)$, III. $\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}$.

Il est visible que ces équations prendraient la même forme, en faisant γ négatif; et il est aisé d'en voir la raison. Si l'excentricité CS (*Fig.* 37.) est négative, elle tombe en CF du côté de l'aphélie qui, par conséquent, devient le périhélie. On en tirera cette conclusion très-importante, que toutes les équations, au moyen desquelles on trouve le rayon vecteur et les anomalies, doivent nécessairement être telles, qu'il soit indifférent, si l'on prend γ négatif, ou si l'on ajoute 180° à tous les angles ε, μ, v. Dans le premier cas, les seules puissances de γ changent de signe, qui ont un exposant impair, γ, γ^3, γ^{2n+1}; dans le second cas, les seuls signes qui changent, sont ceux des sinus et cosinus des angles multipliés par un nombre impair, comme μ, 3μ, $(2n+1)\mu$, parceque les sinus et cosinus de $2(180° + \mu) = 360° + 2\mu$, et en général de $2n(180° + \mu) = n.360° + 2n.\mu$, ont le même signe que ceux de 2μ ou de $2n.\mu$. Il en résulte cette proposition très-remarquable, et importante pour les recherches suivantes, qu'en développant les équations précédentes en série, ces séries auront une telle forme, que tous les termes qui renferment un angle $(2n+1)\mu$, seront multipliés par des puissances d'un degré impair de γ; et que ceux qui renferment un angle $2n.\mu$, se trouveront multipliés par des puissances d'un exposant pair. On verra que c'est effectivement le cas des séries précédentes, ainsi que de celles que nous allons trouver.

§. 133. En multipliant la vitesse *apparente* ou *vraie* $\partial v = p\,Sq$ (*Fig.* 37.) par $z = Sp$, on aura l'arc pQ, d'où l'on conclura la vraie vitesse linéaire $pq = pQ.\sec Qpq = z\partial v.\sec Qpq = \partial s$. Or, si pr est parallèle à AB, on a

$$\operatorname{tang} qpr = \frac{qr}{pr} = \frac{\partial y}{-\partial x}, \text{ et } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ donc}$$

$$y\partial y = -\frac{b^2}{a^2}x\partial x, \text{ et } \operatorname{tang} qpr = \frac{bbx}{aay}.$$

On a d'ailleurs

$$\operatorname{tang} rpS = \operatorname{tang} pSM = \frac{Mp}{SM} = \frac{y}{c+x}, \text{ d'où il suit}$$

$$\operatorname{ang} Spq = \operatorname{tang}(Spr + qpr) = \frac{a^2y^2 + b^2cx + b^2x^2}{a^2cy + a^2xy - b^2xy} = \frac{b^2(a^2+cx)}{cy(a^2+cx)} = \frac{bb}{cy}.$$

Or SpQ étant un angle droit, on a $\text{tang}\, Qpq = \cot Spq = \frac{cy}{bb}$, et

$$\text{sec}\, Qpq = \frac{\sqrt{(b^4 + c^2 y^2)}}{b^2} = \frac{\sqrt{(a^4 - c^2 x^2)}}{ab},$$

ou à cause de $x = a\cos\varepsilon = \frac{a\cos v - c}{1 - \gamma\cos v}$ (§. 129. (4)), d'où il suit

$$a^4 - c^2 x^2 = \frac{b^2(a^2 + c^2 - 2ac\cos v)}{(1 - \gamma\cos v)^2},$$

$$\text{sec}\, Qpq = \frac{\sqrt{(1 - 2\gamma\cos v + \gamma^2)}}{1 - \gamma\cos v},$$

ce qu'il faut multiplier par $z\partial v$, pour avoir ∂s, z étant $= \frac{a(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v}$ (§. 129. (7)) et $\partial v = \frac{\partial\mu(1-\gamma\cos v)^2}{(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$. Il résulte donc la *vitesse réelle* ou linéaire,

$$(12) \ldots . \partial s = a\partial\mu\sqrt{\frac{1 - 2\gamma\cos v + \gamma^2}{1 - \gamma^2}}.$$

Dans l'aphélie A, $\partial s = a\partial\mu\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$ est un *minimum;* au périhélie $\partial s = a\partial\mu\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}$ est un *maximum.* La plus grande vitesse est donc à la plus petite, comme $1+\gamma : 1-\gamma = AS : BS$ (§. 125.): la plus grande est à la vitesse moyenne $a\partial\mu$, comme $\sqrt{(1+\gamma)} : \sqrt{(1-\gamma)} = \sqrt{AS} : \sqrt{BS}$, et la plus petite est à la moyenne, comme $\sqrt{BS}$ à $\sqrt{AS}$: la vitesse moyenne est donc la moyenne proportionnelle entre la plus grande et la plus petite. Les deux extrèmes des vitesses réelles du soleil sont entre elles comme 1,0168 : 0,9832 = 1 : 0,967.

§. 134. Le problème, où le *tems* ou l'*anomalie moyenne* μ est donnée, est d'un usage beaucoup plus fréquent. On peut le résoudre, comme le problème précédent, par une méthode indirecte ou directe. La première se sert de l'anomalie excentrique ε, comme d'un angle auxiliaire, pour trouver le lieu vrai à l'aide de l'équation $\mu = \varepsilon + \gamma\sin\varepsilon$ (§. 128. (2)). Mais, μ étant donné, il y a proprement deux inconnues, ε et $\sin\varepsilon$; le problème serait donc indéterminé, si l'on ne pouvait éliminer l'une ou l'autre de ces quantités: il faut donc exprimer le sinus en fonction de l'arc, ou réciproquement, ce qui conduit à la quadrature du cercle, de sorte que le problème est transcendant. On lui a donné le nom du *problème de Kepler*, qui le définit en vrai géomètre ainsi: „ *aream semicirculi ex quocunque puncto diametri in data ratione*

» *secare*". Kepler, jugeant une solution directe de ce problème impossible (1), propose la méthode suivante. Ayant donné à ε une valeur arbitraire, peu différente de μ, on prendra dans les tables $\sin\varepsilon$, et l'on calculera $\mu = \varepsilon + \gamma \sin\varepsilon$; si cet angle μ est différent de celui qui est donné, on changera les valeurs de ε, jusqu'à ce que $\varepsilon + \gamma \sin\varepsilon$ soit exactement égal à l'angle donné μ. Avec cette valeur juste de ε, on calculera v et z à l'aide des formules (§. 128. (1) (3)). En général, on pourrait prendre arbitrairement plusieurs valeurs de ε, et calculer avec elles $\mu = \varepsilon + \gamma \sin\varepsilon$, et $\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$, ce qui donnera autant de valeurs correspondantes de μ et v. On pourrait ainsi construire des tables qui donnent v pour l'argument μ, en réduisant μ au degré entier le plus proche, et en cherchant par interpolation, la valeur répondante de v.

On peut perfectionner cette méthode de Kepler de deux manières. Comme γ est un petit nombre, on mettra d'abord dans l'équation $\varepsilon = \mu - \gamma \sin\varepsilon$, $\sin\varepsilon = \sin\mu$, ou $\varepsilon = \mu - \gamma\sin\mu$. En substituant successivement la valeur ainsi trouvée de ε, dans le dernier terme $\gamma\sin\varepsilon$, on approchera de la juste valeur de ε par une série très-convergente. Soit $\mu - \gamma\sin\mu = \varepsilon'$, $\mu - \gamma\sin\varepsilon' = \varepsilon''$, $\mu - \gamma\sin\varepsilon'' = \varepsilon'''$, $\mu - \gamma\sin\varepsilon''' = \varepsilon^{IV}$, etc. on aura

$$\varepsilon^{IV} = \mu - \gamma\sin\{\mu - \gamma\sin[\mu - \gamma\sin(\mu - \gamma\sin\mu)]\}.$$

Cette valeur sera assés exacte pour toutes les planètes, excepté Mercure, où il faut calculer plus de termes; pour Vénus, la valeur ε'' suffira.

Une autre approximation est de faire $\gamma\sin\varepsilon = \psi$, et de supposer $\sin\psi = \psi$, $\cos\psi = 1$, parceque ψ est un petit angle. Cela donne

$$\mu - \varepsilon = \psi = \gamma\sin\varepsilon = \gamma\sin(\mu - \psi) = \gamma\sin\mu - \gamma\psi\cos\mu, \text{ donc}$$

$$\psi = \frac{\gamma\sin\mu}{1+\gamma\cos\mu}, \text{ et l'anomalie excentrique } \varepsilon' = \mu - \psi.$$

Mais cette valeur a besoin d'une correction, quand il s'agit de Mars ou de Mercure, où ψ peut monter à 6° ou 12°. Soit donc la juste valeur de l'anomalie excentrique $\varepsilon = \varepsilon' + \omega$: on aura $\mu = \varepsilon + \gamma\sin\varepsilon = \varepsilon' + \omega + \gamma\sin\varepsilon' + \gamma\omega\cos\varepsilon'$, d'où l'on tire la correction

$$\omega = \frac{\mu - \varepsilon' - \gamma\sin\varepsilon'}{1+\gamma\cos\varepsilon'}, \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\mu - \gamma\sin\varepsilon' + \gamma\varepsilon'\cos\varepsilon'}{1+\gamma\cos\varepsilon'}.$$

(1) „Mihi sufficit credere, solvi a priori non posse, propter arcus et sinus ἑτερογένειαν. Erranti mihi, quicunque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius". (*De stella Martis*, à la fin de la *Part. IV.*)

§. 135. Pour exprimer immédiatement v en fonction de μ, on pourrait renverser la série (§. 131. (9)), suivant les règles du *retour des suites*. La première approximation donne $v = \mu - 2\gamma \sin v$, ou $v = \mu - 2\gamma \sin \mu$. En substituant cette valeur dans le dernier terme, on trouvera, comme ci-dessus (§. 134).

$$v = \mu - 2\gamma \sin \{\mu - 2\gamma \sin [\mu - 2\gamma \sin (\mu - 2\gamma \sin \mu)]\},$$

où les termes $B^{(2)}$, $B^{(3)}$, etc. de la série (9) sont négligés. On a à peu près

$$\sin (\mu - 2\gamma \sin \mu) = \sin \mu - 2\gamma \sin \mu \cos \mu = \sin \mu - \gamma \sin 2\mu, \text{ donc}$$

$$v = \mu - 2\gamma \sin \mu + 2\gamma^2 \sin 2\mu + \text{cet.}$$

Il est donc visible, que cette série procède suivant les puissances de γ et les sinus des angles multiples de μ, et que celle de z procèdera suivant les cosinus de ces angles. La forme des séries étant donc connue, il ne reste qu'à déterminer les coëfficiens. Parmi un grand nombre de méthodes qu'on a imaginées pour cet effet, celle de M. le Marquis de Laplace (1) est la seule, qui soit purement analytique, et qui conduise directement au but.

En comptant les anomalies du perihélie, on a ces équations (§. 132.), I. $0 = \varepsilon - \gamma \sin \varepsilon - \mu$, II. $z = a(1 - \gamma \cos \varepsilon)$, III. $\tang \frac{v}{2} = \tang \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}$. Si l'on nomme e le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$, la trigonométrie analytique fournit ces équations:

$$2 \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}, \quad 2 \cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}, \quad \tang x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}.$$

En mettant donc $\frac{v}{2}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$ à la place de x, et en faisant $\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} = \delta$, l'équation III. donnera

$$\frac{e^{v\sqrt{-1}} - 1}{e^{v\sqrt{-1}} + 1} = \delta \cdot \frac{e^{\varepsilon\sqrt{-1}} - 1}{e^{\varepsilon\sqrt{-1}} + 1},$$

d'où l'on tire

$$e^{v\sqrt{-1}} = \frac{(\delta+1)e^{\varepsilon\sqrt{-1}} - (\delta-1)}{(\delta+1) - (\delta-1)e^{\varepsilon\sqrt{-1}}}.$$

Soit $\frac{\delta-1}{\delta+1} = \lambda = \frac{\sqrt{(1+\gamma)} - \sqrt{(1-\gamma)}}{\sqrt{(1+\gamma)} + \sqrt{(1-\gamma)}} = \frac{\gamma}{1+\sqrt{(1-\gamma^2)}}$; il viendra

$$e^{v\sqrt{-1}} = \frac{e^{\varepsilon\sqrt{-1}} - \lambda}{1 - \lambda e^{\varepsilon\sqrt{-1}}} = e^{\varepsilon\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 - \lambda e^{-\varepsilon\sqrt{-1}}}{1 - \lambda e^{\varepsilon\sqrt{-1}}}.$$

En égalant leurs logarithmes, et divisant par $\sqrt{-1}$, on aura

$$v = \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{-1}} \{l(1 - \lambda e^{-\varepsilon\sqrt{-1}}) - l(1 - \lambda e^{\varepsilon\sqrt{-1}})\}.$$

(1) *Mécan. céleste, Part. I. Liv. II. n. 21. p. 170. suiv.*

Or on a généralement $l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n}$, donc

$$l(1-\lambda e^{-\varepsilon\sqrt{-1}}) - l(1-\lambda e^{\varepsilon\sqrt{-1}}) = \lambda(e^{\varepsilon\sqrt{-1}} - e^{-\varepsilon\sqrt{-1}})$$
$$+\frac{\lambda^2}{2}(e^{2\varepsilon\sqrt{-1}} - e^{-2\varepsilon\sqrt{-1}}) + \ldots\ldots + \frac{\lambda^i}{i}(e^{i\varepsilon\sqrt{-1}} - e^{-i\varepsilon\sqrt{-1}}),$$

et en substituant $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} = 2\sin x$,

$$(A)\ldots\ldots v = \varepsilon + 2\lambda\sin\varepsilon + \frac{2}{2}\lambda^2\sin 2\varepsilon + \ldots\ldots + \frac{2}{i}\lambda^i\sin i\varepsilon,$$

i s'étendant à tous les nombres entiers positifs.

Maintenant, v étant donné par ε et $\sin i\varepsilon$, il s'agit d'exprimer ε et $\sin i\varepsilon$ en fonction de μ et de γ, ce qui se fera à l'aide de l'équation I. Or μ étant donné, le problème est réduit, à exprimer ε et $\sin\varepsilon$ en fonction de γ, quelle que soit l'excentricité de l'orbite, μ étant regardée comme constante, de sorte que les coëfficiens seront composés des sinus des angles multiples de μ: car il s'agit de trouver v en série qui procède suivant les puissances de γ. Il faut donc regarder, dans l'équation I, μ comme constante, γ et ε comme variables. Cela posé, $\sin\varepsilon$ étant une fonction de ε que je désignerai par $-\Phi(\varepsilon)$, il s'agit de tirer de l'équation I, ou

$$(1)\ldots\ldots 0 = \varepsilon + \gamma.\Phi(\varepsilon) - \mu,$$

une fonction quelconque de $\varepsilon = \psi(\varepsilon)$, développée suivant les puissances de γ; et l'on sait, que les fonctions $\psi(\varepsilon)$ qu'on cherche ici, sont ε et $\sin\varepsilon$, Ecrivons pour abréger, Φ, ψ, au lieu de $\Phi(\varepsilon)$ et de $\psi(\varepsilon)$.

Si pour une certaine valeur de γ, savoir $\gamma = b$, $\psi(\varepsilon)$ devient $= c$, on sait par le théorème de Taylor, que pour chaque autre valeur $\gamma = b + h$ il viendra

$$\psi(\varepsilon) = c + h\frac{\partial\psi}{\partial\gamma} + \frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{\partial\partial\psi}{\partial\gamma^2} + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\partial^n\psi}{\partial\gamma^n}.$$

Or si γ est nul, l'équation (1) donne $\varepsilon = \mu$, $\sin i\varepsilon = \sin i\mu$, et en général $\psi(\varepsilon) = \psi(\mu)$; et dans le même cas on a $b = 0$, donc $\gamma = h$. Désignant donc par u, u_1, u_2, $\ldots u_n$, les valeurs que ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\partial\psi}{\partial\gamma^2}$, $\ldots\ldots\frac{\partial^n\psi}{\partial\gamma^n}$, prennent dans le cas où $\gamma = 0$, on aura

$$(2)\ldots\ldots\psi(\varepsilon) = u + \gamma.u_1 + \frac{\gamma^2}{2}.u_2 + \ldots + \frac{\gamma n}{2.3\ldots n}u_n.$$

Soit $\partial\Phi = \Phi'.\partial\varepsilon$, $\partial\Phi' = \Phi''.\partial\varepsilon$, etc. $\partial\psi = \psi'.\partial\varepsilon$, $\partial\psi' = \psi''.\partial\varepsilon$, et ainsi de suite; on aura, vu que ε est fonction de γ,

*

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}=\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}=\psi'\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}.$$

Les différentiations successives donneront donc

$$(3)\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial\gamma}=\psi'.\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma};\quad \dfrac{\partial\partial\psi}{\partial\gamma^2}=\psi''\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}\right)^2+\psi'.\dfrac{\partial\partial\varepsilon}{\partial\gamma^2};\\ \dfrac{\partial^3\psi}{\partial\gamma^3}=\psi'''.\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}\right)^3+3\,\psi''.\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}.\dfrac{\partial\partial\varepsilon}{\partial\gamma^2}+\psi'.\dfrac{\partial^3\varepsilon}{\partial\gamma^3};\\ \dfrac{\partial^4\psi}{\partial\gamma^3}=\psi^{IV}\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}\right)^4+6\psi'''\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}\right)^2\dfrac{\partial\partial\varepsilon}{\partial\gamma^2}+3\psi''\left(\dfrac{\partial\partial\varepsilon}{\partial\gamma^2}\right)^2+4\psi''.\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}.\dfrac{\partial^3\varepsilon}{\partial\gamma^3}+\psi'.\dfrac{\partial^4\varepsilon}{\partial\gamma^4};\end{cases}$$

et ainsi du reste. En différentiant successivement l'équation (1), on aura

$$0=(1+\gamma.\Phi')\partial\varepsilon+\Phi.\partial\gamma,$$

$$0=(1+\gamma.\Phi')\partial\partial\varepsilon+\gamma.\Phi''.\partial\varepsilon^2+2\Phi'.\partial\gamma\partial\varepsilon,$$

$$0=(1+\gamma.\Phi')\partial^3\varepsilon+3\gamma.\Phi''.\partial\varepsilon\partial\partial\varepsilon+\gamma.\Phi'''.\partial\varepsilon^3+3\Phi'.\partial\gamma\partial\partial\varepsilon+3\Phi''.\partial\gamma\partial\varepsilon^2;$$

et ainsi de suite. Pour avoir les valeurs de u, u_1, etc, il faut faire $\gamma=0$, ce qui transformera les dernières équations en celles-ci:

$0=\partial\varepsilon+\Phi.\partial\gamma$; $0=\partial\partial\varepsilon+2\Phi'.\partial\gamma\partial\varepsilon$; $0=\partial^3\varepsilon+3\Phi'.\partial\gamma\partial\partial\varepsilon+3\Phi''.\partial\gamma\partial\varepsilon^2$; etc.

En substituant la valeur que donne la première, $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}=-\Phi$, dans les équations suivantes, on trouvera

$$(4)\begin{cases}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}=-\Phi;\quad \dfrac{\partial\partial\varepsilon}{\partial\gamma^2}=+2\Phi.\Phi';\quad \dfrac{\partial^3\varepsilon}{\partial\gamma^3}=-6\Phi(\Phi')^2-3(\Phi)^2.\Phi'',\\ \dfrac{\partial^4\varepsilon}{\partial\gamma^4}=24\Phi(\Phi')^3+36(\Phi)^2.\Phi'.\Phi''+4(\Phi)^3.\Phi''',\end{cases}$$

et ainsi de suite. En introduisant ces valeurs dans les équations (3), il viendra

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}=-\psi'.\Phi;\quad \frac{\partial\partial\psi}{\partial\gamma^2}=+\psi''.(\Phi)^2+2\psi'.\Phi.\Phi';$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial\gamma^3}=-\psi'''(\Phi)^3-6\psi''(\Phi)^2.\Phi'-6\psi'.\Phi.(\Phi')^2-3\psi'.(\Phi)^2.\Phi''; \text{ etc.}$$

On peut donner aux dernières équations cette forme beaucoup plus simple:

$$(5)\ \begin{cases}u_1=-\psi'.\Phi;\ u_2=+\dfrac{\partial.\psi'(\Phi)^2}{\partial\varepsilon};\ u_3=-\dfrac{\partial\partial.\psi'(\Phi)^3}{\partial\varepsilon^2};\ u_4=+\dfrac{\partial^3.\psi'(\Phi)^4}{\partial\varepsilon^3}, \text{ etc.}\end{cases}$$

dont il est aisé de se convaincre par la différentiation. En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on aura

$$(6)\ldots\psi=u-\gamma\psi'.\Phi+\frac{\gamma^2}{2}.\frac{\partial.\psi'(\Phi)^2}{\partial\varepsilon}-\frac{\gamma^3}{2.3}.\frac{\partial\partial.\psi'(\Phi)^3}{\partial\varepsilon^2}+\ldots.\pm\frac{\gamma^n}{2.3\ldots n}.\frac{\partial^{n-1}.\psi'(\Phi)^n}{\partial\varepsilon^{n-2}},$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que n est un nombre pair ou impair. On se rappellera que dans u, ψ', Φ, il faut faire $\gamma=0$, d'où il vient (1) $\varepsilon=\mu$, $u=\psi(\mu)$, $\psi'=\frac{\partial.\psi(\mu)}{\partial\mu}$, $\Phi=\Phi(\mu)=-\sin\mu$.

§. 136. Les deux fonctions ψ qu'on cherche ici, sont ε et $\sin i\varepsilon$. Dans le premier cas on a ψ ou $\psi(\varepsilon) = \varepsilon$, $u = \psi(\mu) = \mu$, $\psi' = \frac{\partial u}{\partial \mu} = 1$, $\Phi = -\sin\mu$; ce qui donne à l'équation (6) cette forme:

$$(B)\ldots\varepsilon = \mu + \gamma\sin\mu + \frac{\gamma^2}{2}\cdot\frac{\partial.\sin^2\mu}{\partial\mu} + \frac{\gamma^3}{2.3}\cdot\frac{\partial\partial.\sin^3\mu}{\partial\mu^2} + \ldots + \frac{\gamma^n}{2.3\ldots n}\cdot\frac{\partial^{n-1}.\sin^n\mu}{\partial\mu^{n-1}}.$$

Dans le second cas on a $\psi = \sin i\varepsilon$, $u = \sin i\mu$, $\psi' = i\cos i\mu$, $\Phi = -\sin\mu$. En substituant ces valeurs dans l'équation (6), on trouvera

$$(C)\ldots\sin i\varepsilon = \sin i\mu + \gamma i\cos i\mu.\sin\mu + \frac{i\gamma^2}{2}\cdot\frac{\partial.\cos i u.\sin^2\mu}{\partial\mu} + \ldots\ldots + \frac{i\gamma^n}{2.3\ldots n}\cdot\frac{\partial^{n-1}.\cos i\mu.\sin^n\mu}{\partial\mu^{n-1}}.$$

Maintenant il s'agit, d'exprimer les différentielles $\partial^{n-1}.\sin^n\mu$, et $\partial^{n-1}.\cos i\mu\sin^n\mu$ par des séries ordonnées suivant les angles multiples de μ.

La trigonométrie analytique donne pour $\sin^n\mu$ les quatre séries suivantes, selon que n est un nombre de la forme $4s$, $4s+2$, $4s+1$, ou $4s+3$:

$$(7)\begin{cases} 2^{n-1}\sin^n\mu = +\cos n\mu - N_1\cos(n-2)\mu + N_2\cos(n-4)\mu - \ldots - N_{\frac{n}{2}-2}\cos 2\mu + \frac{1}{2}N_{\frac{n}{2}}, \\ 2^{n-1}\sin^n\mu = -\cos n\mu + N_1\cos(n-2)\mu - N_2\cos(n-4)\mu + \ldots - N_{\frac{n}{2}-2}\cos 2\mu + \frac{1}{2}N_{\frac{n}{2}}, \\ 2^{n-1}\sin^n\mu = +\sin n\mu - N_1\sin(n-2)\mu + N_2\sin(n-4)\mu - \ldots + N_{\frac{n}{2}-1}\sin\mu; \\ 2^{n-1}\sin^n\mu = -\sin n\mu + N_1\sin(n-2)\mu - N_2\sin(n-4)\mu + \ldots + N_{\frac{n}{2}-1}\sin\mu; \end{cases}$$

$N_1 = \frac{n}{1}$, $N_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}$, $N_{\frac{n}{2}} = \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}$, étant les coëfficiens connus du binome élevé à la puissance n.

Pour trouver la différentielle de l'ordre $n-1$, il faut différentier la première série $(4s-1)$ fois, la seconde $(4s+1)$ fois, la troisième $(4s)$ fois, et la quatrième $(4s+2)$ fois: la forme de la différentielle sera donc connue, en différentiant la première série trois fois, la seconde une fois, la troisième quatre fois ou point du tout, et la quatrième deux fois, parcequ'après quatre différentiations il revient toujours la même forme. Ainsi on trouvera, que toutes les quatre séries donnent la même différentielle qui, pour la forme, convient avec la troisième série; et comme dans chaque nouvelle différentiation, tous les termes sont multipliés par les nombres n, ou $n-2$, etc. qui désignent le multiple de l'angle μ, on aura.

(8).. $2^{n-1}.\frac{\partial^{n-1}.\sin^n\mu}{\partial\mu^{n-1}} = n^{n-1}\sin n\mu - N_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)\mu + N_2(n-4)^{n-1}\sin(n-4)\mu - \text{cet.}$

Cette série sera interrompue, lorsqu'un des nombres $n-2$, $n-4$, etc. devient $= 1$ ou $= 2$.

En faisant donc successivement $n = 2$, $n = 3$, etc. et en substituant (8) en (B), il viendra

(D).... $\varepsilon = \mu + \gamma\sin\mu + \frac{\gamma^2}{2}\sin 2\mu + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{\gamma^3}{2.3}(3^2\sin 3\mu - 3\sin\mu) + \ldots\ldots$

$+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{\gamma^n}{2.3\ldots n}\cdot\{n^{n-1}\sin n\mu - N_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)\mu + \ldots \pm N_r(n-2r)^{n-1}\sin(n-2r)\mu\}$;

où il faut observer que dans cette formule, ainsi que dans celles qui suivront, s'il y a double signe $\pm$ ou $\mp$, le supérieur ou l'inférieur sera employé, selon que la lettre qui se trouve au pied du coefficient immédiatement suivant (r au pied de N), est un nombre pair ou impair.

La fonction $\sin i\varepsilon$ (C) renferme le produit $\cos i\mu.\sin^n\mu$ et sa différentielle de l'ordre $n-1$; il faut donc multiplier les séries (7) par $\cos i\mu$; alors, ayant substitué dans les deux premières séries, $\cos i\mu.\cos k\mu = \frac{1}{2}\cos(k+i)\mu + \frac{1}{2}\cos(k-i)\mu$, et dans les deux dernières, $\cos i\mu.\sin k\mu = \frac{1}{2}\sin(k+i)\mu + \frac{1}{2}\sin(k-i)\mu$, on trouvera pour les quatre cas, où n a la forme $4s$, $4s+2$, $4s+1$, ou $4s+3$,

(9) .... $2^n.\cos i\mu.\sin^n\mu =$

$$\begin{cases} = +\cos(n+i)\mu + \cos(n-i)\mu - N_1\cos(n-2+i)\mu - N_1\cos(n-2-i)\mu + \ldots\ldots \\ = -\cos(n+i)\mu - \cos(n-i)\mu + N_1\cos(n-2+i)\mu + N_1\cos(n-2-i)\mu - \ldots\ldots \\ = +\sin(n+i)\mu + \sin(n-i)\mu - N_1\sin(n-2+i)\mu - N_1\sin(n-2-i)\mu + \ldots\ldots \\ = -\sin(n+i)\mu - \sin(n-i)\mu + N_1\sin(n-2+i)\mu + N_1\sin(n-2-i)\mu - \ldots\ldots \end{cases}$$

le dernier terme des deux premières séries étant $= +N_{\frac{n}{2}}$, et celui des deux dernières $= +N_{\frac{n-1}{2}}(\sin(i+1)\mu - \sin(i-1)\mu)$, ce qui est évident par le dernier terme des séries (7). Comme les séries (9) ont absolument la même forme que les séries (7), on trouvera de la même manière la différentielle des quatre séries,

(10) .... $2^n.\frac{\partial^{n-1}.\cos i\mu.\sin^n\mu}{\partial\mu^{n-1}} = (n+i)^{n-1}\sin(n+i)\mu + (n-i)^{n-1}\sin(n-i)\mu$

$-N_1(n-2+i)^{n-1}\sin(n-2+i)\mu - N_1(n-2-i)^{n-1}\sin(n-2-i)\mu + \ldots\ldots$

$\pm N_r\{(n-2r+i)^{n-1}\sin(n-2r+i)\mu + (n-2r-i)^{n-1}\sin(n-2r-i)\mu\}$.

Cette série se terminera, comme la précédente (8), quand $n-2r$ devient nul, ou $=1$: et dans le second cas, le dernier terme sera $=$

$$\pm N_{\frac{n-1}{2}} \{(i+1)^{n-1}\sin(i+1)\mu-(i-1)^{n-1}\sin(i-1)\mu\};$$

dans le premier cas il sera $=\pm N_{\frac{n}{2}}.i^{n-1}\sin i\mu$.

En faisant successivement $n=2$, $n=3$. etc. dans cette série, et en la substituant en (C), on aura

$$\text{(E)}\quad \sin i\varepsilon = \sin i\mu + \frac{i}{2}\gamma(\sin(1+i)\mu+\sin(1-i)\mu)$$
$$+\frac{i}{2^2}\cdot\frac{\gamma^2}{2}[(2+i)\sin(2+i)\mu+(2-i)\sin(2-i)\mu-2i\sin i\mu]$$
$$+\frac{i}{2^n}\cdot\frac{\gamma n}{2.3....n}\begin{cases}(n+i)^{n-1}\sin(n+i)\mu+(n-i)^{n-1}\sin(n-i)\mu\\ -N_1[(n-2+i)^{n-1}\sin(n-2+i)\mu+(n-2-i)^{n-1}\sin(n-2-i)\mu]\\ \pm N_r[(n-2r+i)^{n-1}\sin(n-2r+i)\mu+(n-2r-i)^{n-1}\sin(n-2r-i)\mu].\end{cases}$$

§. 137. Reprenons l'équation (A) dont le terme général est $+\frac{2}{i}\lambda^i\sin i\varepsilon$. Pour développer λ^i suivant les puissances de γ, faisons $1+\sqrt{(1-\gamma^2)}=y$, ensorte que (§. 135.) $\lambda=\frac{\gamma}{y}$, et $\frac{1}{y}=\frac{1-\sqrt{(1-\gamma^2)}}{\gamma^2}=\frac{2-y}{\gamma^2}$, d'où il résulte

$$0=\frac{\gamma^2}{y}+y-2.$$

Cette équation est parfaitement semblable à (1) (§. 135.), si l'on fait $\mu=2$, $\varepsilon=y$, $\gamma=\gamma^2$, et $\Phi(\varepsilon)=\Phi(y)=\frac{1}{y}=\Phi$. Or on demande ici $\lambda^i=\frac{\gamma i}{y i}$: la fonction cherchée $\psi(y)$ est donc $\psi=\frac{1}{y^i}$, laquelle étant trouvée, on aura $\lambda^i=\gamma^i.\psi(y)$. Mais on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\psi'=-\frac{i}{y^{i+1}}=-i(\Phi)^{i+1}, \text{ et } \psi'(\Phi)^n=-i(\Phi)^{i+n+1}.$$

En mettant donc γ^2 à la place de γ, l'équation (6) (§. 135.) deviendra

$$\text{(11)}\ldots.\ \psi=u+i\gamma^2.(\Phi)^{i+2}-i\frac{\gamma^4}{2}\cdot\frac{\partial.(\Phi)^{i+3}}{\partial y}-i\frac{\gamma^6}{2.3}\cdot\frac{\partial\partial(\Phi)^{i+4}}{\partial y^2}-\text{cet.}$$

Or $\Phi=\frac{1}{y}$, donc $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\Phi'=-\frac{1}{y^2}=-(\Phi)^2$; d'où l'on tire

$$\frac{\partial.(\Phi)^n}{\partial y}=n(\Phi)^{n-1}.\Phi'=-n(\Phi)^{n+1};\ \frac{\partial\partial.(\Phi)^n}{\partial y^2}=-n(n+1)(\Phi)^n.\Phi'=+n(n+1)(\Phi)^{n+2};$$
$$\frac{\partial^3.(\Phi)^n}{\partial y^3}=+n(n+1)(n+2)(\Phi)^{n+1}.\Phi'=-n(n+1)(n+2)(\Phi)^{n+3};\ \text{etc.}$$

Toutes ces différentielles sont comprises dans la formule générale

$$\text{(a)}\ldots.\ \frac{\partial.^r(\Phi)^n}{\partial y^r}=\pm n(n+1)(n+2)\ldots.(n+r+1).(\Phi)^{n+r},$$

le ligne supérieur ou inférieur devant être pris, selon que r est un nombre pair ou impair. En faisant donc dans l'équation (11), $n=i+3$ et $r=1$,

$n = i+4$ et $r = 2$, etc. tous les termes auront le signe $+$, et l'on trouvera

$$\psi = u + i\gamma^2(\Phi)^{i+2} + i(i+3)\frac{\gamma^4}{2}(\Phi)^{i+4} + i(i+4)(i+5)\frac{\gamma^6}{2.3}(\Phi)^{i+6} + \text{cet.}$$

Or on a $u = \psi(2) = \frac{1}{2}i$, $\Phi = \Phi(2) = \frac{1}{2}$, et $\lambda^i = \gamma^i.\psi$: ce qui étant substitué dans la dernière série, donnera

$$(12)\ldots\ldots \lambda^i = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^i \cdot \left\{ 1 + i\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{i(i+3)}{1.2}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^4 + \frac{i(i+4)(i+5)}{1.2.3}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^6 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{i(i+k+1)(i+k+2)\ldots\ldots(i+2k-1)}{1.2.3\ldots\ldots k}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \right\}.$$

Maintenant on a (§. 135.)

$$(A)\ldots\ldots v = \varepsilon + \frac{2}{i} \times (12) \times (E) = (D) + \frac{2}{i} \cdot (12) \cdot (E);$$

où il faut faire successivement, dans (12) et dans (E), $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$, etc. et pour chaque valeur de i, dans le terme général de (E) et de (D), $n = 3$, $n = 4$, etc.

§. 138. Le rayon vecteur z est donné par l'équation II. (§. 135.),

$$\frac{z}{\alpha} = 1 - \gamma\cos\varepsilon:$$

il s'agit donc de trouver $\cos\varepsilon$. Or l'équation (6) (§. 135.), dans laquelle $\Phi = -\sin\mu$, donne chaque fonction de $\varepsilon = \psi$, et par conséquent aussi $\cos\varepsilon$. Faisant donc $\psi = \cos\varepsilon$, on aura $u = \psi(\mu) = \cos\mu$, et $\psi' = \frac{\partial\cos\mu}{\partial\mu} = -\sin\mu$; d'où il vient (6),

$$(F)\ldots\ldots \cos\varepsilon = \cos\mu - \gamma\sin^2\mu - \frac{\gamma^2}{2}\cdot\frac{\partial.\sin^3\mu}{\partial\mu} - \ldots\ldots - \frac{\gamma^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{\partial^{n-2}.\sin^n\mu}{\partial\mu^{n-2}}.$$

Pour trouver la différentielle de $\sin^n\mu$ de l'ordre $n-2$, il faut différentier la première des séries (7) (§. 136.) deux fois, la seconde aucune fois, la troisième trois fois, et la quatrième une fois: toutes les quatre auront donc la forme de la seconde série; et en multipliant chaque terme par le coëfficient qui naît de la différentiation $(n-2)$ fois répétée, on trouvera

$$2^{n-1}\cdot\frac{\partial^{n-2}.\sin^n\mu}{\partial\mu^{n-2}} = -n^{n-2}\cos n\mu + N_1(n-2)^{n-2}\cos(n-2)\mu - \ldots\ldots$$
$$\mp N_r(n-2r)^{n-2}\cos(n-2r)\mu,$$

où il faut toujours prendre r plus petit que $\frac{n}{2}$. Cela donne

$$(F)\ldots\ldots \cos\varepsilon = \cos\mu + \frac{\gamma}{2}(\cos 2\mu - 1) + \frac{\gamma^2}{2^2.2}(3\cos 3\mu - 3\cos\mu) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\gamma^{n-1}}{2^{n-1}.2.3\ldots(n-1)}\left\{ n^{n-2}\cos n\mu - N_1(n-2)^{n-2}\cos(n-2)\mu + \ldots \right.$$
$$\left. \mp N_r(n-2r)^{n-2}\cos(n-2r)\mu \right\}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation $\frac{z}{a} = 1 - \gamma \cos \varepsilon$, on aura

$$(G) \ldots . \frac{z}{a} = 1 + \frac{\gamma^2}{2} - \gamma \cos \mu - \frac{\gamma^2}{2} \cos 2\mu - \frac{3\gamma^3}{8} (\cos 3\mu - \cos \mu) - \ldots .$$
$$- \frac{\gamma n}{2^{n-1} . 2.3 \ldots (n-1)} \left\{ \begin{matrix} n^{n-2} \cos n\mu - N_1 (n-2)^{n-2} \cos (n-2)\mu + \ldots . \\ \pm N_r (n-2r)^{n-2} \cos (n-2r)\mu \end{matrix} \right\} .$$

La série que nous avons trouvée pour v (§. 137.), a cette forme,

$$v = \mu + M^{(1)} \sin \mu + M^{(2)} \sin 2\mu + M^{(3)} \sin 3\mu + \text{cet.}$$

Quand les coëfficiens M seront connus, on trouvera aussi le mouvement vrai w. En effet on a $\frac{\partial v}{\partial \mu} = 1 + M^{(1)} \cos \mu + 2 M^{(2)} \cos 2\mu + 3 M^{(3)} \cos 3\mu + \text{cet.}$ et $w = m \frac{\partial v}{\partial \mu}$. Si donc m est le mouvement moyen pour une heure, le mouvement vrai sera

$$(H) \ldots . w = m \{ 1 + M^{(1)} \cos \mu + 2 M^{(2)} \cos 2\mu + 3 M^{(3)} \cos 3\mu + \text{cet.} \} .$$

§. 139. Si l'on substitue dans (A) (§. 137.) les valeurs de (D), (12), et (E), il viendra

$$(I) \ldots . v = \mu + \gamma \sin \mu + \frac{\gamma^2}{2} \sin 2\mu + \ldots .$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\gamma n}{2.3 \ldots . n} \{ n^{n-1} \sin n\mu - N_1 (n-2)^{n-1} \sin (n-2)\mu + \ldots . \pm N_r (n-2r)^{n-1} \sin (n-2r)\mu \}$$
$$+ \frac{\gamma^i}{2^{i-1}} \cdot \left\{ \frac{1}{i} + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{i+3}{2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^4 + \ldots . \right.$$
$$\left. + \frac{(i+k+1)(i+k+2) \ldots (i+2k-1)}{2. \quad 3 \ldots \ldots . k} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \sin i\mu + \frac{i}{2} \gamma \left(\sin (1+i)\mu + \sin (1-i)\mu \right) \\ + \frac{i\gamma^2}{8} \left[(2+i) \sin (2+i)\mu + (2-i) \sin (2-i)\mu - 2i \sin i\mu \right] \\ + \frac{i}{2^n} \cdot \frac{\gamma n}{2.3 \ldots n} \cdot \left\{ \begin{matrix} (n+i)^{n-1} \sin (n+i)\mu + (n-i)^{n-1} \sin (n-i)\mu \\ \pm N_r (n-2r+i)^{n-1} \sin (n-2r+i)\mu \\ \pm N_r (n-2r-i)^{n-1} \sin (n-2r-i)\mu \end{matrix} \right. \end{matrix} \right\} .$$

En faisant la multiplication indiquée dans l'équation (I), et en la développant, ainsi que l'équation (G), suivant les sinus et cosinus des angles multiples de μ, on trouvera, jusqu'à la seizième puissance de γ,

$$(K) \ldots . v = \mu + \gamma \sin \mu . \left\{ \begin{matrix} 2 - \frac{\gamma^2}{4} + \frac{5\gamma^4}{2^6.3} + \frac{107.\gamma^6}{2^9.3^2} + \frac{6217.\gamma^8}{2^{13}.3^2.5} + \frac{565879.\gamma^{10}}{2^{16}.3^3} \\ + \frac{75257101.\gamma^{12}}{2^{19}.3^4.5^2.7} + \frac{2753673031.\gamma^{14}}{2^{24}.3^4.5.7^2} \end{matrix} \right\}$$
$$+ \gamma^2 \sin 2\mu . \left\{ \begin{matrix} \frac{5}{4} - \frac{11.\gamma^2}{2^3.3} + \frac{17.\gamma^4}{2^6.3} + \frac{43.\gamma^6}{2^7.3^2.5} + \frac{677.\gamma^8}{2^9.3^3.5} + \frac{7237.\gamma^{10}}{2^{10}.3^3.5.7} \\ + \frac{1408547.\gamma^{12}}{2^{14}.3^4.5^2.7} - \frac{149072149.\gamma^{14}}{2^{15}.3^6.5^2.7^2} \end{matrix} \right\}$$

$$+\gamma^3 \sin 3\mu . \left\{ \frac{13}{12} - \frac{43.\gamma^2}{2^6} + \frac{95.\gamma^4}{2^9} - \frac{973.\gamma^6}{2^{12}.3.5} + \frac{19503.\gamma^8}{2^{16}.5.7} + \frac{1839669.\gamma^{10}}{2^{21}.5^2.7} + \frac{53439411.\gamma^{12}}{2^{24}.3.5^2} \right\}$$

$$+\gamma^4 \sin 4\mu . \left\{ \frac{103}{96} - \frac{451.\gamma^2}{2^6.3.5} + \frac{4123.\gamma^4}{2^8.3^2.5} - \frac{1619.\gamma^6}{2^7.3^3.7} + \frac{111929.\gamma^8}{2^{13}.3^3.5.7} + \frac{154061.\gamma^{10}}{2^{13}.3^6.5^2.7} + \frac{26766613.\gamma^{12}}{2^{16}.3^6.5^3} \right\}$$

$$+\gamma^5 \sin 5\mu . \left\{ \frac{1097}{2^6.3.5} - \frac{5957.\gamma^2}{2^9.3^2} + \frac{164921.\gamma^4}{2^{12}.3^2.7} - \frac{4305913.\gamma^6}{2^{17}.3^3.7} + \frac{130821245.\gamma^8}{2^{21}.3^6.7} - \frac{20362884\,1.\gamma^{10}}{2^{24}.3^5.5.7} \right\}$$

$$+\gamma^6 \sin 6\mu . \left\{ \frac{1223}{2^6.3.5} - \frac{7913.\gamma^2}{2^7.5.7} + \frac{7751.\gamma^4}{2^{10}.7} - \frac{82021.\gamma^6}{2^{11}.3.5.7} + \frac{816771.\gamma^8}{2^{14}.3.5^2.7} - \frac{4274153.\gamma^{10}}{2^{15}.5^3.7.11} \right\}$$

$$+\gamma^7 \sin 7\mu . \left\{ \frac{47273}{2^9.3^2.7} - \frac{1773271.\gamma^2}{2^{14}.3^2.5} + \frac{93521303.\gamma^4}{2^{17}.3^4.5} - \frac{4855133971.\gamma^6}{2^{20}.3^5.5^2} + \frac{255385984003.\gamma^8}{2^{24}.3^5.5^2.11} \right\}$$

$$+\gamma^8 \sin 8\mu . \left\{ \frac{556403}{2^{10}.3^2.5.7} - \frac{4745483.\gamma^2}{2^9.3^4.5.7} + \frac{32431949.\gamma^4}{2^{12}.3^4.5.7} - \frac{2743090943.\gamma^6}{2^{12}.3^5.5^2.7.11} + \frac{930607882\,07.\gamma^8}{2^{17}.3^6.5^2.7.11} \right\}$$

$$+\gamma^9 \sin 9\mu . \left\{ \frac{10661993}{2^{14}.3^2.5.7} - \frac{101836961.\gamma^2}{2^{17}.5^2.7} + \frac{8755984901.\gamma^4}{2^{20}.5^2.7.11} - \frac{4984151093\,9.\gamma^6}{2^{24}.3.5.7.11} \right\}$$

$$+\gamma^{10} \sin 10\mu . \left\{ \frac{7281587}{2^{10}.3^4.5.7} - \frac{76972457.\gamma^2}{2^{11}.3^4.7.11} + \frac{2032943839.\gamma^4}{2^{14}.3^5.7.11} - \frac{1526084899\,3.\gamma^6}{2^{15}.3^6.11.13} \right\}$$

$$+\gamma^{11} \sin 11\mu . \left\{ \frac{6292901710\,1}{2^{17}.3^4.5^2.7.11} - \frac{7292107806\,11.\gamma^2}{2^{21}.3^6.5^2.7} + \frac{7430249419558\,1.\gamma^4}{2^{24}.3^6.5.7.11.13} \right\}$$

$$+\gamma^{12} \sin 12\mu . \left\{ \frac{7218065}{2^{13}.3.7.11} - \frac{3248867\,87.\gamma^2}{2^{13}.5^2.11.13} + \frac{5152373647\,23.\gamma^4}{2^{16}.3.5^2.7^2.11.13} \right\}$$

$$+\gamma^{13}\sin 13\mu.\left\{\frac{6071886268197 7}{2^{21}.3^6.5^2.7.11.13}-\frac{751605447659 27.\gamma^2}{2^{24}.3^6.5^2.7}\right\}$$

$$+\gamma^{14}\sin 14\mu.\left\{\frac{5959537198 97}{2^{14}.3^6.5^2.7.11.13}-\frac{871784520323 9.\gamma^2}{2^{16}.3^6.5^3.11.13}\right\}$$

$$+\gamma^{15}\sin 15\mu.\left\{\frac{1332496640 5463}{2^{24}.3.5.7^2.11.13}\right\}$$

$$+\gamma^{16}\sin 16\mu.\left\{\frac{2470163011 4823}{2^{19}.3^6.5^3.7^2.11}\right\};$$

et le rayon vecteur jusqu'à la treizième puissance de γ,

$$(L)\ldots.\frac{z}{a}=1+\frac{\gamma^2}{2}-\gamma\cos\mu.\left\{1-\frac{3.\gamma^2}{8}+\frac{5.\gamma^4}{2^6.3}-\frac{7.\gamma^6}{2^{10}.3^2}+\frac{\gamma^8}{2^{14}.5}-\frac{11.\gamma^{10}}{2^{17}.3^3.5^2}+\frac{13.\gamma^{12}}{2^{20}.3^4.5^2.7}\right\}$$

$$-\gamma^2\cos 2\mu.\left\{\frac{1}{2}-\frac{\gamma^2}{3}+\frac{\gamma^4}{16}-\frac{\gamma^6}{2^2.3^2.5}+\frac{\gamma^8}{2^7.3^3}-\frac{\gamma^{10}}{2^6.3^2.5^2.7}\right\}$$

$$-\gamma^3\cos 3\mu.\left\{\frac{3}{8}-\frac{45.\gamma^2}{128}+\frac{3^4.7.\gamma^4}{2^{10}.5}-\frac{3^6.\gamma^6}{2^{13}.5}+\frac{3^6.11.\gamma^8}{2^{17}.5.7}-\frac{3^8.13.\gamma^{10}}{2^{22}.5^2.7}\right\}$$

$$-\gamma^4\cos 4\mu.\left\{\frac{1}{3}-\frac{2.\gamma^2}{5}+\frac{8.\gamma^4}{45}-\frac{8.\gamma^6}{3^3.7}+\frac{2.\gamma^8}{3^2.5.7}\right\}$$

$$-\gamma^5\cos 5\mu.\left\{\frac{5^3}{2^7.3}-\frac{5^4.7.\gamma^2}{2^{10}.3^2}+\frac{5^6.\gamma^4}{2^{13}.7}-\frac{5^8.11.\gamma^6}{2^{18}.3^3.7}+\frac{5^{10}.13.\gamma^8}{2^{22}.3^6.7}\right\}$$

$$-\gamma^6\cos 6\mu.\left\{\frac{27}{80}-\frac{81.\gamma^2}{140}+\frac{3^6.\gamma^4}{2^3.7}-\frac{3^6.\gamma^6}{2^7.5.7}\right\}$$

$$-\gamma^7\cos 7\mu.\left\{\frac{7^5}{2^{10}.3^2.5}-\frac{7^6.\gamma^2}{2^{16}.5}+\frac{7^8.11.\gamma^4}{2^{18}.3^4.5}-\frac{7^{10}.13.\gamma^6}{2^{21}.3^6.5^2}\right\}$$

$$-\gamma^8\cos 8\mu.\left\{\frac{2^7}{3^2.5.7}-\frac{2^9.\gamma^2}{3^4.7}+\frac{2^{12}.\gamma^4}{3^3.5^2.7}\right\}$$

$$-\gamma^9\cos 9\mu.\left\{\frac{3^{12}}{2^{16}.5.7}-\frac{3^{14}.11.\gamma^2}{2^{18}.5^2.7}+\frac{3^{18}.13.\gamma^4}{2^{21}.5^2.7.11}\right\}$$

$$-\gamma^{10}\cos 10\mu.\left\{\frac{5^7}{2^9.3^4.7}-\frac{5^8.\gamma^2}{2^7.3^3.7.11}\right\}-\gamma^{11}\cos 11\mu.\left\{\frac{11^9}{2^{18}.3^4.5^2.7}-\frac{11^{10}.13.\gamma^2}{2^{22}.3^4.5^2.7}\right\}$$

$$-\gamma^{12}\cos 12\mu.\left\{\frac{2.3^6}{5^2.7.11}\right\}-\gamma^{13}\cos 13\mu.\left\{\frac{13^{11}}{2^{22}.3^6.5^2.7.11}\right\}.\ (1)$$

Maintenant, les coëfficiens $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, etc. jusqu'à $M^{(16)}$, étant connus par la série de v, on aura le vrai mouvement horaire w, m étant le mouvement moyen,

$$(M)\ldots.w=m(1+M^{(1)}\cos\mu+2M^{(2)}\cos 2\mu+3M^{(3)}\cos 3\mu+\ldots.+nM^{(n)}\cos n\mu).$$

(1) Voy. mon mémoire *sur le problème de Kepler*, et celui de M. *Degen* sur le même objet, dans les *Ephémer. de Berlin* pour 1820 et 1821.

*

Au moyen de ces séries, on trouvera pour le soleil,

$$v = \mu + 6921'',9043.\sin\mu + 72'',5875.\sin 2\mu + 1'',0555.\sin 3\mu + 0'',0175.\sin 4\mu;$$

$$z = 1,00014078 - 0,01677798.\cos\mu - 0,00014075.\cos 2\mu$$
$$- 0,00000177.\cos 3\mu - 0,00000002.\cos 4\mu;$$

$$w = 147'',847 + 4'',9615.\cos\mu + 0'',1041.\cos 2\mu + 0'',0023.\cos 3\mu.$$

Pour faciliter l'évaluation en nombres, j'ai calculé tous les coëfficiens précédens, dont on a besoin, pour trouver l'équation du centre jusqu'à un centième de secondes, et le rayon vecteur jusqu'à la huitième décimale, quand même l'excentricité serait 0,25. Ces coëfficiens suffisent donc pour toutes les planètes, connues jusqu'à présent; et en négligeant le reste il viendra

$$v = \mu + \sin\mu.\{A^{(1)}\gamma - B^{(1)}\gamma^3 + C^{(1)}\gamma^5 + D^{(1)}\gamma^7 + E^{(1)}\gamma^9\}$$
$$+\sin 2\mu.\{A^{(2)}\gamma^2 - B^{(2)}\gamma^4 + C^{(2)}\gamma^6 + D^{(2)}\gamma^8\} + \sin 3\mu.\{A^{(3)}\gamma^3 - B^{(3)}\gamma^5 + C^{(3)}\gamma^7 - D^{(3)}\gamma^9\}$$
$$+\sin 4\mu.\{A^{(4)}\gamma^4 - B^{(4)}\gamma^6 + C^{(4)}\gamma^8 - D^{(4)}\gamma^{10}\} + \sin 5\mu.\{A^{(5)}\gamma^5 - B^{(5)}\gamma^7 + C^{(5)}\gamma^9 - D^{(5)}\gamma^{11}\}$$
$$+\sin 6\mu.\{A^{(6)}\gamma^6 - B^{(6)}\gamma^8 + C^{(6)}\gamma^{10}\} + \sin 7\mu.\{A^{(7)}\gamma^7 - B^{(7)}\gamma^9 + C^{(7)}\gamma^{11}\}$$
$$+\sin 8\mu.\{A^{(8)}\gamma^8 - B^{(8)}\gamma^{10} + C^{(8)}\gamma^{12}\} + \sin 9\mu.\{A^{(9)}\gamma^9 - B^{(9)}\gamma^{11} + C^{(9)}\gamma^{13}\}$$
$$+\sin 10\mu.\{A^{(10)}\gamma^{10} - B^{(10)}\gamma^{12}\} + \sin 11\mu.\{A^{(11)}\gamma^{11} - B^{(11)}\gamma^{13}\} + A^{(12)}\gamma^{12}\sin 12\mu$$
$$+ A^{(13)}\gamma^{13}\sin 13\mu;$$

$$\frac{z}{a} = 1 + \frac{\gamma^2}{2} - \cos\mu.\{\gamma - b^{(1)}\gamma^3 + c^{(1)}\gamma^5 - d^{(1)}\gamma^7\} - \cos 2\mu.\{a^{(2)}\gamma^2 - b^{(2)}\gamma^4 + c^{(2)}\gamma^6 - d^{(2)}\gamma^8\}$$
$$-\cos 3\mu.\{a^{(3)}\gamma^3 - b^{(3)}\gamma^5 + c^{(3)}\gamma^7 - d^{(3)}\gamma^9\} - \cos 4\mu.\{a^{(4)}\gamma^4 - b^{(4)}\gamma^6 + c^{(4)}\gamma^8 - d^{(4)}\gamma^{10}\}$$
$$-\cos 5\mu.\{a^{(5)}\gamma^5 - b^{(5)}\gamma^7 + c^{(5)}\gamma^9 - d^{(5)}\gamma^{11}\} - \cos 6\mu.\{a^{(6)}\gamma^6 - b^{(6)}\gamma^8 + c^{(6)}\gamma^{10} - d^{(6)}\gamma^{12}\}$$
$$-\cos 7\mu.\{a^{(7)}\gamma^7 - b^{(7)}\gamma^9 + c^{(7)}\gamma^{11}\} - \cos 8\mu.\{a^{(8)}\gamma^8 - b^{(8)}\gamma^{10} + c^{(8)}\gamma^{12}\}$$
$$-\cos 9\mu.\{a^{(9)}\gamma^9 - b^{(9)}\gamma^{11} + c^{(9)}\gamma^{13}\} - \cos 10\mu.\{a^{(10)}\gamma^{10} - b^{(10)}\gamma^{12}\}$$
$$-\cos 11\mu.\{a^{(11)}\gamma^{11} - b^{(11)}\gamma^{13}\} - a^{(12)}\gamma^{12}\cos 12\mu - a^{(13)}\gamma^{13}\cos 13\mu.$$

J'ai ôté log. sin 1″ des logarithmes des coëfficiens de la série v, qui sont designés par des lettres capitales, de sorte qu'ils donnent ces nombres en secondes d'un degré, et j'ai trouvé ce qui suit.

$$lA^{(1)} = 5,6154551.29;\ lB^{(1)} = 4,7123651;\ lC^{(1)} = 4,0311224;\ lD^{(1)} = 3,6803;$$
$$lE^{(1)} = 3,541;\ lA^{(2)} = 5,4113351.46;\ lB^{(2)} = 4,9756066;\ lC^{(2)} = 4,26157;$$
$$lD^{(2)} = 3,1875;\ lA^{(3)} = 5,3491872.4;\ lB^{(3)} = 5,1417136;\ lC^{(3)} = 4,58288;$$
$$lD^{(3)} = 3,514;\ lA^{(4)} = 5,3449911;\ lB^{(4)} = 5,28736;\ lC^{(4)} = 4,8682;\ lD^{(4)} = 4,141;$$
$$lA^{(5)} = 5,3723605;\ lB^{(5)} = 5,42594;\ lC^{(5)} = 5,120;\ lD^{(5)} = 4,554;$$

$lA^{(6)}=5,41958$; $lB^{(6)}=5,5615$; $lC^{(6)}=5,348$; $lA^{(7)}=5,48043$;
$lB^{(7)}=5,69557$; $lC^{(7)}=5,56$; $lA^{(8)}=5,5512$; $lB^{(8)}=5,829$; $lC^{(8)}=5,76$;
$lB^{(7)}=5,69557$; $lC^{(7)}=5,56$; $lA^{(8)}=5,5512$; $lB^{(8)}=5,829$; $lC^{(8)}=5,76$;
$lA^{(9)}=5,62953$; $lB^{(9)}=5,9618$; $lC^{(9)}=5,952$; $lA^{(10)}=5,7138$; $lB^{(10)}=6,094$;
$lA^{(11)}=5,8028$; $lB^{(11)}=6,227$; $lA^{(12)}=5,896$; $lA^{(13)}=5,992$;
$lb^{(1)}=9,5740313$; $lc^{(1)}=8,41566.88$; $ld^{(1)}=6,880$; $la^{(2)}=9,69897.00$;
$lb^{(2)}=9,52287.87.45$; $lc^{(2)}=8,79588$; $ld^{(2)}=7,7447$; $la^{(3)}=9,57403.12.7$;
$lb^{(3)}=9,54600.25$; $lc^{(3)}=9,04431.3$; $ld^{(3)}=8,25$; $la^{(4)}=lb^{(2)}$;
$lb^{(4)}=9,60206$; $lc^{(4)}=9,24988$; $ld^{(4)}=8,627$; $la^{(5)}=9,51257.88$;
$lb^{(5)}=9,67643.6$; $lc^{(5)}=9,43533$; $ld^{(5)}=8,938$; $la^{(6)}=9,52827.38$;
$lb^{(6)}=9,76235.7$; $lc^{(6)}=9,6094$; $ld^{(6)}=9,211$; $la^{(7)}=9,56198$;
$lb^{(7)}=9,85617$; $lc^{(7)}=9,7762$; $la^{(8)}=9,6089$; $lb^{(8)}=9,9557$;
$lc^{(8)}=9,938$; $la^{(9)}=9,6659$; $lb^{(9)}=10,0595$; $lc^{(9)}=10,096$;
$la^{(10)}=9,731$; $lb^{(10)}=10,167$; $la^{(11)}=9,8025$; $lb^{(11)}=10,277$;
$la^{(12)}=9,879$; $la^{(13)}=9,961$.

Il faut retrancher 10 de la caractéristique de tous les logarithmes, désignés par de petites lettres.

§. 140. Un des élémens les plus importans d'une orbite est *la plus grande équation* du centre, ainsi que l'anomalie où elle a lieu. Pour que $\mu - v$ devienne un *maximum*, il faut que ∂v soit égal à $\partial \mu$; d'où il suit (§. 130.) $1-\gamma\cos v=(1-\gamma^2)^{\frac{3}{4}}$, ou $\cos v=\frac{1-(1-\gamma^2)^{\frac{3}{4}}}{\gamma}$, donc

$$\text{I. } \cos v=\frac{3}{2}\gamma+\frac{3}{32}\gamma^3+\frac{5}{128}\gamma^5+\ldots+\frac{3}{2^{n+1}}\cdot\frac{1.5.9.13\ldots(2n-5)}{1.2.3\ldots\ldots\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\gamma^n.$$

En substituant cette valeur de v dans la série (9) (§. 131.), ou dans l'équation $\text{tang}\,\frac{\varepsilon}{2}=\text{tang}\,\frac{u}{2}\sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}$ (§. 129. (5)), et calculant $\mu=\varepsilon+\gamma\sin\varepsilon$ (§. 128. (2)), on aura μ, et la plus grande équation $\mu-v$.

Il ne sera pas inutile, de développer en série la plus grande équation en fonction de l'excentricité, et réciproquement. En substituant $1-\gamma\cos v=(1-\gamma^2)^{\frac{3}{4}}$, et $\cos v-\gamma=\frac{(1-\gamma^2)-(1-\gamma^2)^{\frac{3}{4}}}{\gamma}$ dans l'équation (§. 129. (4)), on aura $\cos\varepsilon=\frac{(1-\gamma^2)^{\frac{1}{4}}-1}{\gamma}$, et en serie jusqu'à la neuvième puissance de γ,

$$\text{II. } \cos\varepsilon = -\frac{\gamma}{4} - \frac{3}{2^6}\gamma^3 - \frac{7}{2^7}\gamma^5 - \frac{77}{2^{11}}\gamma^7 - \frac{231}{2^{13}}\gamma^9.$$

On vient de trouver

$$\text{I. } \cos v = \frac{3}{4}\gamma + \frac{3}{2^6}\gamma^3 + \frac{5}{2^7}\gamma^5 + \frac{45}{2^{11}}\gamma^7 + \frac{117}{2^{13}}\gamma^9.$$

Au moyen de la série connue, qui donne l'arc en fonction de son sinus,

$$\Phi = \sin\Phi + \frac{\sin^3\Phi}{2.3} + \frac{3\sin^5\Phi}{2^3.5} + \frac{5\sin^7\Phi}{2^4.7} + \frac{35.\sin^9\Phi}{2^7.9},$$

on trouvera, en faisant $v = 90^\circ - u$, $\varepsilon = 90^\circ + \eta$, parceque $\cos v$ est positif et $\cos\varepsilon$ négatif, $\cos v = \sin u$, $\cos\varepsilon = -\sin\eta$, donc $v = 90^\circ - \cos v - \frac{\cos^3 v}{2.3}$ — cet. et $\varepsilon = 90^\circ - \cos\varepsilon - \frac{\cos^3\varepsilon}{2.3}$ — cet. En développant les puissances $\cos^3 v$, $\cos^5 v$, etc. au moyen des séries I, II, il viendra

$$\text{III. } v = 90^\circ - \frac{3}{4}\gamma - \frac{21}{2^7}\gamma^3 - \frac{3409}{5.2^{13}}\gamma^5 - \frac{97875}{7.2^{18}}\gamma^7 - \frac{1283697}{2^{25}}\gamma^9,$$

$$\text{IV. } \varepsilon = 90^\circ + \frac{\gamma}{4} + \frac{37}{3.2^7}\gamma^3 + \frac{2363}{5.2^{13}}\gamma^5 + \frac{74401}{7.2^{18}}\gamma^7 + \frac{9356435}{9.2^{25}}\gamma^9;$$

d'où l'on tire

$$\text{V. } \varepsilon - v = \gamma + \frac{25}{3.2^6}\gamma^3 + \frac{1443}{5.2^{11}}\gamma^5 + \frac{43069}{7.2^{16}}\gamma^7 + \frac{5227427}{9.2^{23}}\gamma^9.$$

L'équation II. donne

$$\sin^2\varepsilon = (1+\cos\varepsilon)(1-\cos\varepsilon) = 1 - \frac{\gamma^2}{2^4} - \frac{3}{2^6}\gamma^4 - \frac{37}{2^{10}}\gamma^6 - \frac{119}{2^{13}}\gamma^8,$$

d'où l'on tirera, par l'extraction des racines,

$$\sin\varepsilon = 1 - \frac{\gamma^2}{2^5} - \frac{49}{2^{11}}\gamma^4 - \frac{1233}{2^{16}}\gamma^6 - \frac{129189}{2^{23}}\gamma^8,$$

donc, en vertu de l'équation (§. 128. (2)), $\gamma\sin\varepsilon = \mu - \varepsilon$,

$$\text{VI. } \mu - \varepsilon = \gamma - \frac{\gamma^3}{2^6} - \frac{49}{2^{11}}\gamma^5 - \frac{1233}{2^{16}}\gamma^7 - \frac{129189}{2^{23}}\gamma^9.$$

En ajoutant ensemble les équations V, VI, et nommant la plus grande équation $\mu - v = E$, on aura

$$\text{VII. } E = 2\gamma + \frac{11}{3.2^4}\gamma^3 + \frac{599}{5.2^{10}}\gamma^5 + \frac{17219}{7.2^{15}}\gamma^7 + \frac{2032363}{9.2^{22}}\gamma^9 + \text{cet.}$$

Par le renversement de cette série, ou par la méthode des coëfficiens indéterminés, on trouvera, en faisant $\gamma = \frac{E}{2} - aE^3 - bE^5 - cE^7 - dE^9 -$ cet.

$$\text{VIII. } \gamma = \frac{E}{2} - \frac{11.E^3}{3.2^8} - \frac{587.E^5}{3.5.2^{16}} - \frac{40583.E^7}{5.7.9.2^{23}} + \frac{10407049.E^9}{5.7.9.9.2^{32}} + \text{cet.}$$

En ajoutant ensemble les équations IV et VI, ou III et VII, on aura

$$\text{IX. } \mu = 90^\circ + \frac{5}{4}\gamma + \frac{25.\gamma^3}{3.2^7} + \frac{1383\gamma^5}{5.2^{13}} + \frac{39877.\gamma^7}{7.2^{18}} + \frac{4705631.\gamma^9}{9.2^{25}}.$$

Les équations III et IX donnent les anomalies vraie et moyenne, où la plus grande équation a lieu, qu'on trouve au moyen de l'équation VII, ainsi que l'excentricité par le moyen de la série VIII, la plus grande équation étant donnée.

Les résultats de ces calculs, pour toutes les planètes à l'exception des cinq nouvelles, se trouvent dans la table suivante, les anomalies étant comptées de l'aphélie.

	Anomalie vraie $= v$, où l'équation est un *maximum*	La plus grande équation du centre $= \mu - v$
Saturne	87°.35′. 4″,84	6°.26′.19″,48
Jupiter	87. 55. 43, 08	5. 31. 20, 31
Mars	85. 59. 24, 84	10. 40. 58, 89
La Terre	89. 16. 44, 03	1. 55. 22, 39
Vénus	89. 42. 19, 84	0. 47. 7, 08
Mercure	81. 5. 6, 92	23. 40. 0, 38

Si l'on compare les équations $1 - \gamma \cos v = (1 - \gamma^2)^{\frac{3}{4}}$, et $z = \frac{a(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v}$ (§. 129. (7)), il viendra

$$z = a(1-\gamma^2)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{(a^2 - c^2)} = \sqrt{ab};$$

d'où il suit qu'un cercle (*Fig.* 38,), décrit du centre S, et du rayon Sp qui est la moyenne proportionnelle entre le grand et le petit demi-axes de l'ellipse, la coupera dans les deux points, où l'équation du centre est un *maximum*.

Le point où la planète est à sa distance moyenne, se trouve, en faisant $z = a$ dans l'équation $z = \frac{a(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v}$, d'où il suit $\cos v = \gamma$: les points de la distance moyenne et de la plus grande équation, sont donc très-près l'un de l'autre, mais le premier point est plus près de l'aphélie: la distance de ces deux points est dans l'orbite de Mercure à peu-près 3°, dans celle de la terre 14′ 24″.

§. 141. Toutes les recherches des astronomes, depuis Hipparque jusqu'à Kepler, avaient prouvé, que le lieu vrai des planètes, et surtout celui du soleil, est trouvé avec une précision très-approchée de la vérité, en sup-

posant le mouvement uniforme autour d'un point, situé dans la ligne des apsides, et aussi éloigné du centre que le soleil ou la terre (§. 95.). Il était naturel de présumer, que cela pourrait encore avoir lieu dans l'ellipse, où le point d'égalité serait le second foyer; et la supposition de l'uniformité du mouvement autour du foyer opposé au soleil est appelée l'*hypothèse elliptique simple;* car en effet, les calculs dans cette hypothèse sont extrèmement simples. La planète étant en P (*Fig.* 38.), l'anomalie moyenne est suivant cette hypothèse $AFP = \mu$, l'équation du centre $FPS = \mu - v$. Ayant pris sur la prolongation de FP, $FD = AB = 2a$, on aura $PD = PS = z$, vu que dans l'ellipse $FP + SP = 2a$: DPS est donc un triangle isoscèle, et $FPS = 2D$. Connaisant dans le triangle DSF, les côtés $DF = 2a$, $FS = 2c$, et l'angle compris $DFS = 180° - \mu$, la trigonométrie donne

$$\text{tang } D = \frac{c \sin \mu}{a + c \cos \mu}, \text{ c'est-à-dire, (1) .... } \text{tang } \frac{\mu - v}{2} = \frac{\gamma \sin \mu}{1 + \gamma \cos \mu}, \text{ et}$$

$$\frac{FD + FS}{2} : \frac{FD - FS}{2} :: \text{tang } \frac{FSD + FDS}{2} : \text{tang } \frac{FSD - FDS}{2}, \text{ ou}$$

$$a + c : a - c :: \text{tang } \frac{\mu}{2} : \text{tang } \frac{FSD - PSD}{2} :: \text{tang } \frac{\mu}{2} : \text{tang } \frac{v}{2}, \text{ donc}$$

$$(2) \ldots \text{tang } \frac{v}{2} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \text{ tang } \frac{\mu}{2} = \frac{p}{q} \text{ tang } \frac{\mu}{2}.$$

Le rayon vecteur z est $SP = \frac{SF \sin \mu}{\sin (\mu - v)} = \frac{2a\gamma \sin \mu}{\sin (\mu - v)}$; et l'équation (1) donne $\sin (\mu - v) = \frac{2\gamma \sin \mu (1 + \gamma \cos \mu)}{1 + 2\gamma \cos \mu + \gamma^2}$, d'où l'on tire

$$(3) \ldots z = \frac{a(1 + 2\gamma \cos \mu + \gamma^2)}{1 + \gamma \cos \mu}.$$

Pour voir, à quel point ces résultats sont justes, nommons v' l'anomalie vraie, trouvée par cette méthode. L'équation (3) donne à très-peu près $z = a(1 + \gamma \cos \mu')$ au lieu de $z = a(1 + \gamma \cos \varepsilon)$, qui est sa juste valeur (§. 128. (1)), ensorte que les anomalies moyenne et excentrique sont confondues. L'équation (2) donne, en développant jusqu'à la troisième puissance de l'excentricité et des anomalies,

$$\text{tang } \frac{v'}{2} = (1 - \gamma)(1 - \gamma + \gamma^2 - \gamma^3) \text{ tang } \frac{\mu}{2} = (1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\gamma^3)\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\mu^3}{24}\right);$$

et l'on a (§. 128. (3))

$$\text{tang } \frac{v}{2} = \text{tang } \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\gamma(1 - \gamma^2)}{1 + \gamma} = \left(1 - \gamma + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^3}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^3}{24}\right).$$

Or l'équation (2) (§. 128.) donne $\mu = (1+\gamma)\,\varepsilon - \frac{\gamma}{6}\varepsilon^3$. En faisant donc $(1+\gamma)\,\varepsilon = \mu + A\mu^3 = (1+\gamma)\,\varepsilon - \frac{\gamma}{6}\varepsilon^3 + A(1+\gamma)^3\varepsilon^3$, on aura $A = \frac{\gamma}{6}(1+\gamma)^{-3}$, et $\varepsilon = \mu(1-\gamma+\gamma^2-\gamma^3) + \frac{\gamma}{6}(1-4\gamma+10\gamma^2)\mu^3$, et $\varepsilon^3 = \mu^3(1-3\gamma+6\gamma^2-10\gamma^3)$. En substituant cela dans la valeur de $\text{tang}\frac{v}{2}$ que nous venons de trouver, on aura après toutes les réductions,

$$\text{tang}\frac{v}{2} = \frac{\mu}{2}(1-2\gamma+\frac{5}{2}\gamma^2-3\gamma^3) + \frac{\mu^3}{24}(1-2\gamma-\frac{\gamma^2}{2}+11.\gamma^3).$$

La comparaison de cette expression avec celle qu'on a trouvée pour $\text{tang}\frac{v'}{2}$, fait voir qu'elles diffèrent déjà dans la seconde puissance de l'excentricité: il est donc inutile de s'y arrêter plus longtems.

CHAPITRE VIII.

Détermination des orbites par observation.

§. 142. Pour déterminer l'orbite d'une planète, il faut connaître

1. le *plan* dans lequel elle se meut,
2. la *nature de la courbe* qu'elle décrit,
3. la *position de cette courbe* dans le plan de son orbite,
4. la *loi* suivant laquelle la courbe est parcourue.

La loi (4) est donnée par l'application de la *seconde* loi de Kepler à la nature de la courbe (2): la position (3) est déterminée par celle du grand axe ou par la longitude des apsides; la courbe (2) est déterminée en général par la *première* loi de Kepler; la *forme* particulière de l'ellipse est donnée par l'excentricité, et sa *grandeur* par le grand axe qui est trouvé au moyen de la *révolution* ou du mouvement moyen, suivant la *troisième* loi de Kepler; et le mouvement moyen, étant déterminé par la comparaison des observations les plus anciennes, est de tous les élémens celui qui est le mieux connu. Les élémens d'une orbite sont donc de deux espèces, les uns se rapportant à la position du *plan* de l'orbite, les autres à la nature et la position de l'*ellipse*. Mais il ne suffit pas aux astronomes, de connaître tous les points où la planète se trouvera successivement; il leur importe aussi de savoir le *tems* où elle occupera chaque point; et ce tems est trouvé à l'aide du mouvement moyen, de la nature de l'ellipse, et des loix de Kepler, dès qu'on connaît le tems où la planète s'est trouvée dans un point donné, c'est-à-dire l'*époque*. Le plan de l'orbite étant déterminé par son intersection avec le plan de l'écliptique, et son inclinaison à ce plan, il y a en tout les élémens suivans à déterminer.

1. La *ligne des noeuds;* 2. l'*inclinaison;* 3. le *mouvement moyen;* 4. l'*excentricité;* 5. la *longitude de l'aphélie;* 6. *l'époque.*

Les trois derniers que j'appellerai les élémens *elliptiques*, sont proprement l'objet de ce Chapître; car on a vu (§. 107. 108.), comment les deux premiers sont trouvés, et ces méthodes suffisent, pour réduire à l'orbite le lieu dans l'écliptique, que donnent les observations; le lieu sur l'orbite sert à déterminer les élémens elliptiques, au moyen desquels la ligne des noeuds et l'inclinaison sont corrigées, ainsi qu'on l'a vu plus haut. Cette correction n'étant qu'une répétition des mêmes méthodes, il serait inutile d'en dire d'avantage.

Quant aux élémens elliptiques, les méthodes connues du tems de Kepler, et imaginées par lui, ont été développées dans les *Chap. V. et VI.* Il nous reste donc à exposer les méthodes inventées par les astronomes modernes, lesquelles ont le but, de corriger les élémens, déterminés par les anciennes méthodes. Elles supposent donc qu'on connaît les élémens elliptiques à peu près, et les noeuds, l'inclinaison, et le mouvement moyen exactement. Pour voir l'intime liaison qui existe entre toutes ces méthodes, malgré leur différence apparente, il sera bon d'envisager cet objet sous un point de vue plus général.

Le lieu d'une planète, et par conséquent aussi son orbite, composée de tous ces points, est déterminé par la grandeur du rayon vecteur et par sa situation, ou l'angle qu'il fait avec la ligne des équinoxes. Toute l'adresse des observations anciennes et modernes consiste, à séparer ces deux élémens, en déterminant chacun en particulier par observation, afin qu'on puisse choisir la situation la plus favorable pour l'un et pour l'autre. La *direction* du rayon vecteur se trouve immédiatement par les oppositions; et comme celles-ci, à cause du rapport irrationnel entre les révolutions des planètes, arrivent continuellement dans d'autres points de l'orbite, on peut déterminer successivement, par les oppositions seules, tous les points de l'orbite, ainsi que les époques où la planète s'y trouva. Delà il résulte la loi, suivant laquelle le mouvement héliocentrique dépend du tems, ou la formule qui donne la longitude vraie; d'autant plus que les inégalités s'anéantissent, pour revenir dans le même ordre, au bout de chaque révolution: d'où il suit, que cette

*

formule pourra être développée en série suivant les sinus des angles, proportionnels au tems, et de leurs multiples. Un petit nombre d'observations, faites dans les situations les plus favorables, suffira pour déterminer les coëfficiens de cette série. Pour trouver la *grandeur* du rayon vecteur, les observations les plus utiles sont celles des quadratures des planètes supérieures, parceque c'est là que le rayon vecteur se présente dans toute sa longueur, étant perpendiculaire au rayon visuel. L'observation donne l'angle à la terre, celui au soleil est donné par la loi précédente: ce qui suffit pour trouver le rayon vecteur en parties du rayon de l'orbe terrestre, par la solution du triangle formé par la terre, le soleil, et la planète. Or les quadratures arrivant aussi constamment dans des points différens de l'orbite, on trouvera de la même manière la loi qui a lieu entre le tems et le rayon vecteur, et entre celui-ci et la longitude: on pourra donc construire toute l'orbite. S'il s'agit d'une planète inférieure, les plus grandes digressions seront employées au lieu des quadratures.

§. 143. Si, au moyen de ces méthodes, on déduit la longitude des noeuds et l'inclinaison des orbites planétaires, des observations modernes et anciennes, on apercevra, que les inclinaisons n'ont éprouvé que des changemens inconsidérables, tandis que les noeuds ont eu un mouvement très-sensible, quoiqu'assés lent, pour pouvoir être regardé comme uniforme; dont il est aisé de se convaincre, en calculant avec ce mouvement uniforme, le lieu des noeuds pour une époque intermédiaire, et en le comparant avec les observations. On verra dans l'astronomie physique, que le mouvement des noeuds naît des actions mutuelles de toutes les planètes: conséquemment, les situations relatives des orbites étant changées par cette action, le mouvement ne peut pas être à la rigueur de la même grandeur dans tous les tems, ou uniforme: il est aussi évident, que les inclinaisons éprouveront également des variations; mais elles sont à peine sensibles. La table suivante présente, suivant M. Delambre, l'inclinaison et la longitude du noeud ascendant pour le commencement de l'an 1801, ainsi que le mouvement des noeuds relativement aux étoiles fixes, ou dans l'espace absolu, pour 100 années Juliennes.

	Inclinaison 1801	Longitude du ☊ 1801	Variations séculaires Noeud	Inclinaison
♄	2°. 29′. 38″	3ˢ. 21°. 55′. 47″.	— 2266″,46	— 15″,5131
♃	1. 18. 52.	3. 8. 25. 34.	— 1577, 57	— 22, 6087
♂	1. 51. 0.	1. 18. 1. 28.	— 2328, 44	— 0, 1523
♀	3. 23. 35.	2. 14. 52. 40.	— 1869, 80	— 4, 5522
☿	7. 0. 0.	1. 15. 57. 31.	— 782, 27	+ 18, 1828

Cette table nous apprend, que les noeuds de toutes les orbites relativement à l'écliptique ont un mouvement rétrograde, que Mercure est la planète qui s'écarte le plus de l'écliptique, et que Jupiter s'en écarte le moins.

§. 144. On a vu (§. 140.), qu'il est aisé de trouver la plus grande équation que je nommerai ϖ, au moyen de l'excentricité γ, et réciproquement, en donnant à γ une valeur qui satisfait à la plus grande équation. Il est donc indifférent, laquelle des deux quantités, γ, ϖ, sera déterminée immédiatemment par observation. Les méthodes suivantes conduiront à ce but.

I. Soient (*Fig.* 39.) S le soleil, M, N, deux lieux héliocentriques, où la planète a été observée près des points où l'équation est un *maximum*, et qui sont éloignés d'environ 90° des apsides dont la position est à peu près connue; et soient m, n, les lieux moyens qui répondent aux lieux vrais M, N, et qui sont toujours entre le périhélie B et les points M, N. Ainsi on connaît par observation l'angle MSN, et l'intervalle de tems donne le mouvement moyen, ou l'angle mSn. Les lieux héliocentriques sont trouvés par une opposition, ou en réduisant au soleil les observations géocentriques, à l'aide des élémens à peu près connus. Si M, N, sont les points mêmes de la plus grande équation, on a

$$MSm = NSn = \varpi, \text{ ou } mSn - MSN = 2\varpi.$$

Mais comme ces points ne sont pas connus exactement, on choisira parmi un grand nombre d'observations, deux qui donnent un *maximum* pour la différence des angles MSN et mSn: alors on peut supposer $mSn - MSN = 2\varpi$,

parceque l'équation, étant près de son *maximum*, ne change qu'insensiblement. Cependant cette méthode ne donne pas une grande précision.

II. Les observations des conjonctions inférieures, ou des passages sur le soleil, sont très-rares; et par rapport à Mercure, dont les passages sont plus fréquens, elles ne sont pas favorables à ce but, parceque cette planète, en passant sur le soleil, n'est éloignée des apsides que de 28°. Il faut donc employer une autre méthode qui est également applicable à toutes les planètes. Ayant trouvé par la méthode précédente les angles MSN et mSn, on ôtera des longitudes vraies M, N, la longitude de l'aphélie A connue à peu près, et l'on calculera, avec l'excentricité supposée, les équations du centre MSm, NSn, qui conviennent aux anomalies vraies ASM, ASN; ce qui donnera les longitudes moyennes, et l'angle mSn. On donnera successivement d'autres valeurs à γ, jusqu'à ce que l'angle mSn, calculé de cette manière, soit égal à celui qui est donné par le tems écoulé entre les deux observations. Il est visible, que cette méthode sera d'autant plus exacte, que les observations M, N, sont plus près des points où l'équation est un *maximum*.

III. Relativement aux planètes inférieures, l'observation de la *plus grande digression* ATS, la planète étant très-près de l'aphélie, fournit un moyen bien simple de trouver l'excentricité. Avec les élémens supposés on calculera la longitude héliocentrique qui donne l'angle AST. Connaissant donc dans le triangle ATS, les angles ATS, AST, et le côté compris ST, on trouvera le côté SA qui change insensiblement près des apsides. Il est donc facile d'en conclure la distance q dans l'aphélie même (§. 116.) Par le même procédé, lorsque la planète est près du périhélie B, on trouvera la plus courte distance p dans le périhélie; d'où l'on tirera

$$a = \frac{q+p}{2}, \quad e = \frac{q-p}{2}, \text{ et } \gamma = \frac{q-p}{q+p}.$$

On peut aussi calculer la longitude héliocentrique ou l'angle AST, l'anomalie, et le rayon vecteur SA, avec la longitude des apsides et l'excentricité supposées. Cela posé, les côtés SA, ST, et l'angle compris, donneront dans le même triangle, l'angle STA: on changera donc l'excentricité, jusqu'à ce que l'angle STA se trouve égal à la plus grande digression observée. L'observation de la plus grande digression est nécessaire, afin que TA touche l'orbite, au

lieu de la couper, ce qui donnerait deux points A. Si la planète a été observée assés près des apsides, pour qu'on puisse supposer $SAT = 90°$, on connaît trois parties du triangle SAT, d'où l'on trouvera immédiatement $AS = q$.

§. 145. La meilleure méthode pour déterminer la ligne des apsides de la terre, est sans doute celle de Kepler (§. 90. 91.); mais pour les autres planètes, il faut se servir d'une des méthodes suivantes.

I. L'observation de deux longitudes héliocentriques M, N, donne, comme ci-dessus, les angles $MSN = \alpha$ et $mSn = \beta$. Connaissant, par les méthodes précédentes, l'excentricité exactement, et le lieu des apsides à peu près, on aura les anomalies vraies ASM, ASN, et les équations du centre correspondantes, g', h', d'où l'on tirera

$$ASm = ASM + g', \quad ASn = ASN + h', \text{ donc } mSn = \alpha + g' + h' = \beta'.$$

Si β' n'est pas égal à β, il faut changer les équations g', h' jusqu'à ce qu'on trouve $\alpha + g' + h' = \beta$; et comme l'excentricité est supposée exacte, on ne changera que l'anomalie, c'est-à-dire l'aphélie. Mais il est plus sûr de faire les observations près des apsides, où l'équation est nulle, et par conséquent une erreur commise relativement à l'excentricité, influe moins sur les équations g', h'. En général, la ligne des apsides est déterminée par la différence qui se trouve entre β' et β: elle le sera donc d'autant plus exactement, que $\beta' - \beta$ change plus rapidement. En nommant g, h, les véritables équations, on aura $\beta' - \beta = g' + h' - g - h$, dont la variation $\partial g' + \partial h'$ sera la plus grande, lorsque $\partial g'$ et $\partial h'$ sont des *maxima*, et tous les deux ou positifs ou négatifs: d'où il suit, qu'il faut choisir deux observations qui sont faites peu de tems avant ou après l'aphélie et le périhélie. Soient par ex. α et β les deux observations; alors, la ligne des apsides étant transportée de AB en ab, les deux équations g', h', diminuent en approchant des apsides. Mais si l'une des observations était faite après l'aphélie, et l'autre avant le périhélie, en α et γ, g' diminuerait, tandis que h' augmenterait; $\beta' - \beta$ ne changerait donc qu'insensiblement. Il est donc plus sûr, de comparer une observation près des apsides en α, avec une autre près de la plus grande équation en M: alors $\partial g'$ sera un *maximum*, et $\partial h'$ nul.

II. Il est aisé de voir, que les méthodes précédentes (§. 144. II. III.) sont également applicables à ce problème, avec cette différence, que les observations (II.) seront faites près des apsides, afin que les équations calculées avec une certaine excentricité, changent plus rapidement, si la ligne des apsides est déplacée. Les observations (III.) au contraire devront être faites aux environs des moyennes distances, pour que le rayon vecteur AS éprouve un plus grand changement par un petit déplacement des apsides.

§. 146. Les méthodes précédentes donnent l'un des deux élémens, les apsides ou l'excentricité, l'autre étant exactement connu: elles servent donc à corriger mutuellement l'un par l'autre. On se rappellera que deux observations, faites aux apsides ou dans les moyennes distances, suffisent pour cet effet. En conséquence, si l'on y ajoute une troisième observation, éloignée des deux autres d'environ 90°, on atteindra les deux buts, et l'on pourra corriger à la fois les trois élémens elliptiques, le lieu des *apsides*, l'*excentricité*, et l'*époque*.

Supposons que les trois observations soient M, N, α, et que ASB soit la véritable ligne des apsides, qui, par une fausse hypothèse, a été placée en $a\,b$, ensorte qu'en nommant le petit angle $ASa = \omega$, et la vraie longitude de l'aphélie A, sa longitude supposée sera $A' = A + \omega$. En ôtant $A + \omega$ des longitudes héliocentriques, observées en M et N, on aura les anomalies vraies $aSM = v$, $aSN = u$, leurs justes valeurs étant $ASM = v + \omega$, $ASN = u - \omega$. Soit la plus grande équation $= g$, et la valeur qu'on lui a attribuée suivant les tables ou une fausse hypothèse $= g' = g + \xi$; la vraie époque, ou longitude moyenne lors de la première observation en M ou $m = L$, celle qu'on a supposée $= L' = L + \lambda$: il s'agit de déterminer les trois erreurs ω, ξ, λ. Les observations donnent les longitudes vraies en $M = M$, et en $N = N$, donc l'angle $MSN = N - M = \alpha$, et le tems écoulé donne l'angle $mSn = \beta$. On trouvera par le calcul, les longitudes moyennes

$$\text{en } m = L + \lambda, \quad \text{en } n = L + \lambda + \beta,$$

les longitudes vraies

$$\text{en } M = M' = L + \lambda - g - \xi, \quad \text{en } N = N' = L + \lambda + \beta + g + \xi.$$

Or on a $M=L-g$, $N=L+\beta+g$, donc $M'-M=\lambda-\xi$, $N'-N=\lambda+\xi$, d'où il suit

$$\lambda=\frac{(N'-N)+(M'-M)}{2}, \quad \text{et } \xi=\frac{(N'-N)-(M'-M)}{2}.$$

Cela donne la vraie époque pour la première observation $=L=L'-\lambda$, et la plus grande équation corrigée $=g=g'-\xi$, ainsi que l'excentricité corrigée.

L'époque corrigée L, le mouvement moyen connu, et la longitude de l'aphélie supposée $A+\omega$, donnent pour l'instant de la troisième observation en α, l'anomalie moyenne, d'où l'on conclura, à l'aide de l'excentricité corrigée γ, l'anomalie vraie $a\mathrm{S}\alpha$ et la longitude vraie $=a\mathrm{S}\alpha+A+\omega$. Si elle n'est pas parfaitement d'accord avec la longitude héliocentrique, observée en α, l'erreur ne peut naître que de ω. En nommant donc B la longitude moyenne en α, C la longitude vraie observée, l'équation du centre sera $B-C=h$. Or l'excentricité γ étant connue, il est aisé de trouver l'anomalie vraie, à laquelle convient l'équation h: en la nommant v, on aura la

longitude vraie de l'aphélie, $A=C-v$, et $\omega=A'-C+v$.

§. 147. Le seul inconvénient de la méthode précédente est que deux observations doivent être faites dans les points, où l'équation du centre g est un *maximum*. Dans d'autres cas, il faut procéder de la manière suivante.

En nommant A, B, C, les trois observations, on calculera, avec les valeurs supposées et très-approchées de l'excentricité γ et de la longitude de l'aphélie α, les anomalies vraies et les équations du centre, qui répondent aux longitudes vraies, observées en A et B; les équations donneront les longitudes moyennes, et leur différence qui est donnée par le tems écoulé: si elles ne se trouvent pas d'accord, on changera α seul, jusqu'à ce que la différence entre les longitudes moyennes calculées soit parfaitement conforme au tems écoulé entre les deux observations. Ensuite on changera la valeur de γ, on procèdera de même, pour déterminer α. De cette manière on trouvera une série de valeurs correspondantes, γ et α, γ' et α', γ'' et α'', etc. Mais deux couples suffiront, pour en conclure, par interpolation, une autre couple quelconque. En effet, si l'on opère de la même manière sur les observations A, C, ou B, C, en employant les valeurs tirées de deux couples précédentes γ, α, et γ', α', ces deux résultats indiqueront, à l'aide d'une simple proportion, de

combien il faut changer γ et α, pour que la différence des anomalies moyennes en A et C soit d'accord avec le tems écoulé. Ces corrections donneront les justes valeurs de γ et α. En ôtant α des longitudes héliocentriques A, B, C, on aura trois anomalies vraies, d'où l'on conclura, au moyen de l'excentricité γ, les équations et les anomalies moyennes, lesquelles, étant ajoutées avec α, donneront les trois époques corrigées.

Il est aisé de voir par ce qui a été dit relativement aux méthodes précédentes, que le résultat de cette méthode sera pareillement d'autant plus exact, que les observations sont plus près des apsides et des moyennes distances; et que l'excentricité ou le lieu des apsides sera trouvé avec plus de sureté, selon que deux observations sont faites près des moyennes distances ou près des apsides.

Il a été supposé jusqu'ici, que la ligne des apsides a été immobile pendant l'intervalle entre les deux observations, ou que son mouvement est connu. A l'aide d'une quatrième observation, on peut déterminer, par le procédé suivant, non-seulement ces trois élémens, mais aussi le mouvement des apsides.

§. 148. Supposons qu'on ait trouvé, par les tables ou suivant une fausse hypothèse,

la longitude de l'aphélie pour une époque quelconque $= A$,

son mouvement annuel $= \alpha$, l'excentricité $= \gamma$,

et que les valeurs exactes soient, $A + x$, $\alpha + z$, $\gamma + y$, x, z, y, étant les erreurs qu'on cherche. En nommant L^{I}, L^{II}, L^{III}, L^{IV}, les longitudes vraies sur l'orbite aux époques des observations I, II, III, IV, et en désignant les tems écoulés entre les observations par II — I, III — I, etc. les mouvemens moyens pendant ces tems donneront la différence des longitudes moyennes d'une observation à l'autre, que je nommerai M, M′, M″. On conclura de A et α, pour les époques des observations I, II, les longitudes de l'aphélie, A′, A″, et les anomalies vraies $v' = L' - A'$, $v'' = L'' - A''$; avec ces anomalies v', v'', et l'excentricité γ, on calculera les anomalies moyennes μ', μ''; et l'on aura le mouvement moyen dans le tems II — I $= \mu'' - \mu'$, ce qui doit être égal à M. Il en résultera

l'erreur de la *première hypothèse*, ou des valeurs A, α, γ,

$$k = (\mu'' - \mu') - M.$$

En opérant de la même manière sur les observations I et II, avec les valeurs α, γ, et $A + \partial A$; A' et A'' se changeront en $A' + \partial A$ et $A'' + \partial A$, parceque α a conservé la même valeur: donc v' et v'' se transformeront en $v' - \partial A$ et $v'' - \partial A$, ensorte que $\partial v' = \partial v'' = -\partial A$; et par là les anomalies moyennes μ', μ'', éprouveront aussi des changemens $\partial\mu'$, $\partial\mu''$. Or γ étant constante, on a (§. 130.) $\partial\mu' = \frac{(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}\partial v'}{(1-\gamma\cos v')^2}$, ou

$$\mu' + \partial\mu' = \mu' - \frac{\partial A(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\gamma\cos v')^2}, \quad \mu'' + \partial\mu'' = \mu'' - \frac{\partial A(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\gamma\cos v'')^2};$$

d'où l'on tirera de la même manière,

l'erreur de la *seconde hypothèse*, ou des valeurs $A + \partial A$, α, γ,

$$l = (\mu'' + \partial\mu'' - \mu' - \partial\mu') - M.$$

En mettant $\gamma + \partial\gamma$ à la place de γ, sans changer A ni α; v' et v'' n'éprouveront aucun changement; mais les équations du centre seront changées, et par conséquent les anomalies moyennes prendront les valeurs $\mu' + \partial\mu'$ et $\mu'' + \partial\mu''$. Or on a (§. 128. (2), §. 129. (4)) $\partial\mu' = \partial\gamma \sin\varepsilon$, et $\sin\varepsilon = \frac{\sin v'\gamma(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v'}$, d'où il suit

$$[\partial\mu'] = \frac{\partial\gamma \sin v'.\gamma(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v'}, \text{ et } [\partial\mu''] = \frac{\partial\gamma \sin v''.\gamma(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v''}; \text{ donc}$$

l'erreur de la *troisième hypothèse*, ou des valeurs A, α, $\gamma + \partial\gamma$,

$$m = \{\mu'' + [\partial\mu''] - \mu' - [\partial\mu']\} - M.$$

Enfin, si l'on met $\alpha + \partial\alpha$ à la place de α, A' et A'' prendront les valeurs $A' + \partial A'$ et $A'' + \partial A''$, où l'on a $\partial A' = t\partial\alpha$, $\partial A'' = \tau\partial\alpha$, t et τ étant les tems écoulés depuis l'époque de A jusqu'aux observations I et II. Il en résulte $\partial v' = -\partial A'$ et $\partial v'' = -\partial A''$, donc

$$\{\partial\mu'\} = -\frac{t\partial\alpha(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\gamma\cos v')^2}, \text{ et } \{\partial\mu''\} = -\frac{\tau\partial\alpha(1-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\gamma\cos v'')^2},$$

d'où il viendra

l'erreur de la *quatrième hypothèse*, ou des valeurs A, $\alpha + \partial\alpha$, γ,

$$n = (\mu'' + \{\partial\mu''\} - \mu' - \{\partial\mu'\}) - M.$$

Il suit de ce qui précède, que la substitution de $A + \partial A$ au lieu de A change l'erreur k en l, ou que ∂A augmente l'erreur k de $l - k$. Or les

erreurs étant très-petites (par hypothèse), on peut supposer que la variation de l'erreur $(l-k)$ est proportionnelle à sa cause (∂A): d'où il suit qu'en augmentant A de x, l'effet sera $= \frac{x(l-k)}{\partial A}$, ou que l'erreur k augmentera de $\frac{x(l-k)}{\partial A}$. On trouvera de la même manière, qu'en augmentant γ de y, et α de z, les accroissemens de k seront $\frac{y(m-k)}{\partial \gamma}$ et $\frac{z(n-k)}{\partial \alpha}$. En mettant donc à la fois $A+x$, $\gamma+y$, $\alpha+z$, à la place de A, γ, α, l'accroissement de k sera

$$\frac{x(l-k)}{\partial A}+\frac{y(m-k)}{\partial \gamma}+\frac{z(n-k)}{\partial \alpha}.$$

Or $A+x$, $\gamma+y$, $\alpha+z$, sont les valeurs exactes: il faut donc que cet accroissement rende l'erreur k nulle, d'où il résulte cette équation:

$$(1)\ldots\ldots 0 = k+\frac{x(l-k)}{\partial A}+\frac{y(m-k)}{\partial \gamma}+\frac{z(n-k)}{\partial \alpha}.$$

En opérant de la même manière sur les observations I et III, on trouvera quatre erreurs k', l', m', n', qui fourniront l'équation

$$(2)\ldots\ldots 0 = k'+\frac{x(l'-k')}{\partial A}+\frac{y(m'-k')}{\partial \gamma}+\frac{z(n'-k')}{\partial \alpha};$$

et la combinaison des observations I et IV donnera une équation semblable:

$$(3)\ldots\ldots 0 = k''+\frac{x(l''-k'')}{\partial A}+\frac{y(m''-k'')}{\partial \gamma}+\frac{z(n''-k'')}{\partial \alpha}.$$

La solution des équations (1) (2) (3) donnera les trois corrections x, y, z, et les valeurs exactes, $A+x$, $\gamma+y$, et $\alpha+z$; et cela suffit pour conclure les longitudes moyennes qui conviennent aux longitudes vraies L^{I}, L^{II}, L^{III}, L^{IV}, ou les époques pour l'instant de chaque observation.

§. 149. On peut regarder toutes les méthodes précédentes comme des applications d'une méthode plus générale et purement analytique (1). Les élémens elliptiques qu'il s'agit de corriger, sont:

1. La longitude du *périhélie* à une certaine époque $=$ B,
2. La longitude moyenne de la planète, ou l'*époque* $=$ E,
3. L'*excentricité* $=\gamma$,
4. Le demi grand *axe* $=a$, ou ce qui revient au même en vertu de la *troisième* loi de Kepler, le *mouvement moyen* annuel $=m$.

(1) *Voy. Astr. théor. et prat. par M. Delambre, Chap. XXVII. n.* 165.

Il est supposé que tous ces élémens sont assés bien connus, pour n'avoir besoin que de petites corrections, ∂B, ∂E, $\partial \gamma$, ∂a ou ∂m, qu'on se propose de déterminer par observation, et que l'orbite de la terre est exactement connue. Soit (*Fig.* 22.) le soleil en S, la terre en T, la planète observée en P, L son lieu réduit à l'écliptique: on connaît donc (§. 84.)

$$ST = r, \quad \Upsilon TL = \lambda', \quad LTS = \eta, \quad PTL = \beta'.$$

Avec ces quantités et les élémens supposés, on calculera (§. 84.)

$$\Upsilon SL = \lambda, \quad SP = R, \quad SL = D, \quad SLT = \zeta \left(\sin \zeta = \frac{r}{D} \sin \eta\right).$$

En nommant $\phi = v - \mu$ l'équation du centre, et t le nombre d'années écoulées depuis l'époque jusqu'à l'observation, on aura

$$\lambda = E + tm + \phi, \text{ et } \Upsilon SL = \Upsilon L - \zeta = \Upsilon TL - \zeta = \lambda' - \zeta.$$

Si donc les élémens étaient exacts, on aurait $\lambda = \lambda' - \zeta$, ou $o = \lambda - (\lambda' - \zeta)$. L'angle λ', donné immédiatement par observation, n'a besoin d'aucune correction, si l'observation est sans faute; donc, si l'on ajoute à λ et ζ leurs corrections $\partial\lambda$ et $\partial\zeta$, on aura cette équation exacte,

$$(1) \ldots\ldots o = \lambda - (\lambda' - \zeta) + \partial\lambda + \partial\zeta.$$

En différentiant les équations $\lambda = E + tm + \phi$ et $D \sin \zeta = r \sin \eta$, où r et η sont donnés immédiatement par la théorie du soleil et l'observation, on aura

$$\partial\lambda = \partial E + t\partial m + \partial\phi, \quad D\partial\zeta \cos\zeta + \partial D \sin\zeta = o, \text{ ou } \partial\zeta = -\frac{\partial D}{D} \text{ tang } \zeta.$$

En substituant ces valeurs en (1), il viendra

$$(2) \ldots\ldots o = \lambda - (\lambda' - \zeta) + \partial E + t\partial m + \partial\phi - \frac{\partial D}{D} \text{ tang } \zeta.$$

Les équations (G) (I) (§. 138. 139.) donnent $v - \mu$ ou $\phi = f$, et z ou $D = aF$, f et F étant des fonctions de γ et μ: on aura donc $\partial\phi = p\partial\gamma + q\partial\mu$, $\partial D = F\partial a + aP\partial\gamma + aQ\partial\mu = \frac{\partial a}{a} D + aP\partial\gamma + aQ\partial\mu$; ce qui étant substitué en (2), donnera

$$(3) \ldots. o = \lambda - (\lambda' - \zeta) + \partial E + t\partial m + p\partial\gamma + q\partial\mu - \frac{\partial a}{a} \text{tang}\,\zeta - \frac{a}{D} \text{tg}\zeta (P\partial\gamma + Q\partial\mu).$$

Si l'on nomme M le moyen mouvement annuel du soleil, on aura en vertu de la *troisième* loi de Kepler, attendu que les mouvemens moyens sont en raison inverse des durées des révolutions,

$$1 : a^3 :: m^2 : M^2, \text{ ou } M = m \cdot a^{\frac{3}{2}}, \text{ et M étant sans faute,}$$

$$o = a^{\frac{3}{2}} \partial m + \tfrac{3}{2} m a^{\frac{1}{2}} \partial a, \text{ donc } \frac{\partial a}{a} = -\tfrac{2}{3} \cdot \frac{\partial m}{m}.$$

On a de plus, $\mu = E + tm - B$, donc $\partial\mu = \partial E + t\partial m - \partial B$. En substituant ces valeurs au lieu de $\frac{\partial a}{a}$ et $\partial\mu$, en (3), il viendra cette équation de condition,

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \lambda - (\lambda' - \zeta) + \partial E\left(1 + q - \frac{a}{D} Q \operatorname{tg}\zeta\right) + \partial m\left(t + qt + \frac{2\operatorname{tg}\zeta}{3m} - \frac{a}{D} tQ\operatorname{tg}\zeta\right) \\ + \partial\gamma\left(p - \frac{a}{D} P\operatorname{tg}\zeta\right) + \partial B\left(\frac{a}{D} Q\operatorname{tg}\zeta - q\right) \end{array}\right\}.$$

Comme il n'y a que quatre quantités inconnues, ∂E, ∂m, $\partial\gamma$, ∂B, quatre observations suffiront pour déterminer toutes les corrections des élémens elliptiques. Chaque observation donnera une équation de la forme (A), et ces quatre équations donneront, par élimination, les corrections ∂E, ∂m, $\partial\gamma$, ∂B. Les coëfficiens p, q, P, Q, sont donnés par les séries (K) (L) (§. 139.), savoir

$$\Phi = 2\gamma\sin\mu + \tfrac{5}{4}\gamma^2\sin 2\mu + \text{cet.}$$

$$D = a\left(1 - \gamma\cos\mu + \frac{\gamma^2}{2}(1 - \cos 2\mu)\right) + \text{cet.} \qquad \frac{a}{D} = 1 + \gamma\cos\mu + \text{cet.}$$

$$p = 2\sin\mu + \tfrac{5}{2}\gamma\sin 2\mu + \text{cet.} \qquad q = 2\gamma\cos\mu + \tfrac{5}{2}\gamma^2\cos 2\mu + \text{cet.}$$

$$P = -\cos\mu + \gamma(1 - \cos 2\mu) + \text{cet.} \qquad Q = \gamma\sin\mu + \gamma^2\sin 2\mu + \text{cet.}$$

Pour la plupart des planètes on peut se contenter des premiers termes qui sont développés ici, ensorte qu'on aura à très-peu près

$$(B)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \lambda - (\lambda' - \zeta) + \partial E(1 + 2\gamma\cos\mu - \gamma\sin\mu\operatorname{tg}\zeta + \frac{5}{2}\gamma^2\cos 2\mu - \frac{3}{2}\gamma^2\sin 2\mu\operatorname{tg}\zeta) \\ + \partial m\left(t + \frac{2\operatorname{tg}\zeta}{3m} + 2t.\gamma\cos\mu - t.\gamma\sin\mu\operatorname{tg}\zeta + \frac{5}{2}t.\gamma^2\cos 2\mu - \frac{3}{2}t.\gamma^2\sin 2\mu\operatorname{tg}\zeta\right) \\ + \partial\gamma\left(2\sin\mu + \cos\mu\operatorname{tg}\zeta + \frac{\gamma}{2}(5\sin 2\mu - \operatorname{tg}\zeta + 3\cos 2\mu\operatorname{tg}\zeta) + \frac{\gamma^2}{2}\operatorname{tg}\zeta(\cos 3\mu - \cos\mu)\right) \\ + \gamma\,\partial B\,(\sin\mu\operatorname{tg}\zeta - 2\cos\mu - \frac{5}{2}\gamma\cos 2\mu + \frac{3}{2}\gamma\sin 2\mu\operatorname{tg}\zeta) \end{array}\right\}.$$

Dans la *Fig.* 22. on a supposé $\zeta = \lambda' - \lambda$: donc si la longitude héliocentrique λ est plus grande que la géocentrique λ', tang ζ sera négatif.

§. 150. Les élémens elliptiques étant rectifiés, on pourra corriger les noeuds et l'inclinaison de la même manière. L'équation XVI. (§. 84.) donne $\operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\eta + \zeta)\operatorname{tg}\beta'}{\sin\eta}$, valeur exacte de la latitude héliocentrique, parceque η, β', sont donnés par l'observation, et ζ par les élémens corrigés. En nommant b la latitude héliocentrique calculée, et ∂J, $\partial\nu$, les corrections des noeuds et de l'inclinaison, on a (§. 83. III.) $\operatorname{tang} b = \operatorname{tang}\nu\sin(\lambda - J)$, et b serait égal à β, $b - \beta = 0$, si les élémens J et ν étaient exacts. On aura donc l'équation

$$(1) \ldots . o = b - \beta + \partial b.$$

La différentielle de tang b donne $\frac{\partial b}{\cos^2 b} = \frac{\partial v}{\cos^2 v} \sin(\lambda - J) - \partial J \operatorname{tang} v \cos(\lambda - J)$; ce qui étant substitué en (1), donne l'équation de condition

$$(B) \quad o = b - \beta + \cos^2 b \left(\frac{\partial v \sin(\lambda - J)}{\cos^2 v} - \partial J \operatorname{tang} v \cos(\lambda - J) \right);$$

où l'on peut mettre, pour la plupart des planètes, $\cos b = 1$ et $\cos v = 1$. Deux observations suffisent donc pour corriger le noeud et l'inclinaison, parcequ'elles donnent deux équations de la forme (B), dont on tirera ∂J et ∂v. Mais on sait que, plus il y a d'observations, plus le milieu sera exact.

§. 151. Les observations qui sont destinés à déterminer les élémens d'une orbite, doivent être faites avec la plus grande précision; et il faut mettre le même soin dans le calcul, ou dans la réduction des observations. Les corrections qui doivent être appliquées à chaque observation, à cause de la réfraction, de la parallaxe, de l'aberration, etc. ont été développées plus haut. Mais en outre, il résulte des actions mutuelles des planètes, que leur vrai mouvement s'écarte plus ou moins de la théorie elliptique qui est la base de tous les calculs précédens: il faut donc connaître ces petites *perturbations*, pour en délivrer les observations, et pour trouver le lieu *elliptique* que la planète occuperait, si elle décrivait une ellipse autour du soleil, suivant les lois de Kepler, sans être troublée par l'action d'autres planètes. Ces corrections sont très-considérables, relativement aux orbites de Saturne et de Jupiter: aussi les élémens de ces deux planètes étaient-ils les moins exacts, avant qu'on pût calculer leurs perturbations. Il en naît aussi une correction de tous les élémens, à l'exception du grand axe ou du mouvement moyen; savoir, outre le mouvement des noeuds et la variation de l'inclinaison, qu'on trouve ci-dessus (§. 143.), un mouvement des apsides, et une variation de l'excentricité ou de la plus grande équation, qui se trouvent de la même manière (§. 143.), par la comparaison des observations anciennes et modernes. Le grand axe, l'excentricité, et la plus grande équation, sont donnés dans les §. 120. 140. Les autres élémens, pour le 31 Décembre 1800 à minuit de Paris, ainsi que les variations en 100 années Juliennes, sont renfermés dans la table suivante.

	Epoque de la longitude moyenne	Longitude du Périhélie	Variations séculaires des apsides	Variations séculaires de l'excentricité
♄	4ˢ. 15°. 20′. 32″.	2ˢ. 29°. 8′. 59″.	+ 1943″,07	− 0,00031. 2402
♀	3. 12. 12. 36.	0. 11. 8. 35.	+ 663, 86	+ 0,00015. 9350
♂	2. 4. 7. 2.	11. 2. 24. 24.	+ 1582, 43	+ 0,00009. 0176
♃	3. 10. 9. 13.	3. 9. 30. 5.	+ 1177, 81	+ 0,00004. 1632
☿	0. 10. 44. 35.	4. 8. 37. 1.	− 267, 60	− 0,00006. 2711
☿	5. 13. 56. 27.	2. 14. 21. 47	+ 643, 56	+ 0,00000. 3867

CHAPITRE IX.

Grandeur des Planètes, et autres objets remarquables.

§. 152. Si l'on tire de l'oeil deux lignes droites, dont l'une est dirigée vers le centre d'une planète, et l'autre tangente à sa surface, ces deux lignes se réuniront à l'oeil sous un angle qui est appelé le *demi-diamètre apparent* de la planète. Le demi-diamètre *vrai* qui joint le centre et le point de contact, est perpendiculaire à la tangente qui est la distance de la planète à la terre. En nommant donc

le demi-diamètre apparent de la planète $= \varrho$,

le demi-diamètre vrai $= r$,

la distance de la planète à la terre $= R$,

on aura $\text{tang}\, \varrho = \frac{r}{R}$, ou à cause de la petitesse de ϱ,

$$\varrho = \frac{r}{R},$$

ϱ étant la seule de ces trois quantités, qui puisse être mesurée immédiatement. Le diamètre apparent étant donc en raison inverse des distances, il sera connu pour une distance quelconque, s'il a été mesuré à une certaine distance, dont le rapport à celle-là est donné. Dès que les élémens de l'orbite sont connus, on a, pour chaque observation, la vraie distance de la planète au soleil et à la terre, en parties du demi-grand axe, dont le rapport au rayon de l'orbe terrestre est donné par la *troisième* loi de Kepler: il est donc aisé de réduire chaque diamètre observé, à celui qui aurait lieu à une distance égale au rayon de l'orbite de la terre. Ayant réduit ainsi les diamètres de toutes les planètes, ces diamètres réduits auront entre eux le même rapport que les vrais diamètres, parceque, dans l'équation $\varrho = \frac{r}{R}$, R a la même valeur pour toutes

les planètes. Pour déterminer de cette manière la grandeur *relative* de la terre, il faut connaître son demi-diamètre apparent à la distance moyenne du soleil à la terre, ce qui est la parallaxe du soleil. Les derniers passages de Vénus sur le soleil on fait voir, que la parallaxe moyenne du soleil est $8'',6$; et c'est cette valeur qui a servi de base à la table qu'on trouvera dans le §. suivant.

§. 153. On a ainsi la grandeur de toutes les planètes par rapport à la terre, d'où il est aisé de l'exprimer par telle mesure absolue, en laquelle le rayon de la terre est donné. Si l'on désigne constamment par π le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, on aura

la *surface* de la planète $= 4\pi r^2$, et son *volume* $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

En exprimant toutes les grandeurs en lieues de France, dont 25 au degré, on peut supposer que la terre est une sphère d'un rayon de 1432 lieues, parcequ'une grande précision serait ici inutile. En nommant donc le rayon de la terre $a = 1432$ lieues, la surface de la terre sera $4\pi a^2 = 25'768900$ lieues carrées, et son volume $\frac{4}{3}\pi a^3 = 12300'354000$ lieues cubes. En multipliant donc les carrés des nombres, renfermés dans la seconde colonne de la table suivante, par $4\pi a^2$, et les cubes par $\frac{4}{3}\pi a^3$, on aura les surfaces et les volumes des planètes en lieues, qu'on trouve dans la troisième et quatrième colonnes. La première renferme les diamètres apparens, réduits à la distance moyenne du soleil à la terre.

	Diamètre apparent	Demi-diamètre par rapport au rayon de la terre	Surface en millions de lieues carrées	Volume en milliars de lieues cubes
☉	32′. 2″,00	111, 7442	321770, 4	17162988
♄	2. 51, 71	9, 9831	2568, 2	12238
♃	3. 6, 82	10, 8616	3040, 1	15762
♂	9, 00	0, 5233	7, 1	1,76
♁	17, 20	1, 0000	25, 8	12,30
♀	16, 50	0, 9593	23, 7	10,90
☿	6. 6.	0, 3837	3, 8	0,695

§. 154. Les anciens regardaient les corps célestes, comme une matière moins grossière, plus pure et plus parfaite, que la terre; mais cette idée est démentie par les téléscopes, qui nous font voir les planètes à peu près telles, que la terre se présenterait à la même distance. Si l'oeil était assés éloigné de la terre, pour en voir l'hémisphère entier qui est illuminé par le soleil, ce globe paraîtrait à la vue simple comme un disque lumineux, ou comme une étoile; mais on distinguerait avec les téléscopes les différentes parties de la terre: les mers, les déserts sablonneux, les chaines de rochers ou de glaciers, le beau vert des forêts et des prés, la blancheur éblouissante de l'hiver et des poles, les volcans, même les villes qui occupent plusieurs lieues, couvriraient la surface du globe de taches plus ou moins noires ou brillantes; et la terre, éclairée par un beau soleil, ferait sans doute un autre effet qu'à travers un voile d'épais nuages. Les téléscopes nous montrent la plupart des planètes, couvertes de taches qui, cependant, se distinguent par plusieurs particularités d'avec les taches que la terre présenterait à la même distance.

C'est le soleil qui a le premier donné lieu à cette découverte, qui fut faite en 1611 par Galilée ou par le P. Scheiner: du moins ce dernier a observé les taches du soleil avec le plus grand soin. Depuis ce tems il est rare de voir le soleil sans taches noires ou grisâtres, dont le nombre, la grandeur, la forme, et la couleur, changent sensiblement et souvent assés rapidement. Les unes se forment devant nos yeux au milieu du soleil, les autres paraissent au bord oriental du soleil; mais toutes passent sur le disque solaire, en décrivant des lignes parallèles. Leur diamètre apparent se raccourcit, à mesure qu'elles approchent du bord du soleil; et si elles paraissent plusieurs fois dans le soleil, l'intervalle entre leur disparition au bord occidental du soleil et leur seconde apparition au bord opposé, ou ce qui revient au même, le tems qu'elles mettent à passer derrière le soleil, est à peu près égal à la durée de leur visibilité dans le soleil. Ces circonstances prouvent évidemment, que ce ne sont pas des planètes qui circulent autour du soleil, mais des taches sur la surface même du soleil, ou très-peu élevées au dessus d'elle, qui tournent avec ce corps sur un axe. La plupart ne dure que peu de tems, et la plus longue durée qu'on ait observée, est

*

de 70 jours. Il arrive parfois, qu'une tache, après avoir disparu, paraît à la même place au bout de quelque tems. On a observé des taches de plus de 1′ de diamètre, qui par conséquent étaient quatre fois plus grandes que la terre, dont le diamètre n'est que de 17″ à cette distance.

Parmi le grand nombre d'hypothèses qu'on a imaginées pour expliquer ce phénomène, les suivantes méritent le plus d'attention. En supposant que le soleil est un noyau solide et irrégulier, couvert d'un fluide qui est assujetti à une espéce de flux et de reflux, on concevra que les parties plus *élevées* du noyau se feront voir de tems en tems au dessus de la mer de feu, ou qu'elles luiront au travers d'elle; on verra aussi la cause de cette couleur plus faible qui entoure les taches comme une ombre: le sommet de ces montagnes ou isles est parfaitement noir, tandis que les parties submergées, les plus voisines, ne sont qu'imparfaitement visibles au travers du fluide.

Si l'on regarde les taches comme des *cavités* dans le corps solide et luisant du soleil, il est aisé de voir, que leur milieu, étant le plus profond, sera aussi le plus noir. L'apparition et la disparition des taches ne suivant aucune période, il est naturel de penser, qu'au moins en partie ce sont de vrais changemens ou des révolutions qui arrivent sur le soleil, ou dans son atmosphère.

Comme les taches qui font une révolution entière, restent un peu plus de tems derrière le soleil, ou invisibles, qu'elles ne sont visibles sur le disque solaire, il s'en suit, qu'elles sont un peu éloignées du soleil, ou qu'elles se trouvent dans son atmosphère, formant une espèce de nuages dont le contour est nécessairement plus mince et moins opaque que le milieu. Cela suppose que l'atmosphère du soleil est luisante, que par conséquent la lumière du soleil est proprement celle de son atmosphère, et que nous ne voyons pas le corps solaire, mais des nuages qui le couvrent, et qui sont luisans comme ceux de la terre, mais d'une lumière propre et non-empruntée. Il est possible qu'il en est de même des planètes, quoiqu'à un moindre degré, et que nos aurores boréales, la lumière cendrée de Vénus, etc. en sont des effets. Si l'on suppose maintenant, que le soleil même est un corps opaque, les taches seront des ouvertures dans l'atmosphère, qui laissent entre-

voir des parties du corps solaire; et l'ombre grisâtre qui les entoure, sera le bord plus mince des nuages, au travers duquel la surface du soleil perce plus faiblement, ainsi que nous voyons les étoiles au travers de l'extrémité d'un nuage épais. Les *facules*, ou les endroits plus lumineux que le reste du soleil, seraient, suivant cette hypothèse, des élévations dans l'atmosphère, des nuages de lumière accumulés et plus denses. Tout cela est conforme aux observations de M. Herschel, suivant lesquelles les taches paraissent dans le bord du soleil comme des excavations, au lieu que les facules y brillent d'avantage, parcequ'on voit le profil de ces montagnes, dont M. Herschel estime la hauteur au dessus de la surface du soleil 800 lieues. D'après cette hypothèse, le soleil ne se distingue des planètes, que par sa grandeur, et par une atmosphère plus brillante: ce n'est pas une masse de feu, mais un corps, éclairé et échauffé par la douce chaleur de son atmosphère, et par là rendu habitable comme les autres corps célestes. D'après cela la cause est évidente de ce que nous voyons sur la terre: plus on s'élève au dessus des nuages, plus on est exposé à la lumière pure du soleil, et plus le froid devient insupportable; et les plus hautes montagnes, exposées continuellement aux rayons du soleil, sont couvertes de glace qui ne se fond jamais. Si l'on se rappelle les changemens périodiques d'un grand nombre d'étoiles (§. 60.), il est naturel de penser, que notre soleil est sujet à des changemens semblables, et que c'est la cause de plusieurs révolutions qui arrivent sur la terre, du changement des climats, et même des variations brusques dans notre atmosphère, attendu que les révolutions dans la lumière de l'atmosphère solaire, se font apercevoir sur la terre au bout de huit minutes. On sait que la lumière produit, sur les corps organisés de la terre, des effets physiques qui n'ont rien de commun avec l'organe de la vue; il est donc probable, que des altérations de la lumière du soleil que nous voyons, ne seront pas sans influence sur la nature entière de notre globe. Si les deux côtés du soleil sont de nature à exercer des effets différens, il en résulterait une période de 27 jours et demi, ce qui est celle de la rotation du soleil; et la météorologie aurait dû mettre sur le compte de cette rotation, ce qu'elle a attribué à la révolution de la lune, qui a à peu près la même période.

§. 155. On n'a jamais distingué des taches sur le disque de *Mercure*, à cause de sa proximité du soleil. Cependant Schröter a observé des montagnes sur cette planète, qui sont plus hautes que celles de la terre.

Saturne est si éloigné de la terre, que M. Herschel y a le premier découvert des taches et des bandes obscures (1), dont il a compté cinq qui sont parallèles à son équateur.

Jupiter est toujours couvert de taches; et cette planète, ainsi que Saturne, se distingue des autres planètes, par des bandes remarquables qui, étant parallèles à leur équateur, divisent ces planètes en différentes zones suivant le climat, comme un globe artificiel. Ces bandes sont, sur le disque de Jupiter, très-aisées à reconnaître, et sujettes à de grands changemens, ensorte que leur nombre varie de deux à huit: il est probable, que les changemens dans l'atmosphère de Jupiter influent sur leur apparence. Parmi les taches il y en a aussi, qui éprouvent des changemens bien sensibles, et qui, en faisant le tour de la planète en tems inégaux, ne paraissent pas adhérer à sa surface, mais former des nuages dans son atmosphère. Il s'en suit, que l'atmosphère de Jupiter est sujette à des révolutions considérables, à des vents violents, etc.

Le grand nombre de taches d'une grandeur considérable, qu'on a observées sur le disque de *Vénus*, paraît prouver, que sa surface a des variétés et des aspérités singulières. L'ombre qu'elles projettent toujours du côté opposé au soleil, ne laissent aucun doute, que ce ne soient des montagnes d'une hauteur extraordinaire. Schröter, ayant mesuré leurs hauteurs, en a trouvé une de neuf lieues. Il est remarquable, que les plus hautes montagnes de Vénus, Mercure, la lune, et la terre, se trouvent dans l'hémisphère austral.

M. Herschel a observé des phénomènes et des changemens très-remarquables sur la planète de *Mars* (2); entr'autres, des zones blanches et fort brillantes qui entourent les poles, celle autour du pole, opposé au soleil, étant la plus claire; ce qui paraît indiquer de la glace (3). M. Herschel

(1) *Account of the discovery of a sixth and seventh Satellite of Saturn, etc.* (*Philos. Transact. Vol. LXXX. Part I. n. 1.*

(2) *On the Planet Mars* (*Phil. Trans. Vol. LXXIV. Part II. n. 19.*)

(3) *Philos. Transact. for the year 1784. pag. 260.*

a vu la même chose dans Saturne; et les changemens rapides de ces zones polaires, ainsi que des bandes équatoriales, paraissent prouver que Saturne, ainsi que son anneau, a une atmosphère considérable (1). Les nuages que Schröter croit avoir observées dans *Mars*, et auxquels il attribue une vitesse de 20 pieds par seconde, prouvent que cette planète a une atmosphère, semblable à la notre.

§. 156. Il est à présumer, que les planètes sont entourées d'une atmosphère, comme la terre; et l'on a vu (§. 155.), que les observations paraissent le mettre hors de doute. Telles sont les changemens brusques des taches, semblables à des nuages; l'altération de la lumière et de la figure des étoiles, quand elles sont si près d'une planète, que leur lumière, en traversant son atmosphère, éprouve une réfraction; les phénomènes que présentent les éclipses des satellites de Jupiter; et le crépuscule qu'on a observé sur le disque de Vénus.

L'atmosphère du soleil donne l'explication la plus vraisemblable d'un autre phénomène remarquable, connu sous le nom de la *lumière zodiacale*. C'est une blancheur, semblable à la voie lactée, que l'on aperçoit, principalement au commencement du printems après le crépuscule du soir, et en automne avant le crépuscule du matin, en forme de fuseau, ou d'un triangle très-allongé, incliné à l'horizon suivant la direction de l'équateur solaire, dont la base est vers le soleil, et qui s'étend parfois à 100° du soleil. On suppose avec beaucoup de probabilité, que ce n'est autre chose que l'atmosphère lumineuse du soleil, qui, par la rotation de cet astre, s'est accumulée autour de son équateur. Conformément à cette hypothèse, il paraît que la lumière zodiacale, ou plutôt sa commune section avec le plan de l'équateur solaire, n'est pas un cercle concentrique au soleil, mais une courbe allongée, peut-être une ellipse, ayant un foyer dans le soleil, et dont le périhélie est au dedans, l'aphélie hors de l'orbe de la terre. La distance de son sommet au soleil paraît quelquefois de 100°, quelquefois de moins de 50°. En imaginant donc un triangle, formé par le soleil, la terre, et le sommet

(1) *Phil. Trans. for the year* 1806. *Part. II. pag.* 464.

de la lumière zodiacale, le demi-diamètre de cette lumière sera, dans le premier cas, opposé à l'angle obtus de 100°, il sera donc plus grand que les autres côtés, dont l'un est le rayon de l'orbe terrestre. Or comme le même demi-diamètre ne paraît que de 50°, dans d'autres saisons, il faut en conclure, ou que la lumière zodiacale est de forme allongée, ou qu'elle est sujette à des révolutions extraordinaires qui dépendent des saisons, ce qui est difficile à concevoir. D'ailleurs, si la lumière zodiacale était circulaire, la terre serait enveloppée de cette atmosphère, lorsqu'elle a un demi-diamètre de 100°, et nous ne la verrions pas en forme terminée, mais elle remplirait le ciel entier, comme notre atmosphère. La forme elliptique de la lumière zodiacale servira en même tems à expliquer, pourquoi nous ne la voyons pas en été. Dans le printems et l'automne, la terre passe par le petit axe de l'atmosphère solaire; nous sommes donc hors d'elle, et la voyons suivant le grand axe qui paraît sous un angle de 100°. Ce diamètre apparent diminue, à mesure que la terre s'éloigne du petit axe, il deviendra donc insensible vers l'éte, à cause des crépuscules; au coeur de l'été et de l'hiver, la terre étant dans le grand axe, et au dedans de l'atmosphère solaire, elle disparaîtra tout à fait. Il faut cependant convenir, qu'il est difficile à concevoir, soit la forme lenticulaire et elliptique de l'atmosphère solaire, soit son étendue au delà de l'orbite de la terre, qui est même contredite par les principes de mécanique: il paraît donc que la véritable cause de la lumière zodiacale n'est pas encore entièrement connue.

§. 157. Un des phénomènes les plus extraordinaires dans notre système planètaire, est l'*anneau de Saturne*. Les premiers téléscopes imparfaits firent voir Saturne en différentes formes. Tantôt cette planète paraissait, comme toutes les autres, parfaitement ronde, (*Monosphæricum* de Hévélius); tantôt elle paraissait composée de trois globules sur la même droite (*Trisphæricum*); tantôt elle semblait avoir des anses des deux côtés (*Sphæricoansatum*). Les téléscopes plus parfaits on fait voir, que tous ces différens aspects ne sont autre chose qu'un *anneau* qui entoure Saturne à une certaine distance en cercle concentrique, et qui présente à l'observateur sur la terre ces différentes formes, suivant sa situation. Il nous présente ordinairement

la figure qu'on voit (*Fig.* 40.). CSD est le globe de Saturne, entouré d'un anneau elliptique ABGHKIEF, qui a un peu plus de lumière que la planète, et dont les parties intérieures B, E, sont plus brillantes que les parties extérieures A, F. Les espaces BGCH, DIEK, sont des intervalles vides, dans lesquels se présentent parfois des étoiles entre Saturne et son anneau. L'ellipse de l'anneau s'élargit ou se rétrécit, c'est-à-dire, le petit axe LM croît ou décroît, à mesure que l'oeil est plus ou moins élevé sur le plan de l'anneau; tandis que les grands axes AF, BE, sont constamment de la même grandeur, ainsi que les intervalles CB = DE, de quel côté et dans quelle situation que Saturne se présente. Il s'en suit, que l'anneau est circulaire, et terminé par deux cercles, concentriques à la planète, BE, AF. L'ombre HMK que la partie antérieure de l'anneau projette sur la planète, ainsi que l'ombre G que la planète projette sur la partie postérieure de l'anneau, prouvent que c'est un corps solide qui reçoit sa lumière du soleil. On a observé un trait noir *ae* qui s'étend en cercle concentrique sur toute la surface de l'anneau, et qui est plus près du bord extérieur AF que de l'intérieur BE: ce qui paraît prouver, que Saturne est entouré de deux anneaux concentriques, situés dans le même plan. M. Herschel a vu avec son téléscope de 40 pieds, d'une manière distincte, deux anneaux, séparés l'un de l'autre par un intervalle sensible; et il a trouvé les dimensions suivantes, en supposant AF = 83.

Le diamètre de la circonférence extérieure du grand anneau, AF = 83;
le diamètre de sa circonférence interieure, *ae* = 77,4;
d'où il suit la largeur du grand anneau, A*a* = F*e* = 2,8;
le diamètre de la circonférence extérieure du petit anneau, *ae* = 75,1;
le diamètre de sa circonférence intérieure, BE = 59;
d'où il suit la largeur du petit anneau, B*a* = E*e* = 8,05;
et la largeur de l'intervalle, *a* = *e* = 1,15;
le diamètre de Saturne, CD = 35,57;

donc les diamètres de Saturne et de l'anneau, CD, AF, sont entre eux comme 3 à 7.

L'anneau circulaire se présente toujours en forme elliptique; ce qui est une suite nécessaire de ce que l'oeil ou la terre ne s'élevant jamais de 90° au dessus du plan de l'anneau, nous le voyons toujours obliquement. Il est aussi visible, que cette ellipse deviendra une ligne droite, lorsque la terre passe par le plan de l'anneau.

§. 158. La théorie des projections nous apprend (§. 79.),

1.) que dans chaque situation, l'anneau circulaire paraîtra sur la terre comme une ellipse, dont les deux axes sont entre eux, comme l'unité au sinus de l'angle ϕ, sous lequel la droite, menée de la terre au centre de l'anneau ou de Saturne, est inclinée sur son plan;

2.) que le petit axe est situé dans le plan, mené par cette droite perpendiculairement au plan de l'anneau, ou par l'axe de ce plan.

Ces deux propositions suffisent, pour déterminer la figure de l'anneau dans toutes les situations.

Soit (*Fig.* 4.) ABQ l'écliptique, P son pole, ΥL le plan de l'anneau, E son pole, Υ son noeud ascendant relativement à l'écliptique, et F le point de la sphère, où paraît la terre, vue de Saturne: en nommant

la longitude du noeud ascendant $\Upsilon = \Omega$,

l'inclinaison de l'anneau à l'écliptique $= \nu = EP$,

la longitude Saturnocentrique de la terre $= g$,

la latitude $= b = 90° - PF$,

la longitude géocentrique de Saturne $= \odot = 180° + g$,

la latitude $= \beta = -b$;

on aura $EP\Upsilon = 90°$, $\Upsilon PF = g - \Omega$, $EPF = 90° + g - \Omega$, $FC = \phi$, $EF = 90° - \phi$. Le triangle EPF fournit ces équations,

$$\cos EF = \cos PE \cos PF + \cos EPF \sin PE \sin PF, \text{ et } \sin F = \frac{\sin EP \cdot \sin EPF}{\sin EF},$$

PF étant le cercle de latitude, et EF perpendiculaire au plan de l'anneau, et par conséquent coïncidant avec le petit axe de l'ellipse (n. 2.): F est donc l'angle, dont la partie boréale du petit axe s'éloigne du cercle de latitude vers l'orient; en nommant donc ψ le même angle, si le petit axe est supposé tomber vers l'occident, on aura $\psi = -F$, et $\sin \psi = -\frac{\sin EP \sin EPF}{\sin EF}$.

En substituant les valeurs précédentes dans les deux équations de cos EF et de sin ψ, il viendra

$$(1) \ldots\ldots \sin\Phi = -\cos\nu \sin\beta + \sin\nu \cos\beta \sin(\mathfrak{h} - \Omega),$$

$$(2) \ldots\ldots \sin\psi = \frac{\sin\nu \cos(\mathfrak{h} - \Omega)}{\cos\Phi}.$$

La dernière donne $\tang\psi = \frac{\sin\nu\cos(\mathfrak{h}-\Omega)}{\sqrt{(\cos^2\Phi - \sin^2\nu\cos^2(\mathfrak{h}-\Omega))}}$, et en substituant la valeur de $\cos^2\Phi$, tirée de (1), et en réduisant, on trouvera

$$(3) \ldots\ldots \tang\psi = \frac{\cos(\mathfrak{h}-\Omega)}{\sin\beta\sin(\mathfrak{h}-\Omega) + \cot\nu\cos\beta}.$$

Si la valeur de tang ψ est négative, la partie boréale du petit axe s'éloigne du cercle de latitude vers l'orient. Dans tous les cas, le petit axe est au grand axe, comme sin Φ à 1.

Comme β est toujours moindre que deux degrés et demi, on peut, sans erreur sensible, faire $\beta = 0$: alors les équations (1) (3) prendront la forme

I. $\sin\Phi = \sin\nu\sin(\mathfrak{h} - \Omega)$, II. $\tang\psi = \tang\nu\cos(\mathfrak{h} - \Omega)$.

L'équation I. est exacte, si Saturne est dans le noeud de son orbite: dans tous les autres cas, Φ est un peu plus petit. L'ellipse de l'anneau est donc le plus ouverte, lorsque Saturne est éloigné de 90° du noeud de son anneau. Alors on a $\Phi = \nu = 31°\,20'$, et le petit axe est un peu plus grand que la moitié du grand axe: donc les deux axes sont à très-peu près dans le rapport de 1 à 2, lorsque l'ellipse a sa plus grande ouverture. L'angle ψ aura la plus grande valeur $= \nu = 31°\,20'$, lorsque Saturne est dans la ligne des noeuds de l'anneau; à 90° du noeud, ψ est nul, ou le grand axe est parallèle a l'écliptique.

§. 159. Si l'on fait $\sin\alpha = \frac{\tg\beta}{\tg\nu}$, il suit de l'équation (1), que le petit axe ou Φ est nul, lorsque $\mathfrak{h} - \Omega = \alpha$: alors l'anneau paraît comme une ligne droite, son plan passant par l'oeil. Il en est de même du soleil: en nommant $\mathfrak{h}'$, β', la longitude et la latitude héliocentriques de Saturne, et $\sin\alpha' = \frac{\tg\beta'}{\tg\nu}$, le plan de l'anneau passera par le soleil, quand $\mathfrak{h}' - \Omega = \alpha'$. Comme l'épaisseur de l'anneau est très-petite, il disparaîtra dans l'un et l'autre cas; dans le premier, parceque l'oeil ne voit pas la face ou la largeur de l'anneau, dans le second, parceque cette face n'est pas éclairée par le soleil. Cependant on verra aisément, que cela doit dépendre de la bonté

des téléscopes. Ordinairement l'anneau disparaît quelque tems avant que l'un de ces cas arrive; mais M. Herschel ne cesse jamais de le voir, ni lorsque le plan de l'anneau passe par la terre, ni quand il passe par le soleil. Le premier fait prouve, que l'anneau n'est pas aussi mince qu'on l'avait cru, le second nous apprend, que son bord, ou arrête, n'est pas applati, mais arrondi. Le même astronome a observé, que le bord intérieur de l'anneau est aussi arrondi. Dans le tems où la terre était dans le plan de l'anneau, M. Herschel vit les satellites de Saturne débordant l'anneau des deux côtés, comme des perles enfilées sur un fil d'argent: l'anneau lui parut comme une ligne, dont l'épaisseur égalait à peine le quart du diamètre d'un satellite, que cet astronome estime 1″. Il s'en suivrait que l'anneau devrait etre extrêmement mince; mais si l'anneau est entouré d'une atmosphère, la réfraction élèvera les satellites au dessus des deux faces, et ils paraîtront les déborder des deux côtés, quand même ils ne seraient pas plus épais que l'anneau.

Outre ces deux cas il y a un troisième, où l'anneau disparaîtra. Le soleil ne peut illuminer qu'une de ses faces: si donc la terre se trouve de l'autre côté, ensorte que le plan de l'anneau passe entre le soleil et la terre, il est impossible que la lumière parvienne de l'anneau à l'oeil.

Soit (*Fig.* 41.) ☉ le soleil, ATB*t* l'orbite de la terre, ☉☊ le lieu héliocentrique du noeud ascendant de l'anneau, Saturne en S ou en *s*, SE, *se*, perpendiculaires à l'écliptique, SN☉, *snT*, le plan de l'anneau, donc N☉, *n*T, ses communes sections avec l'écliptique, qui seront parallèles entre elles, auxquelles EN, *en*, soient perpendiculaires. Cela posé, SNE = *sne* = *v* est l'inclinaison de l'anneau sur l'écliptique. La terre étant en T ou en *t*, l'anneau disparaîtra; 1) lorsque Saturne est en S, où le plan de l'anneau passe par le soleil, ♄′ étant = $\alpha' + 90°$; 2) quand Saturne est en *s*, ensorte que l'anneau passe par la terre, ♄ étant = $\alpha + 90°$; 3) pendant tout le tems que Saturne emploie à aller de S en *s*, parceque la face de l'anneau SN, tournée vers E, est éclairée par le soleil, tandis que la face opposée se présente à la terre.

§. 160. Le premier cas ne peut arriver, que lorsque Saturne est en S, ou dans le point opposé de son orbite, c'est-à-dire une fois dans quin-

ze ans. Puisque l'aphélie de Saturne est situé entre le noeud ascendant et le noeud descendant de l'anneau, et que sa plus grande équation est 6°26′ (§. 140.), Saturne mettra plus de tems à aller du noeud ascendant au noeud descendant, que de celui-ci au premier: le premier intervalle est d'environ 15 ans et 293 jours, le second n'est que de 13 ans et 240 jours.

Le second et le troisième cas supposent, que le plan de l'anneau nT traverse l'orbite de la terre, ou qu'il tombe entre A et B. Tous les phénomènes périodiques de l'anneau sont donc compris dans le tems que Saturne emploie à parcourir un arc de son orbite, dont la corde est AB, ce qui est le double de sa parallaxe annuelle (§. 84.), qui est $\frac{1}{9,54}$ (§. 120.) $= 0,105 = 6°$. Saturne faisant une révolution de 360° en 30 ans, il mettra un an à parcourir 12°: toutes les disparitions périodiques sont donc renfermées dans l'espace d'une année, qui revient tous les quinze ans à peu près.

Ayant calculé pour une pareille année, le tems où $\sin(\mathfrak{h}' - \Omega) = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\gamma}$, cette époque du passage du plan de l'anneau par le soleil servira à déterminer tous les phénomènes. On cherchera pour cette époque, la longitude héliocentrique de la terre t, on en retranchera la longitude du noeud de l'anneau, auprès duquel Saturne se trouve, et l'on aura l'angle $\Omega \odot t = \gamma$. Maintenant il faut distinguer quatre cas.

Cas I; γ étant entre zéro et 90°. La terre est dans le premier *quadrans* LA en t, Saturne en S, BLAM l'ordre des signes, suivant lequel Saturne et la terre tournent autour du soleil; et six mois auparavant l'anneau a passé par B, la terre étant en R. Dans cette demi-année, la terre a dû rencontrer l'anneau entre R et B en C, et l'atteindre ensuite entre B et L en D: l'anneau a donc disparu en C, et reparu en D, parcequ'en C la terre a passé du côté opaque de l'anneau, et en D du côté illuminé. Au moment où la terre est en t, l'anneau en NLM, il disparaît encore, parcequ'il passe par le soleil: six mois après, la terre est en R, l'anneau en A; elle l'a donc rencontré dans le *quadrans* AM, en passant de son côté illuminé: l'anneau est devenu visible pour quinze ans. Il y a donc, dans une pareille année, deux disparitions et deux reparitions.

Cas II; γ étant entre 90° et 180°. La terre est dans le second *quadrans* AM en T, l'anneau en LM; six mois auparavant la terre a été en *r*, l'anneau en B: donc elle a été du côté illuminé de l'anneau, dans toute la partie *r*LAT de sa route. Après que l'anneau a disparu, en passant par le soleil en L, la terre le rencontrera entre T et M, en passant de son côté éclairé. Il n'y a donc qu'une seule disparition, qui dure moins de trois mois.

Cas III; γ etant entre 180° et 270°, la terre dans le troisième *quadrans* MB en R. Six mois plutôt elle a été en *t*, l'anneau en B: il a donc été visible, pendant que la terre a parcouru l'arc *t*AM; mais entre M et R, la terre le rencontrant, il a disparu, jusqu'à ce que la terre était en R, l'anneau passant par le soleil en L. Pendant les six mois suivans la terre est du côté illuminé de l'anneau. Dans cette année, ainsi que dans la précédente, il n'y a qu'une disparition, pendant moins de trois mois.

Cas IV; γ étant entre 270° et 360°, la terre dans le quatrième *quadrans* en *r*. Elle a donc été six mois auparavant en T, l'anneau en B: elle l'a rencontré dans le *quadrans* MB, en passant de son côté non-illuminé. En passant par le soleil en L, l'anneau tourne le côté éclairé vers la terre *r*, et six mois après la terre est en T, l'anneau en A: elle l'atteind donc dans le *quadrans* LA, en repasant de son côté obscur, et elle le rencontre derechef entre A et T, en passant de son côté illuminé. Il y a donc deux disparitions et deux reparitions de l'anneau.

Il en résulte, que la situation la plus favorable pour la visibilité de l'anneau est celle, où la terre se trouve en M en même tems que l'anneau, ensorte que Saturne passe par le noeud de son anneau peu de tems après sa conjonction avec le soleil. Alors la terre est du côté illuminé de l'anneau pendant les deux demi-années LAM et MBL, et elle ne cesse de le voir que dans le tems où il passe par le soleil en L: ensorte qu'à cause de la grande proximité du soleil, la disparition de l'anneau ne sera point observée dans une pareille année.

Les circonstances les plus défavorables concourent, lorsque la terre se trouve en L dans le même tems que l'anneau, Saturne passant par le noeud de l'anneau peu de tems après son opposition. Dans un pareil cas, la terre

a été six mois auparavant en M, l'anneau en B: elle le rencontre en R, à une époque qu'il est aisé de trouver, en supposant que, dans l'espace d'une année, le plan de l'anneau parcourt uniformément le diamètre de l'orbe terrestre $BA = 2a$, qui est une corde de l'orbite de Saturne qui soustend 12°. Soit t le tems cherché, en parties de l'année, dans lequel la terre et l'anneau sont arrivés en R: la corde parcourue par l'anneau sera $BF = 2at$, et l'angle que la terre a décrit autour du soleil, $M\odot R = 2\pi t$, donc $\odot F = a\sin 2\pi t$; d'où l'on tire l'équation $2t + \sin 2\pi t = 1$; et l'on trouvera, à l'aide des tables trigonométriques, $t = 0,132 = 48$ jours. Dès ce moment l'anneau sera invisible pendant quatre mois et demi, où il arrive en L en même tems que la terre, qui le devance, en passant de son côté non-illuminé: il restera donc invisible, jusqu'à sa rencontre avec la terre en T. En nommant τ le tems que la terre a mis à parcourir l'arc LAT, on aura, comme ci-dessus, $\odot G = 2a\tau$, $L\odot T = 2\pi\tau$, donc $\odot G = a\sin 2\pi\tau$, et $\sin 2\pi\tau = 2\tau$; et l'on trouvera $\tau = 0,368 = 134$ jours. L'anneau est donc invisible, dans une pareille année, 4, 5 mois + 134 jours = 9 mois: ce qui est la plus grande durée qui soit possible.

§. 161. Maintenant il sera aisé de déterminer par observation les noeuds et l'inclinaison de l'anneau sur l'écliptique. Pour trouver l'inclinaison, on n'a qu'à mesurer le rapport des deux axes a, b, de l'anneau, à l'époque où son ellipse a la plus grande ouverture, et que par conséquent l'angle Φ a sa plus grande valeur, $\mathfrak{h} - \mathfrak{Q}$ étant = 90° (§. 158. (1)). Alors on a

$$\frac{b}{a} = \sin\Phi = \sin\nu\cos\beta - \cos\nu\sin\beta = \sin(\nu - \beta), \text{ et } \nu = \Phi + \beta.$$

On aura en même tems le lieu du noeud ascendant, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{h} - 90°$. Mais ce lieu se trouvera avec plus de précision, en observant Saturne, lorsque l'anneau disparaît, parceque son plan traverse le soleil, $\sin(\mathfrak{h}' - \mathfrak{Q})$ étant $= \frac{\mathrm{tg}\,\beta'}{\mathrm{tg}\,\nu}$. Or ν étant déjà connu, on calculera pour l'époque où l'on a observé la disparition de l'anneau, la longitude et la latitude héliocentriques de Saturne, $\mathfrak{h}'$ et β', on trouvera $\sin\alpha' = \frac{\mathrm{tg}\,\beta'}{\mathrm{tg}\,\nu}$, et $\mathfrak{Q} = \mathfrak{h}' - \alpha'$. On aura le même résultat, à l'aide de la longitude et latitude géocentrique, $\mathfrak{h}$ et β, au moment où l'anneau devient une ligne droite: on a $\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\nu}$, et $\mathfrak{Q} = \mathfrak{h} - \alpha$. Si l'on a observé les deux instans, où l'anneau a passé par le soleil en L, et au bout

de 15 ans en M, on trouvera à la fois les noeuds et l'inclinaison. En effet, la théorie de Saturne donnera pour les deux instans, les longitudes héliocentriques L, l, et les latitudes B, b. En nommant donc ω la précession des équinoxes dans l'intervalle entre les observations en L et M, qui est à peu près de 15 ans, les deux observations fourniront les équations,

$$\text{tang } v = \frac{\text{tang B}}{\sin(L - \Omega)}, \quad \text{tang } v = \frac{\text{tang } b}{\sin(l - \Omega - \omega)},$$ d'où l'on tire

$$\text{tang B}\{\sin(l-\omega)\cos\Omega - \cos(l-\omega)\sin\Omega\} = \text{tang } b\,(\sin L\cos\Omega - \cos L\sin\Omega),$$ donc

$$\text{tang } \Omega = \frac{\text{tg B}\sin(l-\omega) - \text{tg } b\sin L}{\text{tg B}\cos(l-\omega) - \text{tg } b\cos L},$$

ce qui donne la longitude Ω au moment de la première observation. Après avoir trouvé Ω, on aura

$$\text{tang } v = \frac{\text{tang B}}{\sin(L - \Omega)}.$$

Au moment où le plan de l'anneau passe par le soleil, Saturne se trouve dans la commune section des plans de son orbite et de l'anneau; la longitude du noeud est donc alors la même que la longitude héliocentrique de Saturne, ensorte que le lieu des noeuds de l'anneau sur l'orbite est déterminé immédiatement par une pareille observation. Il est vrai que cette méthode ne promet pas une grande précision, parce qu'avec des lunettes ordinaires, on cesse de voir l'anneau, avant que son plan passe par le soleil; mais comme par la même raison, il reparaîtra d'autant plus tard dans le point opposé, le milieu entre ces deux observations sera éloigné de 90° de la ligne des noeuds, ce qui donne leur longitude. Si ΥE (*Fig.* 42.) est l'écliptique, ML l'orbite de Saturne, NL le plan de l'anneau, on trouve au moyen des observations précédentes, la longitude du noeud L sur l'orbite, ou l'arc ML et KL, $\Upsilon M = KM = 3^s\,22°$ étant donné, ainsi que l'angle $M = 2°\,29'\,38''$ (§. 143.). Or on a déjà trouvé l'inclinaison N de l'anneau sur l'écliptique: on connaît donc dans le triangle LMN, les angles M, N, et le côté $ML = KL - \Upsilon M$, d'où l'on conclura MN, et la longitude du noeud de l'anneau sur l'écliptique $= \Upsilon N$.

Au moyen de pareilles observations on a trouvé:

La longitude du noeud ascendant de l'anneau sur l'écliptique l'an $1774 = 5^s\,17°\,40'$;

l'inclinaison sur l'écliptique $= 31°21'$;

la longitude du noeud de l'anneau sur l'orbite de Saturne $= 5^s 21'$;

son inclinaison sur l'orbite $= 30°$.

Ces résultats ne peuvent pas être exacts, parceque les observations de l'instant de la disparition et de celui de l'apparition, ainsi que du rapport entre les deux axes de l'ellipse, sur lesquelles se fondent ces élémens, ne sont pas susceptibles d'une parfaite précision.

Quand les observations de l'instant où l'anneau est devenu une ligne droite, et que par conséquent la terre a été dans son plan, ont donné le lieu des noeuds de l'anneau, au moyen des équations, $\sin\alpha = \frac{\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\nu}$, et $\Omega = \frac{1}{2} - \alpha$, on peut se servir de cet élément, et de l'inclinaison de l'anneau à l'écliptique $\nu = 31°21'$, pour corriger les élémens elliptiques de Saturne. Connaissant dans le triangle MLN (*Fig.* 42.) l'angle $N = \nu$, $\Upsilon N = \Omega$, la longitude du noeud de Saturne $= \Upsilon M$, son inclinaison $= M$, donc $MN = \Omega - \Upsilon M$, on calculera ML, et la longitude du noeud de l'anneau sur l'orbite de Saturne, $\Upsilon M + ML = N = 5°21'$. Ayant donc observé l'instant où l'anneau a passé par le soleil, on a pour cet instant, la longitude héliocentrique de Saturne sur l'orbite $= N$: soit N' cette longitude, réduite à l'écliptique. Si S est le soleil (*Fig.* 22.), T la terre, P Saturne, L son lieu réduit à l'écliptique, on connaît $TSL = \Upsilon SL + \Upsilon ST = N' + (180° - \Upsilon TS) = N' + 180° - \odot$, $LTS = \odot - \frac{1}{2}$, $ST = a$; d'où l'on tire $SL = \frac{a \sin(\odot - \frac{1}{2})}{\sin(\frac{1}{2} - N')}$, et le rayon vecteur de Saturne, $SP = \frac{SL}{\cos\beta}$.

CHAPITRE X.

Rotation des Planètes.

§. 162. La découverte qu'on avait faite avec les téléscopes, que le soleil et les planètes tournent autour d'un de leurs diamètres avec une vitesse constante, était très-importante, parcequ'elle porta le mouvement diurne de la terre à un haut dégré de probabilité (§. 4.). Sous ce rapport, les taches qu'on aperçoit sur les surfaces de ces corps, sont proprement un objet de l'astronomie, attendu que leur mouvement nous apprend la *rotation* des planètes: la méthode, par laquelle on parvient à ce résultat, va être expliquée relativement au soleil. La rotation de ce corps est entièrement déterminée par deux élémens, la position de l'*équateur solaire,* et la *période de la rotation* du soleil sur un axe qui est perpendiculaire au plan de l'équateur. Le mouvement apparent des taches du soleil, qui servira à déterminer ces deux élémens, offre les particularités suivantes.

1. L'entrée sur le disque solaire se fait au bord gauche ou oriental du soleil, la sortie au bord occidental: leur mouvement héliocentrique est donc dirigé de droite a gauche, ou suivant l'ordre des signes, ainsi que le mouvement diurne et annuel de la terre et des planètes.

2. A la fin de Mai et au commencement de Juin, le soleil étant à $2^s 10°$, les taches décrivent sur le disque solaire une ligne droite, inclinée sur l'écliptique du nord au sud, ensorte que leur latitude boréale diminue, pendant que l'australe augmente. Il est visible que la terre se trouve alors dans le plan de l'équateur solaire, et dans celui de ses noeuds où il s'abaisse au dessous de l'écliptique, c'est-a-dire dans le noeud descendant, dont la longitude héliocentrique est en conséquence à $8^s 10°$ à peu près. Bientôt après, leur

route prend une forme elliptique, dont la concavité est tournée vers le nord, parceque la terre a passé du côté boréal de l'équateur solaire: ces ellipses s'ouvrent de plus en plus jusqu'au commencement de Septembre, et dès lors jusqu'au commencement de Décembre elles se rétrécissent. Durant les trois premiers mois le point d'entrée est plus boréal que celui de sortie; au commencement de Septembre les deux points ont la même latitude, le grand axe de l'ellipse étant parallèle à l'écliptique; dans les trois derniers mois, le point d'entrée est plus austral que celui de sortie. Au commencement de Décembre la route des taches est dérechef une ligne droite, dont la direction est opposée à la précédente: la terre est alors dans le noeud ascendant de l'équateur solaire à $2^s\,10°$. Tous les autres phénomènes sont, pendant les six mois suivans, de nature opposée; la concavité des ellipses est dirigée vers le sud, etc.

3. Les routes de toutes les taches sans exception suivent les mêmes lois, ce qui prouve clairement, que ce commun mouvement est l'effêt de la rotation du soleil.

4. Au commencement de Septembre et de Mars, les ellipses ayant leur plus grande ouverture, les deux axes sont entre eux dans le rapport de 100 à 13, d'où il suit, que le sinus de l'inclinaison de l'oeil ou de l'écliptique sur l'équateur solaire est $= 0{,}13$ et cette inclinaison 7 degrés et demi.

Les taches qui durent assés longtems, pour achever un tour entier, employent 27 jours et demi, pour parvenir au même point du disque solaire. Pendant ce tems, la terre a décrit, suivant la même direction, un angle de 27° autour du soleil, lequel est décrit par les taches en deux jours: la période de la rotation du soleil est par conséquent d'environ 25 jours et demi.

§. 163. Ces observations générales suffisent donc, pour déterminer à peu près la position de l'équateur et la rotation du soleil. S'il était possible, d'observer le tems précis, où les taches décrivent des lignes droites, la longitude du soleil ou de la terre dans cet instant donnerait immédiatement le lieu des noeuds. On le trouve avec plus de sureté, au moyen d'observations correspondantes, en observant l'instant avant et après le passage par les noeuds, où les ellipses ont la même ouverture, mais dans le sens opposé: le milieu donnera l'instant du passage par le noeud, et par

conséquent sa longitude, égale à celle de la terre. Les routes rectilignes donneront aussi l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique. Si la *Figure* 43. représente le soleil, coupé par son centre C, et par les poles septentrionaux P, Q, de l'équateur solaire AR et de l'écliptique EL; la terre est constamment dans un plan par EL, perpendiculaire au plan de la *figure;* et dans l'instant où la terre passe par la ligne des noeuds, elle se trouve sur la droite qui est perpendiculaire à EL en C, les poles de l'équateur solaire, P, étant situés dans le bord du disque visible du soleil. Alors les taches décrivent des droites AR, SU, parallèles entre elles, et perpendiculaires à PC, l'oeil étant dans le plan ACR. La comparaison d'une tache avec les bords du soleil, à l'aide d'un micromètre, donnera la différence des déclinaisons et ascensions droites de la tache et du centre du soleil, d'où l'on conclura par le calcul leur différence en longitude et latitude. Si l'on a ainsi observé l'entrée A ou la sortie R d'une tache qui traverse le centre C, la différence en longitude et latitude donnera le rapport des droites CB, AB, d'où l'on tire $\text{tang ACE} = \frac{AB}{CB}$, ce qui donne l'inclinaison. Si la tache, au lieu de passer par le centre, décrit le parallèle SU, il faut observer et l'entrée S et la sortie U. La différence des longitudes et latitudes de la tache et du centre du soleil, donne le rapport des droites

$$CT = \lambda,\ CV = \lambda',\ ST = \beta,\ UV = \beta'.$$

En faisant donc $DT = x$, $DV = y$, on aura

$$x + y = \lambda + \lambda',\ x : y :: \beta : \beta',\ \text{donc}$$

$$x + y \text{ ou } \lambda + \lambda' : x :: \beta + \beta' : \beta.\ \text{On a donc}$$

$$\text{tang EDS} = \frac{\beta}{x} = \frac{\beta + \beta'}{\lambda + \lambda'}.$$

Mais il faut observer que, la terre ne restant qu'un instant dans le noeud C, la route des taches sur le disque entier du soleil ne peut être ni une droite, ni une ellipse. Il faudra donc employer d'autres méthodes, pour obtenir un résultat plus exact.

§. 164. Les observations avec le micromètre donnent les différences entre les ascensions droites et les déclinaisons des deux points observés. Supposons donc que EL soit parallèle à l'équateur terrestre, et qu'on ait comparé une tache M, avec le bord du soleil L et E relativement à l'ascen-

sion droite, et avec le bord Q ou q par rapport à la déclinaison: appelons

le demi-diamètre apparent du soleil $= r$,

le tems écoulé entre les passages de L et E par le fil horaire $= t$,

le tems écoulé entre les passages de L et M $= \tau$,

la différence d'ascension droite entre L et M $= \varrho$,

la déclinaison du soleil $= D$,

la différence des hauteurs ou déclinaisons de q et de M $= \delta$,

la longitude du soleil $= \odot$, son angle de position $= \varkappa$,

l'obliquité de l'écliptique $= \varepsilon$.

On connaît par la théorie du soleil, $\odot$, D, ε, r, et $\varkappa$, tang $\varkappa$ étant $=$ tang $\varepsilon \cos \odot$ (§. 96. I. 3.), et par l'observation, t, τ, δ, et $\varrho = \frac{\tau}{t} r$. On a donc

$$MN = r - \delta, \quad NL = \varrho \cos D, \quad CN = r - \varrho \cos D;$$

d'où l'on tire

$$\text{tang LCM} = \frac{MN}{CN}, \quad CM = V(MN^2 + CN^2) = \frac{CN}{\cos LCM} = \mu.$$

Si ACR est l'écliptique, on a $LCR = 90° - RCq$, et $RCq = 90° - \varkappa$, donc

$$LCR = \varkappa, \text{ et } MCR = LCM - \varkappa = \Phi.$$

On verra aisément, quels changemens éprouveront les angles LCM, $\varkappa$, Φ, si la situation de l'équateur ou de la tache est différente de celle que la *figure* 43. suppose. On vient de trouver les angles géocentriques μ et Φ, et il s'agit d'en conclure l'angle héliocentrique qui répond à $\mu = CM$. Soit (*Fig.* 44.) SCV le soleil, T la terre, si TS rencontre la surface du soleil en C, et que dans le plan SCM où se trouve la tache M, on ait mené la tangente au soleil TV; C sera le centre du disque solaire, et l'on connaît $STV = r$, et $STM = CTM = \mu$. On aura donc dans le triangle TSM, $\sin SMT = \frac{ST}{SM} \sin \mu = \frac{ST}{SV} \sin \mu = \frac{\sin \mu}{\sin r} = \frac{\mu}{r}$, et $\psi = TSM = 180 - \mu - SMT$, où il faut prendre l'angle SMT plus grand que 90°. En abaissant (*Fig.* 43.) Mm perpendiculairement à l'écliptique, et en désignant par CM, Cm, Mm, les angles héliocentriques; on connaît dans le triangle sphérique CmM, qui est rectangle en m, $CM = \psi$, $MCR = \Phi$, d'où l'on tire

$$\sin Mm = \sin \Phi \sin \psi, \text{ et tang } Cm = \cos \Phi \text{ tang } \psi.$$

Or $Mm = b$ est la latitude héliocentrique de la tache, et $Cm = l$ la différence entre les longitudes héliocentriques de la tache et du point C, ou de la terre T (*Fig.* 44.). On a donc

$$\sin b = \sin \Phi \sin \psi, \quad \text{tang } l = \cos \Phi \text{ tang } \psi,$$

et la longitude héliocentrique de la tache $= 180° + \odot \mp l$.

§. 165. Quand on a ainsi déterminé trois lieux héliocentriques d'une même tache, on en conclura tous les élémens de la rotation du soleil. Soient (*Fig.* 45.) E, P, les poles de l'écliptique et de l'équateur solaire, M, m, μ, les trois lieux héliocentriques d'une tache. On connaît donc

$$EM = a, \quad Em = b, \quad E\mu = c, \quad MEm = \alpha, \quad ME\mu = \beta.$$

En faisant donc $PM = Pm = P\mu = x$, $EP = y$, $PEM = z$, les triangles PEM, PEm, PEμ, fourniront ces trois équations,

$$\text{I.} \quad \cos x = \cos a \cos y + \sin a \sin y \cos z,$$

$$\text{II.} \quad \cos x = \cos b \cos y + \sin b \sin y \cos (z + \alpha),$$

$$\text{III.} \quad \cos x = \cos c \cos y + \sin c \sin y \cos (z + \beta).$$

En comparant I. avec II. et I. avec III. on trouvera

$$\text{IV.} \quad \cot y = \frac{\sin a \cos z - \sin b \cos (\alpha + z)}{\cos b - \cos a},$$

$$\text{V.} \quad \cot y = \frac{\sin a \cos z - \sin c \cos (\beta + z)}{\cos c - \cos a}.$$

En égalant ces deux valeurs de cot y, il viendra

$$\text{VI.} \quad \text{tang } z = \frac{(\sin a - \sin c \cos \beta)(\cos b - \cos a) - (\sin a - \sin b \cos \alpha)(\cos c - \cos a)}{\sin b \sin \alpha (\cos c - \cos a) - \sin c \sin \beta (\cos b - \cos a)}.$$

Les lecteurs, versés dans le calcul trigonométrique, verront aisément, comment ces formules peuvent être disposées plus favorablement pour l'usage des logarithmes (1).

En nommant L la longitude héliocentrique de la tache dans l'instant de la première observation M, on aura la longitude du pole boréal P de l'équateur solaire $= L - z$, la longitude du noeud ascendant de l'équateur solaire $= 90° + L - z$, et l'on trouvera, au moyen de l'équation IV. ou V. l'obliquité de l'écliptique relativement à la rotation du soleil, ou ce qui revient au même, l'inclinaison de l'équateur solaire sur l'écliptique $= y$.

La position de l'équateur solaire relativement à l'écliptique étant maintenant connue, la longitude et la latitude héliocentriques d'une tache donneront, au moyen de la trigonométrie, l'ascension droite et la déclinaison hé-

(1) Voy. *Astron. théor. et prat. par M. Delambre, Tome III. Chap. XXIX.*

liocentriques relativement à l'équateur solaire. La dernière est invariable, mais la première augmente de 360° durant une rotation du soleil. Ayant donc tiré des observations, l'ascension droite d'une tache pour deux époques, supposons qu'elle ait changé de l'angle α durant l'intervalle t: alors on aura la période de la rotation du soleil, $T = \frac{2\pi}{\alpha} t$.

La différence entre les longitudes géocentriques d'une tache et du centre du soleil, qui est tout au plus de 15′ ou 16′, est ici la mesure, par laquelle il faut déterminer la différence entre les longitudes héliocentriques de la tache et de la terre, qui peut aller à 90°; d'où il suit, qu'une erreur d'observation de 10″ produira au moins une erreur d'un degré sur les positions héliocentriques. On ne peut donc parvenir à des résultats exacts, que par une longue suite d'observations. Les élémens suivans s'accordent très-bien avec les observations.

La *longitude du nœud ascendant*, ou longitude héliocentrique du point d'intersection de l'écliptique et de l'équateur solaire, où ce dernier s'élève au dessus de l'écliptique au nord et à l'est $= 2^s\,20°\,7'$.

Inclinaison de l'équateur solaire sur l'écliptique $= 7°\,19'\,23''$.

Période de la rotation du soleil $=$ 25 jours 17 minutes.

§. 166. La même méthode a aussi servi à déterminer la rotation des planètes qui nous présentent des taches, dont voici les résultats.

Le mouvement des taches de *Vénus* est difficile à observer, à cause de la proximité du soleil, et de la variation des phases de Vénus, dont il résulte qu'une même tache se trouve tantôt dans la partie éclairée, tantôt dans la partie obscure du disque. Aussi la période de la rotation a été longtems incertaine. Au milieu du dix-septième siècle Cassini avait trouvé 23 heures 21 min. pour cette période; mais Bianchini conclut de ses observations des taches, faites en 1726, 1727, 1728, qu'elle était de 24 jours et 8 h. Il n'y a pas longtems que Schröter a décidé la question. Ayant fait une longue suite d'observations des *cornes* de Vénus, ou des pointes de son croissant, il s'est assuré de sa rotation. Les aspérités de cette planète, et les différentes situations des ombres qu'elles projettent du côté opposé au soleil, changent sensiblement la forme des cornes dans une journée, ce qui ne peut

être expliqué que par la rotation; et les cornes reprennent toujours la même forme au bout de 23 h. 21 m. Pour déterminer la rotation avec plus de sureté, Schröter compara deux observations, éloignées l'une de l'autre de 731 jours, et il trouva que la corne australe avait précisément la même forme après un intervalle de 731 j. 15 h. ce qui étant divisé par 752, le nombre de rotations, donne

23 h. 20 m. 59,04 s. pour le tems de la rotation,

qui satisfait à toutes les autres observations. Les observations de Cassini et de Bianchini viennent même à l'appui de ce résultat, parceque la période de 24 j. 8 h. renferme 25 périodes de 23 h. 21,6 m. Suivant Bianchini les autres élémens de la rotation de Vénus sont:

Longitude du noeud ascendant de l'équateur sur l'écliptique $= 1^s\,20°$;

Inclinaison de ces deux plans $= 75°$;

Inclinaison de l'équateur de Vénus sur son orbite $= 71°\,55'$.

Ce dernier angle est l'obliquité de l'écliptique, dont dépendent les saisons de Vénus, qui par conséquent sont sujettes à des variations beaucoup plus considérables, que celles de la terre.

Les taches de *Mercure* sont encore plus difficiles à observer. L'observation des cornes à donné à Schröter le résultat, que cette planète tourne sur lui-même en 24 h. 5 m. 31 s. M. Harding découvrit le 18 May 1801 un trait obscur dans l'hémisphère austral de Mercure, et les observations de cet objet, ainsi que d'une tache découverte par Schröter, ont donné la même période de rotation. L'inclinaison de l'équateur de Mercure sur son orbite paraît approcher d'un angle droit.

Suivant les observations de Cassini et de Maraldi, *Mars* a une rotation de 24 h. 40 m. ou 39 m. sur un axe qui est presque perpendiculaire à son orbite: d'où il suivrait, que les vicissitudes des saisons sur cette planète sont insensibles. M. Herschel a trouvé les résultats suivans (1).

Période de rotation de Mars $=$ 24 h. 39 m. 21,67 s.

Noeud ascendant de son équateur sur l'écliptique $= 2^s\,17°\,47'$,

(1) *On the remarkable appearances at the Polar regions of the Planet Mars* (*Philos. Trans. Vol. LXXIV. Part. II. n. 19.*).

Noeud sur son orbite, ou point automnal $= 2^s\,19°\,28'$,

Inclinaison de l'équateur sur l'écliptique $= 30°\,18'$,

sur son orbite, ou obliquité de l'écliptique de Mars $= 28°\,42'$.

La rotation et les saisons de cette planète sont donc peu différentes de celles de la terre.

La rotation de *Jupiter*, la plus rapide de toutes, a été déterminée avec une grande précision, au moyen de ses taches, qui sont très-faciles à observer. La durée de sa rotation est, suivant Cassini, Maraldi, et plusieurs autres astronomes, 9 h. 55 m. à 56 m. suivant Schröter $=$ 9 h. 55 m. 33 s. Son équateur, qui est aussi à peu près le plan des orbites de ses satellites, est incliné sur son orbite d'environ 3°; ensorte que les vicissitudes de ses saisons sont presqu'insensibles.

Tout ce qu'on sait de la rotation de *Saturne* est dû à M. Herschel. Les observations des bandes obscures et d'une tache très-apparente lui ont donné le résultat, que Saturne tourne en 10 h. 16. m. sur un axe, perpendiculaire à cette bande et au plan de l'anneau, de sorte que l'équateur coïncide avec l'anneau: d'où il est probable, que l'anneau a à peu près la même rotation, que la planète (1). M. Herschel conclut des *facules*, ou des parties lumineuses qui s'élèvent au dessus de la surface de l'anneau, qu'il a observées avec beaucoup de soin, que l'anneau tourne sur son axe en 10 h. 32 m. 15, 4 s. (2). La distance du milieu de l'anneau au centre de Saturne est environ deux demi-diamètres de la planète (§. 157.). En comparant les périodes des satellites de Saturne, et leurs distances à la planète, qu'on trouvera plus bas, il résultera de la troisième loi de Kepler (§. 126.), qu'un satellite, placé au milieu de l'anneau, ferait une révolution en 11 heures à peu près, ce qui diffère peu de la rotation de l'anneau et de Saturne. Il est donc vraisemblable, que les révolutions des satellites et de l'anneau, à proportion de leurs distances, dépendent de la rotation de Saturne, suivant des loix physiques.

§. 167. Depuis la découverte de l'aplatissement de la terre, il était à présumer, que la rotation des planètes devait produire le même effet; et cette supposition a été confirmée par les observations.

(1) *Account of the discovery of a sixth and seventh Satellite of the Planet Saturn* (*Philos. Trans. Vol. LXXX. Part I. pag.* 13. *etc.*

(2) *On the Satellites of the planet Saturn, etc.* (*Ibid. Part II. n.* 23.)

La durée de la rotation de *Mars* est la même que celle de la terre: or son diamètre étant environ la moitié du diamètre de la terre, la vitesse d'un point de l'équateur de Mars est deux fois moindre que sur la terre: cependant son aplatissement paraît beaucoup plus considérable, ses deux diamètres étant entre eux, suivant M. Herschel comme 16 à 15, suivant Schröter comme 81 à 80 (1).

La période de la rotation de *Jupiter* est $\frac{5}{12}$ de celle de la terre, son équateur est 11, 4 fois plus grand que l'équateur terrestre: la vitesse de la rotation de cette planète est donc 27 fois plus grande que celle de la terre: d'où il résulte un aplatissement très-considérable; les observations donnent le rapport des diamètres = 14: 13.

Le rapport des diamètres de *Saturne* est, suivant M. Herschel, comme 2281 à 2061, à peu près comme 11 à 10. Mais ce qui est plus extraordinaire, c'est que suivant les observations de cet astronome, Saturne est doublement aplati, aux poles et sous l'équateur, et l'aplatissement des poles s'étend à une grande distance; ensorte que son plus grand diamètre est celui du parallèle de 43° de latitude, où la courbure de la surface, ou des méridiens, est aussi la plus grande. Le disque de Saturne a donc à peu près la forme d'un carré, dont les quatre coins sont arrondis. Suivant les dernières observations de M. Herschel, l'axe de Saturne, le diamètre de l'équateur, et le plus grand diamètre sous le parallèle de 43°, sont entre eux comme les nombres 32, 35, 36 (2).

M. Herschel croit avoir aperçu un aplatissement considérable de la nouvelle planète, découverte par lui.

Le tems de la rotation du *soleil* est 25, 5 fois, et son équateur 110 fois plus grand, que ceux de la terre: par conséquent un point de son équateur a une vitesse 4 à 5 fois plus grande que sur la terre; cependant on n'a aperçu aucun aplatissement de ce corps central.

(1) *Ephémérides de Berlin, pour* 1802.
(2) *Philos. Trans. for the year* 1806. *Part II.*

CHAPITRE XI.

Les cinq nouvelles Planètes.

§. 168. Depuis l'origine de l'astronomie on connaissait, outre le soleil et la lune, les cinq planètes principales dont il a été traité dans les chapitres précédens, et l'on croyait probablement connaître toute l'étendue du système solaire: personne ne se doutait, qu'il y eût d'autres planètes qui, sans être aperçues, décrivaient autour du soleil des orbites semblables. Dans les tems modernes, les distances des planètes au soleil, et les lois de leurs mouvemens étant mieux connues, on présuma, qu'au delà de Saturne, il y avait peut-être des planètes, invisibles ou inconnues à cause de leur grande distance. En réfléchissant sur le grand nombre des planètes secondaires qui accompagnent Jupiter et Saturne dans leurs routes autour du soleil, et sur la multiplicité des comètes qui paraissent annuellement, on ne put se persuader, que le nombre des planètes principales fût borné à six. Cette supposition fut confirmée par une des découvertes les plus importantes, que l'astronomie doit à M. Herschel, étant alors occupé à observer la parallaxe des étoiles, à Bath en Angleterre. Le 13 Mars 1781, ayant dirigé son téléscope vers un point de la voie lactée près de l'étoile H des *Gémeaux*, il aperçut un astre qui, quoiqu'à la vue simple paraissant comme une étoile de la septième grandeur, avait dans le téléscope un diamètre beaucoup plus grand que les étoiles de la première grandeur. Son mouvement propre, qui était sensible dans peu de jours, prouva que ce n'était pas une étoile fixe, et M. Herschel le prit d'abord pour une comète, quoique son exterieur fût très-différent des comètes (1). Ses premières observations lui firent connaître, que cet astre

(1) *Philos. Transact. Vol. LXXI. Part II. n.* 32.

avait un mouvement direct de 2″,25 par heure, que son orbite était peu inclinée sur l'écliptique, que sa vitesse et son diamètre augmentait, et que par conséquent il s'approchait de son périhélie (1). Cet astre occupa bientôt tous les astronomes, qui ne tardèrent pas à voir, que son mouvement, au lieu de ressembler aux orbites excentriques des comètes, était presque circulaire comme celles des planètes. Il fut donc reconnu comme une planète principale du système solaire, et les observations, faites pendant quarante ans, ont mis cela hors de doute, et ont donné les élémens de son orbite avec une grande précision. La plupart des astronomes sont convenus, d'après Mr. Bode, à donner à cette planète le nom d'*Uranus* et le signe ♅; les astronomes anglais l'appellent *Georgium Sidus*.

Les méthodes précédentes pour déterminer les orbites planétaires, supposent un grand nombre d'observations, principalement des oppositions dans les différentes parties de l'orbite, et surtout une connaissance exacte de la révolution, d'où l'on conclut le mouvement moyen et la distance moyenne au soleil, dont la comparaison avec le mouvement et le rayon vecteur vrais, est la base de toutes les méthodes précédentes. Mais comme cet élément est trouvé par un grand nombre de révolutions complètes, et que le mouvement de la nouvelle planète est si lent, qu'elle emploie plus de 80 ans pour faire une révolution, il est aisé de voir, qu'il fallait employer ici de nouvelles méthodes, et qu'un tems considérable s'écoulera, avant que les élémens de la nouvelle planète soient déterminés avec la même précision que ceux des anciennes. Cependant la lenteur même du mouvement est très-favorable, pour approcher de la vérité à l'aide d'un petit nombre d'observations. En effet, une demi-année faisant environ la 168me partie, ou 2°9′ de l'orbite d'Uranus, qui est peu excentrique, on peut l'observer de deux points diamétralement opposés de l'orbe terrestre, sans que sa distance au soleil ait changé sensiblement; ensorte qu'en regardant ce petit arc comme un arc de cercle, parcouru d'un mouvement uniforme, on peut déterminer ses élémens d'une manière approchée, parceque la base ou la parallaxe annuelle est aussi grande

(1) *Ibid. pag.* 498.

que possible. On va voir que deux observations suffisent pour cet effet, à l'aide de la troisième loi de Kepler.

§. 169. Soit (*Fig.* 46.) S le soleil, T*t* l'orbite de la terre, P, *p*, deux points de l'orbite d'Uranus, où il a été observé de T et *t*, et appelons les quantités données par les observations et la théorie du soleil,

$$ST = a,\quad St = b,\quad TSt = \gamma,\quad PTS = \alpha,\quad ptS = \beta,$$

l'année sidérale de la terre $= A$,

le tems écoulé entre les deux observations $= t$;

les quantités qu'on cherche,

l'année sidérale de la planète $= T$,

l'angle au soleil $PSp = \omega$,

le rayon vecteur, ou le rayon de son orbite, $SP = Sp = x$.

En faisant le demi-diamètre de l'orbite de la terre $= 1$, on aura en vertu de la troisième loi de Kepler, $T = Ax\sqrt{x}$, et à cause de l'uniformité supposée du mouvement, $T = \frac{2\pi}{\omega}\,t$, d'où il suit

$$\omega = \frac{2\pi}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{t}{A}.$$

Les triangles PST, *pSt*, fournissent ces relations:

$$P = 180° - \alpha - PST,\quad p = 180° - \beta - pSt,\quad \text{donc}$$

$$P + p = 360° - (\alpha + \beta) - (PST + pSt).$$

Mais $PST + pSt = PST + PSt + \omega = 360° - \gamma + \omega$, donc

$$P + p = \gamma - \alpha - \beta - \omega = \gamma - \alpha - \beta - \frac{2\pi}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{t}{A}.$$

On a de plus, $\sin P = \frac{a}{x}\sin\alpha,\quad \sin p = \frac{b}{x}\sin\beta$;

or les angles P, *p*, étant tout au plus 2° et quelques minutes, on peut supposer

$$P + p = \sin P + \sin p = \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{x};$$

ce qui étant comparé avec la valeur précédente de $P + p$, donnera

$$(a\sin\alpha + b\sin\beta)\sqrt{x} = (\gamma - \alpha - \beta)\,x\sqrt{x} - \frac{2\pi t}{A}.$$

En faisant donc $x = y^2$, on aura cette équation du troisième degré,

$$0 = y^3 - \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{\gamma - \alpha - \beta}\,y - \frac{2\pi t}{A(\gamma - \alpha - \beta)};$$

dont la solution donne y et $x = y^2$. Le résultat, trouvé par cette première approximation, sera rendu plus exact, si, après avoir calculé les angles ω, P, *p*, au moyen des formules

$$\omega = \frac{2\pi t}{A y^3}, \quad \sin P = \frac{a}{x}\sin\alpha, \quad \sin p = \frac{b}{x}\sin\beta,$$

on change la valeur trouvée de x, jusqu'à ce qu'on ait exactement $P + p + \omega = \gamma - \alpha - \beta$ (1).

I. *Exemple.* Deux des premières observations, faites en 1781, donnent

$$\alpha = 72^\circ 17' 53'', \quad \beta = 93^\circ 29' 31'', \quad \gamma = 173^\circ 50' 13'',$$

$$a = 1,00068, \quad b = 1,00053, \quad t = 180 \text{ jours } 6 \text{ h. } 45 \text{ m.}$$

donc $\gamma - \alpha - \beta = 8^\circ 2' 49'' = 0,140445675$; ce qui donne l'équation

$$0 = y^3 - 13,89849 \cdot y - 22,0813;$$

à laquelle satisfait la valeur $y = 4,355285$; les deux autres racines étant imaginaires. On a donc $y^2 = x = 18,9685 \ldots$. Au moyen de la correction précédente on trouvera $x = 18,974$. En effet, cela donnera

$$\omega = 2^\circ 9', \quad P = 2^\circ 52' 48'', \quad p = 3^\circ 1' 1'', \text{ donc}$$

$$P + p + \omega = 8^\circ 2' 49'' = \gamma - \alpha - \beta.$$

II. *Exemple.* Deux autres observations de la même année donnent

$$\alpha = 19^\circ 34' 29'', \quad \beta = 40^\circ 44' 44'', \quad \gamma = 64^\circ 9' 42'', \quad t = 67 \text{ j. } 5 \text{ h. } 31 \text{ m.}$$

$$a = 1,01426, \quad b = 1,01402; \quad \text{d'où l'on tire l'équation}$$

$$0 = y^3 - 14,7335 \cdot y - 17,8729;$$

dont une racine est $= 4,341$; les autres étant négatives. Cela donne $x = y^2 = 18,844$, un peu plus petite que la valeur précédente.

Le résultat général qu'on peut en conclure, c'est que 1) la distance d'Uranus au soleil est à peu près 19 fois plus grande que celle de la terre, et deux fois plus grande que celle de Saturne, ensorte que le système solaire a été agrandi au double par cette nouvelle planète; 2) son orbite est peu excentrique; 3) la durée de sa révolution est de 82 à 83 ans; 4) Uranus revenait de son aphélie l'an 1781, parceque d'après toutes les observations son rayon vecteur allait en diminuant. Ces données sont suffisantes, pour entreprendre une détermination plus exacte de son orbite.

Une méthode semblable est la suivante. En appelant (*Fig.* 22.)

la longitude du soleil, $\Upsilon TS = \odot$,

les rayons vecteurs de la terre, $ST = r$, de la planète, $SL = z$,

(1) Voy. *Nouveaux Ouvrages de Boscovich, Tom III. Opusc. II. Mém. II.* et *le mémoire de Klügel, dans les Ephémér. de Berlin pour* 1786, *pag.* 238.

la longitude héliocentrique de la planète, $\Upsilon SL = P$,

l'angle à la terre, $LTS = \odot - \Upsilon TL = \eta$,

l'angle à la planète, $SLT = \Upsilon LL - \Upsilon SL = \Upsilon TL - P = \zeta$;

on connaît r, $\odot$, ΥTL, et η. En marquant d'un trait les mêmes quantités, relatives à une autre observation, et en nommant m, n, les mouvemens moyens du soleil et de la planète, dans l'intervalle entre les deux observations, on connaît m. Maintenant on donnera à z une valeur arbitraire, ou celle qui a été trouvée par les premières observations, et on calculera les angles, ζ, ζ', à l'aide des formules, $\sin\zeta = \frac{r}{z}\sin\eta$, $\sin\zeta' = \frac{r'}{z}\sin\eta'$: ce qui donnera $P = \Upsilon TL - \zeta$, et $P + \eta = \odot - \zeta$, donc

$$P' - P = (\odot' - \odot) + (\eta - \eta') + (\zeta - \zeta').$$

En supposant donc le mouvement vrai $P' - P$ égal au mouvement moyen n, on aura, en vertu de la troisième loi de Kepler, $P' - P = \frac{m}{\sqrt{z^3}}$, ce qui donne l'équation

$$(\odot' - \odot) + (\eta - \eta') + \left\{\text{Arc sin}\,\frac{r}{z}\sin\eta - \text{Arc sin}\,\frac{r'}{z}\sin\eta'\right\} = \frac{m}{\sqrt{z^3}}.$$

Il faut donc changer la valeur de z, jusqu'à ce qu'elle satisfasse à cette équation; et le milieu, conclu de plusieurs observations, sera d'autant plus exact, que l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite sont plus petites, parcequ'on a employé le lieu L réduit à l'écliptique, au lieu de celui sur l'orbite, et le mouvement vrai au lieu du mouvement moyen.

§. 170. Les quatre planètes, découvertes au commencement du siècle présent, ont obligé les astronomes, de chercher des méthodes nouvelles et plus exactes, parceque leurs excentricités et inclinaisons sont très-grandes. L'ouvrage le plus important sur cet objet est la *Theoria motus corporum cœlestium etc. autore C. F. Gauss*; et l'on doit au célèbre auteur, non-seulement des méthodes ingénieuses, mais aussi l'heureuse application qu'il en a faites aux nouvelles planètes, et qui nous a fait connaître, dans très-peu de tems, leurs élémens avec une précision, qui donna le moyen de les observer sans interruption: car ces planètes sont si petites, qu'on les voit à peine avec des télescopes, de sorte qu'il eût été difficile de les retrouver après leur conjonction avec le soleil, si l'on n'eût pu calculer d'avance leur lieu, par le moyen d'un petit nombre d'observations, peu éloignées l'une de l'autre,

ou ce qui revient au même, si l'on n'eût pas eu des méthodes, qui donnaient le moyen de déterminer, d'une manière très-approchée, l'ellipse entière à l'aide d'un petit arc. C'est le but de la méthode de M. Gauss, qui ne suppose que trois observations: elle consiste dans une approximation successive, mais très-rapide. Quoique le livre de M. Gauss soit entre les mains de tous les astronomes, et que M. Delambre ait donné une explication détaillée de cette méthode et de plusieurs autres (1); je crois que mes lecteurs me sauront gré de l'abrégé de cette méthode, que je vais leur donner.

§. 171. Les quantités données sont:

1. les *tems* moyens des trois observations, T, T′, T″, et les intervalles, $T' - T = t''$, $T'' - T = t'$, $T'' - T' = t' - t'' = t$;
2. les *longitudes géocentriques* de la planète sur l'écliptique, α, α', α'';
3. ses *latitudes géocentriques*, β, β', β'';
4. les *distances de la terre* au soleil, V, V′, V″;
5. les *longitudes héliocentriques de la terre*, $l = 180° + \odot$, $l' = 180° + \odot'$, $l'' = 180° + \odot''$.

Si (*Fig.* 38.) S est le soleil, P la terre, D le lieu de la planète, réduit à l'écliptique, on tirera de α, l'*élongation* $SPD = \pm(\odot - \alpha)$, et l'angle adjacent $SPF = 180° \mp (\odot - \alpha) = \mp(l - \alpha)$. On connaît donc encore

6. les complémens de l'*élongation*, $\eta = \pm(l - \alpha)$, $\eta' = \pm(l' - \alpha')$, $\eta'' = \pm(l'' - \alpha'')$.

Les quantités qu'il s'agit de trouver, pour déterminer les élémens de l'orbite, sont:

7. les *longitudes héliocentriques* de la planète, L, L′, L″,
8. les *latitudes héliocentriques*, λ, λ', λ'',
9. les *rayons vecteurs*, v, v', v''.

Imaginons que la *Fig.* 47. représente une partie de la surface d'une sphère, dont le soleil occupe le centre, ensorte que tous les plans qui passent par le soleil, formeront des arcs d'un grand cercle. Soit $\Upsilon AA''$ l'écliptique suivant l'ordre des signes, soient AB, A′B′, A″B″, les plans passans par le soleil, la terre, et la planète, lors des trois observations. Cela posé, les communes sections de ces grands cercles et de l'écliptique, A, A′, A″, seront les lieux héliocentriques de la terre; et les lieux géocentriques de la planète,

(1) *Astron. Théor. et Prat. T. II. pag.* 561. *suiv.*

B, B′, B″, seront situés dans les cercles AB, A′B′, A″B″, aussi bien que les lieux héliocentriques C, C′, C″: les premiers étant sur la prolongation de la droite PD (*Fig.* 38.), les derniers sur SD. Les trois points C, C′, C″ (*Fig.* 47.), sont dans le plan de l'orbite, et par conséquent dans un grand cercle qui coupera l'écliptique au noeud ascendant J; mais les points B, B′, B″, ne sont pas dans un grand cercle, parceque la planète et la terre ne se meuvent pas dans le même plan. Soit donc MNBB″, le grand cercle mené par B, B″, qui coupe le grand cercle A′B′ en b', et soient D″, D′, D, les communes sections des grands cercles AB et A′B′, AB et A″B″, A′B′ et A″B″. Ayant abaissé les perpendiculaires Ba, B′a', B″a'', Cx, C′x', C″x'', $b'\beta'$, sur l'écliptique, on aura

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} Ba=\beta,\ B'a'=\beta',\ B''a''=\beta'',\ Cx=\lambda,\ C'x'=\lambda',\ C''x''=\lambda'', \\ AA'=l'-l,\ AA''=l''-l,\ A'A''=l''-l',\ Aa=a-l=\mp\eta, \\ A'a'=\eta',\ A''a''=\eta'',\ Ax=L-l,\ A'x'=L'-l',\ A''x''=L''-l'. \end{cases}$$

Connaissant dans le triangle sphérique ABa, rectangle en a, les deux côtés η, β, on peut calculer l'angle BAa, et l'hypothénuse AB; il en est de même des triangles A′B′a', A″B″a'': on aura donc

$$(2)\ldots\ldots BAa=\delta,\ AB=d,\ B'A'a'=\delta',\ A'B'=d',\ B''A''a''=\delta'',\ A''B''=d''.$$

Maintenant on connaît dans chacun des triangles AD″A′, AD′A″, A′DA″, un côté AA′, AA″, A′A″, et les deux angles adjacens, δ et $180°-\delta'$, δ et $180°-\delta''$, δ' et $180°-\delta''$, d'où l'on tire les trois autres parties de ces triangles, savoir les côtés AD″, A′D″, AD′, A″D′, A′D, A″D, et les angles D″, D′, D. Au moyen de ces trois angles, on trouvera dans le triangle D″DD′, les trois côtés: on connaît donc aussi

$$(3)\ldots\ldots\begin{cases} BD''='b=AD''-d,\ BD'='b=AD'-d,\ B'D''='b'=A'D''-d', \\ B'D=b'=A'D-d',\ B''D'='b''=A''D'-d'',\ B''D=b''=A''D-d''. \end{cases}$$

Etant donnés, dans le triangle BD′B″, les côtés $'b$, $'b''$, et l'angle compris D′, on calculera l'angle B″; alors connaissant dans le triangle B″Db', les angles B″, D, et le côté intercepté, on trouvera

$$(4)\ldots\ldots D b',\ \text{et}\ B'b'=Db'-b'=\sigma'.$$

Toutes les quantités qu'on vient de trouver, (1. 2. 3. 4. 5. 6. (2) (3) (4)), sont exactes: le reste du calcul se réduit principalement, à trouver le petit arc B′C′$=z'$, qui est la base de cette méthode.

§. 172. Si dans l'équation identique

$$\sin x \sin(z-y) + \sin z \sin(y-x) = \sin y \sin(z-x),$$

on substitue $x = NC$, $y = NC'$, $z = NC''$, et les valeurs

$$\sin x = \frac{\sin B \sin BC}{\sin N}, \quad \sin y = \frac{\sin b' \sin b'C'}{\sin N}, \quad \sin z = \frac{\sin B'' \sin B''C''}{\sin N},$$

fournies par les triangles BNC, $b'NC'$, $B''NC''$, il viendra l'équation

(A)....$o = \sin B \sin BC \sin C'C'' + \sin B'' \sin B''C'' \sin CC' - \sin b' \sin b'C' \sin CC''$.

Soit (*Fig.* 48.) S le soleil, et C, C', C'', les trois lieux héliocentriques de la planète, et qu'on nomme les surfaces des triangles rectilignes

$$(5)\ldots\ldots CSC' = \frac{n''}{2}, \quad CSC'' = \frac{n'}{2}, \quad C'SC'' = \frac{n}{2}.$$

Cela posé on aura $SC = v$, $SC' = v'$, $SC'' = v''$ (§. 171. n. 9.), donc $n'' = vv' \sin CSC'$, l'angle CSC' étant égal à l'arc CC' (*Fig.* 47.). Ainsi on a

$$(6)\ldots\ldots \sin CC' = \frac{n''}{vv'}, \quad \sin CC'' = \frac{n'}{vv''}, \quad \sin C'C'' = \frac{n}{v'v''}.$$

En substituant ces valeurs et

$$(7)\ldots\ldots BC = z,\ B'C' = z',\ B''C'' = z'',\ b'C' = z' - \sigma',$$ en (A), on aura

$$(B)\ldots\ldots o = \frac{n \sin B \sin z}{v'v''} + \frac{n'' \sin B'' \sin z''}{v\,v'} - \frac{n' \sin b' \sin(z'-\sigma')}{v\,v''}.$$

Or on a (*Fig.* 38.) $SD \sin D = SP \sin P$, l'angle à la planète D étant la différence des lieux héliocentrique et géocentrique de la planète, $BC = z$ (*Fig.* 47.), et l'angle à la terre P étant le supplément de la différence entre le lieu héliocentrique de la terre et le lieu géocentrique de la planète, ou de $AB = d$: on a donc

$$(8)\ldots\ldots v \sin z = V \sin d,\ v' \sin z' = V' \sin d',\ v'' \sin z'' = V'' \sin d''.$$

On a de plus dans les triangles $BD'B''$, $b'DB''$,

$$\frac{\sin B}{\sin B''} = \frac{\sin B''D'}{\sin B\,D'}, \quad \frac{\sin b'}{\sin B''} = \frac{\sin B''D}{\sin b'D}.$$

En substituant ces valeurs ainsi que (8), dans l'équation (B), après l'avoir multipliée par $\frac{v\,v'}{n \sin B'' \sin z''}$, il viendra

$$(C)\ldots\ldots o = \frac{V \sin d \sin B''D'}{V'' \sin d'' \sin B\,D'} + \frac{n''}{n} - \frac{n'}{n} \cdot \frac{V' \sin d' \sin B''D \sin(z'-\sigma')}{V'' \sin d'' \sin b'D \sin z'},$$

équation qui renferme trois inconnues, z', $\frac{n'}{n} = \nu$, $\frac{n''}{n} = \nu'$. Nommant donc les quantités connues

$$(9)\ldots\ldots \frac{V \sin d \sin B''D'}{V'' \sin d'' \sin BD'} = A, \quad \frac{V' \sin d' \sin B''D}{V'' \sin d'' \sin b'D} = B,$$

on aura $o = A + \nu' - B.\nu.\frac{\sin(z'-\sigma')}{\sin z'}$, ou en substituant (8) $\sin z' = \frac{V' \sin d'}{v'}$,

$$(D)\ldots\ldots v'v' = \frac{(v''+A)\,V'\sin d'}{B\sin(z'-\sigma')}.$$

En nommant la surface du triangle formé par les trois cordes, (*Fig.* 48.) $CC'C'' = \frac{x}{2}$, on a

$$(10)\ldots\ldots x = n + n'' - n';$$

et en nommant

10. les longitudes héliocentriques sur l'orbite, C, C', C'',
11. les anomalies vraies comptées du périhélie, u, u', u'',
12. la longitude du périhélie, Π,
13. le grand axe, le petit axe, et le paramètre, $2a$, $2b$, $2p$,
14. l'excentricité, γ;

on aura $u = C - \Pi$, et (§. 129. (7)), $v(1+\gamma\cos u) = a(1-\gamma^2) = \frac{b^2}{a} = p$; ce qui donne ces trois équations

$$(11)\ldots\ldots \frac{p}{v} - 1 = \gamma\cos u,\quad \frac{p}{v'} - 1 = \gamma\cos u',\quad \frac{p}{v''} - 1 = \gamma\cos u''.$$

En ajoutant la première, multipliée par $\sin(u''-u')$, avec la troisième, multipliée par $\sin(u'-u)$, et en ôtant la seconde, multipliée par $\sin(u''-u)$, il viendra

$$\left(\frac{p}{v} - 1\right)\sin(u''-u') + \left(\frac{p}{v''} - 1\right)\sin(u'-u) - \left(\frac{p}{v'} - 1\right)\sin(u''-u) =$$
$$\gamma\cos u\sin(u''-u') + \gamma\cos u''\sin(u'-u) - \gamma\cos u'\sin(u''-u);$$

où ayant substitué $\cos u\sin(u''-u') + \cos u''\sin(u'-u) = \cos u'\sin(u''-u)$, on aura

$$(E)\ldots\frac{p}{v}\sin(u''-u') + \frac{p}{v''}\sin(u'-u) - \frac{p}{v'}\sin(u''-u) = \sin(u''-u') + \sin(u'-u) - \sin(u''-u).$$

En faisant pour abréger,

$$\frac{u'-u}{2} = \varepsilon,\quad \frac{u''-u}{2} = \zeta,\quad \frac{u''-u'}{2} = \theta,\quad \text{donc } \zeta = \varepsilon + \theta,$$

on aura par les formules trigonométriques,

$$\sin(u''-u') + \sin(u'-u) - \sin(u''-u) = \sin 2\theta + \sin 2\varepsilon - \sin 2(\varepsilon+\theta) =$$
$$2\sin(\varepsilon+\theta)(\cos(\varepsilon-\theta) - \cos(\varepsilon+\theta)) = 4\sin\zeta\sin\varepsilon\sin\theta =$$
$$4\sin\frac{u'-u}{2}\cdot\sin\frac{u''-u}{2}\cdot\sin\frac{u''-u'}{2}.$$

En multipliant donc (E) par $vv'v''$, il viendra

$$(F)\ldots\ldots p\{v'v''\sin(u''-u') + vv'\sin(u'-u) - vv''\sin(u''-u)\} =$$
$$4vv'v''\cdot\sin\frac{u'-u}{2}\cdot\sin\frac{u''-u}{2}\cdot\sin\frac{u''-u'}{2}.$$

Mais on a (*Fig.* 48.) $vv'\sin(u'-u) = vv'\sin CSC' = n''$ (6), $vv''\sin(u''-u) = n'$,

$v'v''\sin(u''-u')=n$: en substituant donc en (F), CC', CC'', C'C'', au lieu de $u'-u$, $u''-u$, $u''-u'$, elle donnera

$$p=\frac{4vv'v''.\sin\frac{1}{2}CC'.\sin\frac{1}{2}CC''.\sin\frac{1}{2}C'C''}{n+n''-n'},\text{ et par (10),}$$

$$p=\frac{vv'v''.\sin CC'.\sin CC''.\sin C'C''}{2x.\cos\frac{1}{2}CC'.\cos\frac{1}{2}CC''.\cos\frac{1}{2}C'C''},\text{ et en substituant (6),}$$

$$(G)\ldots\ldots x=\frac{nn'n''}{2pvv'v''.\cos\frac{1}{2}CC'.\cos\frac{1}{2}CC''.\cos\frac{1}{2}C'C''}.$$

§. 173. Comme les observations sont supposées peu éloignées l'une de l'autre, on peut faire, pour une première approximation, $\cos\frac{CC'}{2}=\cos\frac{CC''}{2}=\cos\frac{C'C''}{2}=1$, et $vv'v''=v'^3$, parceque v' a une moyenne valeur entre v et v''. Alors l'équation (G) deviendra

$$(H)\ldots\ldots x=\frac{nn'n''}{2pv'^3}.$$

En nommant

15. la durée d'une révolution de la planète $=\Theta$,
16. la surface entière de son ellipse $=E$,
17. le secteur elliptique décrit dans le tems $t=s$,
18. la durée de l'année $=m$,
19. le moyen mouvement diurne du soleil, en parties du rayon $=c$,

et en exprimant le tems t en jours, on aura

$$(12)\ldots\ldots c=\frac{2\pi}{m}=3548,1676.\sin 1'',\quad s=\frac{t}{\Theta}E=\frac{t}{\Theta}\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p},$$

et en vertu de la troisième loi de Kepler,

$$(13)\ldots\ldots a^{\frac{3}{2}}=\frac{\Theta}{m}=\frac{\Theta c}{2\pi},\text{ donc }s=\frac{c}{2}t\sqrt{p}.$$

Les trois secteurs elliptiques (*Fig.* 48.) sont donc

$$CSC'=s''=\frac{ct''}{2}\sqrt{p},\quad CSC''=s'=\frac{ct'}{2}\sqrt{p},\quad C'SC''=s=\frac{ct}{2}\sqrt{p}.$$

Comme l'arc CC'' est supposé fort petit, ces secteurs ne sauraient différer considérablement des triangles rectilignes, $\frac{n''}{2}$, $\frac{n'}{2}$, $\frac{n}{2}$; en faisant donc

$$(14)\ldots\ldots s=\frac{yn}{2},\quad s'=\frac{y'n'}{2},\quad s''=\frac{y''n''}{2},$$

y, y', y'', seront des nombres très-peu différens de l'unité: on aura donc

$$(15)\ldots\ldots ny=ct\sqrt{p},\quad n'y'=ct'\sqrt{p},\quad n''y''=ct''\sqrt{p};$$

d'où l'on tire (§. 172.)

$$(16)\ldots\ldots v'=\frac{n'}{n}=\frac{yt'}{y't},\quad v''=\frac{n''}{n}=\frac{yt''}{y''t}.$$

En supposant encore, que $n'y'$ est la moyenne proportionnelle entre ny et $n''y''$, on aura $c^2t'^2p = c^2tt''p$, donc $t'^2 = tt''$, ce qui étant substitué dans l'équation $n'^2y'^2 = c^2t'^2p = nn''yy''$, donne $p = \frac{nn''yy''}{c^2tt''}$. En introduisant cette valeur dans l'équation (H), il viendra

$$(J) \ldots\ldots x = \frac{n'c^2tt''}{2v'^3 \cdot yy''}.$$

Maintenant on peut faire, pour une première approximation, $y = y'' = 1$, ce qui donnera, par l'équation (10),

$$\frac{x}{n} = \frac{v'c^2tt''}{2v'^3} = 1 + v'' - v', \text{ d'où l'on tire}$$

$$v' = \frac{2(v''+1)v'^3}{2v'^3 + c^2tt''}, \text{ et } \sqrt{v'} = \frac{2(v''+1)V'^4\sin^4 d'}{(2V'^3\sin^3 d' + c^2tt''\sin^3 z')\sin z'} \text{ (§. 172. (8)).}$$

En substituant cela en (D), on aura

$$2B(v''+1)V'^3\sin^3 d'\sin(z'-\sigma') = (v''+A)\sin z'(2V'^3\sin^3 d' + c^2tt''\sin^3 z'), \text{ ou}$$

$$(K) \ldots\ldots \frac{B(v''+1)}{v''+A}\sin(z'-\sigma') - \sin z' = \frac{c^2tt''\sin^4 z'}{2V'^3\sin^3 d'}.$$

La même supposition, $y = y'' = 1$, donne (16) $v' = \frac{t''}{t}$, de sorte que l'équation (K) ne renferme qu'une inconnue z', et l'on aura

$$(17) \ldots\ldots \frac{c^2tt''\sin^4 z'}{2V'^3\sin^3 d'} = \frac{v''+1}{v''+A}B\sin\sigma'\left\{\sin z'\left(\cot\sigma' - \frac{v''+A}{(v''+1)B\sin\sigma'}\right) - \cos z'\right\}.$$

Ayant donc calculé un angle ω' par la formule

$$(18) \ldots \begin{cases} \cot\omega' = \cot\sigma' - \frac{v''+A}{(v''+1)B\sin\sigma'}, \text{ et en faisant pour abréger,} \\ \frac{(v''+A)c^2tt''\sin\omega'}{2(v''+1)BV'^3\sin^3 d'\sin\sigma'} = Q, \ z' \text{ sera donné par l'équation} \end{cases}$$

$$(L) \ldots\ldots Q\sin^4 z' = \sin(z'-\omega').$$

Cette équation sera facilement résolue par des tatonnemens. Comme z' est un très-petit arc, on peut d'abord négliger la quatrième puissance de son sinus, ce qui donnera $\sin(z'-\omega) = 0$, ou $z' = \omega'$. En faisant donc $z' = \omega' + \xi'$, on aura à peu près $Q(\sin\omega' + \xi'\cos\omega')^4 = \sin\xi'$, ou

$$Q(\sin^4\omega' + 4\xi'\sin^3\omega'\cos\omega' + 6\xi'^2\sin^2\omega'\cos^2\omega' + \text{cet.}) = \xi' - \frac{\xi'^3}{6} + \text{cet.}$$

On trouvera donc par des approximations successives,

$$\xi' = \frac{Q\sin^4\omega'}{1 - 2Q\sin^2\omega'\sin 2\omega'} = a';$$

et en mettant dans le troisième terme $\xi'^2 = a'^2$, on aura

$$\xi' = \frac{Q\sin^2\omega'(\sin^2\omega' + 6a'^2\cos^2\omega')}{1 - 2Q\sin^2\omega'\sin 2\omega'}, \text{ et ainsi de suite.}$$

On fera peut-être mieux, en donnant à ξ' une valeur de quelques minutes. On calculera $Q \sin^4(\omega' + \xi') = Q'$; on donnera ensuite à ξ' une valeur un peu différente ξ'', et on calculera avec cette nouvelle valeur, $Q \sin^4(\omega' + \xi'') = Q''$. Les deux différences, $Q' - \sin \xi'$, $Q'' - \sin \xi''$, feront voir, comment il faut changer ξ', pour que $Q' - \sin \xi'$ devienne nul, ou $Q \sin^4 z' = \sin(z' - \omega')$.

Ayant ainsi trouvé z', on connaît (§. 171. 172.)

(19)....$b'C' = z' - \sigma'$, $A'C' = d' - z'$, $C'D'' = {}''b' + z'$, $C'D = b' + z'$, $v' = \frac{V' \sin d'}{\sin z'}$.

On trouvera z, z'', v, v'', au moyen des triangles $CD'C''$, $C'DC''$, qui donnent

$$(m)\ldots\ldots \sin CC'' = \frac{\sin D' \sin CD'}{\sin C''}, \quad \sin C'C'' = \frac{\sin D \sin C'D}{\sin C''}, \quad \text{donc}$$

$$\frac{\sin D \sin C'D}{\sin D' \sin CD'} = \frac{\sin C'C''}{\sin CC''} = \frac{nv}{n'v'}\,(6) = \frac{v}{v'v'}, \quad \text{ou}$$

$$(M)\ldots\ldots v = \frac{v'v' \sin D \sin C'D}{\sin D' \sin CD'}.$$

En combinant de la même manière les triangles $CD''C'$, $CD'C''$, on trouvera

$$(N)\ldots\ldots v'' = \frac{v'v' \sin D'' \sin C'D''}{v'' \sin D' \sin C''D'},$$

où CD', $C''D'$, sont encore inconnues. Mais en combinant l'équation (M) avec (8) (§. 172.), on trouvera

$$\frac{V \sin d}{\sin(CD' - {}'b)} = \frac{v'v' \sin D \sin C'D}{\sin D' \sin CD'}, \quad \text{donc} \quad \frac{\sin(CD' - {}'b)}{\sin CD'} = \frac{V \sin d \sin D'}{v'v' \sin D \sin C'D},$$

et $\cot {}'b - \cot CD' = \frac{V \sin d \sin D'}{v'v' \sin D \sin C'D \sin {}'b}$, ce qui donne

(20)..... $\cot CD' = \cot {}'b - \frac{V \sin d \sin D'}{v'v' \sin D \sin C'D \sin {}'b}$, et par l'équation (M), v.

On trouvera de la même manière, au moyen des équations (N) et (8),

(21)..... $\cot C''D' = \cot {}'b'' - \frac{v'' V'' \sin d'' \sin D'}{v'v' \sin D'' \sin C'D'' \sin {}'b''}$, et par (N), v''.

Cela donne

$$(22)\ldots\ldots \sin z = \frac{V \sin d}{v}, \quad \sin z'' = \frac{V'' \sin d''}{v}, \quad AC = d - z,$$
$$A''C'' = d'' - z'', \quad CD'' = {}''b + z, \quad C''D = b'' + z''.$$

Maintenant on connaît dans les triangles $CD''C'$, $CD'C''$, $C'DC''$, les angles D'', D', D, et les deux côtés adjacens, d'où l'on trouve CC', CC'', $C'C''$. On connaît donc, outre les quantités précédentes,

(23)... les trois rayons vecteurs, v, v', v'',
les angles de commutation, AC, $A'C'$, $A''C''$,
les angles décrits autour du soleil, $CC' = u' - u$, $CC'' = u'' - u$, $C'C'' = u'' - u'$.

Mais ces quantités sont trouvées par la supposition que $y = y' = y'' = 1$: il faut donc les corriger par le moyen des véritables valeurs de y, y', y''.

§. 174. En nommant

les anomalies moyennes et excentriques, μ, μ', μ'', et x, x', x'', on aura

$$\mu' - \mu = \frac{t''}{\Theta} 2\pi = \frac{c\,t''}{a^{\frac{3}{2}}} \text{ (§. 173. (13))}.$$

Mais (§. 128.)

$$(24) \ldots\ldots v = a(1 - \gamma \cos x), \quad \mu = x - \gamma \sin x, \text{ donc}$$

$$\frac{c\,t''}{a^{\frac{3}{2}}} = (x' - x) - \gamma(\sin x' - \sin x), \text{ ou en faisant } \frac{x' - x}{2} = r,$$

$$(a) \ldots\ldots \frac{c\,t''}{a^{\frac{3}{2}}} = 2r - 2\gamma \sin r \cdot \cos \frac{x' + x}{2}.$$

On a de plus (§. 128.)

$$(25) \ldots\ldots \cos u = \frac{\cos x - \gamma}{1 - \gamma \cos x}, \text{ d'où l'on tire}$$

$$\cos^2 \frac{u}{2} = \frac{(1-\gamma)(1+\cos x)}{2(1 - \gamma \cos x)}, \qquad \sin^2 \frac{u}{2} = \frac{(1+\gamma)(1-\cos x)}{2(1 - \gamma \cos x)}, \text{ donc}$$

$$\cos \frac{u}{2} = \cos \frac{x}{2} \sqrt{\frac{1-\gamma}{1-\gamma\cos x}}, \quad \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{x}{2} \sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma\cos x}}, \text{ et en substituant}$$

$$1 - \gamma \cos x = \frac{v}{a},$$

$$\cos \frac{u}{2} = \cos \frac{x}{2} \sqrt{\frac{a(1-\gamma)}{v}}, \quad \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{x}{2} \sqrt{\frac{a(1+\gamma)}{v}},$$

$$\cos \frac{u'}{2} = \cos \frac{x'}{2} \sqrt{\frac{a(1-\gamma)}{v'}}, \quad \sin \frac{u'}{2} = \sin \frac{x'}{2} \sqrt{\frac{a(1+\gamma)}{v'}}.$$

Il en suit

$$\cos \frac{u' - u}{2} = \frac{a(1-\gamma)\cos \frac{x'}{2} \cos \frac{x}{2} + a(1+\gamma) \sin \frac{x'}{2} \sin \frac{x}{2}}{\sqrt{v\,v'}},$$

$$\sin \frac{u' - u}{2} = a\left(\sin \frac{x'}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{x'}{2} \sin \frac{x}{2}\right) \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{v\,v'}},$$

ou en faisant $\frac{u' - u}{2} = q$,

$$(b) \ldots \cos q = \frac{a\left(\cos r - \gamma \cos \frac{x' + x}{2}\right)}{\sqrt{v\,v'}}, \quad (c) \ldots \sin q = a \sin r \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{v\,v'}}.$$

Il suit de (b), $\gamma \cos \frac{x' + x}{2} = \cos r - \frac{\sqrt{v\,v'}}{a} \cos q$; ce qui étant substitué en (a), donne

$$\frac{c\,t''}{a^{\frac{3}{2}}} = 2r - \sin 2r + \frac{2\sqrt{v\,v'}}{a}\sin r\cos q.$$

Mais (24)... $v + v' = a\{2 - \gamma(\cos x' + \cos x)\} = 2a\left(1 - \gamma\cos r\cos\frac{x'+x}{2}\right) =$

$2a\left\{\sin^2 r + \cos r\left(\cos r - \gamma\cos\frac{x'+x}{2}\right)\right\} = 2a\sin^2 r + 2\cos r\cos q\sqrt{v\,v'}$, donc

$$(n)\ldots\ldots a = \frac{v'+v-2\cos q\cos r.\sqrt{v\,v'}}{2\sin^2 r} = \frac{2\cos q\sqrt{v\,v'}}{2\sin^2 r}\left(\frac{v+v'}{2\cos q\sqrt{v\,v'}} - \cos r\right),$$

ou en faisant

$$(26)\ldots\ldots \frac{\sqrt{\frac{v'}{v}} + \sqrt{\frac{v}{v'}}}{2\cos q} = 1 + 2l, \text{ et } l + \sin^2\frac{r}{2} = k,$$

$$(27)\ldots\ldots a = \frac{\cos q\sqrt{v\,v'}}{\sin^2 r}(1 + 2l - \cos r) = \frac{2\cos q\sqrt{v\,v'}}{\sin^2 r}\,k.$$

En substituant cela en (a), et faisant

$$(28)\ldots\ldots 2r - \sin 2r = X,\ \frac{c\,t''}{(2\cos q\sqrt{v\,v'})^{\frac{3}{2}}} = m, \text{ on aura}$$

$$\frac{c\,t''\sin^3 r}{(2k\cos q\sqrt{v\,v'})^{\frac{3}{2}}} = X + \frac{\sin^3 r}{k}, \text{ ou}$$

$$(d)\ldots\ldots m = \frac{X\,k^{\frac{3}{2}}}{\sin^3 r} + \sqrt{k}.$$

Il s'agit de trouver $y'' = \frac{c\,t''\sqrt{p}}{n''}$ (§. 173. (15)) $= \frac{c\,t''\sqrt{p}}{v\,v'\sin(u'-u)}$ (§. 172. (6)) $=$

$\frac{c\,t''\sqrt{a(1-\gamma^2)}}{2v\,v'\sin q\cos q} = \frac{c\,t''}{2\sin r\cos q\sqrt{a\,v\,v'}}$ (par (c)). En substituant (27), on aura

$(29)\ldots. y'' = \frac{c\,t''}{(2\cos q.\sqrt{v\,v'})^{\frac{3}{2}}.\sqrt{k}} = \frac{m}{\sqrt{k}}$, d'où l'on tire par (d), $y'' - 1 = \frac{X\,k}{\sin^3 r}$, donc

$$(e)\ldots. y''^2(y'' - 1) = \frac{m^2 X}{\sin^3 r},$$

X, et r, renfermant les angles x', x, qu'il faut éliminer, ce qui se fera le plus aisément, en développant $\frac{X}{\sin^3 r}$ suivant les puissances de $\sin\frac{r}{2} = \varrho$.

La série connue, $\Phi = \sin\Phi + \frac{\sin^3\Phi}{2.3} + \frac{3\sin^5\Phi}{2.4.5} +$ cet. donnera, en mettant $x' - x = 2r$ à la place de Φ,

$$X = \frac{2^3.\sin^3 r.\cos^3 r}{2.3} + \frac{3.2^6\sin^6 r.\cos^5 r}{2.4.5} + \frac{5.2^7.\sin^7 r.\cos^7 r}{2^4.7} + \text{cet.} =$$

$$\frac{2^2.\sin^3 r}{3}(1 - \sin^2 r)^{\frac{3}{2}} + \frac{2^2.3.\sin^6 r}{5}(1 - \sin^2 r)^{\frac{5}{2}} + \frac{2^3.5.\sin^7 r}{7}(1 - \sin^2 r)^{\frac{7}{2}} + \text{cet.} =$$

$$\frac{2^4}{3}\varrho^3\cos\frac{r}{2}\left(1-4\varrho^2\cos^2\frac{r}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2^7.3}{5}\varrho^5\cos^5\frac{r}{2}\left(1-4\varrho^2\cos^2\frac{r}{2}\right)^{\frac{5}{2}}+\text{cet.}=$$

$$\frac{2^5}{3}\varrho^3(1-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}(1-4\varrho^2+4\varrho^4)^{\frac{3}{2}}+\frac{2^7.3}{5}\varrho^5(1-\varrho^2)^{\frac{5}{2}}(1-4\varrho^2+4\varrho^4)^{\frac{5}{2}}+\text{cet.}$$

En développant les puissances des binomes, $1-\varrho^2$ et $1-4\varrho^2+4\varrho^4$,

$$(1-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}\varrho^2+\frac{3}{8}\varrho^4+\frac{1}{16}\varrho^6+\text{cet.}$$

$$(1-\varrho^2)^{\frac{5}{2}}=1-\frac{5}{2}\varrho^2+\frac{15}{8}\varrho^4+\text{cet.}\qquad(1-\varrho^2)^{\frac{7}{2}}=1-\frac{7}{2}\varrho^2+\text{cet.}$$

et ainsi de suite, on trouvera

$$X=\frac{32}{3}\varrho^3-\frac{16}{5}\varrho^5-\frac{4}{7}\varrho^7-\frac{2}{9}\varrho^9-\text{cet.}$$

et $\sin^3 r=2^3\varrho^3(1-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}=8\varrho^3-12\varrho^5+3\varrho^7+\frac{1}{2}\varrho^9+\text{cet.}$ donc

$$\frac{X}{\sin^3 r}=\frac{\frac{32}{3}-\frac{16}{5}\varrho^2-\frac{4}{7}\varrho^4-\frac{2}{9}\varrho^6-\ldots.}{8-12\varrho^2+3\varrho^4+\frac{1}{2}\varrho^6+\ldots.}=\frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{9}{10}\varrho^2+\frac{9\cdot\varrho^4}{175}+\frac{26\,\varrho^6}{875}+\text{cet.}},$$

ou en faisant (30)..... $\frac{2.\varrho^4}{35}+\frac{52.\varrho^6}{1575}+\text{cet.}=\xi$,

$$\frac{X}{\sin^3 r}=\frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{9}{10}(\varrho^2-\xi)};$$

ce qui étant substitué en (e), donnera

$$y''^2(y''-1)=\frac{m^2}{\frac{3}{4}-\frac{9}{10}\varrho^2+\frac{9}{10}\xi}.$$

Mais $\varrho^2=\sin^2\frac{r}{2}=k-l$ (26) $=\frac{m^2}{y''^2}-l$ (29), d'où l'on tire

$$y''^2(y''-1)\left(\frac{3}{4}-\frac{9}{10}\cdot\frac{m^2}{y''^2}+\frac{9}{10}l+\frac{9}{10}\xi\right)=m^2,$$

$$y''^2(y''-1)\left(\frac{3}{4}+\frac{9}{10}l+\frac{9}{10}\xi\right)=\frac{m^2}{10}(1+9y''),\text{ donc}$$

$$\frac{9y''^2(y''-1)}{1+9y''}=\frac{m^2}{\frac{6}{5}+l+\xi}.$$

En faisant donc (31)..... $\frac{m^2}{\frac{6}{5}+l}=h$, $\frac{m^2}{\frac{6}{5}+l+\xi}=h'$,

y'' sera donné par cette équation du troisième degré,

$$(f).....0=y''^3-y''^2-h'y''-\frac{h'}{9}.$$

Pour faciliter le calcul, on mettra, pour une première approximation, $h=\frac{m^2}{\frac{6}{5}+l}$ au lieu de h', et l'on calculera l'angle Φ, dont la tangente $=\left(\frac{v'}{v}\right)^{\frac{1}{2}}$. Alors, en faisant $\Phi=45°+\omega$, ω sera un fort petit angle, parceque v, v', sont

peu différens l'un de l'autre; et l'on aura $\sqrt{\frac{v'}{v}} = \tang^2 \Phi$, $\sqrt{\frac{v}{v'}} = \cot^2 \Phi$,

$$\sqrt{\frac{v'}{v}} + \sqrt{\frac{v}{v'}} = (\tang \Phi - \cot \Phi)^2 + 2 = \left(\frac{\sin(\Phi - (90° - \Phi))}{\sin \Phi \cos \Phi}\right)^2 + 2 = \frac{4 \cos^2 2\Phi}{\sin^2 2\Phi} + 2 =$$

$4 \tang^2 2\omega + 2$; ce qui donne (26), $1 + 2l = \frac{2 \tang^2 2\omega + 1}{\cos q}$, $2l = \frac{2 \tang^2 2\omega + 2 \sin^2 \frac{q}{2}}{\cos q}$.

La correction y'' est donc trouvée par les opérations suivantes. Après avoir trouvé, suivant les formules du §. 173, les rayons vecteurs v, v', et l'angle compris $u' - u$, qui est parcouru dans le tems donné t'', on calculera

1) $\tang(45° + \omega) = \left(\frac{v'}{v}\right)^{\frac{1}{4}}$, 2) $l = \frac{\tg^2 2\omega + \sin^2 \frac{u' - u}{4}}{\cos \frac{u' - u}{2}}$, 3) $m^2 = \frac{c^2 t''^2}{8 (vv')^{\frac{3}{2}} \cos^3 \frac{u' - u}{2}}$,

4) $h = \frac{m^2}{\frac{2}{6} + l}$, 5) y'' par la solution de l'équation, $0 = y''^3 - y''^2 - hy'' - \frac{h}{9}$,

6) $\varrho^2 = \frac{m^2}{y''^2} - l$, 7) $\xi = \frac{2}{35} \varrho^4 + \frac{52 . \varrho^6}{1575}$, 8) $h' = \frac{m^2}{\frac{2}{6} + l + \xi}$, 9) y'' plus exactement par l'équation $0 = y''^3 - y''^2 - h'y'' - \frac{h'}{9}$. Le plus souvent on trouvera ξ si petit que les calculs 6) 7) 8) 9) sont inutiles.

§. 175. En combinant la troisième observation avec la première et la seconde, ou ce qui revient au même, au moyen des valeurs, v, v'', $u'' - u$, et v', v'', $u'' - u'$, on trouvera de la même manière y' et y: après quoi on répètera le calcul du §. 173. en se servant des valeurs suivantes plus exactes:

$$(16) \ldots\ldots \nu' = \frac{y\,t'}{y'\,t}, \quad \nu'' = \frac{y\,t''}{y''\,t},$$

$\frac{\sin(z' - \sigma')}{\sin z'} = \frac{A + \nu''}{B \nu'}$ (§. 172. (C)), ou $\cot z' = \cot \sigma' - \frac{A + \nu''}{B \nu' \sin \sigma'}$,

$$(19) \ldots\ldots v' = \frac{V' \sin d'}{\sin z'}, \quad b'C' = z' - \sigma', \quad A'C' = d' - z',$$

$$C'D'' = {}''b' + z'', \quad C'D = b' + z,$$

v, v'', z, z'', au moyen des équations (M) (N) (21) (22),

$u' - u$, $u'' - u$, $u'' - u'$, par les équations (m).

Au moyen de ces nouvelles valeurs de v, v', v'', $u' - u$, $u'' - u$, $u'' - u'$, on calculera pour la seconde fois, suivant le §. 174, y, y', y'', qui serviront à calculer dérechef v, v', v''. Ce calcul doit être répété, jusqu'à ce que y, y', y'', ne changent plus considérablement, ce qui arrivera le plus souvent après la seconde répétition de ce calcul. Alors les valeurs de v, v',

v'', qu'on a trouvées en dernier lieu, sont celles qui satisfont aux trois observations; ce qui suffit, pour déterminer tous les élémens de l'orbite. Mais comme une petite erreur d'observation peut défigurer entièrement les élémens, s'ils sont déterminés par trois observations isolées, peu éloignées l'une de l'autre, c'est-à-dire, si l'ellipse entière est déterminée à l'aide d'un très-petit arc; les élémens qu'on a calculés sur trois observations, doivent subir un examen rigoureux, ce qui peut se faire de deux manières: ou l'on calculera suivant les préceptes précédens, les rayons vecteurs v, v', v'', et les élémens, sur un grand nombre d'observations, faites dans toutes les parties de l'orbite, en combinant pour chaque calcul, trois qui sont peu éloignées l'une de l'autre, et l'on prendra le milieu de tous ces élémens; ou l'on se servira des élémens, trouvés par trois observations, pour calculer les lieux de la planète pour une autre époque, et on les comparera avec les observations, faites à la même époque. L'une et l'autre de ces méthodes suppose, qu'on peut déduire les élémens de trois observations, peu éloignées l'une de l'autre: il nous reste donc à donner la solution de ce problème.

§. 176. Les quantités, conclues de trois observations, par les opérations précédentes, sont

$$v,\ v',\ v'',\ u'-u,\ u''-u,\ u''-u',\ y'',\ y',\ y,\ m,\ (\S.\ 174.\ (3)),\ \text{et}$$
$$\varrho = \sin\frac{x'-x}{4}\ (\S.\ 174.\ (6)),\quad \text{donc aussi}\ \frac{x'-x}{2}.$$

On en tirera (§. 174. (27)) $a = \frac{2k\cos q}{\sin^2 r}\sqrt{v'v}$, et (29) $k = \frac{m^2}{y''^2}$, donc (28)

$$(g)\ldots\ldots a = \frac{c^2 t''^2}{4y''^2 vv' \sin^2\frac{x'-x}{2}\cdot\cos^2\frac{u'-u}{2}}.$$

Mais on a par (c), $a\sqrt{(1-\gamma^2)} = \frac{\sin q\sqrt{vv'}}{\sin r}$, donc

$$(h)\ldots\ldots b = \frac{\sin\frac{u'-u}{2}}{\sin\frac{x'-x}{2}}\cdot\sqrt{v\,v'}.$$

En faisant $\gamma = \sin\varepsilon$, on aura $\sqrt{(1-\gamma^2)} = \cos\varepsilon$, donc

$$(i)\ldots\ldots \cos\varepsilon = \frac{b}{a},\quad \text{ou}\ \tang^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon} = \frac{a-b}{a+b},$$

ce qui donne ε, et $\gamma = \sin\varepsilon$, partant

$$(k)\ldots\ldots p=\frac{b^2}{a}=b\cos\varepsilon=a\cos^2\varepsilon.$$

Pour trouver le périhélie Π, on a besoin des anomalies u, u', u'', dont on ne connaît que les différences; il suffira donc, de trouver la somme de deux anomalies. L'équation (§. 129. (7)) $v=\frac{a(1-\gamma^2)}{1+\gamma\cos u}=\frac{p}{1+\gamma\cos u}$, donne

$$\frac{v'-v}{vv'}=\frac{\gamma(\cos u-\cos u')}{p}=\frac{2\gamma}{p}\sin\frac{u'+u}{2}\sin\frac{u'-u}{2},\text{ et}$$

$$\frac{v'+v}{vv'}=\frac{2+\gamma(\cos u'+\cos u)}{p},\text{ ou }\frac{v'+v}{vv'}-\frac{2}{p}=\frac{2\gamma}{p}\cos\frac{u'+u}{2}\cos\frac{u'-u}{2},\text{ d'où l'on tire}$$

$$\text{tang}\frac{u'+u}{2}.\text{tang}\frac{u'-u}{2}=\frac{v'-v}{v'+v-\frac{2avv'}{b^2}}(k)=\frac{v'-v}{v'+v-2a\left(\frac{\sin\frac{x'-x}{2}}{\sin\frac{u'-u}{2}}\right)^2}(h),\text{ donc}$$

$$\text{tang}\frac{u'+u}{2}=\frac{(v'-v)\sin q\cos q}{(v'+v)\sin^2 q-2a\sin^2 r},\text{ et en substituant }(n)\text{ (§. 174.),}$$

$$\text{tang}\frac{u'+u}{2}=\frac{(v'-v)\sin q\cos q}{2\cos q\cos r.\sqrt{vv'-(v+v')\cos^2 q}},\text{ ou}$$

$$(l)\ldots\ldots\text{tang}\frac{u'+u}{2}=\frac{\frac{v'-v}{v'+v}\text{ tang}\frac{u'-u}{2}}{\frac{2\sqrt{vv'}}{v'+v}\cdot\frac{\cos\frac{x'-x}{2}}{\cos\frac{u'-u}{2}}-1};$$

ce qui donne $u=\left(\frac{u'+u}{2}\right)-\left(\frac{u'-u}{2}\right)$.

En nommant C, C', C'', les trois longitudes héliocentriques sur l'orbite, on aura $\Pi=C-u$; mais pour trouver C, il faut connaître le lieu des noeuds et l'inclinaison.

§. 177. Dans le triangle rectangle AxC (*Fig.* 47.) on connaît l'hypothénuse $AC=d-z$ (22), et l'angle $CAx=\delta$ (2), d'où l'on tirera $Cx=\lambda$ et $Ax=L-l$ (1), ce qui donne $L=Ax+l$ (§. 171. n. 5.). On a donc, pour les trois observations, trois latitudes et longitudes héliocentriques, λ, λ', λ'', et L, L', L''. Soit (*Fig.* 8.) T le soleil, tbI l'écliptique, tfG l'orbite de la planète, f, G, ses deux lieux héliocentriques, conséquemment $fb=\lambda$, GI$=\lambda'$, bI$=L'-L=A$. En nommant la longitude du noeud ascendant $t=J$, l'inclinaison ItG$=i$, et l'arc tI$=\Phi$, on aura

$\text{tang } i = \frac{\text{tang } \lambda'}{\sin \Phi} = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin(\Phi - A)}$, donc $\text{tang } \lambda = \text{tang } \lambda' (\cos A - \sin A \cot \Phi)$,

ou $\text{tang } \Phi = \frac{\text{tang } \lambda' . \sin A}{\text{tg } \lambda' \cos A - \text{tg } \lambda} = \tau$; d'où l'on tire

$$\text{tang } (\Phi - \tfrac{1}{2} A) = \frac{\tau - \text{tg } \frac{1}{2} A}{1 + \tau \text{ tg } \frac{1}{2} A} = \frac{\text{tg } \lambda' \sin A - \text{tg } \lambda' \cos A \text{ tg } \frac{1}{2} A + \text{tg } \lambda \text{ tg } \frac{1}{2} A}{\text{tg } \lambda' \cos A - \text{tg } \lambda + \text{tg } \lambda' \sin A \text{ tg } \frac{1}{2} A}.$$

En substituant $\text{tang } \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$, d'où il suit $\sin A \text{ tg } \frac{1}{2} A = 1 - \cos A$, $\sin A - \cos A \text{ tg } \frac{1}{2} A = \text{tang } \frac{1}{2} A$, on aura

$$\text{tang } (\Phi - \tfrac{1}{2} A) = \frac{\text{tg } \lambda' + \text{tg } \lambda}{\text{tg } \lambda' - \text{tg } \lambda} \text{ tang } \tfrac{1}{2} A, \text{ ou à cause de } \Phi = L' - J,$$

$$(p) \ldots\ldots \text{tang } \left(\frac{L' + L}{2} - J\right) = \frac{\sin(\lambda' + \lambda)}{\sin(\lambda' - \lambda)} \text{ tang } \frac{L' - L}{2};$$

ce qui donne $J = \frac{L' + L}{2} - \left(\frac{L' + L}{2} - J\right)$, et à cause de $\text{tang } i = \frac{\text{tg } \lambda'}{\sin \Phi}$,

$$(q) \ldots\ldots \text{tang } i = \frac{\text{tg } \lambda'}{\sin(L' - J)} = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin(L - J)}.$$

Le même triangle fournit l'équation, $\text{tang } tf = \frac{\text{tg } tb}{\cos t}$, ou

$$(r) \ldots\ldots \text{tang } (C - J) = \frac{\text{tg } (L - J)}{\cos i},$$

ce qui donne $C = (C - J) + J$, et de même C', C'': d'où l'on tire enfin (§. 176.)

$$(s) \ldots\ldots \Pi = C - u = C' - u' = C'' - u''.$$

Ainsi on aura trois déterminations des élémens de l'orbite, par les différentes combinaisons des trois observations, dont celle de la première et de la troisième observation, étant les plus éloignées l'une de l'autre, donnera le résultat le plus sûr.

Le mouvement moyen, ou la durée d'une révolution est donnée par u, suivant la troisième loi de Kepler. Le dernier élément, l'époque, sera tiré de chaque observation calculée, γ et u étant connus. En effet, cela donne (§. 131. (9)) l'anomalie moyenne μ, et la longitude moyenne, ou l'époque $= \mu + \Pi$.

Quand il s'agit de vérifier les élémens par d'autres observations, desquelles on a conclu, par le procédé précédent, les valeurs v, v', v'', u, u', u'', on se servira de ces formules (§. 129. (7)),

$$(t) \ldots\ldots v = \frac{p}{1 + \gamma \cos u}, \quad v' = \frac{p}{1 + \gamma \cos u'}, \quad v'' = \frac{p}{1 + \gamma \cos u''}.$$

Les observations les plus importantes, pour corriger les élémens, sont celles des oppositions. Au moyen de ces observations, et des méthodes exposées dans le *Chap. VIII,* chaque année rendra les élémens plus exacts.

§. 178. Les diamètres des orbites des planètes, connues avant le commencement du siècle présent, sont entre eux à peu près comme les nombres 4, 7, 10, 15, ... 52, 95, 192. Il est impossible, de ne pas y reconnaître un certain ordre, qui sera exprimé assés exactement par la formule, $r = 4 + 3.2^{n-2}$, n étant un nombre entier qui indique la place occupée par la planète, en partant de Mercure. On aura ainsi les distances au soleil, $4, 4+3=7$, $4+3.2=10$, $4+3.4=15$, $4+3.8=28$, $4+3.16=52$, $4+3.32=100$, $4+3.64=196$, $4+3.128+388$, etc. Quoique cette loi ne puisse pas être la véritable, parcequ'elle n'est ni exacte, ni conforme à la simplicité de la nature, et qu'en général on ne conçoit pas qu'elle puisse avoir une cause physique; cependant la lacune entre 15 et 52 est si frappante, que Kepler soupçonna déjà l'existence d'une planète inconnue entre Mars et Jupiter. Le terme 196 ou 192 de la série précédente ayant été rempli par la découverte d'Uranus, il était naturel de chercher une planète, dont la distance au soleil fût à celle de la terre à peu près comme 28 à 10, ou égale à 3. Cependant c'est également à un pur hazard, qu'on doit la première confirmation de ce que les astronomes avaient soupçonné depuis longtems. Une erreur du catalogue de Wollaston, qui avait placé une étoile, où elle ne se trouve pas, engagea M. Piazzi à Palerme, à observer plusieurs jours de suite les petites étoiles qu'il voyait à la place indiquée. Le premier jour de ce siècle, le 1 Janvier 1801, il observa dans le Taureau une petite étoile qui avoit un mouvement rétrograde d'environ 5′ par jour, lequel devenait direct au bout de onze jours. Le petit nombre d'observations que la disparition de la planète dans les rayons du soleil avait permis à M. Piazzi d'en faire, suffisait cependant, pour déterminer l'orbite, par la méthode de M. Gauss, avec tant d'exactitude, qu'on put la retrouver après sa conjonction. On reconnut dans le nouvel astre, la planète supposée entre Mars et Jupiter, et M. Piazzi lui donna, en l'honneur de l'isle de Sicile, le nom de *Cérès* avec son attribut, la faux, ⚳. Cette grande découverte fut encore plus importante par

ses suites: car les astronomes, ayant dirigé leur attention vers cet objet, découvrirent dans l'espace de sept ans, plusieurs autres planètes dans la même zone du système solaire, qu'on avait crue jusqu'alors vide.

Le 28 Mars 1802, M. *Olbers* à Brème aperçut dans une partie de la Vierge, où l'on n'eut jamais observé d'étoiles, un petit astre qui avait un mouvement considérable. Le calcul lui apprit, que c'était une planète, à peu près à la même distance au soleil, que Cérès; et il lui donna le nom de *Pallas*, en la désignant par l'attribut de la Déesse de la sagesse et des combats, la lance, ⚸.

Le 1 Septembre 1804, la troisième planète dans cette partie du système solaire fut découverte par M. *Harding* à Lilienthal, dans les Poissons: on lui a donné le nom de *Junon*, et pour attribut le sceptre étoilé de la reine de l'Olympe, ⚵.

Le 29 Mars 1807, M. *Olbers* découvrit encore une planète dans la même constellation, et dans la même partie du système solaire. M. Gauss lui a donné le nom de *Vesta*, et l'a distinguée par le symbole de la mère des Dieux, l'autel sur lequel brule le feu sacré, ⚶. Cette planète, le plus petit de tous les corps célestes que nous connaissons, se distingue par l'éclat de sa lumière, et par l'atmosphère lumineuse dont elle est entourée.

On trouva donc plus qu'on ne chercha, quatre planètes au lieu d'une; mais d'un autre côté on trouva moins: car ces planètes sont si petites, qu'elles appartiennent aux astres téléscopiques, et que le volume de toutes les quatre ensemble ne surpasse pas celui de la lune. Leur grandeur les place au dessous des satellites, et cependant la nature les a élevées au rang des planètes. Cette singularité, leur petitesse, et leur grand nombre dans la même distance au soleil, a fait penser à M. Olbers, que ces *astéroïdes* (nom que M. Herschel leur a donné) sont des fragmens d'une seule planète brisée en éclats, qui occupa jadis cette place. En effet, une explosion d'une vitesse vingt fois plus grande que celle d'un boulet de canon, suffirait pour faire décrire aux fragmens détachés des orbites semblables à celles de ces planètes. Cette hypothèse sert en même tems, à expliquer les excentricités et inclinaisons considérables, qui distinguent ces planètes des autres: car on conçoit, que l'explosion peut avoir lancé les fragmens dans tous les sens, et avec

des vitesses différentes. Il en suivrait encore, qu' à la même distance du soleil il pourrait y avoir plusieurs autres planètes, ou fragmens d'une planète primitive, dont les orbites auraient un commun point ou noeud, l'origine de leur mouvement, à laquelle elles devront revenir à chaque révolution, quoique à differentes époques. Mais il ne faut pas oublier, que l'attraction des autres planètes, principalement celle de Jupiter, y peut produire de grands changemens. La dernière circonstance a été confirmée par les observations, au moins en partie: car les noeuds de Pallas et de Junon coïncident à très-peu près. La première circonstance sera peut-être confirmée dans la suite, à moins que les autres fragmens ne soient trop petits, pour être aperçus.

§. 179. Ces quatre planètes n'ont fait que quatre révolutions, depuis qu'elles sont connues, et Uranus n'a pas encore parcouru la moitié de son orbite. Il est donc visible, que leurs élémens ne peuvent pas être connus avec la même précision, que ceux des planètes qui ont été observées depuis deux mille ans: car l'élément le plus important, qui est la base de tous les autres, le mouvement moyen, la durée d'une révolution, ou le grand axe, n'est exactement connu qu'après un grand nombre de révolutions. C'était donc une idée très-heureuse de M. Bode, qu'Uranus qui ressemble assés à une étoile de la sixième grandeur, pourrait se trouver dans les catalogues d'étoiles. En effet, il ne trouva plus une étoile, insérée dans les catalogues en différentes places que, d'après le calcul, Uranus avait occupées aux époques de la confection des catalogues. Ces lieux dans les catalogues peuvent donc remplacer une observation qui aurait été faite à cette époque, et l'on s'en est servi pour corriger les élémens d'Uranus. Mais avec ce secours même, les observations ne renferment qu'une seule révolution; et la précision avec laquelle nous connaissons les élémens, est due au perfectionnement des méthodes, et surtout aux recherches pénibles de M. Delambre relativement à Uranus, et de M. Gauss à l'égard des quatre nouvelles planètes. Mais il y a encore une autre circonstance, qui influe singulièrement sur ces quatre planètes. La proximité de la plus grande de toutes les planètes, Jupiter, leurs grandes excentricités, la manière dont leurs orbites sont enlacées l'une dans l'autre, soumettent leur mouvement à des perturbations considérables,

et difficiles à calculer, qui résultent de leurs attractions mutuelles, ainsi que de l'action de Jupiter. Tant que ces perturbations ne sont pas connues, il est impossible, de séparer le mouvement elliptique du mouvement observé qui est défiguré par les perturbations. Les élémens qu'on a trouvés jusqu'à présent, ne sont donc proprement ceux de l'ellipse, mais affectés des perturbations. Lorsque celles-ci auront été calculées avec précision, les élémens éprouveront des corrections considérables. La table suivante présente les derniers élémens de ces cinq planètes.

	Uranus	Cérès	Pallas	Junon	Vesta
Demi grand axe	19,183305	2,767245	2,7728864	2,669009	2,361787
Excentricité	0,0466703	0,0785028	0,241648	0,2598477	0,0891301
Sa variation séculaire	—0,000025	—0,000583	. . .	. . .	. . .
Révolution sidérale	30688,71269 jours	1681,4 jours	1686,5388 jours	1592,6608 jours	1325,7431 jours
Inclinaison	0°.46′.25″.	10°.37′.31″,2	34°.34′.55″.	13°.3′.37″,3	7°.8′.9″.
Sa variation annuelle	+0″,031331	—44″,0	. . .	. . .	. . .
Noeud ascendant	72°.51′.14″.	80°.53′.41,″3	172°.32′.44″.	171°.6′.50,″2	103°.11′.38.″
Son mouvement	1801	1806	1812	1819	1818
annuel	—35″,9796	+148″,0	. . .	. . .	. . .
Périhélie	167°.21′.42″.	146°.36′.6,″6	121°.0′.48″.	53°.32′.56″,1	249°.31′.44.″
	1801	1809	1812	1819	1818
Son mouvement					
annuel	+2″,3862	+121″,25	. . .	. . .	. . .
Longitude	177°.47′.18″.	343°.2′.33″.	239°.4′.46″.	117°.45′.3″.	179°.38′.30″.
moyenne	1801, Paris	1 Janv. 1809	10 Juin 1812	1 Janv. 1819	1 Janv. 1819
		midi de	midi de	midi de	midi de
Mouvement		Göttingue	Göttingue	Mannheim	Seeberg
séculaire	429°.51′.20″.	. . .	. . .	. . .	. . .

	Uranus	Cérès	Pallas	Junon	Vesta
Mouvement diurne	. . .	770″,923	768″,5746	813″,8698	977″,7020
La plus grande équation	5°.20′.57″,69	9°.0′.7″,68	27°.52′.54″,57	30°.0′.54″,10	10°.13′.22″,4
Anomalie de l'aphélie, où elle a lieu	87°.59′.36″,7	86°.37′.19″,30	79°.28′.45″,19	78°.39′.46″,93	86°.9′.47″,64
Diamètre apparent	4″,0 (74″)	1″,8 (3″,5)	2″,6 (4″,5)	2″,0 (3″,1)	0″,35 (0″,6)
Le même par rapport à la terre	4,233	0,2	0,256	0,176	0,034

Les nombres marqués par des crochets, sont les diamètres apparens réduits à la distance moyenne de la terre au soleil; les autres nombres sont les diamètres, tels qu'on les voit dans les oppositions, mais suivant des mesures un peu différentes.

LIVRE IV.

DE LA LUNE.

CHAPITRE I.

Phènomènes gènèraux de la Lune.

180. Les *Lunes* forment une classe particulière des corps célestes: ce sont des planètes secondaires, qui se distinguent des planètes principales, par ce que le corps central de leurs orbites n'est pas le soleil, mais une planète qu'elles accompagnent dans sa route, ensorte qu'elles ne circulent que médiatement autour du soleil: c'est pour cela qu'on les a appelées *Planètes secondaires* ou *Satellites*. La Cycloïde que ces corps décrivent dans l'espace absolu, est d'un degré plus compliquée que celle des planètes, et la plus compliquée de toutes, autant que le système solaire est connu jusqu'à présent. On ne connaît que quatre planètes, entourées de satellites, et la terre que nous habitons, est une de ce petit nombre distingué. Mars et les planètes inférieures n'ont point de satellites: car la découverte d'un satellite de Vénus, que quelques astronomes modernes croyaient avoir faite, ne s'est pas confirmée. Jupiter, Saturne, et Uranus, sont entourés de plusieurs satellites.

La lune est, après le soleil, l'astre le plus intéressant pour les habitans de la terre. Sa lumière douce et bienfaisante conduit le voyageur au

travers des déserts et des forêts, trace au navigateur sa route sur des mers inconnues, et donne aux nuits des charmes qui inspirent au philosophe et au poëte des idées et des sentimens plus sublimes, que le plus beau jour. Des millions de corps célestes partagent peut-être avec nous la lumière et la chaleur du soleil, mais la lumière de la lune est notre propriété exclusive: elle est notre compagne inséparable, qui nous console sur la perte du soleil, lorsqu'il va verser ses bienfaits sur d'autres pays: c'est un bien inappréciable pour les habitans de la zone glaciale, dont les longues nuits sont éclairées par la lune.

Ce fut sans doute la lune, qui la première apprit aux hommes les divisions grossières du tems, ou le calendrier: on n'eut pas besoin des mathématiques, pour observer la première apparition de la nouvelle lune, qui devint ainsi la mesure du tems la plus simple. Son petit éloignement de la terre, la rapidité de son mouvement qui employe moins de deux heures à décrire un degré, ainsi que les inégalités de son orbite, ont occupé les astronomes plus qu'aucun autre corps céleste, et ont couronné leurs recherches des découvertes les plus importantes, dont les fruits sont recueillis par le navigateur, tandis que le philosophe trouve une récompense plus noble dans la découverte des grandes loix de la nature. De toutes les actions physiques de la lune, la plus importante est son attraction, qui se manifeste le plus clairement par le flux et le reflux de l'océan: mais il est possible que ce satellite exerce beaucoup d'autres actions, qui seront toujours inconnues.

§. 181. Un des premiers phénomènes qui devaient frapper les hommes, furent sans doute les *Phases* de la lune, ou les différentes formes qu'elle nous présente dans les différentes parties de son orbite. Après avoir été invisible pendant quatre jours, elle reparaît 20° à 30° à l'orient du soleil sous la forme d'un filet d'argent courbé, ou d'un *croissant* dont les pointes ou les *cornes* sont vers l'orient, à l'opposite du soleil. La largeur de ce croissant augmente de plus en plus, à mesure que la lune s'éloigne du soleil vers l'orient, et l'on voit très-distinctement le reste du disque lunaire, sur lequel est répandue une lumière beaucoup plus faible qu'on appelle la *lumière cendrée*. Au bout de cinq jours la largeur du croissant est telle, que la lune est de-

venue un demi-cercle (*dichotome*), étant éloignée de 90° vers l'orient du soleil: c'est son *Premier Quartier*. Sa partie visible est alors terminée vers l'occident par la demi-circonférence d'un cercle, et à l'orient par son diamètre. Cette ligne droite prend peu après la courbure d'un arc elliptique, la partie lumineuse devient plus grand qu'un demi-cercle, elle va en augmentant, à mesure que la lune s'éloigne du soleil; et au bout de 12 jours la lune, étant directement opposée au soleil, paraît tout-à-fait circulaire, son disque entier brille d'un grand éclat: c'est la *Pleine Lune*. La lune continuant à parcourir sa route vers l'orient, elle commence à se rapprocher du soleil, dont elle est éloignée vers l'occident de moins de 180°: son bord occidental reprend la forme d'un arc elliptique, en se rétrécissant de plus en plus; et la partie lumineuse, en se rapprochant du soleil, diminue par les mêmes nuances, par lesquelles elle avait augmenté dans la première moitié de l'orbite. Au bout de 19 ou 20 jours elle paraît comme un demi-cercle, dont le diamètre est dirigé vers l'ouest, à l'opposite du soleil: c'est le *Dernier Quartier*, la lune étant éloignée du soleil 90° vers l'ouest ou 270° vers l'est. La partie visible continue à diminuer, et au bout de 24 jours, la lune n'étant distante que 20° à 30° du soleil, elle paraît, comme au commencement, sous la forme d'un croissant ou filet, dont les cornes sont dirigées vers l'occident, à l'opposite du soleil. Alors elle se perd dans les rayons du soleil, dont elle se rapproche davantage; et au bout de quatre ou cinq jours, elle reparaît à l'orient du soleil, et les phénomènes précèdens arrivent dans le même ordre. Il est clair que dans cet intervalle, où la lune était invisible, elle a passé entre le soleil et la terre, ou qu'elle a été en conjonction avec le soleil: c'est ce qu'on appelle la *Nouvelle Lune*.

§. 182. Pour peu qu'on réfléchisse sur ces phénomènes, on en conclura, que *la lune est un corps opaque qui reçoit du soleil la lumière* qu'il nous renvoie: vérité dont les anciens astronomes n'eurent pas le moindre doute (1). Les phases de la lune prouvent, qu'à chaque révolution elle perd sa lumière en partie, et même en entier à la nouvelle lune. La limite elli-

(1) „La lune n'a d'autre lumière que celle qu'elle reçoit du soleil." (*Almag. Lib. IV. Cap. 1. ed. de MM. Halma et Delambre, pag. 213.*)

ptique de la lumière, qui se rétrécit et s'élargit, prouve que la lune, ou du moins sa partie dirigée vers la terre, est un corps sphérique, sur lequel le cercle terminateur de la lumière paraît comme une ellipse (§. 79.). On a vu, que la partie lumineuse de la lune est toujours dirigée vers le soleil, et que son accroissement et décroissement se règlent exactement sur sa distance au soleil: d'où il suit, qu'elle reçoit cette lumière du soleil. Mais il y a des phénomènes qui le prouvent d'une manière encore plus frappante. Les observations des longitudes et latitudes de la lune vers le tems qu'elle approche de sa conjonction avec le soleil, donneront les changemens de sa position, d'où l'on peut calculer l'instant de la conjonction, et la latitude de la lune dans cet instant. Cela posé, on apercevra que, si cette latitude est moins grande que la somme des diamètres du soleil et de la lune, il arrivera une *eclipse solaire:* on verra un disque noir qui, passant sur le soleil d'ouest à l'est, le couvre en partie ou entièrement. La direction, la vitesse, et la grandeur de ce disque, qui sont parfaitement conformes au mouvement et au diamètre de la lune, ainsi que l'époque de la nouvelle lune, prouvent évidemment, que ce corps opaque est la lune elle-même qui, en passant entre le soleil et la terre, nous présente la moitié qui est obscure, parcequ'elle ne peut recevoir aucune lumière du soleil: d'où il suit que la lune n'a point de lumière par elle-même. Il est aussi aisé de voir que, lorsque la lune est en conjonction avec le soleil, la terre est pour elle en opposition, ou pleine terre, et qu'étant plus grosse, elle répandra beaucoup plus de lumière sur la lune, qu'elle n'en reçoit par la pleine lune. Nous apercevrions donc la nouvelle lune entièrement éclairée par la lumière réfléchie de la terre, si cette faible lueur n'était absorbée par les rayons du soleil. Mais lorsqu'au bout de quelques jours, la lune est assés éloignée du soleil, pour être visible le soir, on apérçoit distinctement la lumière cendrée (§. 181.), que la terre réfléchit vers la lune.

Les observations des *taches* de la lune viennent à l'appui de cette vérité. Nous voyons toujours les mêmes taches, même dans la partie obscure, quand la lumière cendrée les rend visibles: la même partie de la lune est donc tantôt obscure, tantôt illuminée; d'où il suit que ce n'est pas une propriété de la lune. Ce corps est couvert d'aspérités et d'élevations qui, à l'in-

sfar des volcans creusés par le feu, renferment des cavités profondes. Au tems de la pleine lune, qui est diamétralement opposée au soleil, on voit ces cavités éclairées dans toute leur profondeur, parceque les rayons du soleil y tombent verticalement. Dans tout autre tems, les remparts dont elles sont entourées, projettent des ombres, dans l'intérieur des volcans aussi bien que sur la partie extérieure du disque lunaire: ces ombres, toujours à l'opposite du soleil, se prolongent à mesure que la situation de la lune est plus oblique par rapport au soleil.

Les *eclipses lunaires* en sont encore une preuve. Le soleil et la terre étant toujours dans l'écliptique, la dernière doit nécessairement projetter dans ce plan une ombre conique à l'opposite du soleil; il s'en suit que, si la lune reçoit sa lumière du soleil, la pleine lune sera obscurcie, lorsque sa latitude est assés petite; et c'est précisément ce qui arrive. Si la pleine lune est près d'un de ses noeuds, elle perd sa lumière entièrement ou en partie, et l'ombre passe sur le disque lunaire de gauche à droite, parceque la lune entre dans l'ombre de la terre de droite à gauche. Les particularités de ces éclipses ne laissent aucun doute, que l'ombre de la terre ne soit leur véritable cause. Dans tous les lieux de la terre, où la lune éclipsée s'est levée, ce phénomène est absolument le même, et paraît dans le même instant: ce qui prouve, qu'il n'est pas produit par un corps placé entre la lune et la terre, parcequ'alors, à cause de la parallaxe des deux corps, le tems et la grandeur de l'éclipse seraient différens pour divers lieux de la terre; c'est donc une véritable éclipse, une obscurité ou ombre qui couvre la lune. La même partie de la lune qui naguères brilla d'un vif éclat, est entièrement obscurcie, et devient même invisible, lorsque la terre vient se placer entre elle et le soleil, et l'on voit les taches de la lune entrer l'une après l'autre dans l'ombre. Les éclipses solaires, au contraire, paraissent d'une manière différente à différens pays; elles sont totales dans un lieu, et nulles dans un autre; dans les pays occidentaux on les voit plutôt que dans les pays orientaux, etc. Cet effet des parallaxes prouve, que ce n'est pas le soleil même qui perd sa lumière, mais qu'un corps, qui doit être beaucoup plus près de la terre que du soleil, couvre cet astre: et l'on a vu, que c'est la lune.

§. 183. Les éclipses nous donnent une idée générale de la nature de l'orbite lunaire. Dans les éclipses de soleil la lune est placée entre le soleil et la terre; dans celles de lune, elle est opposée au soleil: ce n'est donc ni une planète supérieure, ni inférieure, et son orbite renferme la terre, mais non le soleil. La parallaxe de la lune est d'environ un degré (I. §. 223.): d'où il suit, que la lune est à peu près 400 fois plus près de la terre que le soleil, et que la terre est le point central de son orbite, parceque la parallaxe n'éprouve que de petits changemens qui viennent du mouvement elliptique. On peut aussi conclure la distance de la lune, de ses éclipses. La grandeur et la distance du soleil et de la terre détermine le cone d'ombre que la terre projette. La latitude de la lune durant l'éclipse donne sa distance à l'axe de ce cone; et l'observation de l'éclipse fait connaître la corde de la section de l'ombre, que la lune a parcourue, laquelle, étant comparée avec la latitude de la lune, donnera le diamètre de l'ombre, et par conséquent la distance de la lune à la terre. On trouvera ainsi, que dans toutes les éclipses la distance de la lune est à peu près la même; ce qui est encore plus évident par la grandeur de la lune, qui paraît toujours à peu près la même. La terre est donc le vrai point central de l'orbite lunaire: les observations nous donnent immédiatement le vrai mouvement de la lune: et l'on n'a pas besoin de tous ces calculs qui rendent si compliquée la théorie des planètes, parceque nous ne les voyons pas du centre de leurs orbites. Mais les irrégularités du mouvement de la lune, produites par l'action du soleil, exigent des calculs encore plus compliqués, qui seront exposés dans l'astronomie physique.

§. 184. On a vu précédemment (§. 80.), comment on trouve la phase du disque illuminé, quelle que soit la position du soleil, de la terre, et de la lune. Si S, T, V, (*Fig.* 20.) sont ces trois corps, la *limite d'illumination* est une ellipse, dont le petit axe est au grand, comme cos SVT est à l'unité. Dans le triangle SVT, $TS = a$ est toujours donné: connaissant donc $TV = r$, ce qui est à peu près $= \frac{a}{400}$ (§. 183.), l'élongation de la lune du soleil STV donnera l'angle SVT, et par conséquent la limite d'illumination. Le même triangle fournit le moyen, de trouver la distance de la lune, celle du soleil

étant donnée, et réciproquement: pour cet effet il faut avoir observé exactement la limite d'illumination, ce qui est très-difficile. Si (*Fig.* 49.) ADBE est la partie illuminée de la lune ACBE, la distance des deux cornes AB donnera le grand axe $= 2m$ de l'ellipse ADB: ayant donc mesuré la corde DE, perpendiculaire à AB au centre L, et en ôtant le demi-axe $LE = m$, on aura le demi petit axe $LD = n$. On connaît donc $\frac{n}{m} = \cos SVT$ (*Fig.* 20.), et STV par observation, donc $TSV = 180° - T - V$, d'où l'on tire $TV = \frac{TS \sin S}{\sin V}$, ou $TS = \frac{TV \sin V}{\sin S}$. Le calcul serait plus simple, si l'on pouvait observer l'instant du premier ou du dernier quartier de la lune, où l'ellipse devient une ligne droite, ensorte que n et $\cos SVT$ est nul: alors on a $SVT = 90°$, $TV = TS \cos T$, et $TS = \frac{TV}{\cos T}$. Cela donne la distance de la lune par rapport à celle du soleil: pour avoir la grandeur absolue, il faut connaître la parallaxe du soleil ou de la lune. La première, étant trop difficile à déterminer avec quelque précision, à cause de sa petitesse, était inconnue aux anciens astronomes; mais ils avaient assés bien déterminé la parallaxe de la lune. Aristarque se servit de l'équation $TS = \frac{TV}{\cos T}$, pour déduire la parallaxe du soleil de celle de la lune; et dans le dix-septième siècle on a trouvé, par cette méthode, la parallaxe du soleil de $15''$ à $30''$, ce qui est beaucoup trop grand.

§. 185. Il faut maintenant déterminer par observation *les élémens de l'orbite* de la lune. Depuis que les lois de Kepler avaient été confirmées par les observations de toutes les planètes, il était naturel, d'en faire application aux satellites, d'autant que les observations générales que nous venons d'exposer, suffisent pour indiquer, que l'orbite de la lune s'écarte peu d'un cercle. La supposition de ces lois ne servira qu'à diriger les recherches sur le mouvement de la lune, lesquelles décideront, si ces lois sont admissibles pour cet astre. Il est aisé de voir, qu'il ne peut être question ici que des deux premières lois de Kepler; la troisième se rapportant à plusieurs astres qui circulent autour d'un commun corps central, elle ne peut pas être appliquée à la terre qui n'a qu'un satellite. Nous allons chercher les élémens de l'orbite lunaire dans l'ordre suivant, qui paraît le plus naturel.

1. *Le mouvement moyen*, ou la durée moyenne du *mois*;
2. Les lieux, où le mouvement est le plus et le moins rapide, ce qui donne la position des *apsides*;
3. La plus grande différence du mouvement vrai, ou l'*excentricité* et l'*équation du centre*;
4. Le plus grand éloignement de la lune de l'écliptique, ou l'*inclinaison*;
5. La position de la commune section, ou des *noeuds* des deux plans;
6. La *distance* ou la *parallaxe*, et la *grosseur* de la lune.

Les méthodes qui ont servi à déterminer ces élémens, étant peu différentes de celles qui ont été développées relativement au soleil, on ne trouvera ici que ce que la lune a de particulier.

Outre les inégalites, dues au mouvement elliptique, la lune en a d'autres qui viennent de l'attraction du soleil, et dont quelques unes sont si considérables, que les observations seules les ont fait connaître aux anciens astronomes. La terre étant au centre de l'orbite lunaire, il est aisé de déterminer ses élémens d'une manière générale, et Hipparque et Ptolémée l'ont fait avec beaucoup de soin. Les observations des éclipses lunaires, sur lesquelles ils fondèrent principalement la théorie de la lune, leur apprirent la durée des mois, la vitesse de la lune dans les différentes parties de son orbite, et sa latitude. Il trouvèrent, que la lune avait une inégalité de 5°, et une autre de 1° 20′, que ses apsides avaient un mouvement direct de 40° 40′ par an, que les noeuds avaient un mouvement rétrograde de 19° 20′, et que son orbite était inclinée sur l'écliptique sous un angle de 5°. Tout cela est bien d'accord avec les observations modernes, ainsi qu'on va le voir.

CHAPITRE II.

Les différens Mois.

§. 186. Le tems que la lune emploie à faire une révolution entière, ou qui la ramène à la même position, est nommé *Mois:* il y a donc autant de différens mois, qu'il y a de méthodes pour déterminer la position de la lune. Le vrai point de vue, duquel il faut déterminer sa position, ou autour duquel se comptent ses révolutions, est la terre, le corps central de son orbite; mais on peut rapporter son mouvement géocentrique à différens points du ciel, et si ces points sont immobiles, il en résulte seulement une différence relativement au commencement et à la fin de chaque mois, et aucune pour la durée; mais s'ils ont des mouvemens différens, il en résultera des mois de durées différentes, ainsi qu'on l'a vu à l'egard de l'année solaire.

Le seul véritable mois est le tems que la lune emploie à décrire un angle de 360° autour de la terre, ou qui la ramène à la même position relativement aux points fixes du ciel. Le vrai mois est donc le tems qui ramène la lune à la même situation parmi les étoiles fixes, ou le mois *sidéral.* Mais la position de l'orbite de la lune étant sujette à des variations considérables, il en résulte, que la lune, à chaque révolution, approche plus ou moins de la même étoile, de sorte qu'elle ne revient pas à la même situation relativement aux étoiles. Pour fixer les idées, on réduit le lieu de la lune à l'écliptique, et l'on appelle *mois sidéral l'intervalle entre deux conjonctions consécutives de la lune avec la même étoile fixe.*

Dans un mois sidéral, la lune parcourt plus de 360° de longitude, parceque les points équinoxiaux ont rétrogradé. Le tems dans lequel la lon-

gitude de la lune augmente de 360°, ou ce qui revient au même, une *révolution par rapport aux points équinoxiaux* est le *mois périodique*: il est plus court que le mois sidéral, du tems que la lune emploie à décrire l'arc que les points équinoxiaux ont parcouru dans un mois périodique.

Dans le courant d'un mois, la lune, après s'être éloignée du soleil de 180°, s'en rapproche jusqu'à venir en conjonction: elle s'est donc éloignée du soleil de 360°, suivant la même direction d'occident à l'orient, ou elle a fait une révolution entière relativement au soleil. Une pareille révolution, le *tems écoulé d'une conjonction de la lune avec le soleil, ou d'une opposition à l'autre*, est appelé *mois synodique*, mois *lunaire*, ou *lunaison*: il est aisé de voir, qu'il est plus long que le mois sidéral, du tems que la lune emploie à parcourir un arc qui est égal au mouvement propre du soleil pendant un mois synodique.

Si la ligne des apsides de la lune était immobile, son anomalie croîtrait de 360° dans un mois sidéral. Mais, cette ligne ayant un mouvement direct très-rapide, la révolution qui ramène la lune aux apsides, sera d'autant plus longue que le mois sidéral. On appelle *mois anomalistique* le *tems d'un apogée ou périgée à l'autre, dans lequel l'anomalie de la lune augmente de* 360°.

Il en est de même de la ligne des noeuds, qui a un mouvement rétrograde: la *révolution de la lune par rapport aux noeuds*, qui est appelée *mois draconitique* (1), est d'autant plus court que le mois sidéral.

Ce qu'on cherche ici, est la durée *moyenne* des mois, ou la période dans laquelle le lieu moyen de la lune change de 360°. Les dénominations que Ptolémée donne aux mois, sont: pour le mois synodique, *mensis*, μὴν, ou *revolutio elongationis*, ἀποχῆς; le mois périodique, *revolutio sive restitutio longitudinis*, ἀποκατάστασις ou περίοδος τῆς μήκους; le mois anomalistique, *restitutio inæqualitatis*, ἀνωμαλίας; le mois draconitique, *restitutio latitudinis*, τῆς πλάτους.

§. 187. Le mois synodique est le plus important pour les hommes en général; et sa période, ainsi que ses subdivisions, se distinguent par les

(1) On appelle le noeud ascendant de la lune, ☊, la *tête du Dragon*, et le noeud descendant, ☋, la *queue du Dragon*.

phases d'une manière si frappante, que tout le monde peut les observer sans instrumens, d'où il est résulté, que les plus anciens peuples ont déterminé avec beaucoup de précision, la durée de ce mois avant celle des autres mois, qui demande de la réflexion et des connaissances astronomiques. L'instant où la nouvelle lune commençait à se faire voir, la *néomanie*, était chès les peuples anciens une des fêtes les plus sacrées; pour découvrir cet instant plutôt, on s'assemblait le soir sur les hauteurs. L'intervalle entre deux de ces fêtes leur apprit donc la durée d'une lunaison. Comme il s'écoule rarement une année sans éclipses, elles fournirent un moyen très-simple, de déterminer ce mois, et le résultat était d'autant plus exact, qu'à cause de la courte durée, un grand nombre de périodes pouvait être observé dans peu de tems. Les anciens astronomes ont déterminé la durée du mois, avec une précision qui n'a presque besoin d'aucune correction. Une ou deux révolutions suffisaient, pour faire voir que le mois synodique est d'environ 29 jours et demi; et avec cette notice, ils pouvaient comparer des éclipses fort éloignées l'une de l'autre, sans se tromper sur le nombre des mois écoulés dans cet intervalle: ce qui donna des résultats plus exacts. Quand la néomanie était arrivée le premier jour de l'an, elle revint le vingtième jour de l'année suivante, et ainsi de suite, 19 jours plus tard dans chaque année de 365 jours: l'année était donc composée d'environ 12 lunaisons et 11 jours, et ces onze jours sont connus dans le calendrier sous le nom des *épactes*. En continuant ces observations, on ne tarda pas à apercevoir, qu'au bout de 19 ans la nouvelle lune tombait derechef au premier jour, et en général aux mêmes jours de l'année, et qu'ainsi 19 années étaient égales à 235 mois synodiques. Cette découverte que les Grecs attribuèrent à Méton qui vécut environ 430 ans avant l'ère vulgaire, et qui l'avait apparemment ramenée de l'Orient, leur parut si importante, que le calcul de cette *période de dix-neuf ans* fut exposé en lettres d'or dans des endroits publics, d'où elle a pris et conservé dans nos calendriers le nom du *nombre d'or* ou du *cercle lunaire*. Cependant elle est fautive de deux heures; car l'année étant alors supposée de $365\frac{1}{4}$ jours, il en suivrait la durée du mois synodique $=$ 29 jours 12 h. 44 m. 25,5 s. ce qui est trop grand de 22 secondes. Comme les anciens

avaient des connaissances beaucoup plus exactes de la durée du mois, il est probable, que cette fameuse période n'a servi qu'à faciliter le calcul des fêtes réligieuses. Pour s'en faire une idée juste, il faut connaître les différentes périodes, dans lesquelles les anciens comprenaient les mouvemens du soleil, de la lune, de ses apsides et de ses noeuds: il en sera parlé ci-dessous.

Après un espace de plus de deux mille ans, nous pouvons déterminer le mois avec la plus grande précision, en comparant les anciennes éclipses avec les observations modernes. L'observation la plus ancienne que Ptolémée nous ait transmise (1), est une éclipse lunaire, arrivée 720 ans avant J. C, le 19 Mars 6 h. 48 m. tems de Paris. Puisque les observations donnent les lieux *vrais* de la lune, et qu'on cherche le mouvement *moyen*, il faut comparer entre elle deux observations, où l'équation du centre, et par conséquent l'anomalie était la même. Une pareille observation est l'éclipse de lune, arrivée 1717 le 9 Sept. à 6 h. 2 m. la lune ayant à peu près la même situation relativement aux apsides, que dans la première observation; de sorte que la lune avait fini un nombre entier de révolutions synodiques, par son mouvement moyen aussi bien que par son mouvement vrai. L'intervalle est de 2437 ans et 174 jours, moins 46 minutes; le nombre 2437 renfermant 609 années bissextiles: ce qui fait 890287,9680555.... jours. Au moyen de la durée du mois, telle que les anciens l'avaient déjà déterminée, on trouvera que 30148 mois synodiques sont écoulés dans cet intervalle, d'où l'on conclut la

durée du mois synodique = 29 j. 12 h. 44 m. 2 s. 20 t.

§. 188. Ces deux éclipses donneront immédiatement le mois périodique, plus exactement que la lunaison. En effet, cette dernière renfermant le mouvement de la lune relativement au soleil, et par conséquent les mouvemens de ces deux astres, la détermination de sa durée moyenne suppose, que les anomalies du soleil, aussi bien que de la lune, sont les mêmes dans les deux observations. Mais pour le mois périodique qui ne concerne que le mouvement de la lune, le lieu du soleil est indifférent, pourvu que l'anomalie

(1) *Almag. Lib. IV. Cap.* 6.

de la lune ait été la même. Dans les deux observations précédentes les longitudes de la lune étaient $5^s\,21°\,27'$ et $11^s\,27°\,34'$. La durée du mois périodique, connue à peu près par le mois synodique, nous apprend que dans cet intervalle il s'est écoulé 32585 mois périodiques, auxquels il faut ajouter la différence des deux longitudes, $6^s\,6°\,7'$. Ainsi on trouvera la

durée du mois périodique = 27 j. 7 h. 43 m. 4,9 s.

On fera mieux de prendre pour base de ce calcul, le mouvement moyen de la lune en longitude, qui est exactement connu par des observations de 2000 ans (1). Ce mouvement est pour cent années Juliennes, ou pour 36525 jours = 1336 cercles + $10^s\,7°\,52'\,43'',5$ = 1336, 855 21875 cercles. Le mois périodique sera donc = $\frac{36525}{1336,85521875}$ jours, ou en divisant par 3 et en multipliant par 32 le numérateur et le dénominateur, $\frac{389600}{14259,789}$, et en divisant en haut et en bas par 900, $\frac{432\,888\ldots.}{15,84421}$. La division donne le

Mois périodique = 27, 321582388074 jours = 27 j. 7 h. 43 m. 4, 7183292825 6 s.

Le mouvement séculaire du soleil est = 100 cercles + 45′ 45″ (I. §. 126.), d'où il résulte le mouvement séculaire de la lune relativement au soleil = 1236 cercles + $307°\,6'\,58'',5$ = 445267, 11625 degrés. La durée d'une révolution synodique est donc $\frac{360.36525}{445267,11625}$ jours, ou en multipliant par 800, et en divisant par 11, en haut et en bas, $\frac{956290909,0909\ldots.}{32383063}$. Le quotient donnera le

Mois synodique = 29, 530588539166 57 jours = 29 j. 12 h. 44 m. 2, 849783992 s.

Si le mouvement séculier des points équinoxiaux = 50″ (§. 30.) = 1° 23′ 30″, est ôté de celui de la lune, le reste sera le mouvement sidéral en 36525 jours = 1336 cercles + $306°\,29'\,13'',5$ = 288759 9′ 225; ce qui donne la révolution sidérale = $\frac{21600.36525\text{ j.}}{288759,225} = \frac{21600.1461}{11550 39,569} = \frac{31557600000}{1155039569}$. En divisant on trouvera le

Mois sidéral = 27, 321661393229 72 j. = 27 j. 7 h. 43 m. 11, 544375072 s.

Suivant Ptolémée le mois synodique est 29 j. 12 h. 44 m. $3\frac{1}{3}$′, trop grand d'une demi-seconde; le mois périodique est suivant lui 27 j. 7 h. 43 m.

(1) Voy. *Astron. théor. et prat. par M. Delambre, T. II. pag.* 316. *suiv.*

7,25 s. trop grand de deux secondes et demie, parcequ'il supposa le mouvement moyen du soleil trop grand.

§. 189. Il est aisé de s'assurer, que le mouvement de la lune, et même ses révolutions entières sont inégales. Les anciens examinèrent cette question de la manière suivante. Puisque chaque observation de la lune, à cause de sa grande parallaxe et des réfractions, exige des corrections qui étaient alors inconnues, les astronomes avant Ptolémée bornèrent leurs observations aux éclipses lunaires qui ne sont pas altérées par la parallaxe, etc. Le *milieu* de l'éclipse leur donna l'instant, où la lune était opposée au soleil, ou pleine, et par conséquent le vrai lieu de la lune, la théorie du soleil étant assés bien connue. Par le moyen d'une longue suite d'observations d'éclipses lunaires ils étaient parvenus à découvrir:

1. Que les intervalles entre les éclipses n'étaient pas égaux, et que cette inégalité du mouvement synodique était trop grande, pour pouvoir être expliquée par l'excentricité du soleil: d'où il suivait, que l'*orbite de la lune était également excentrique.*

2. Que ces inégalités, comme le plus grand ou le plus court intervalle entre deux pleines lunes, ne coïncidaient pas avec les mêmes longitudes de la lune; que par conséquent, les points de la plus grande inégalité, ou les *apsides de la lune avaient un mouvement,* d'où il résultait une différence entre les mois périodique et anomalistique.

3. Que dans les mêmes longitudes de la lune, les éclipses n'étaient pas de grandeur égale, mais tantôt totales tantôt partielles, tantôt dans la partie boréale tantôt dans la partie australe de la lune; que par conséquent, dans la même région du ciel, la latitude de la lune était, à différentes époques, plus ou moins grande, boréale ou australe: d'ou il suivait un *mouvement des nœuds de la lune,* et une différence entre les mois périodique et draconitique.

Pour connaître tous ces différens mouvemens, le moyen le plus simple était de chercher une *période,* qui comprît un nombre entier de chacune de ces révolutions, parcequ'au bout de chaque révolution, les inégalités qui en dépendent, devaient se compenser, et que par conséquent, au bout d'une pareille période composée, toutes les inégalités dévaient être nulles. On choi-

sit donc parmi toutes les éclipses observées, deux qui satisfaisaient à ces conditions: 1) elles devaient être arrivées, lorsque la lune, et par conséquent aussi le soleil en opposition, avaient la même longitude, c'est-à-dire le même jour de l'année; 2) les intervalles entre chacune de ces éclipses, et celles qui la précédaient et suivaient immédiatement, devaient être les mêmes, et par conséquent aussi les vitesses et les anomalies de la lune; 3) les deux éclipses devaient être de la même nature et grandeur, c'est-à-dire à la même distance du noeud. La première condition indiqua, qu'un nombre entier de révolutions synodiques et périodiques était achevé, la seconde et la troisième condition indiquèrent la même chose relativement aux mois anomalistiques et draconitiques. On forma ainsi plusieurs périodes, selon qu'on se contenta de satisfaire à une ou à deux de ces conditions, ou selon qu'on se proposa d'atteindre une précision plus ou moins grande. L'origine de la plupart de ces périodes se perd dans la nuit des tems.

Il a déjà été parlé (§. 187) de la *période de Méton*, qui ne regarde que la première condition. Elle était importante surtout pour le calendrier, parcequ'au bout de 19 ans, toutes les fêtes qui se réglaient sur les nouvelles lunes, tombaient derechef aux mêmes jours de l'année: et c'est peut-être par cette raison, qu'une certaine classe d'hommes qui, en Egypte, avaient le monopole des sciences, appelèrent cette découverte dans le sens propre le nombre *d'or* (*aurea praxis*). Cette période est composée de 6940 jours, ou 19 années juliennes plus 6 heures, ce qui fait 235 mois synodiques plus $7\frac{1}{2}$ heures, 254 mois périodiques plus $7\frac{2}{3}$ heures, 252 mois anomalistiques moins trois jours et 18 heures, et 255 mois draconitiques plus $21\frac{1}{4}$ heures. *Calippe* rendit cette période plus exacte, en la quadruplant, et retranchant un jour: il la fit donc de 27759 jours, ce qui fait 76 années juliennes, 940 mois synodiques plus 6 heures, 1016 mois périodiques plus $6\frac{2}{3}$ heures, 1008 mois anomalistiques moins 16 jours, et 1020 mois draconitiques plus 2 jours 13 heures. La plus grande erreur est celle qui regarde le mouvement des apsides.

Une des plus anciennes, connue sous le nom de *période Caldaïque*, est de $6585\frac{1}{3}$ jours, ou de 18 années juliennes et 10 ou 11 jours, selon

qu'elle renferme 5 ou 4 années bissextiles: on l'appela *tempus periodicum* (1). Elle était proprement de 6585 j. 7 h. 42 m. 35,50183 s. ce qui faisait, suivant les observations des anciens astronomes, 223 mois synodiques, 239 mois anomalistiques, 242 mois draconitiques, et 241,03 mois périodiques; mais suivant les observations exactes, cela fait 223 mois synodiques, 239 mois anomalistiques moins 5 h. 12 m., 242 mois draconitiques moins 51 min. et 241 mois périodiques plus 18 h. 41 m. Pour avoir un nombre entier de jours, on tripla cette période, et l'appela *evolutio* (2). La période caldaïque a probablement donné lieu à celle de Méton. Comme il en résulte qu'au bout de 18 ans les nouvelles lunes arrivent 11 jours plus tard, il était naturel d'y ajouter 12 lunaisons, ou une année lunaire de 354 jours, lesquels, réunis à ces 11 jours, formaient la période de 19 ans.

Ces périodes ne paraissaient pas assés exactes à Hipparque qui, en comparant ses observations avec celles des Caldéens, trouva que le moindre nombre de jours, qui ramenât les éclipses à de semblables mois et mouvemens (3), était de 126007 j. 1 h. ou à peu près de 345 ans, et que ce tems renfermait 4267 mois synodiques, 4573 mois anomalistiques, et 4612 mois périodiques moins $7\frac{1}{2}$ degrés. Il en résulte la durée d'un mois synodique, adoptée par Ptolémée $= \frac{126007\frac{1}{24}}{4267}$ jours ou 29 j. 12 h. 44 m. 3,26224 s. et celle du mois anomalistique $= \frac{126007\frac{1}{24}}{4573}$ j. $=$ 27 j. 13 h. 18 m. 34,7168 s. ce qui ne diffère pas sensiblement des résultats modernes. Au bout de cette période, les éclipses auront entre elles les mêmes intervalles, mais elles ne seront pas de même nature et grandeur, et elles n'arriveront pas les mêmes jours de l'année.

Hipparque substitua à la période Caldaïque, suivant ses propres observations, une autre de 5458 mois synodiques et 5923 mois draconitiques, ou d'environ 441 ans et 103 jours, au bout de laquelle les éclipses redeviennent semblables en grandeur et en durée. Il en suit que les mois synodique et draconitique sont entre eux comme 5923 et 5458, rapport parfaitement exact. Les mouvemens diurnes et horaires de la lune, en longitude, et par rapport

(1) χρόνος περιοδικός (*Almag. Lib. IV. Cap. 2. pag. 216. éd. de Halma*).

(2) ἐξελεγμός (*Ibid.*).

(3) ἐν ἴσοις μησὶ καὶ ἐν ἴσοις κινήμασιν (*Ibid.*).

au soleil, aux apsides, et aux noeuds, tels que Ptolémée les a trouvés (1), donnent la durée du mois anomalistique = 27 j. 13 h. 18 m. 40 $\frac{1}{2}$ s. et du mois draconitique = 27 j. 5 h. 5 m. 35 $\frac{3}{4}$ s. La première est trop grande de 7 sec. la dernière seulement de $\frac{1}{7}$ sec. ainsi qu'on le verra ci-après.

S'il ne s'agit pas des éclipses, qui dépendent de la latitude de la lune, mais des nouvelles et pleines lunes en général, qui ne dépendent que des révolutions synodique et anomalistique, on trouvera des périodes plus courtes qui ne sont pas moins exactes. Les nombres des mois synodiques et anomalistiques, écoulés dans les 126007 jours de la période d'Hipparque, savoir 4267 et 4573, sont divisibles par 17: on aura donc, pour les *Syzygies* qui se succèdent dans le même ordre et après des intervalles égaux, une période 17 fois plus courte, de 7412,2 jours ou de 20 années juliennes et 107 jours, qui renferme 251 mois synodiques et 269 mois anomalistiques.

Les mois anomalistique et draconitique, supposant la connaissance des mouvemens des apsides et des noeuds, seront déterminés ci-après.

§. 190. Le mois synodique, trouvé par la comparaison des observations les plus anciennes et modernes, est plus court d'une demi-seconde que celui de Ptolémée (§. 188.): et comme l'un et l'autre a été déterminé par un grand nombre d'observations éloignées, il faut en conclure que, depuis Ptolémée, le mois a été raccourci, ou ce qui revient au même, que le mouvement de la lune a été accéléré. En comparant la plus ancienne observation (§. 187.) avec les modernes, on aura le mouvement moyen de la lune aux deux époques, si l'on suppose qu'il n'a pas changé pendant ce tems. Mais si le mouvement moyen a été continuellement accéléré ou retardé, alors une observation, faite au milieu de cette période, ne sera pas d'accord avec le calcul, qu'on aura fait en supposant le mouvement invariable. Les recherches que les astronomes ont faites relativement aux observations du dixième, du dix-septième, et du commencement du dix-huitième siècle, prouvent sans exception un raccourcissement du mois, ou une *accélération* du mouvement moyen de la lune, telle que dans chaque siècle la lune parcourt environ 9″ de plus que dans le siècle immédiatement précédent. Ces 9″

(1) *Almag. Lib. IV. Cap.* 3. *pag.* 223. 224.

dont le mouvement moyen de la lune s'accroît dans cent ans, sont ce qu'on appelle l'*équation séculaire* de la lune, qui est calculée de la manière suivante.

Supposons qu'on ait trouvé par des observations fort anciennes, que la durée moyenne du mois était alors $= M$, et que les observations les plus modernes donnent sa durée actuelle $= M'$; nommons le nombre des mois, écoulés dans cet intervalle, m, et faisons $M - M' = N$. Nous avons trouvé $N = 0,5$ sec. et l'intervalle entre Hipparque et Mayer est de 1900 ans, ce qui fait 23500 mois synodiques: donc $m = 23500$. Il est naturel de supposer, que l'*accélération* du mouvement de la lune, étant l'effet d'une force constante, est *uniforme*, ensorte que chaque mois diminue de la même quantité. En nommant donc ω le raccourcissement de chaque mois, on aura

$$\omega = \frac{N}{m} = \frac{0,5. \text{ sec.}}{23500} = 0,0000212766 \text{ sec.}$$

Or le premier mois a été $= M$, le second $= M - \omega$, le troisième $= M - 2\omega$, et le $n$me mois $= M - (n-1)\omega$. La lune a donc employé à faire n révolutions, le tems $= M + (M - \omega) + (M - 2\omega) + \ldots + (M - (n-1)\omega) = nM - \omega(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = nM - \frac{n(n-1)}{2}\omega$, au lieu qu'elle y eût employé le tems nM, si le mouvement n'eût pas changé. Elle a donc gagné, en n mois, le tems $\frac{n(n-1)}{2}\omega = \frac{n^2}{2}\omega$ à très-peu près, ou ce qui revient au même, au bout de n mois elle a décrit, outre n révolutions entières, un angle Φ qui répond au tems $\frac{n^2}{2}\omega$. Dans cent ans n est $= 1237$, d'où l'on tire l'accélération séculaire de le lune $= 0,000010638 3.(1237)^2 \text{ sec.} = 16,278$ sec. pendant lesquelles la lune parcourt 9″. Ayant donc calculé le mouvement moyen dans un siècle, on sait que dans le siècle suivant, la lune parcourra 9″ de plus, et que dans le siècle précédent, elle a parcouru 9″ de moins, dans deux siècles 36″, etc. parceque l'équation séculaire est proportionnelle au carré du tems, nn. Cette équation de 9″ est conforme aux nouvelles tables de Mayer, qui l'avait d'abord supposée de 7″. L'an 1700 sert d'époque, où l'équation séculaire est nulle: c'est-à-dire, le mouvement moyen qui avait lieu l'an 1700, a été pris pour le véritable mouvement moyen, tandis que ceux qui ont lieu dans les autres siècles, sont regardés comme altérés par une cause inconnue. Le mouvement moyen, tiré des tables de Mayer, est donc celui

du 18me siècle: conséquemment il faut y ajouter 9″ pour 100 ans postérieurs à 1700, 36″ pour 200 ans, 81″ pour 300 ans, etc. et pour les siècles antérieurs il faut en retrancher autant. En nommant μt le mouvement moyen pour t ans, qui avait lieu l'an 1700, et que les tables donnent immédiatement, E la longitude moyenne de la lune à la même époque, L, L′, celles qui répondent à une époque, postérieure ou antérieure à 1700 de t ans, le vrai mouvement moyen pour les tems postérieurs sera $= \mu t + \frac{t^2.9''}{10000}$, et pour les tems antérieurs $= \mu t - \frac{t^2.9''}{10000}$; on aura donc $L = E + \left(\mu t + \frac{t^2.9''}{10000}\right)$ et $L' = E - \left(\mu t - \frac{t^2.9''}{10000}\right) = E - \mu t + \frac{t^2.9''}{10000}$; d'où il suit, que l'équation séculaire $\frac{t^2.9''}{10000}$ doit toujours être ajoutée, tant pour les tems passés que pour les tems futurs; ce qui est d'ailleurs évident, parceque $(-t)^2 = +t^2$.

Cette équation est constatée par toutes les observations, anciennes et modernes. Si l'on calcule les observations anciennes sur les tables de Mayer, sans employer l'équation séculaire, on trouve des erreurs toujours positives, qui montent à 28′; mais en employant cette équation, les erreurs sont tantôt positives tantôt négatives, et toujours au dessous de 6′, ce qui est conforme à la nature des erreurs d'observations. Nous reviendrons à ce sujet dans l'astronomie physique, où l'on verra que l'équation séculaire est un des effets de l'attraction du soleil. Par la théorie de cette attraction M. de Laplace a trouvé, que la valeur exacte de l'équation séculaire de la longitude moyenne de la lune est, en nommant i le nombre de siècles écoulés depuis 1700,

$$+ 10'',1816212 68.\, i^2 + 0'',0185384408.\, i^3;$$

le dernier terme étant négatif pour les siècles avant 1700 $(-i)$. La théorie de l'attraction a encore indiqué, que les apsides ou l'anomalie moyenne et les noeuds, sont sujets à des équations séculaires, qu'on trouve, en multipliant celle de la longitude par 4,00052 et par 0,735452.

Le jour a constamment été de même longueur, tandis que l'année a varié, ainsi qu'on le verra dans l'astronomie physique; d'ailleurs, les anciens peuples se sont servis d'un grand nombre d'années différentes: d'où il suit, qu'une période, exprimée par le nombre d'années et non des jours, ne peut servir à déterminer le mois, à moins que l'année employée dans cette période,

ne soit connue; et c'est précisément ce que nous ignorons relativement à la fameuse *période de six cents ans,* dont l'origine est réculée par quelques auteurs anciens au delà du déluge. Il est aisé de voir que cette période contient 7421 mois synodiques. Mais en prenant pour base la durée actuelle de l'année et du mois, 365 j. 5 h. 48 m. 52 s. et 29 j. 12 h. 44 m. 3 s. on trouvera que 600 ans font 219145 j. 8 h. 40 m. et que 7421 mois font 219146 j. 12 h. 15 m. L'erreur de plus d'un jour est trop forte, pour que les anciens ayent pu la commettre, attendu qu'ils connaissaient des périodes beaucoup plus courtes et plus exactes, telles que la période Caldaïque. Il faut donc supposer, que leur année, ou leur mois, ou que l'une et l'autre ont été différens de ce qu'ils sont aujourd'hui; ou bien que la période a été formée par prédilection pour le nombre 60. En nommant l'année de ces anciens tems $=$ A, le mois $=$ M, le nombre des années écoulés pendant cette période, 600 $= n$, celui des mois, 7421 $= m$, on a l'équation

$$n\,\mathrm{A} = m\,\mathrm{M}, \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} = \frac{7421}{600} = 12{,}368333.$$

Ce rapport étant plus considérable qu'il ne l'est actuellement, il s'en suivrait, que l'année de ce tems eût été plus grande qu'aujourdh'ui, dans un plus grand rapport que le mois. Bailly (1) cherche à prouver par la comparaison de plusieurs pèriodes anciennes, que le mois a été alors de 29 j. 12 h. 44 m. 4,5 s. ou de 1 $\frac{1}{2}$ sec. plus grand qu'à présent, et que la période de 600 ans a été établie 4600 ans avant J. C. Alors les 7421 mois seraient égaux à 219146 j. 15 h. 20 m. 34,5 s. ce qui étant divisé par 600, donnerait la durée de l'année tropique $=$ 365 j. 5 h. 51 m. 56 s. L'année aurait donc diminué de 3 min. 10 sec. et le mois de 1,5 sec. en 6350 ans ou en 78550 mois, d'où il suivrait la diminution de chaque mois $= \frac{15 \text{ sec.}}{785500} = 0{,}0000191$ s. $= \omega$, ce qui donnerait l'accélération séculaire de la lune $= \frac{\omega}{2}(1237)^2 = 14{,}6$ sec. Dans ce tems la lune parcourt 8″, équation séculaire qui est le milieu entre les premières et les dernières tables de Mayer.

(1) *Hist. de l'Astr. anc. Liv. III.* §. 6—10. *Eclairciss.*

CHAPITRE III.

Apsides et Excentricité de la Lune.

§. 191. Le mouvement des planètes est le plus rapide ou le plus lent, lorsqu'elles passent par la ligne des apsides de leurs orbites excentriques; il est égal au mouvement moyen, quand elles en sont éloignées d'environ 90°. C'est sur cette propriété commune à toutes les orbites, que se fondent les méthodes qui servent à déterminer la position des apsides; après quoi la différence entre la plus grande et la plus petite vitesses donne la plus grande équation, ou l'excentricité; ensorte que ces deux élémens sont déterminés à la fois, ainsi qu'on l'a vu plus haut. La grandeur du diamètre et de la parallaxe de la lune est telle, qu'on peut s'en servir pour déterminer immédiatement le rapport qui existe entre ses différentes distances; mais la mesure exacte de ces angles suppose des méthodes, qui étaient inconnues aux anciens. Leurs observations se bornèrent aux éclipses lunaires, dont la grandeur leur servit à déterminer le lieu du noeud, la position des apsides étant déterminée par l'intervalle entre deux éclipses consécutives. Une éclipse, également distante de la précédente et de la suivante, devait avoir eu lieu dans les apsides, parcequ'un mois avant et un mois après, la lune avait eu la même vitesse: c'était l'apogée ou le périgée, selon que l'intervalle avait été plus ou moins grand que tous les autres intervalles entre deux éclipses. Comme ces points de la plus grande et de la plus petite vitesses ne répondaient pas toujours aux mêmes régions du ciel, mais s'avançaient suivant l'ordre des signes, les anciens notaient le tems, au bout duquel les éclipses, séparées de la précédente et de la suivante par l'intervalle le plus ou le moins grand, arrivaient derechef aux mêmes points du ciel, ou les mêmes jours de l'année: et c'était

la période, dans laquelle la ligne des apsides avait fait une révolution entière. Ils aperçurent, que cela arrivait après 223 pleines lunes, et que pendant ce tems, la lune était parvenue 239 fois à sa plus grande et plus petite distance, ainsi qu'à son mouvement le plus rapide et le plus lent, et que par conséquent, 223 mois synodiques équivalaient à 239 mois anomalistiques. Ainsi se formèrent ces périodes, au moyen desquelles Hipparque détermina les mois avec tant de précision.

Cela fit connaître le mouvement des apsides, et à peu près leur position à une époque donnée, mais non pas l'excentricité. Pour cet effet, Ptolémée se servit de l'*épicycle*, qui était plus propre à représenter le mouvement des apsides, que le cercle excentrique. Soit (*Fig.* 50.) T la terre au centre du cercle C*c*, dont la circonférence est parcourue d'une manière uniforme, par le centre C de l'épicycle L B A M dans un mois périodique, suivant l'ordre des signes C*c*, tandis que la lune L parcourt uniformément la circonférence de l'épicycle suivant la direction opposée L A D M. Supposons que la lune ait été en L, dans le même instant que le centre de l'épicycle était en C, et qu'au bout de quelques jours le dernier soit arrivé en *c*: alors le lieu moyen de la lune sera sur le rayon T*c*, et le lieu vrai en différera, à mesure que la lune s'est écartée de la droite T C qui a pris la position T*c*. Or, le mouvement vrai de la lune étant, dans l'apogée L plus lent, et dans le périgée M plus vite, que le mouvement moyen, il faut nécessairement, que la lune se dirige de L en B, et de M en *m*, ou ce qui revient au même, qu'elle parcoure la circonférence de l'épicycle contre l'ordre des signes. Le centre de l'épicycle étant donc en C, et la lune en B, le lieu moyen et le lieu vrai de la lune seront sur les droites T C et T B, et C T B est l'équation du centre. Si la ligne des apsides était immobile, le mois anomalistique serait égal au mois sidéral ou périodique: d'où il suit que, le centre C ayant achevé un mois périodique, et étant revenu à C, la lune doit également être revenue à l'apogée L. Mais puisque la révolution anomalistique dure plus longtems que la périodique, la lune ne sera pas encore arrivée en L à la fin du mois périodique. En général, les angles à C que la lune décrit sur l'épicycle, seront toujours plus petits que ceux décrits par C autour

de T: si donc C est arrivé en c, et L en B, LCB sera plus petit que CTc, dans le rapport du mois anomalistique au périodique, ou en d'autres mots, CTc et LCB sont les moyens mouvemens périodique et anomalistique. Tout se réduit donc, à déterminer le rapport entre les diamètres

$$CT = a \text{ et } CL = c, \text{ ou l'excentricité } \frac{c}{a} = \gamma,$$

ainsi que la position et le mouvement de la ligne des apsides, qui est donnée par l'anomalie moyenne LCB.

§. 192. Ptolémée se servit pour cet effet, de trois éclipses lunaires, observées à Babylon 720 et 719 ans avant J. C., dont il donne le détail suivant (1).

	Longitude de la lune	Tems intermédiaire	Mouvement vrai	Mouvement moyen	Mouvement anomalistique moyen
I.	$5^s.24°.30'. = \mathfrak{C}$	354j. 2h.34m.	$349°.15' = E$	$345°.51' = L$	$306°.25' = M$
II.	$5.13.45 = \mathfrak{C}'$	176j.20h.12m.	$169.30 = F$	$170.7 = l$	$150.26 = m$
III.	$11.3.15 = \mathfrak{C}''$				

Si A, B, D, (*Fig.* 50.) sont les lieux de la lune dans ces trois éclipses, $BCD = m$ est plus petit que 180°, et le mouvement vrai de B en $D = F$ est plus petit que le mouvement moyen l; d'où il suit, que le centre C et le périgée M sont situés hors du segment BAD. D'ailleurs on a $AMLB = M$, $BCA = 360° - M = 53°35'$, donc $BCA < BCD$; d'où il suit que A tombe entre B et D. On connaît donc

$$ACB = 53°35' = \alpha,\ BCD = m = 150°26',\ ATB = E - L = 3°24' = \lambda,$$
$$BTD = l - F = 37' = \mu.$$

En faisant donc

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\gamma} = q,\ BCL = x,\ BTL = y,\ CBT = x - y = z,$$

on a dans les triangles CTB, CTA, CTD,

$$\sin z = q \sin y,\ \sin CAT = q \sin CTA,\ \sin CDT = q \sin CTD.$$

Mais on a

$$CTA = \lambda + y,\ CTD = \mu + y,\ LCA = \alpha + x,\ LCD = m + x;$$

en faisant donc

(1) *Almag. Lib. IV. Cap.* 5.

$\alpha - \lambda = n$, $m - \mu = \nu$, on aura

$$CAT = LCA - CTA = n + z, \quad CDT = LCD - CTD = \nu + z;$$

d'où résultent ces équations:

I. $\sin z = q \sin y$; II. $\sin (n+z) = q \sin (\lambda + y)$; III. $\sin (\nu + z) = q \sin (\mu + y)$.

En substituant I en II et en III, il viendra

$$\sin n \cos z + q \cos n \sin y = q \sin \lambda \cos y + q \cos \lambda \sin y, \text{ et}$$

$$\sin \nu \cos z + q \cos \nu \sin y = q \sin \mu \cos y + q \cos \mu \sin y;$$

d'où il suit, $\gamma \sin n \sin \nu \cos z =$

$$\sin \nu (\sin \lambda \cos y + \cos \lambda \sin y - \cos n \sin y) =$$

$$\sin n (\sin \mu \cos y + \cos \mu \sin y - \cos \nu \sin y),$$

ce qui donne

$$\text{tang } y = \frac{\sin n \sin \mu - \sin \lambda \sin \nu}{\cos \lambda \sin \nu - \sin n \cos \mu + \sin n \cos \nu - \cos n \sin \nu} =$$

$$= \frac{\cos (n-\mu) - \cos (n+\mu) - \cos (\nu - \lambda) + \cos (\nu + \lambda)}{\sin (\nu + \lambda) + \sin (\nu - \lambda) - \sin (n+\mu) - \sin (n-\mu) - 2 \sin (\nu - n)}.$$

Après avoir trouvé ainsi y, on aura au moyen des équations I, II,

$$q = \frac{\sin z}{\sin y} = \frac{\sin n \cos z + \cos n \sin z}{\sin (\lambda + y)}, \text{ donc}$$

$$\text{tang } z = \frac{\sin n \sin y}{(\sin \lambda + y) - \cos n \sin y} = \frac{\text{tang } n}{\frac{\sin (\lambda + y)}{\cos n \sin y} - 1};$$

d'où l'on tire

$$x = y + z, \quad \text{et } \gamma = \frac{\sin y}{\sin z}.$$

Dans l'exemple précédent on a $\lambda = 3^\circ 24'$, $\mu = 37'$, $n = 50^\circ 11'$, $\nu = 149^\circ 49'$, donc tang $y = 0,017212$; $y = 59' 10''$; tang $z = 0,2019487$; $z = 11^\circ 25' 2''$; $x = 12^\circ 24' 12''$; ou suivant Ptolémée $x = 12^\circ 24'$; d'ou il suit, l'excentricité $\gamma = 0,0869405 = \sin 4^\circ 59' 15'',5$; ou suivant Ptolémée, $\gamma = \frac{5\frac{13}{60}}{60} = 0,0869444$. La plus grande équation du centre est donc $= 4^\circ 59' 15'',5$ ou à peu près 5°.

Ptolémée trouve, au moyen de trois éclipses qu'il avait observées lui-même, $\gamma = \frac{5\frac{14}{60}}{60} = 0,0872222$; donc la plus grande équation $= 5^\circ 0' 14''$. En prenant le milieu de plusieurs autres observations, il la trouve $= 5^\circ 1'$ (1). Nous savons maintenant, que l'équation du centre est $6^\circ 18'$, et l'on sera peut-être étonné que les anciens aient pu commettre une erreur aussi grande;

(1) *Almag. L. IV. C. 10.*

mois on verra dans le *Chap.* suivant, que ces 5° étaient l'effet réuni de deux équations, et que Ptolémée découvrit l'une et l'autre de ces équations.

L'équation LTB $= y$ est l'angle, dont la longitude moyenne de la lune L, au milieu de la seconde éclipse, était plus grande que la longitude vraie B $=$ C′. Or nous avons trouvé C′ $= 5^s\,13°\,45'$ et $y = 5°9'$: la longitude moyenne ou l'époque était donc $= 5^s\,14°\,44'$. L'anomalie moyenne était LCB $= x = 12°\,24'$, d'où l'on tire la longitude de l'apogée $= 5^s\,2°\,20'$.

Ptolémée conclut par le même calcul, des trois éclipses qu'il avait observées lui-même, la longitude vraie de la lune dans la seconde éclipse, C $= 0^s\,25°\,10'$, l'équation du centre, $y = 4°\,20'$, l'anomalie moyenne, $x = 64°\,38'$, et l'intervalle entre cette éclipse et la précédente $= 311783$ j. 23 h. 20 m. La longitude moyenne était donc L $=$ C $+ y = 29°\,30'$, et la longitude de l'apogée $=$ L $- x = 10^s\,24°\,52'$.

Le mouvement moyen de la lune dans cet intervalle avait donc été en longitude $= 11420$ cercles $+ 224°\,46'$, celui d'anomalie $= 11315$ cercles $+ 52°\,14'$, et celui de l'apogée $= 96$ cercles $+ 172°\,32'$: d'où l'on tire le moyen mouvement diurne de la lune,

en longitude $= 13°\,10'\,34''\,58'''\,33^{iv}\,30^{v}\,30^{vi}$,

celui de l'anomalie $= 13°\,3'\,53''\,56'''\,17^{iv}\,51^{v}\,59^{vi}$,

celui de l'apogée $= 6'\,41''\,2'''\,15^{iv}\,38^{v}\,31^{vi}$:

d'où il viendra le mois synodique $= 29$ j. 12 h. 44 m. 3,26224 s. comme ci-dessus, le mois anomalistique $= 27$ j. 13 h. 18 m. 34,9488 s. et la durée d'une révolution des apsides $= 3231$ j. 14 h. 47 m. 50,3124 s.

§. 193. Les nouvelles méthodes pour déterminer les parallaxes par observation, ainsi que l'invention des lunettes et des micromètres, ont fourni le moyen de trouver la position des apsides, ou du moins leur mouvement, par les époques où le diamètre de la lune, dont le changement total est de 4′, a sa plus grande et sa plus petite valeur. Mais comme dans les apsides mêmes, la distance et la grandeur apparente ne changent qu'insensiblement, on choisit les points de la distance moyenne, où elle change le plus rapidement. Ayant trouvé le diamètre apparent de même grandeur, dans

deux points opposés de l'orbite, le milieu entre ces deux points donnera la longitude des apsides pour l'époque moyenne entre les deux observations.

On peut trouver à la fois les apsides et l'excentricité de la manière suivante. Soit (*Fig.* 51.) ABP l'ellipse de la lune, T la terre, AP la ligne des apsides, et B, L, deux lieux vrais de la lune, donc ATB, ATL, ou AB, AL, les anomalies vraies. En choisissant parmi un grand nombre d'observations, une époque B, d'où l'on compte toutes les autres longitudes, on connaît pour chaque observation L, le mouvement vrai $BL = l$ par observation, et le mouvement moyen $BM = m$ par le tems écoulé, donc $LM = m - l$. Soient $Bb = f$, $Ll = g$, les équations du centre, qui conviennent aux anomalies vraies AB, AL: alors b, l, seront les lieux moyens, et le mouvement moyen $bl = m = BM$, d'où il suit $Ml = Bb$, où

$$Ll - LM = g - m + l = f, \text{ et } g - f = m - l.$$

Maintenant, si l'on compare d'autres observations avec B, f ne change pas, et la différence des mouvemens moyen et vrai, $m - l$ croît avec g. Le *maximum* de cette différence désignera donc le point L de la plus grande équation, et dans l'équation $g + f = m - l$, g est la plus grande équation, mais f est inconnu. En comparant B, de la même manière, avec des observations D, éloignées de L d'environ 14 jours, on connaît de même les mouvemens vrai et moyen,

$$BPD = \lambda, \quad BPE = \mu, \text{ et } ED = \lambda - \mu.$$

En nommant l'équation $Dd = h$, qui répond à l'anomalie AD, le mouvement moyen est aussi bPd, d'où il suit

$bd = \mu = BE$, $Ed = Bb = f$, ou $\lambda - \mu - h = f$, donc $h + f = \lambda - \mu$.

Ayant donc trouvé, parmi toutes les observations qui sont à peu près opposées à L, celle qui donne la plus grande différence des mouvemens vrai et moyen, $\lambda - \mu$, h sera pareillement la plus grande équation, donc $h = g$, et

$$g + f = \lambda - \mu.$$

En ajoutant cette équation à la précédente $g - f = m - l$, on aura

$$g = \frac{\lambda - l}{2} - \frac{\mu - m}{2}.$$

Ainsi on trouvera, au moyen d'observations faites aux distances moyennes, la plus grande équation g, d'autant plus exactement que, dans ces points, elle change insensiblement.

Si dans l'intervalle entre les deux observations, l'apogée est avancé de A en a, et qu'il a été en α dans le milieu de cet intervalle, on aura $A\alpha = a\alpha$, en supposant le mouvement des apsides uniforme durant ce tems. Or L et D étant les points de la plus grande équation, on a aussi $AL = aD$, d'où il suit $\alpha L = \alpha D$: en d'autres mots, le milieu α entre les deux longitudes observées L, D, est la longitude de l'apogée à l'époque mitoyenne. Mais comme l'équation change insensiblement dans ces points, il peut y avoir une différence considérable entre AL et aD, quoique l'erreur soit insensible relativement à g ou h; ensorte que cette détermination des apsides serait peu sure. Or l'époque B étant arbitraire, on peut prendre pour époque une observation, faite dans les apsides mêmes qui sont connus à peu près: alors on a $f = o$, et $m - l = g = h = \lambda - \mu$. On changera donc l'époque B, jusqu'à ce que les plus grandes différences des mouvemens vrai et moyen, parmi toutes les autres observations, $m - l$ et $\lambda - \mu$ deviennent égales et de nature opposée. Alors la longitude observée B est à la fois la longitude des apsides, et la longitude moyenne de la lune, ou l'*époque*. Du moins on trouvera deux observations telles, que $m - l$ est plus grand que $\lambda - \mu$, si B est pris pour époque, et moins grand, si b est l'époque: alors la ligne des apsides tombe entre B et b, et s'il y a assés d'observations entre B et b, on peut approcher ces deux points l'un de l'autre de plus en plus, ensorte qu'il sera aisé de déterminer par interpolation la véritable position des apsides.

Ainsi tous les élémens elliptiques sont déterminés; mais comme B, L, D, etc. doivent nécessairement être des longitudes sur l'orbite, et que les observations ne donnent que les longitudes dans l'écliptique, il faut déduire les unes des autres; et pour cette réduction il est nécessaire qu'on connaisse du moins à peu près les noeuds et l'inclinaison de la lune, ce qui est très-aisé, ainsi qu'on le verra dans le *Chap. V.*

§. 194. Quand on a ainsi déterminé la position des apsides pour differentes époques, on apercevra, qu'ils ont un mouvement rapide suivant l'ordre des signes, qui sera déterminé par les méthodes précédentes. Suivant les nouvelles tables de M. Bürg, le mouvement anomalistique de la lune dans 365 jours est $= 4765°43'19'',086$; ce qui donne pour 36525 jours

= 1325 cercles + 198° 49′ 17″,75. En retranchant cela du mouvement séculaire de la lune en longitude = 1336 c. 10^{s} 7° 52′ 43″,5 (§. 188.), il viendra le mouvement séculaire des apsides en longitude = 4069° 3′ 25″,75; et le mouvement sidéral = 4067° 39′ 55″,75. Les apsides font donc une révolution par rapport aux points équinoxiaux, en $\frac{1296000''.36525 \text{ jours}}{1464860575''}$ =

3231,461123868392 7 jours = 3231 j. 11 h. 4 m. 1,10222913 s.

et une révolution sidérale en

3232,566700702592 1 jours = 3232 j. 13 h. 36 m. 2,940704 s.

d'où l'on conclura

la durée d'un *mois anomalistique* =

27,554552536381 5 jours = 27 j. 13 h. 18 m. 33,33914336 16 s.

L'*époque* ou la longitude moyenne du *périgée* est, suivant les mêmes tables, pour le commencement du siècle présent, c'est-à-dire, pour le minuit moyen de Paris, par lequel commence le 1 Janvier 1801, = 8^{s} 26° 6′ 36″,4.

Les moyens mouvemens, adoptés par Ptolémée (*Almag. Lib. IV. C. 3.*), donnent la durée du mois anomalistique plus grande de 7 secondes.

Ce mouvement uniforme ou moyen des apsides est combiné avec un autre mouvement très-inégal, que Ptolémée découvrit le premier, et qui va être expliqué. Par cette raison il est nécessaire de déterminer le mouvement moyen que nous venons de trouver, par des observations fort éloignées l'une de l'autre, afin que, dans ce long intervalle, les inégalités périodiques se compensent les unes les autres, ou qu'elles soient insensibles.

CHAPITRE IV.

Les équations de la longitude de la lune.

§. 195. L'équation de 5° ayant été conclue par Hipparque et Ptolémée des éclipses seules (§. 192.), elle ne pouvait indiquer que les inégalités de la lune dans les syzygies, l'équation du centre étant en même tems un *maximum*, c'est-à-dire, les lignes des apsides et des syzygies étant perpendiculaires l'une à l'autre. Ptolémée fut le premier qui observa la lune hors des syzygies, en se servant d'un instrument qu'il avait imaginé exprès pour cet usage (1); et ces observationt lui apprirent, que la plus grande équation de 5°, appliquée suivant la théorie de l'épicycle, ne satisfaisait pas aux observations hors des syzygies; que l'erreur de ce calcul, qu'on pouvait regarder comme une seconde équation, confondue avec la première de 5°, augmentait à mesure que la lune s'éloignait des syzygies, et qu'elle était un *maximum* dans les quadratures, où la première équation était la plus grande, et que par conséquent la lune était également 90° des apsides, ensorte que les apsides coincidaient avec les syzygies; mais que dans les quadratures où, la lune étant aux apsides, la première équation s'évanouit, la seconde était aussi nulle, ensorte que le calcul suivant la première équation se trouva juste, aussi bien que dans les syzygies; d'où il résulta, que l'équation de 5° était en général conforme aux observations, lorsque les lignes des apsides et des syzygies étaient perpendiculaires l'une à l'autre (2). Ces circonstances sont parfaitement d'accord avec la théorie moderne, suivant laquelle cette seconde équation est fonction de sin $(\mu - 2\eta)$, μ étant l'anomalie mo-

(1) *Almag. Lib. V. Cap.* 1.

(2) *Almag. Lib. V. Cap.* 2.

yenne de la lune, et η son élongation du soleil. Dans les quadratures, η est 90° ou 270°, donc $2\eta = 180°$, et $\sin(\mu - 2\eta) = -\sin\mu$, ce qui est nul, lorsque $\mu = 0$ ou $\mu = 180°$, mais un *maximum*, si $\mu = 90°$ ou $\mu = 270°$.

Ptolémée trouva de la manière suivante, que cette seconde inégalité était de 2°40′. Une observation (1) lui donna la longitude vraie du soleil $= 10^s\,18°\,50'$, celle de la lune $= 7^s\,9°\,40' = C$. Les mouvemens moyens étant connus, il calcula pour cette époque, les longitudes moyennes du soleil $= 10^s\,16°\,27' = M$, de la lune $= 7^s\,17°\,20' = L$, et l'anomalie moyenne de la lune $= 87°\,19' = \mu$, d'où il résulta la première équation $= -4°\,58'$. Or la somme des deux équations était $C - L = -7°\,40'$, donc la seconde équation $= -2°\,42'$, ce qui était son *maximum*, parceque $M - L = 89°\,7' = -\eta$, et que par conséquent la lune était dans sa dernière quadrature; $\mu - 2\eta$ étant 265°33′, $\sin(\mu - 2\eta)$ était à très-peu-près $= -1$. En prenant le milieu de plusieurs observations semblables, Ptolémée trouva le *maximum* $= 2°\,40'$.

La première équation était donc un *minimum* $= 5°$ dans les syzygies, elle montait à 7°40′ dans les deux quadratures. Il fallut en conclure, que la cause qui augmentait la première équation dans les quadratures, devait la diminuer de la même quantité dans les syzygies, et que par conséquent, elle devait avoir sa véritable valeur moyenne entre ces deux aspects, c'est-à-dire dans les octants. Il en résulta, que la seconde équation avait sa plus grande valeur *positive*, lorsque les syzygies coincidaient avec les apsides, qu'elle avait la plus grande valeur *négative*, quand les lignes des syzygies et des apsides étaient perpendiculaires l'une à l'autre, et qu'elle était *nulle*, lorsque ces deux lignes faisaient un angle de 45°. En nommant donc la première équation g, la seconde h, on a $g + h = 7°\,40'$, $g - h = 5°$, donc $g = 6°\,20'$, $h = 1°\,20'$. Ptolémée trouva le même résultat par le procédé suivant.

La première équation, étant celle du centre, est nécessairement un *maximum*, lorsque l'anomalie est $\pm 90°$, ou que la droite qui joint la terre et la lune, Tt (*Fig.* 50.), est tangente à l'épicycle. Or cette équation $CTt = g$ étant variable, à cause de la seconde équation, de 5° à 7°40′, il s'en suit,

(1) *Alm. L. V. Cap.* 3.

qu'en nommant le rayon de l'épicycle $Ct = c$, celui du cercle *déférent* $TC = a$, donc $\sin g = \frac{c}{a}$, le rayon a est variable, parceque suivant l'hypothèse de l'épicycle, c est constant: en d'autres mots, la terre n'est pas dans le centre du *déférent*, ou le centre C de l'épicycle décrit la circonférence d'un cercle excentrique. Ainsi la *première* inégalite est expliquée par l'*épicycle*, la *seconde* par l'*excentrique*. Si la lune est 90° des apsides et des syzygies, l'équation g est un *maximum*, donc a un *minimum*, ou le centre de l'épicycle est dans le périgée de l'excentrique; mais la lune étant dans les syzygies, g est un *minimum*, a un *maximum*, et C dans l'apogée: d'où il suit, que l'épicycle C passe du périgée à l'apogée dans le quart d'un mois, et qu'il fait une révolution dans un demi-mois synodique. Supposons donc, que C ait été dans l'apogée de l'excentrique, et que la lune ait été à la fois en conjonction avec le soleil, et dans la ligne des apsides de l'épicycle LMT: cela posé, au bout d'un demi-mois synodique, l'épicycle C sera encore dans l'apogée, la lune étant opposée au soleil, et avancée d'à peu près 13° au delà des apsides de l'épicycle, à cause de la différence des mouvemens anomalistique et synodique. Pour expliquer toutes ces inégalités de la lune, Ptolémée employa le procédé suivant (1).

Soit (*Fig.* 52.) T la terre, ♈T♎ la ligne des équinoxes, supposée immobile, et A♋♎♑ un cercle concentrique à l'écliptique, dont le centre est en T. Soit sur TA le centre du cercle excentrique ADP en E, A et P étant l'apogée et le périgée de l'excentrique, sur la circonférence duquel le centre C de l'épicycle CFG fait une révolution suivant la direction CD, dans un mois périodique, tandis que la lune parcourt, dans un mois anomalistique, la circonférence de l'épicycle suivant la direction CG (§. 191.). Supposons qu'au commencement de l'époque, l'apogée A ou le centre E de l'excentrique, le centre C de l'épicycle, le noeud ascendant, la lune, et le soleil, aient tous été sur la ligne T♈, la lune étant en conjonction, dans le noeud ascendant, et dans l'apogée, la plus grande équation g ou l'excentricité $\frac{c}{a}$ étant un *minimum* $= 5°$, et les longitudes du soleil et de la lune $= 0$.

(1) *Alm. L. V. C.* 2.

Supposons qu'au bout de 24 heures tout ait pris la situation que présente la *Fig.* 53. Cela posé, $\Upsilon TC = \alpha = 13°\,10'\,35''$ sera le moyen mouvement périodique de la lune, $BC\mathfrak{C} = \beta = 13°\,3'\,54''$ le mouvement anomalistique, et $\Upsilon T\Omega$ le mouvement rétrograde des nœuds, qui est $3'\,11''$ par jour, ainsi qu'on le verra ci-après. Or on a vu, que l'épicycle C fait, dans un mois synodique, deux révolutions sur la circonférence de l'excentrique ACP, et que par conséquent il s'est éloigné de A du double du mouvement synodique, $ATC = \delta = 24°\,22'\,53''$: le mouvement rétrograde de l'apogée A de l'excentrique sera donc $= \delta - \alpha = 11°\,12'\,18''$.

Dans les quadratures, C est dans le périgée P, et la plus grande équation LTP devient un *maximum* $= 7°\,40'$; mais si la lune est en même tems sur la ligne des apsides TPQ, toute l'équation g est nulle, quelle que soit la distance CT. Dans les syzygies, C est dans l'apogée A, l'équation g devient un *minimum* $= 5° = ATD$, et l'excentricité $\frac{AD}{AT} = \sin 5° = 0{,}0869405 = \gamma$; mais en P, l'excentricité est $\frac{LP}{TP} = \sin 7°\,40' = 0{,}1334096 = \lambda$. En nommant donc

le rayon de l'excentrique, $AE = PE = a$,

le rayon de l'épicycle, $LP = AD = C\mathfrak{C} = c$, et $ET = e$, on aura

$$c = (a+e)\gamma = (a-e)\lambda;$$ d'où l'on tire

$$\frac{e}{a} = \frac{\lambda-\gamma}{\lambda+\gamma} = 0{,}2108875,$$

$$\text{et } a+e = \frac{2\lambda a}{\lambda+\gamma}, \text{ donc}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{2\gamma\lambda}{\lambda+\gamma} = 0{,}1052751 \ (^1).$$

La seconde inégalité étant la plus grande en A et P, positive en P, négative en A, elle sera nulle 90° de A et P, la lune étant dans les octants: c'est donc là qu'on trouvera la première inégalité g seule. Ayant donc élevé TC perpendiculairement à AP, on aura $\sin g = \frac{c}{TC}$ et $TC^2 = AT \cdot PT = (a+e)(a-e)$, ou $\frac{TC}{a} = \sqrt{\left(1+\frac{e}{a}\right)\left(1-\frac{e}{a}\right)} = 0{,}97751$; donc $g = 6°\,11'$, ce qui est l'équation du centre dans les octants; la valeur moyenne entre la plus grande et la plus petite équation du centre, $7°\,40'$ et $5°$, étant $g = 6°\,20'$. C'est la véritable *équation du centre*, ou la *première* inégalité de la lune; elle

(1) *Alm. L. V. C.* 4.

est suivant Ptolémée $= 6°20'$, suivant Mayer $= 6°18'33''$. Elle change, en vertu de la *seconde* inégalité que les astronomes modernes ont appelée *Evection*, de 5° à 7°40′: l'évection est donc suivant Ptolémée $= 1°20'$, suivant Mayer $= 1°20'34''$. La grande précision, avec laquelle Ptolémée a déterminé ces deux inégalités principales de la lune, est vraiment étonnante. Il faut cependant remarquer, qu'il suivait nécessairement de sa manière d'observer, que sa détermination de chacune de ces deux équations en particulier était défectueuse. Suivant les recherches modernes, l'évection est à peu près $= +8o' \sin(\mu - 2\eta)$, l'équation du centre $= -6°19' \sin \mu$. Dans les syzygies on a $2\eta = o$, dans les quadratures $2\eta = 180°$. Les anciens, en n'observant que les éclipses ou les syzygies, devaient trouver l'équation de la lune $= -6°19' \sin \mu + 8o' \sin \mu = -5° \sin \mu$, d'où il résulta la plus grande équation $= 5°$. Or Ptolémée prenant cette valeur pour base de ses observations de la lune dans les quadratures, où l'équation est $= -6°19' \sin \mu - 8o' \sin \mu = -7°40' \sin \mu$, il trouva la seconde équation ou l'évection $= 7°40' - 5° = 2°40'$.

§. 196. Par le moyen de ces deux équations, Ptolémée parvint à accorder les observations avec sa théorie, aussi bien dans les quadratures que dans les syzygies; mais dans les autres aspects, principalement dans les octants, la lune étant en même tems dans les apsides, il se trouva encore une différence considérable. Ayant examiné avec soin cette nouvelle inégalité, il crut y satisfaire par l'hypothèse suivante. Il avait supposé, que le centre de l'épicycle C tournait autour de la terre T suivant l'ordre des signes, au lieu que la lune parcourait l'épicycle contre l'ordre des signes, depuis l'apogée B suivant BC, et que les deux mouvemens étaient uniformes. Cela posé, Ptolémée supposa encore, que le point B, qui n'est le vrai apogée que lorsque C coincide avec l'apogée A de l'excentrique, avait aussi un mouvement rétrograde vers F, ensorte que la droite FC, dont la lune s'éloigne d'une manière uniforme, ne passait plus par T, mais par un point G, aussi éloigné de T, que T l'est du centre E (*Fig.* 54.). Il fonda cette hypothèse sur une observation d'Hipparque, qui donna les longitudes vraies du soleil $= 1^s 7°45'$, de la lune $= 11^s 21°28' =$ C, les longitudes moyennes du soleil $= 1^s 6°41' =$ M, de la lune $= 11^s 22°13' =$ L, et l'anomalie moyenne de la lune $= 185°30' = \mu$.

Le lieu moyen de la lune était donc sur TC, et ayant fait CT☾ = L − ☾ = 45′, la lune était en ☾. Or le centre C s'éloignant de A avec une vitesse deux fois plus grande que le mouvement synodique (§. 195.), on a ATC = 360° − 2(L − M) = 88° 56′, et suivant la dernière hypothèse, FcH☾ = μ, donc GC☾ = μ − 180° = 5° 30′. Connaissant dans le triangle CTE, CE = *a*, TE = *e*, CTE = 88° 56′, on trouve TC = *a*. 0,9814439. Maintenant on connaît dans le triangle CT☾, TC, C☾ = *c*, CT☾ = 45′, d'où l'on tire TC☾ = 6° 16′, ou suivant Ptolémée 6° 21′. Connaissant donc dans le triangle TCG, TCG = TC☾ + GC☾ = 11° 46′, CTG = 180° − CTA = 91° 4′, et TC, on trouve TG = *a*. 0,20527 à peu près égale à ET = *e* (§. 195.). D'autres observations lui donnèrent le même résultat (1).

Il s'en suivait, que le vrai mouvement des apsides autour de T n'était pas uniforme, mais qu'il avait besoin d'une correction, donnée par l'angle LCH. En effet, si l'on nomme la longitude moyenne de la lune = A, son anomalie moyenne = B, la longitude vraie de l'apogée = C; on a constamment B = A − C, ou C = A − B, donc le mouvement de l'apogée = A − B = ♈TC − BC☾ (*Fig.* 53.) (§. 195.). Mais suivant l'hypothèse de Ptolémée, que le mouvement anomalistique est uniforme relativement au point F, B ne sera plus égal à BC☾, mais B = FC☾, donc le mouvement vrai de l'apogée = A − B = ♈TC − FC☾, et la correction des apsides = (♈TC − FC☾) − (♈TC − BC☾) = BC☾ − FC☾ = BCF = TCG, ou = LCH (*Fig.* 54.). Cet angle devient un *maximum*, lorsque CT est perpendiculaire à AT, c'est-à-dire dans les octants, vu que ATC est le double de la distance de la lune aux syzygies. Alors on a $\sin LCH = \frac{TG}{CG}$, et CG = CE, donc $\sin LCH = \frac{e}{a}$, et LCH = 12° 11′; ce qui est parfaitement d'accord avec la théorie moderne. Suivant Ptolémée, cette correction des apsides, tantôt positive tantôt négative, monte à 13° 9′. Comme il n'avait employé pour ces observations, que les octants, où la lune était en même tems dans les apsides, ensorte que le double de la distance du soleil aux apsides de la lune était également 90°, l'argument de cette correction pou-

(1) *Alm. L. V. C.* 5.

vait être deux fois la distance du soleil à la lune ou à ses apsides. Ptolémée choisit le premier; mais la théorie et les observations modernes ont donné le résultat, que l'équation des apsides dépend de deux fois la distance du soleil à l'apogée de la lune, et que sa plus grande valeur est de 12° à 13°. Ptolémée a donc déterminé cette correction avec une grande précision, mais il en a donné une explication qui n'est pas juste. Il l'appelle la *correction, tantôt positive tantôt négative, de l'apogée de l'excentrique* (1). Il paraît que la plupart des astronomes modernes ne s'en sont pas aperçus, puisqu'ils en parlent comme d'une découverte du 17me siècle, due à la mesure du diamètre de la lune (2).

§. 197. Les astronomes modernes ont trouvé, par les recherches les plus soignées, les deux premières inégalités de la lune, à très-peu près telles que Ptolémée les avait déterminées; et la petite différence est plutôt le résultat de la théorie de l'attraction que des observations. L'équation elliptique ou du centre est, suivant les tables de M. Bürg, 6°18′28″, l'évection 1°20′30″, donc la plus grande valeur des deux inégalités réunies 7°39′, de 1′ plus petite que suivant Ptolémée. L'équation 6°18′28″ donne (§. 140. VIII.) l'excentricité $\gamma = 0{,}0550266$.

Dans les tems modernes, la mesure exacte du diamètre de la lune avec les micromètres, a servi à déterminer avec une grande précision le vrai lieu et le mouvement vrai des apsides de la lune: et sa comparaison avec le mouvement moyen qui est exactement connu, a indiqué d'une manière fort simple, que le lieu vrai des apsides est plus ou moins avancé que le lieu moyen, mais tout au plus de 12°18′. Cette différence est nulle, si le soleil est dans la ligne des apsides de la lune, ou s'il en est éloigné de 90°; elle est un *maximum*, lorsque le soleil est éloigné des apsides de 45°. Or comme cela peut arriver de quatre manières, on a observé, que la correction est positive, c'est-à-dire que l'apogée vrai est plus avancé de 12°18′ que le lieu moyen, lorsque la longitude du soleil est plus grande de 45° ou de 225° que celle de l'apogée de la lune, mais que la correction

(1) ἐκκέντρου προσθαφαίρεσις ἀπογείου (*Alm. L. V. C. 7. Colonne 3. de la Table, pag. 317.*)
(2) *Astronomie par Lalande, Tom. II. §. 1431. 1437. pag. 162. 165. édit. 3.*

est négative, quand cette différence est de 135° ou de 315°. Il est aisé de voir, que c'est parfaitement d'accord avec l'hypothèse de Ptolémée, suivant laquelle les lieux vrai et moyen de l'apogée sont sur les lignes TCc et GCF (*Fig.* 54.): le lieu vrai est donc moins avancé que le lieu moyen, comme dans la *figure,* dans le dernier demi-cercle PCA, c'est-à-dire dans le second et le quatrième *quadrans* de la distance du soleil à l'apogée de la lune, parceque le mouvement de l'épicycle C sur la circonférence de l'excentrique est le double du mouvement synodique (§. 195.); dans l'autre demi-cercle, c'est-à-dire dans le premier et le troisième *quadrans* de cette distance, le lieu vrai est plus avancé que le lieu moyen. Il est aussi aisé de voir, que cette correction est intimement liée avec l'évection. Il suit de ce qui précède, que l'une et l'autre dépendent de la distance du soleil à l'apogée de la lune, de la manière suivante. En nommant cette distance $= \alpha$, l'apogée de la lune $=$ A, sa correction $=$ B, la correction de l'équation du centre $=$ E, on a vu que, α étant 0 ou 180°, B est nul et E un *maximum* positif; que α étant 90° ou 270°, B est nul et E un *maximum* négatif; que α étant 45° ou 225°, B est un *maximum* positif et E nul; qu'enfin α étant 135° ou 315°, B est un *maximum* négatif et E nul (§. 195. 196.), ainsi que le présente la table suivante, dans laquelle le *maximum* positif et négatif est désigné par + M et — M.

α	B	E	α
0	0	+ M	180°
45°	+ M	0	225°
90°	0	— M	270°
135°	— M	0	315°

Il ne sera pas inutile d'observer, qu'il ne faut pas confondre l'évection dans le sens de Ptolémée qui la regarda comme une correction de la *plus grande* équation, avec l'évection des modernes qui la regardent comme une équation particulière de la longitude, ou comme une correction générale de l'équation du centre. Dans le premier sens, elle est un *maximum* chaque fois

que α devient $= n \cdot 90°$, n étant un nombre entier quelconque; mais sous le second point de vue, elle ne peut avoir aucun effet, si l'équation du centre qu'elle est destinée à corriger, est elle-même nulle, ou si la lune est dans les apsides: il est donc clair, que l'évection doit dépendre non seulement de α, mais aussi de l'anomalie. Il en sera parlé ci-après.

Les équations B et E sont des fonctions de α, qui ont les mêmes valeurs pour α et pour $180° + \alpha$; d'où il suit que ce sont des fonctions de $\sin 2\alpha$, parceque $\sin 2\alpha = \sin 2(180° + \alpha)$.

La plus grande valeur de B est 12° 18′ ou 12° 11′ (§. 196.): d'où l'on tire (§. 195.)

$$\sin B = \frac{e}{a} = \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} = \frac{\sin 7°40' - \sin 5°}{\sin 7°40' + \sin 5°} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(7°40' - 5°)}{tg\,\frac{1}{2}(7°40' + 5°)},$$

ou en nommant l'équation du centre, $6° 20' = g$, et l'évection, $1° 20' = h$,

$$\sin B = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, g}, \text{ ou à peu près } \sin B = \frac{b}{g};$$

ce qui fait voir clairement l'intime liaison qui existe entre l'évection et l'équation des apsides. En effet, pour expliquer cette dernière suivant la méthode de Ptolémée, par un mouvement circulaire, soit (Fig. 55.) T la terre et le foyer ou le point excentrique de l'orbite lunaire, C son centre, T A la position moyenne de l'apogée, et T C l'excentricité moyenne $\gamma = 0,0550266$. Supposons que le vrai centre de l'orbite ne soit pas en C, mais qu'il décrive un cercle A E B F autour de C, ensorte que l'équation B soit un *maximum*, lorsque le centre est en E ou F, T E, T F étant tangentes au cercle E F. Cela posé, on a $B = C T E$, donc $\sin B = \frac{CE}{CT} = \frac{b}{g}$, et $CE = \frac{b}{g}\gamma$. En regardant l'évection h, simplement comme une correction de *la plus grande* équation g ou de l'excentricité γ, et en nommant la plus grande valeur de cette équation variable, $7° 40' = G$, on aura $G = g + h$, donc $CE = \left(\frac{G}{g} - 1\right)\gamma$. Or l'équation du centre étant à peu près en raison de l'excentricité, soit Γ la plus grande valeur de l'excentricité modifiée par l'évection: alors on aura $CE = \left(\frac{\Gamma}{\gamma} - 1\right)\gamma = \Gamma - \gamma = TA - TC = CA$. Le rayon CA du cercle que décrit le centre de l'orbite lunaire, est donc égal à la plus grande variation de l'excentricité ou de l'équation du centre, ou plutôt, il est à l'excentricité moyenne $TC = 0,0550266$ comme l'évection 1° 20′ est à l'équation

du centre 6°20′. Il paraît qu'on n'a pas toujours fait attention à ces conclusions qui se tirent si facilement des découvertes de Ptolémée.

§. 198. Suivant cette hypothèse on a

$$CTE = B = 12°18', \quad CT = \gamma = 0,0550266; \text{ et}$$

$$CE = CA = \gamma \sin 12°18' = 0,0117221 = \delta.$$

Lorsque le centre de l'orbite est dans un autre point D, l'équation des apsides $ATD = B$ dépend de l'angle ACD, et l'on a $\text{tang}\, B = \frac{\delta \sin ACD}{\gamma + \delta \cos ACD}$. Cette équation est nulle, lorsque $ACD = 0$ ou $180°$; elle devient un *maximum*, si $\cos ACD = -\frac{\delta}{\gamma} = -\cos 77°42'$, d'où il suit $ACD = 180° \pm 77°42'$; $ACD = 102°18'$ donnant à B sa plus grande valeur *positive*, et $ACD = 257°42'$ sa plus grande valeur *négative*. En comparant ce résultat avec la table (§. 197.), on voit qu'en général il faut faire $ACD = 2\alpha$, d'où il vient

$$\text{tang}\, B = \frac{\delta \sin 2\alpha}{\gamma + \delta \cos 2\alpha}, \text{ et } TD = \sqrt{(\gamma^2 + \delta^2 + 2\gamma\delta \cos 2\alpha)} = \frac{\delta \sin 2\alpha}{\sin B},$$

ce qui donne la correction de l'excentricité $= TD - \gamma$. Cette correction est nulle, si $TD = \gamma$, ou $\cos 2\alpha = -\frac{\delta}{2\gamma}$, ce qui donne à peu près, $\alpha = 48°$, $\alpha = 132°$, $\alpha = 228°$, $\alpha = 312°$: elle est un *maximum* positif, lorsque D tombe en A, α étant 0° ou 180°, un *maximum* négatif, si D tombe en B, α étant 90° ou 270°. En faisant $\frac{\delta}{\gamma} = \varepsilon = 0,213$; on aura $\sin B = \frac{\varepsilon \sin 2\alpha}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon \cos 2\alpha + \varepsilon^2)}}$, $TD = \gamma . \sqrt{(1 + 2\varepsilon \cos 2\alpha + \varepsilon^2)}$, ou à peu près $TD = \gamma (1 + \varepsilon \cos 2\alpha)$, la correction de l'excentricité, $E = \delta \cos 2\alpha$, et son accroissement $= -2\delta\partial\alpha \sin 2\alpha$; ce qui est conforme à la table (§. 197.).

Ayant ainsi trouvé pour une époque donnée, c'est-à-dire pour la distance α du soleil au lieu moyen C de l'apogée de la lune, la vraie excentricité TD et la correction de l'apogée ATD; on connaît la longitude vraie de l'apogée, TD, et par conséquent l'anomalie moyenne corrigée; d'où l'on conclura l'équation du centre corrigée, et la longitude vraie de la lune. C'est la méthode dont on se servait autrefois, mais que la longueur du calcul a fait abandonner. Comme il ne s'agit que de trouver la correction de la longitude de la lune, on n'a pas besoin de l'équation des apsides, et l'on emploie actuellement l'approximation suivante.

Suivant l'hypothèse elliptique simple (§. 141.(1)), on a $\text{tang}\, \frac{g}{2} = \frac{\gamma \sin \mu}{1 + \gamma \cos \mu}$, μ, v, étant les anomalies moyenne et vraie, et $\mu - v = g$ l'équation du centre.

Si la lune est en L (*Fig.* 55.), on peut supposer, sans erreur sensible, CL égal à la distance moyenne, ce qui donne $\frac{CT}{CL} = \gamma$, et dans le triangle LCT, $\text{tang}\,L = \frac{\gamma \sin LCT}{1 - \gamma \cos LCT}$. Mais ACL est l'anomalie moyenne μ, d'où il vient $\text{tang}\,L = \frac{\gamma \sin \mu}{1 + \gamma \cos \mu}$, donc $L = \frac{g}{2}$. Si le vrai centre de l'orbite n'est pas en C mais en D, l'angle L ou $\frac{g}{2}$ se change en $DLT = \frac{g'}{2}$; on a donc $\frac{g' - g}{2} = \frac{\partial g}{2} = CLD$. Mais $\sin CLD = \frac{CD}{DL} \sin DCL$, CD étant constant, et DL ne changeant que fort peu, parceque CD est fort petit par rapport à CL: en faisant donc $\frac{CD}{DL} = n$, et $\sin CLD = CLD$, on aura $2\,CLD = \partial g = 2n \sin DCL$, dont la plus grande valeur $= 2n$ a lieu, lorsque $DCL = 90°$; ensorte que la plus grande et la plus petite valeur de l'excentricité seront, $G = g + 2n$, et $H = g - 2n$. Or on a vu que $G = 7°40'$ et $H = 5°$, d'où il suit $2n = \frac{G - H}{2} = 1°20'$, et l'évection $\partial g = 80' \sin DCL$. Mais $DCL = ACL - ACD = \mu - 2\alpha$, donc $\partial g = 80' \sin(\mu - 2\alpha)$. En nommant ☾, ☉, les longitudes moyennes de la lune et du soleil, et $\eta = ☾ - ☉$ l'élongation de la lune du soleil, on a $\alpha = ☉ - \text{apogée}\ ☾ = ☉ - (☾ - \mu) = \mu - \eta$, et $\mu - 2\alpha = 2\eta - \mu$. On peut donc donner à l'évection ces deux formes,

$$\partial g = 80' \sin(\mu - 2\alpha), \text{ ou } \partial g = 80' \sin(2\eta - \mu). \text{ (Voy. §. 195.)}$$

Nous avons supposé que l'anomalie, comptée de l'apogée, est plus petite que 180°, et que par conséquent $\mu > v$: d'où il suit que, le lieu moyen étant donné, ce qui est le cas supposé dans les tables, il faut retrancher l'évection ∂g du lieu moyen de la lune, ou du lieu corrigé par l'équation elliptique du centre; on aura donc $\partial g = -80' \sin(\mu - 2\alpha) = -80' \sin(2\eta - \mu)$. Si les anomalies sont comptées du périgée, l'évection prendra le signe +. La dernière forme est celle qu'on a adoptée dans les tables; et sa valeur exacte, conclue des observations et de la théorie de l'attraction, est suivant les tables de M. Bürg, $= +80'29'',5 . \sin(2\eta - \mu) + 35'',4 . \sin 2(2\eta - \mu)$ (1).

L'évection est l'effet le plus considérable de l'action du soleil sur la lune: elle est donc fondée sur des principes de physique, mais les observations depuis Ptolémée en ont donné une preuve empirique. L'évection n'est

(1) Voy. *Tables astron. publ. par le bureau des long. de France. Part. I. Tab. XII. de la Lune.*

pas la correction de *la plus grande* équation du centre, que présente la table (§. 197.), et qui dépend de α seul; mais la correction du centre *en général*, ou de la longitude de la lune, quelle que soit son anomalie: elle dépend donc nécessairement de deux argumens, 1) de la valeur de l'excentricité, ce qui donne l'argument α, 2) de l'anomalie μ; d'où il résulte l'argument composé $\mu - 2\alpha$.

§. 199. Les tables calculées sur les formules précédentes de l'équation du centre et de l'évection, devraient satisfaire à toutes les observations, si c'étaient les seules inégalités de la lune. Mais on ne tardait pas à apercevoir, que ce n'était pas le cas; et il était aisé de découvrir les nouvelles inégalités, parce que la plus considérable d'elles a lieu dans les aspects, où l'évection est nulle. Quand la ligne des apsides est dans les octants, en faisant avec les syzygies et les quadratures des angles de 45°, la correction E est nulle (§. 197.), et l'excentricité a sa valeur moyenne: or la lune étant alors, dans les syzygies et quadratures, éloignée de 45° des apsides, elle devrait avoir, dans ces deux aspects, la même équation du centre et la même vitesse. Soit (*Fig.* 56.) la terre en T, le soleil sur la ligne Tδ; AP, MN, EF, seront les lignes des apsides, des quadratures, et des distances moyennes, formant entre elles des angles de $45° = \alpha$. La lune étant en δ, l'anomalie est $\mu = \alpha$, et l'argument de l'évection, $\mu - 2\alpha = -\alpha$; donc l'évection $\partial g = -8'' \sin \alpha$. Dans le dernier quartier M, μ est $180° + PTM = 180° + 3\alpha$, $\mu - 2\alpha = 180° + \alpha$, $\partial g = -8'' \sin \alpha$; dans le premier quartier N, on a $\mu = 90° + \alpha$, $\mu - 2\alpha = 90° - \alpha$, $\partial g = +8'' \cos \alpha$; enfin dans l'opposition δ, μ est $180° + \alpha$, $\mu - 2\alpha = 180° - \alpha$, $\partial g = +8'' \sin \alpha = +8'' \cos \alpha$. L'évection est donc la même, aux signes près, dans tous ces quatre points.

Cependant Tycho, à qui l'on doit cette découverte, remarqua que la vitesse de la lune était sensiblement plus grande en δ qu'en M; qu'elle continuait de δ jusqu'à E, ensorte que le lieu calculé de la lune était le plus avancé à égales distances de δ et N en E; et que cette différence montait à 37′ 4″. Ayant observé la lune en différens points de son orbite, il aperçut que cette correction ne dépendait pas de la position des apsides, mais seulement de l'élongation de la lune du soleil η. Elle était un *maximum* po-

sitif dans les octants E, F, qui viennent immédiatement après les syzygies, η étant 45° et $180° + 45°$; un *maximum* négatif dans les octants A, P, qui précèdent les syzygies, η étant $360° - 45°$ et $180° - 45°$; elle était nulle dans les syzygies et quadratures, où η est 0, 180°, 90°, ou 270°; et c'est par cette raison qu'elle avait été inconnue aux anciens qui n'observaient que les syzygies ou les quadratures. Ainsi donc que Ptolémée avait découvert l'évection par le moyen des quadratures, Tycho, en observant les octants, découvrit celle nouvelle inégalité qu'il appela la *Variation*: Mayer lui a trouvé la même valeur de $37' 4''$.

Il suit de ce qui précède, que la variation peut être exprimée par $+ 37' 4''.\sin 2\eta$. Elle est, ainsi que l'évection et toutes les équations dont il sera parlé ci-après, l'effet de l'attraction du soleil, et suivant les tables de M. Bürg,

$$= -2' 2'', 1.\sin\eta + 35' 41'', 7.\sin 2\eta + 3'', 3.\sin 3\eta + 7'', 3.\sin 4\eta.$$

Cette expression devient un *maximum*, lorsque $\eta = 135°$ et $\eta = 225°$, savoir $\mp 37' 6''$, comme Tycho l'avait trouvée. La variation est renfermée dans la *Table XXXIV* de M. Bürg.

§. 200. Après avoir corrigé le lieu de la lune par les trois équations précédentes, les astronomes devaient être étonnés d'apercevoir, que le calcul était bien d'accord avec les observations à la fin de Juin et de Décembre, mais non pas dans les autres saisons, principalement vers les équinoxes. Tycho s'en aperçut, mais ni lui ni Kepler n'en ont déterminé la grandeur: ces astronomes pensaient, que c'était une équation du tems, particulière à la lune. C'est aussi sous cette forme, que Horrockes l'inséra dans ses tables, en déterminant sa valeur, telle qu'elle a été trouvée par observation et par la théorie de l'attraction, savoir de $11' 16''$.

La première remarque qu'on dut faire, c'est que cette inégalité, qui se règle sur les saisons, et qui a pour période l'année solaire, ne dépend pas de l'orbite de la lune, mais de celle de la terre, et spécialement de l'anomalie du soleil: Kepler qui s'en douta, lui donna le nom de *l'équation annuelle* qu'elle a conservé. La seconde remarque fut qu'en hiver, où le mouvement du soleil est le plus rapide, la lune était retardée, ou moins avancée dans son orbite,

au lieu qu'elle était plus avancée, et son mouvement plus rapide, en été où celui du soleil est le plus lent: d'où il suit que l'équation annuelle doit avoir le même argument que l'équation du centre du soleil, mais avec le signe opposé. Depuis que Newton eut prouvé, que l'action du soleil est la source de toutes les inégalités de la lune, il était naturel de présumer, que cette action devait être plus et moins grande selon la distance du soleil, d'où il devait résulter une nouvelle équation, dépendant de l'anomalie du soleil, ou l'équation annuelle de la lune. En nommant a l'anomalie moyenne du soleil, comptée du périgée, l'équation annuelle est suivant M. Bürg (*Tab. VII.*) $= -11'11'',8 . \sin a - 6'' . \sin 2a$: elle est donc nulle, quand le soleil est dans les apsides; elle est un *maximum* positif ou négatif, $= 11'12''$, lorsque $a = 271°1'53''$ ou $a = 88°58'7''$.

L'équation elliptique du soleil étant $= +115'22'' . \sin a +$ cet. (§. 139.), le soleil approche ou s'éloigne de la lune, c'est-à-dire les syzygies arrivent plutôt ou plus tard que les syzygies moyennes, de l'angle $(115'22'' + 11'12'') \sin a$, ce qui fait $126'34''$, lorsque a est 90° ou 270°, au commencement du printems et de l'automne. Les anciens qui ne se doutaient pas du terme $11'12'' \sin a$, particulier à la lune, attribuèrent cette accélération ou retardation au soleil seul: il était donc naturel, qu'ils trouvèrent l'équation du centre du soleil trop grande (§. 89.), parceque leurs observations des syzygies la donnaient confondue avec l'équation annuelle. Par une raison semblable ils trouvèrent l'équation du centre de la lune trop petite (§. 195.).

§. 201. Les quatre équations précédentes, les seules que les observations aient fait connaître, sont appelées les quatre *grandes* inégalités de la lune. La première, l'*équation du centre*, provient uniquement du mouvement elliptique de la lune suivant les lois de Kepler, ainsi que celle des planètes: son argument est l'anomalie moyenne μ, sa plus grande valeur 6° 18′ 28″, sa période est le mois anomalistique.

La seconde, l'*évection* est, ainsi que toutes les suivantes, l'effet des perturbations causées par le soleil. Sa plus grande valeur est 1° 20′ 30″, son argument $2\eta - \mu = \mu - 2\alpha$. Les mouvemens diurnes, synodique et anomalistique, étant $\eta = 12° 11' 26'',7$ (§. 188.) et $\mu = 13° 3' 54''$ (§. 194.), le mouvement diurne de l'évection $2\eta - \mu$ est 11°18′59″,4; ce qui est à 360°, comme 1 jour est à 31 j. 19 h. 26 m. 24 s. période de l'évection.

La troisième inégalité, la *variation*, a pour argument ce qu'on appelle l'*âge* de la lune, η. Elle dépend des phases de la lune, sa période est le mois synodique, et sa plus grande valeur $37' 6''$.

La quatrième, ou l'*équation annuelle*, a pour argument l'anomalie moyenne du soleil a: sa période est l'année anomalistique, et sa plus grande valeur $11' 12''$.

Une période, composée des quatre précédentes, étant un multiple de chacune d'elles, serait celle des quatre grandes équations, au bout de laquelle toutes les quatre inégalités, s'étant compensées mutuellement, vont commencer dérechef, ensorte que pendant cette période, on peut regarder le résultat des quatre inégalités comme une seule. Mais une pareille période, pour être exacte, devrait être d'une longueur excessive, et n'aurait aucune utilité. On peut cependant se servir d'une pareille période, pour vérifier la theorie d'une ou de deux inégalités par les observations: telle serait la période *Caldaïque* (§. 189.), pour vérifier à la fois la première et la troisième inégalité.

§. 202. La grandeur et la période des quatre inégalités précédentes sont trop sensibles, pour pouvoir échapper aux astronomes. On les découvrit naturellement là où elles parvenaient à leur *maximum*; ce qui fit connaître en même tems leur période ou leur argument, et leur plus grande valeur ou le coefficient constant de la formule, par laquelle elles sont exprimées. Mais il fallait des tatonnemens, et des hypothèses vérifiées par les observations, pour décider, si elles étaient proportionnelles au sinus, à la tangente, ou à telle autre fonction de l'argument; enfin l'astronomie physique à fait connaître ces fonctions *a priori*. Comme les argumens des trois dernières inégalités, qui sont composés de l'anomalie du soleil et de l'élongation de la lune du soleil, font voir que toutes ces corrections sont dues au soleil; cela donna lieu à la découverte de la théorie physique des perturbations de la lune par l'action du soleil. A l'aide des quatre inégalités précédentes on était parvenu à satisfaire aux observations à peu de minutes près: les inégalités qui étaient encore inconnues, ne pouvaient donc être que de $1'$ ou $2'$; elles étaient donc insensibles pour Ptolémée, qui ne pouvait répondre de ses observations qu'à $10'$ près. Mais les méthodes d'observer étant portées à une grande

perfection dans les temps modernes, une erreur de quelques minutes était trop considérable. Il fallut donc chercher de nouvelles inégalités de la lune, produites par l'action du soleil; et la découverte de ces petites corrections était longtems l'occupation principale des plus grands astronomes. On ne pouvait résoudre le problème à l'aide des observations seules qui, à la vérité, indiquaient l'existence de corrections encore inconnues, mais qui ne répandaient pas beaucoup de lumière sur leur nature. Ces corrections sont composées d'un grand nombre d'équations indépendantes, dont les périodes sont si différentes les unes des autres, que tous les essais, de découvrir l'ordre ou la loi qu'elles suivaient, étaient inutiles. D'ailleurs leur somme ne montait qu'à peu de minutes; et comme les erreurs des observations, affectées par la parallaxe et le diamètre de la lune, ainsi que par plusieurs autres élémens, inconnus ou dépendans de ces corrections mêmes, pouvaient se monter à plus de 1′, il était impossible qu'on parvînt par le seul moyen des observations, à décomposer l'ensemble de ces corrections en ses parties, qui étaient peut-être moins considérables que les erreurs d'observation. On eut donc recours à la théorie physique, ce qui fit naître la partie la plus difficile et la plus pénible de l'astronomie, la construction de tables exactes de la lune sur des principes de physique. Newton avait frayé le chemin, il s'était même occupé du calcul des inégalités de la lune, et plusieurs astronomes ont calculé sur ses formules des tables lunaires, qui étaient cependant loin d'être exactes. La théorie de la lune était donc encore un objet digne des soins des plus grands géomètres, tels que Dalembert, Clairaut, Euler, etc. L'an 1753 L. Euler publia sa première *Theoria motuum lunae*, et T. Mayer corrigea les tables données par Euler, en les comparant aux observations, ce qui lui fit découvrir plusieurs nouvelles équations; mais ni les tables de Mayer, ni les formules d'Euler, n'étaient entièrement satisfaisantes. En 1772 L. Euler publia sa nouvelle *Theoria motus lunae*, dans laquelle il avait employé un procédé tout-à-fait différent qui lui avait fait trouver quelques nouvelles équations. Peu de tems auparavant les dernières tables de Mayer avaient paru, qui étant fondées tant sur la théorie d'Euler que sur la comparaison de 200 observations, donnent le lieu de la lune avec beaucoup de précision. L'an 1799 parut enfin la *Mécanique céleste par*

P. S. Laplace, ouvrage qui fait une des époques les plus brillantes dans l'histoire de l'astronomie et de la culture de l'esprit humain. Le livre VII. du tome III. de cet ouvrage est consacré à la théorie de la lune: il renferme un grand nombre de nouvelles inégalités, dérivées de la théorie de l'attraction, et constatées par les observations, qui font la base des dernières tables lunaires de MM. Bürg et Burckhardt. C'est à ces recherches, aussi ingénieuses que pénibles, qu'on doit la grande précision avec laquelle on connaît actuellement le mouvement de la lune, et le grand avantage qu'en tire la navigation et la géographie.

§. 203. Pour simplifier les équations de la lune, Mayer réunit dans une seule table, toutes celles qui pouvaient être mises sous le même argument; et par là il réduisit les nouvelles inégalités au nombre de *dix*. Il faut les regarder ici comme empiriques; mais pour expliquer la construction et l'usage des tables, il est nécessaire de donner un aperçu général de toutes les inégalités de la lune.

Comme elles proviennent de l'action du soleil, elles auraient lieu, quand même les orbites du soleil et de la lune seraient circulaires; et dans ce cas, elles dépendraient uniquement du rapport constant entre les diamètres des deux orbites. Mais puisque ces orbites sont elliptiques, la valeur *moyenne* de ces inégalités, qui sera toujours déterminée par le rapport précédent, éprouvera de petites variations que j'appellerai *corrections*, et qui dépendent des changemens des distances du soleil et de la lune: car il est visible, que l'action du soleil doit être plus ou moins forte, à mesure qu'il approche ou qu'il s'éloigne de la lune. Ainsi, ces corrections dépendant de l'anomalie du soleil et de la lune, leurs argumens seront ces mêmes anomalies, combinées avec les argumens des équations de différentes manières: la plus grande d'elles est l'*évection*.

L'*équation* des apsides a été réunie par les astronomes modernes à l'évection (§. 198.) qui a le même argument; mais sa *correction*, dépendant de l'anomalie du soleil, demande une table particulière. Ce mouvement des apsides n'influe que médiatement sur la longitude de la lune, en changeant son anomalie, et par conséquent l'équation du centre. Comme l'anomalie de la lune est un des principaux argumens, qui entre presque dans toutes les équa-

tions, il faut commencer par corriger l'anomalie: cette correction monte à $22'17'',5$ ce qui produit un changement de l'équation du centre, ou de la longitude, de $2\frac{1}{2}'$ tout au plus. Une correction tout-à-fait semblable, dépendant de l'anomalie du soleil, est appliquée à la ligne des noeuds. Voici l'arrangement des tables de M. Bürg, qui regardent la longitude.

Appelons

la longitude vraie du soleil $= \odot$, son anomalie moyenne $= a$,

la longitude moyenne de la lune $= \mathrm{C}$,

son anomalie moyenne, comptée du périgée $= \mathrm{A}$,

la longitude moyenne du noeud ascendant $= \Omega$,

son supplément $= 360^\circ - \Omega = \mathrm{N}$,

l'élongation de la lune du soleil, $\mathrm{C} - \odot = \mathrm{E}$.

Le commencement se fait par l'*équation annuelle*, dont l'argument est a (*Tab. VII.*): elle a besoin d'une correction, suivant les différentes distances de la lune à la terre, qui dépend par conséquent de A et de a; son argument est $\mathrm{A} - a$ (*Tab. XV.*). — La *variation*, ayant pour argument E (*Tab. XXXIV.*), exige des corrections qui dépendent de a et de A: leurs argumens seront donc composés de E ou $2\mathrm{E}$, a et A. — L'*évection* (*Tab. XII.*) est également sujette à des corrections qui dépendent de a et A, outre l'argument de l'évection $2\mathrm{E} - \mathrm{A}$, dont il résulte des argumens de la même forme que ceux de la variation. — En général on verra aisément, que les perturbations du mouvement de la lune autour de la terre, produites par le soleil, doivent nécessairement dépendre, de sa situation relativement au point que la lune occupe dans son orbite, donc 1) de E, 2) de la différence de ses distances à la lune et à la terre, ou ce qui revient au même, des distances de la terre à la lune et au soleil, donc de A et a; d'où il résulte, que presque tous les argumens sont composés de E, A, et a. Toutes ces corrections sont renfermées dans les *Tables* VIII, IX, X, XI, XIII — XXII. XXVI. XXVII. XXVIII. Comme l'action du soleil doit nécessairement changer, à mesure qu'il s'écarte du plan de l'orbite lunaire, il en résulte des équations qui dépendent des distances du soleil et de la lune au noeud, ayant par conséquent des argumens, composés de Ω ou N, $\odot$ et C (*Tab. XXIII. XXIV.*); l'argu-

ment ☾ + N donne aussi la *réduction à l'écliptique* (*Tab. XXXVI.*). Ces équations, ainsi que toutes les autres, ont besoin de corrections, à cause de l'ellipticité de l'orbe lunaire, qui, par conséquent, dépendront de A, ensorte que leurs argumens seront composés de N, ☉, ☾, et A (*Tab. XXV. XXIX. XXX. XXXV.*). — L'équation de l'ellipse ou du centre est renfermée dans la *Tab. XXXIII.*

Cela fait en tout 28 équations de longitude, dans le calcul desquelles il faut tenir compte de la correction des mouvemens des apsides et des noeuds, non pour corriger immédiatement la longitude de la lune, mais pour corriger ses argumens: les Tables XXXI. XXXII. renferment ces corrections.

§. 204. On pourrait construire toutes les tables sur les argumens *moyens a*, A, E, etc. Mais comme alors elles seraient encore plus compliquées, on les a partagées en plusieurs sections, ensorte que dans chaque section on emploie le argumens, corrigés par les tables des sections précédentes. En désignant donc par ☾′, ☾″, ☾‴, ☾^{IV}, A′, A″, N′, les valeurs de ☾, A, N, corrigées par les sections successives, toutes les équations de la lune en longitude sont renfermées dans les formules suivantes, les chiffres romains indiquant les tables de M. Bürg, qui présentent chaque équation. Dans l'édition de ces tables, publiée par le Bureau des longitudes de France, on a rendu additives toutes les équations qui, par leur nature, sont tantôt positives tantôt négatives: pour cet effet on a augmenté chaque équation d'une constante en nombres ronds, qui doit être au moins égale à sa plus grande valeur négative. D'après cet arrangement on n'a qu'à faire des additions, et à retrancher au bout du compte, la somme de toutes ces constantes; mais pour épargner même cette subtraction, on l'a arrangé de manière que cette somme fait précisément 360°.

La *première* correction de la longitude ☾, renfermée dans les *Tables* VII — XXX, est

$$P = \begin{cases} -(11'11'',8.\sin a + 6''.\sin 2a)\ (VII) & +11'',5.\sin(E+a)\ (VIII) \\ +(4'',9.\sin(E-a) + 2'',6.\sin 2(E-a))\ (IX) & \\ -(2'',6.\sin(E+a) + 4'',6.\sin 2(E+a))\ (X) & \\ -(21'',4.\sin(E-A) + 58'',6.\sin 2(E-A))\ (XI) & \\ +(1^{\circ}20'29'',5.\sin(2E-A) + 35'',4.\sin 2(2E-A))\ (XII) & \\ -57'',8.\sin(2E+A)\ (XIII) & -2'',1.\sin(2E-3A)\ (XIV) \\ +39'',3.\sin(A-a)\ (XV) & +53'',9.\sin(2E+a)\ (XVI) \\ +76'',5.\sin(2E-a)\ (XVII) & +1'',1.\sin(E-A+a)\ (XVIII) \\ +14'',6.\sin(2E-A+a)\ (XIX) & +47'',6.\sin(2E-A-a)\ (XX) \\ +2'',2.\sin(2E+A+a)\ (XXI) & +1'',3.\sin(2E+A-a)\ (XXII) \\ -6'',8.\sin N\ (XXIII) & -62'',5.\sin 2(\odot+N)\ (XXIV) \\ -6'',4.\sin 2(\mathbb{C}+N-A)\ (XXV) & -10'',6.\sin(4E-A)\ (XXVI) \\ +1'',1.\sin(4E-3A)\ (XXVII) & -1'',2.\sin(2A-2E-a)\ (XXVIII) \\ +6'',9.\sin(2E-A-2\mathbb{C}-2N)\ (XXIX) & -8'',8.\sin(2E+A-2\mathbb{C}-2N)\ (XXX). \end{cases}$$

Les argumens qui se rapportent au soleil, $\odot$ et a, doivent être tirés des tables solaires; les argumens $\mathbb{C}$, A, N, sont calculés à l'aide des tables lunaires (*Tab. I — VI.*), et cela suffit pour former le reste.

Après avoir trouvé la première correction P, en réunissant les 24 équations précédentes, on formera la longitude corrigée une première fois, $\mathbb{C}^{I} = \mathbb{C} + P$, qui servira à former les argumens suivans. Mais avant de calculer l'équation du centre, il faut corriger son argument, l'anomalie A qui est plus grande que la moyenne, non-seulement de P, mais encore de la correction, due au mouvement des apsides (§. 203.): elle est $p = -22'17'',3.\sin a - 11''.\sin 2a$ (XXXI). La correction du noeud, ou de son supplément N, est $q = +9'.\sin a + 4''.\sin 2a$ (XXXII). Cela donne les valeurs corrigées de A et N, savoir $A' = A + P + p$, et $N' = N + q$. L'anomalie A' donne (*Tab. XXXIII.*) l'*équation du centre*,

$$\text{æ} = +6^{\circ}18'12'',2.\sin A' + 12'56'',4.\sin 2A' + 37'',3.\sin 3A' + 1'',9.\sin 4A' + 0'',1.\sin 5A',$$

avec laquelle on forme la longitude corrigée une seconde fois, $\mathbb{C}^{II} = \mathbb{C}^{I} + \text{æ}$, et l'élongation corrigée, $E' = \mathbb{C}^{II} - \odot$. Cela donne (*Tab. XXXIV.*) la *variation*

$$Q = -2'2'',1.\sin E' + 35'41'',7.\sin 2E' + 3'',3.\sin 3E' + 7'',3.\sin 4E',$$

et la longitude corrigée une troisième fois, $\mathfrak{C}^{III} = \mathfrak{C}^{II} + Q$, avec laquelle on trouve l'équation

$r = -1'24'',4 . \sin(2\mathfrak{C}^{III} + 2N' - A')$ (XXXV), et $\mathfrak{C}^{IV} = \mathfrak{C}^{III} + r$.

Cet argument donnera la *réduction à l'écliptique* (*Tab. XXXVI.*),

$$R = -6'46'',8 . \sin 2(\mathfrak{C}^{IV} + N') + 2'',1 . \sin 4(\mathfrak{C}^{IV} + N'),$$

d'où l'on tire enfin la longitude vraie sur l'écliptique, $\mathfrak{C}^{V} = \mathfrak{C}^{IV} + R$, qu'il faut corriger par la nutation, ainsi que cela se fait relativement au soleil. La réduction R se trouve dans la *Tab. XXXVI,* fondue avec une perturbation du même argument $\mathfrak{C} + N$ (§. 203.).

En appliquant l'ensemble de ces équations, avec le signe opposé, à une longitude observée, on aura une longitude moyenne qui peut servir d'*époque*. Celle des tables de M. Bürg est, pour le commencement de l'an 1801 à Paris, $= 3^s\,21^\circ\,36'\,30'',6$.

Il n'y a pas de doute qu'outre ces inégalités, dues à l'action du soleil, la lune n'éprouve aussi des perturbations en vertu de l'attraction des planètes: mais leurs masses, étant beaucoup moindres que celle du soleil, ne peuvent produire qu'une inégalité de 1″ ou 2″. Cependant M. Burckhardt, dans ses tables de la lune, publiées par le bureau des longitudes en 1812, a tenu compte de l'action des deux planètes Jupiter et Vénus, dont l'une est la plus grande, l'autre la plus proche de la terre, et il a trouvé ces équations

$$-1'',1 . \sin(♀ - ♃) + 0'',4 . \sin 2(♀ - ♃),$$
$$+0'',8 . \sin(♃ - ♄) - 0'',2 . \sin 2(♃ - ♄).$$

Les mêmes tables donnent l'équation

$$P = -10'59'',3 . \sin a - 7'',1 . \sin 2a + 13'',7 . \sin(E + a) + 2'',3 . \sin(E - a) + 7'',3 . \sin 2(E - a)$$
$$- 2'',3 . \sin(E + A) - 4'',3 . \sin 2(E + A) - 23'',5 . \sin(E - A) - 57'',9 . \sin 2(E - A)$$
$$+ 80'25'',5 . \sin(2E - A) + 35'',5 . \sin 2(2E - A) - 57'',7 . \sin(2E + A) - 0'',9 . \sin(2E - 3A)$$
$$+ 109'',4 . \sin(A - a) - 17'',7 . \sin(2E + a) + 147'',3 . \sin(2E - a) - 18'',4 . \sin(2E - A + a)$$
$$+ 190'',3 . \sin(2E - A - a) + 2'',1 . \sin(2E + A - a) - 7'',1 . \sin N - 59'',2 . \sin 2(☉ + N)$$
$$+ 7'',4 . \sin 2(\mathfrak{C} + N - A) - 12'',2 . \sin(4E - A) + 1'',1 . \sin(4E - 3A) - 4'',6 . \sin(2A - 2E - a)$$
$$+ 6'',6 . \sin(2E - A - 2\mathfrak{C} - 2N) - 10'' . \sin(2E + A - 2\mathfrak{C} - 2N);$$

puis les équations

$$-83'',8\,.\sin(2\mathbb{C}+2N-A)-7''0,6\,.\sin(A+a)-0'',3\,.\sin 2(A+a)$$
$$+6'',7\,.\sin(2E-A-2a)+2'',8\,.\sin(2A+a-2E)-1'',8\,.\sin(2N+2\odot+a)$$
$$-0'',9\,.\sin(2E-A+2a)+0'',8\,.\sin(2A-a)-0'',7\,.\sin(A+2a)+0'',7\,.\sin(A-2a);$$

l'équation du centre $=$

$$+6^{\circ}8'12'',4\,.\sin A'+12'57'',1\,.\sin 2A'+37'',2\,.\sin 3A'+1'',8\,.\sin 4A',$$

la variation $=-2'2'',7\,.\sin E'+35'38'',6\,.\sin 2E'+2'',9\,.\sin 3E'+9'',1\,.\sin 4E'$,

et la réduction à l'écliptique $=-6'52'',2\,.\sin 2(\mathbb{C}^{IV}+N')$.

CHAPITRE V.

Noeuds et inclinaison de l'orbite de la lune.

§. 205. Puisque la terrre est constamment dans les plans de l'écliptique et de l'orbite lunaire, la position de ces deux plans peut être déterminée par des observations fort simples: et une seule révolution de la lune suffirait pour cet effet, si ce satellite se mouvait rigoureusement dans un même plan. Les observations de la latitude de la lune pendant une révolution entière, donnent les instans où sa latitude est nulle, et où elle est un *maximum*: le premier instant donne le lieu des noeuds, le second donne l'inclinaison de l'orbite, que Ptolémée avait déjà déterminée avec beaucoup de précision, en la supposant de 5°. Le mouvement rétrograde des noeuds est si rapide, qu'on l'aperçoit aisément après une ou deux révolutions. Les points où la lune traverse l'écliptique, sa latitude étant nulle, ont reculé dans une révolution d'un degré et demi, et au bout de 21 mois d'un signe entier, ensorte que les noeuds font une révolution en 18 ans et demi. Les occultations des étoiles indiquent ce mouvement d'une manière encore plus sensible. Régulus, une étoile de la première grandeur, est souvent éclipsé par la lune; ce qui prouve que la lune est alors très-près de son noeud, parceque la latitude de l'étoile n'est que de 27′ ou 28′. On verra que, dans chaque mois suivant, la lune s'est élevée davantage vers le nord, et qu'au bout de 4 à 5 ans, elle passe par dessus Régulus à une distance de 5°, étant par conséquent éloignée du noeud ascendant de 90°, dans le même endroit où elle avait été dans le noeud quatre ans plutôt. Au bout de neuf ans elle éclipse encore Régulus, en descendant vers le sud; après 14 ans elle passe par dessous l'étoile, à une distance de 5°; et au bout de $18\frac{1}{2}$ ans elle l'éclipse,

comme la première fois: les noeuds sont revenus à la même position, ils ont fait une révolution en $18\frac{1}{2}$ ans. Les éclipses donnent le même résultat: leur grandeur dépendant de la latitude de la lune, elles seraient constamment de même nature dans la même région du ciel, si les noeuds étaient immobiles; mais cela change d'une année à l'autre, et ce n'est qu'après 18 ans, que les éclipses reviennent suivant le même ordre.

La période Caldaïque (§. 189.) n'est pas assés exacte, pour déterminer le mouvement des noeuds; mais celle de 441 ans, imaginée par Hipparque, donne le mois draconitique à quelques secondes près. Ptolémée (1) détermina le mouvement des noeuds par le moyen de deux éclipses de lune, fort éloignées l'une de l'autre, qui avaient eu lieu auprès du même noeud, au même bord de la lune, à la même distance ou anomalie, et qui avaient été de même grandeur: d'où il suivait, que la lune avait eu la même situation relativement aux noeuds et aux apsides, et que par conséquent elle avait fait un nombre entier de révolutions moyennes par rapport aux noeuds. Si les deux anomalies ne sont pas égales, il faut convertir le lieu vrai de la lune en lieu moyen, à l'aide de l'équation du centre, pour trouver la révolution *moyenne*. Les deux éclipses, dont se servit Ptolémée, étaient éloignées l'une de l'autre de 224608 j. 21 h. 50 m., leur grandeur était de 2 doigts au bord austral, et près du noeud descendant: la latitude était donc boréale, les éclipses étaient arrivées avant le noeud, et la lune avait fait 8254 révolutions draconitiques. L'anomalie était dans la première éclipse 100° 19′, dans la seconde 251° 13′; dans la première la longitude moyenne était par conséquent plus grande que la vraie de 5°, dans la seconde elle était plus petite de 4° 53′, ensorte que la lune avait décrit, par son moyen mouvement, 8254 cercles moins 9° 53′: d'où l'on tire le moyen mouvement diurne par rapport aux noeuds = 13° 13′ 45″, 66378, et le mois draconitique = 27 j. 5 h. 5 m. 36 s. précisément comme Hipparque l'avait trouvé par le moyen de sa période.

Ptolémée détermina le lieu ou l'*époque* des noeuds, au moyen de deux éclipses, où le bord austral de la lune était éclipsé de 3 doigts, auprés des

(1) *Almag. Lib. IV. Cap. 9.*

noeuds opposés, la lune étant à la même distance de la terre. La première était arrivée après le noeud ascendant, la seconde avant le noeud descendant: l'intervalle était de 218 années égyptiennes + 309 j. 23 h. 5 m. durant lequel le moyen mouvement draconitique est 160° 4′. Dans la première éclipse, l'anomalie était 12° 24′, dans la seconde 2° 44′; la longitude moyenne était donc plus grande que la longitude vraie de 59′ et de 13′. Soit donc (*Fig.* 57.) ☊ C ☋ la moitié boréale de l'orbite lunaire, A, B, les lieux vrais de la lune dans les deux éclipses, et supposons que, dans l'intervalle, les noeuds aient reculé en N et *n*, de sorte que N C *n* = 180°, et ☊ A = B *n*, parceque les deux éclipses avaient été de même grandeur, et par conséquent également distantes des noeuds. En faisant A D = 59′, B E = 13′, D, E, sont les lieux moyens de la lune, donc le moyen mouvement draconitique = NE − ☊D = N☊ + DE = 160° 4′, et ☊D + E*n* = 180° − (N☊ + DE) = 19° 56′. Cela donne ☊A + B*n* = 19° 56′ − 59′ + 13′ = 19° 10′, dont la moitié est ☊A = B*n* = 9° 35′. En nommant donc M la longitude moyenne de la lune dans le milieu de la première éclipse, on a pour la même époque, la longitude du noeud ascendant = M − ☊D = M − (☊A + AD) = M − 10° 34′.

On a vu (§. 177. (*p*) (*q*)), que deux longitudes et latitudes observées, L, L′, et λ, λ′, suffisent pour trouver la longitude du noeud et l'inclinaison, J et *i*. Le résultat est plus exact, si les observations sont faites peu avant et après le même noeud: alors l'une des latitudes, λ, est négative, et l'on aura

$$(p) \ldots\ldots \operatorname{tang}\left(\frac{L+L'}{2} - J\right) = \frac{\sin(\lambda - \lambda')}{\sin(\lambda + \lambda')} \operatorname{tang} \frac{L - L'}{2}, \text{ et } J = \frac{L+L'}{2} - \left(\frac{L+L'}{2} - J\right);$$

$$(q) \ldots\ldots \operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} \lambda'}{\sin(L' - J)}.$$

En faisant ces observations dans plusieurs passages de la lune par le noeud, on trouvera le mouvement des noeuds et la variation de l'inclinaison. Suivant les tables de M. Bürg, le mouvement des noeuds en 365 jours est = − 19° 19′ 43″, 36; donc en 36525 jours = −6963100″ = −5° 134° 11′ 40″, relativement aux points équinoxiaux, et le mouvement sidéral en 36525 jours = −5° 135° 35′ 10″ = −6968110″: d'où l'on conclura

la durée d'une révolution des noeuds relativement aux points équinoxiaux = 6798, 178972009593 4 jours = 6798 j. 4 h. 17 m. 43, 18162887 s.

la durée d'une révolution sidérale des noeuds =

6793, 291149823984 jours = 6793 j. 6 h. 59 m. 15, 3447922176 s.

Le mouvement périodique de la lune en 36525 jours étant = 1336° 307° 52′ 43″,5 (§. 188.), le mouvement relativement aux noeuds sera = 1342° 82° 4′ 23″,5; d'où l'on tire

la durée d'un *mois draconitique* =

27, 212217681667 jours = 27 j. 5 h. 5 m. 35, 60769603 s.

ce qui ne diffère que de 0, 4 s. du résultat que Ptolémée a trouvé.

Ce mouvement rétrograde des noeuds étant, ainsi que toutes les perturbations de la lune, l'effet de l'attraction du soleil, il a besoin d'une correction qui dépend de l'anomalie du soleil, et qui a été donnée plus haut (§. 204.).

§. 206. Au moyen de l'époque et du mouvement moyen des noeuds (§. 205.), on pouvait calculer, pour une époque donnée, le lieu des noeuds et des *limites*, où la latitude est égale à l'inclinaison; mais Tycho aperçut déjà, que le mouvement des noeuds et l'inclinaison avaient une inégalité qui dépendait de l'élongation E de la lune, et qui par conséquent, ainsi que la variation, n'avait pu être connue des anciens qui n'observèrent que les éclipses. Cette découverte s'est confirmée depuis le tems de Tycho. Quand les noeuds sont dans les quadratures, les limites dans les syzygies, l'inclinaison est 5°, comme Ptolémée l'avait trouvée; mais si les noeuds sont dans les syzygies, l'inclinaison est = 5° 17′ 34″; elle a une valeur mitoyenne = 5° 8′ 47″, lorsque les noeuds et les limites coincident avec les octants. La ligne des noeuds a, dans les syzygies et les quadratures, sa position moyenne, conformément à la théorie précedente; mais elle s'en écarte dans les autres aspects, et la plus grande différence de 1° 46′ a lieu dans les octants. Tycho expliqua ces deux inégalités par une hypothèse extrêmement simple, qu'on a trouvée conforme à la théorie et aux observations. Soit (*Fig.* 58.) E le pole de l'écliptique, C le centre, autour duquel le vrai pole de l'orbite lunaire décrit le petit cercle F B A, dans un demi-mois synodique, suivant cette loi. Quand la lune est en conjonction avec le soleil, le pole de l'or-

bite est dans le point F le plus proche de E; mais l'élongation de la lune du soleil étant $= E$, le pole sera en B, FCB étant $= 2E$. Conséquemment le pole est dans le premier et le troisième octant en G, dans la première et la dernière quadrature en A, dans le second et le quatrième octant en H, et dans les syzygies en F. L'inclinaison moyenne est donc $EC = EG = EH = 5°\,8'\,47'' = \nu$, la plus petite $EF = 5°$, et la plus grande $EA = 5°\,17'\,34''$, donc le diamètre $AF = 17'\,34''$, $CF = CA = 8'\,47'' = a$, ou suivant M. Bürg, $\nu = 5°\,8'\,46''$, $a = 8'\,48'',4$; et la vraie inclinaison est EB, l'élongation étant $E = \frac{1}{2}ECB$. Un grand cercle, perpendiculaire à EC, comme GCH, doit passer par les noeuds de l'orbite, ☊, ☋, qui sont les poles du grand cercle EC: en conséquence, le pole étant avancé de F en B, $BE☊$ sera un angle droit, donc le ☊ est avancé vers EC de l'angle BEC qui est la correction des noeuds, comme il est celle du pole B. On trouvera la plus grande valeur de cette correction, CEH, en tirant le grand cercle EH ou EG, tangent au petit cercle GH: alors on aura $\sin CEG = \frac{\sin a}{\sin \nu}$, donc $CEG = 1°\,38'\,12''$. Cette correction des noeuds et de l'inclinaison n'est pas dans les tables immédiatement, mais on y trouve l'effet qu'elle a sur la latitude de la lune, ou une équation de latitude, dont il sera parlé dans le §. suivant.

§. 207. Si ☊ L ☋ est l'ordre des signes, et L le lieu de la lune non corrigé, $☊CL = \alpha$ sera l'argument de latitude, ou la distance de la lune au noeud ☊, comptée sur l'orbite, et $ECL = 90° - \alpha$. En faisant $ECB = 2E$, le vrai pole de l'orbite sera en B, d'où la lune doit constamment être distante de 90°. Par la correction dont il s'agit ici, la lune sera transportée en l, Bl et LC étant 90°: ayant donc mené CD perpendiculairement à BL, LD sera égale à LC, et $DB = Ll$. Mais on a $LCB = 90° - \alpha + 2E$, d'où il suit $DCB = LCB - 90° = 2E - \alpha$, et BD ou $Ll = a \sin(2E - \alpha)$. En joignant EL, El, en abaissant sur EL la perpendiculaire $l\lambda$, et en nommant β la latitude de la lune, on aura $EL = 90° - \beta$, et $EL - El$ ou $L\lambda = +\partial\beta$ sera la correction de la latitude. Or on a dans le triangle ECL, $\text{tang } ELC = \frac{\sin ECL}{\cot E C \sin CL - \cos CL \cos ECL} = \cos\alpha \text{ tang } \nu$, et à très-peu près $ELB = ELC$, parceque la différence BLC ne monte jamais au delà de $8'\,48''$: on aura donc dans le petit triangle $Ll\lambda$, $L\lambda = Ll \cos ELC = \frac{a \sin(2E - \alpha)}{\sqrt{(1 + \cos^2\alpha \text{ tg}^2 \nu)}}$, ou à peu près

$$L\lambda = \partial\beta = +8'\,48'',4 \cdot \sin(2E - \alpha).$$

Cette correction est l'équation II. de latitude dans la Tab. XXXVIII. de M. Bürg.

On peut trouver le même résultat d'une manière plus simple. La *figure* 58. suppose, que l'ordre des signes est autour du pole C de l'orbite FBA, donc autour du pole E de l'écliptique ☊L☋A ou BC☊; ensorte que le pole de l'orbite C, et par conséquent aussi les noeuds ont reculé de l'angle CEB, donc $CEB = -\partial\,☊$. Mais $\alpha = ☾ - ☊$, d'où l'on tire

$$(1) \ldots . \partial\alpha = -\partial\,☊ = CEB.$$

D'ailleurs, $CE = \nu$, et $BE = \nu'$, sont les inclinaisons moyenne et apparente, d'où il suit

$$(2) \ldots . \partial\nu = BE - CE.$$

Connaissant dans le triangle CEB, $CE = \nu$, $CB = a$, $BCE = 2E$, on aura

$$(3) \ldots . \cos BE = \cos a \cos CE + \sin CE \cos 2E,$$

$$(4) \ldots . \operatorname{tang} CEB = \frac{\operatorname{tang} a \sin 2E}{\sin\nu - \operatorname{tg} a \cos\nu \cos 2E}.$$

Or a étant moindre que $9'$, on peut faire $\sin a = \operatorname{tg} a = a$, et $\cos a = 1$, ce qui donne

$$(3) \ldots . \cos BE = \cos CE + a \sin\nu \cos 2E; \quad (4) \ldots . \operatorname{tg} CEB = \frac{a \sin 2E}{\sin\nu - a\cos\nu\cos 2E},$$

ou à peu près, $CEB = \frac{a \sin 2E}{\sin\nu}$, ce qui étant substitué en (1), donnera

$$(5) \ldots . \partial\alpha = \frac{a \sin 2D}{\sin\nu}.$$

Mais on a $\cos BE - \cos CE = 2 \sin \frac{CE - BE}{2} \cdot \sin \frac{CE + BE}{2} = (CE - BE) \sin CE$ à très-peu près: en substituant cela dans l'équation (3), on aura

$(CE - BE) \sin\nu = a \sin\nu \cos 2E$, donc par l'équation (2),

$$(6) \ldots . \partial\nu = -a \cos 2E.$$

Or on a $\sin\beta = \sin\alpha \sin\nu$, dont la différentielle est

$$\partial\beta = \frac{\partial\alpha \cos\alpha \sin\nu + \partial\nu \sin\alpha \cos\nu}{\cos\beta} = \frac{a(\sin 2E \cos\alpha - \cos 2E \sin\alpha \cos\nu)}{\cos\beta}.$$

En supposant donc $\cos\nu$ et $\cos\beta = 1$, parcequ'ils sont toujours plus grands que 0,996; on aura

$\partial\beta = a \sin(2E - \alpha)$, comme ci-dessus.

Cette inégalité est proprement l'effet de la variation sur la latitude: son argument 2E devant être combiné avec α, parceque dans le noeud même l'action du soleil ne peut pas écarter la lune du plan de son orbite.

§. 208. Outre la correction précédente, découverte par Tycho, la théorie a donné plusieurs petites corrections de la latitude. On conçoit que l'action du soleil doit altérer, non-seulement la longitude, mais aussi la latitude de la lune, à mesure que le soleil sort du plan de l'orbite lunaire, ou que la lune s'écarte de l'écliptique, ce qui dépend de l'argument de latitude $\alpha = \mathfrak{C}^{IV} - \Omega'$ ou $\mathfrak{C}^{IV} + N'$. Les équations de latitude auront donc, outre les argumens qu'elles ont de commun avec celles de longitude, E, a, A, encore α pour argument. Ces équations, qui se montent à dix, sont renfermées dans la Tab. XXXVIII. de M. Bürg, et ont la valeur suivante:

$C = -3'',1 . \sin(\alpha - a)$ (Equat. III.) $+ 17'',6 . \sin(\alpha - A)$ (Equ. IV.) $- 25'',1 . \sin(\alpha - 2A)$ (V)
$- 1'',9 . \sin(\alpha - 3A)$ (VI) $+ 9'' . \sin(2E - \alpha + a)$ (VII) $+ 3'',7 . \sin(2E - \alpha - a)$ (VIII)
$+ 2'',2 . \sin(2E - \alpha + A)$ (IX) $- 15'',9 . \sin(2E - \alpha - A)$ (X)
$- 5'',2 . \sin(2E - \alpha - 2A)$ (XI) $- 8'' . \sin \mathfrak{C}^{IV}$ (XII);

auxquelles il faut ajouter l'équation (§. 207.), $A = + 8' 48'',4 . \sin(2E - \alpha)$ (Equ. II.), et la latitude B elle-même qui dépend simplement de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, ν, et de la distance de la lune au noeud, α. On a l'équation $\sin B = \sin \nu \sin \alpha$, l'argument variable étant $\alpha = \mathfrak{C}^{IV} - \Omega'$, et le coefficient constant $\sin \nu = \sin 5° 8' 46'' = 0,0896959 = \lambda$. Au moyen de la série qui donne l'angle en fonction de son sinus, on aura

$$B = \lambda \sin \alpha + \frac{\lambda^3}{6} \sin^3 \alpha + \frac{3\lambda^5}{40} \sin^5 \alpha + \text{cet.}$$

et en substituant $\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha$,

$$\sin^5 \alpha = \frac{5}{8} \sin \alpha - \frac{5}{16} \sin 3\alpha + \frac{1}{16} \sin 5\alpha,$$

$$B = \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{8} + \frac{3\lambda^5}{64}\right) \sin \alpha - \frac{\lambda^3}{8} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{16}\right) \sin 3\alpha + \frac{3\lambda^5}{640} \sin 5\alpha + \text{cet.}$$

Si l'on veut tout exprimer en secondes, on aura $\lambda = 5° 8' 21'',1$; $\lambda^3 = 2' 28'',85$; $\lambda^5 = 1'',2$; donc

$$B = 5° 8' 39'',77 . \sin \alpha - 6'',23 . \sin 3\alpha + 0'',01 . \sin 5\alpha;$$

ou suivant M. Bürg (Tab. XXXVII.),

$$B = 5^\circ\,8'\,40'',8 \cdot \sin\alpha - 5'' \cdot \sin 3\alpha.$$

La latitude corrigée sera donc $\beta = B + A + C$. Dans les tables, publiées par le bureau des longitudes, toutes ces équations sont employées avec le signe contraire, parceque ces tables donnent le complément de la latitude, ou la distance de la lune au pole boréal de l'écliptique. Les tables de M. Burckhardt donnent la latitude par le moyen des équations suivantes:

$$\beta = 5^\circ\,8'\,38'',3 \cdot \sin\alpha - 5'',7 \cdot \sin 3\alpha + 8'\,46'',2 \cdot \sin(2E-\alpha) - 25'',9 \cdot \sin(\alpha - a)$$
$$+ 23'',9 \cdot \sin(\alpha + A) + 14'',7 \cdot \sin(\alpha - A) - 27'' \cdot \sin(\alpha - 2A) - 10'',1 \cdot \sin(2E - \alpha + a)$$
$$+ 22'',4 \cdot \sin(2E - \alpha - a) + 2'',5 \cdot \sin(2E - \alpha + A) - 16'',3 \cdot \sin(2E - \alpha - A)$$
$$- 5'',2 \cdot \sin(2E - \alpha - 2A) - 8'' \cdot \sin \mathbb{C}^{IV}.$$

Connaissant maintenant la longitude vraie sur l'orbite, $\mathbb{C}^{IV}$, l'inclinaison γ, et l'argument de latitude $\alpha = \mathbb{C}^{IV} - \Omega'$, on aura la réduction à l'écliptique (§. 83. V.),

$$R = \frac{\gamma^2}{4}\left(1 + \frac{\gamma^2}{6}\right)\sin 2\alpha - \frac{\gamma^4}{32}\sin 4\alpha,$$

γ étant $5^\circ\,8'\,46'' = 0,0898166$. Cela donne

$$R = -6'\,56'',5 \cdot \sin 2\alpha + 0'',4 \cdot \sin 4\alpha. \text{ (Voy. §. 2041).}$$

CHAPITRE VI.

Mouvement horaire et Parallaxe de la Lune.

§. 209. Quand il s'agit de connaître le lieu de la lune pour plusieurs époques, qui ne sont éloignées l'une de l'autre que de quelques minutes ou heures, ce qui est le cas dans le calcul des éclipses et dans plusieurs autres occasions, il serait pénible, de tirer immédiatement des tables tous ces lieux de la lune. On épargnera cette peine, en calculant le lieu exact pour une époque intermédiaire, et en l'interpolant pour les autres instans à l'aide du *mouvement horaire* de la lune. Mais pour cela il est nécessaire de connaître le mouvement horaire avec la plus grande précision. Le moyen le plus simple serait sans doute, de calculer la longitude et latitude de la lune pour deux époques éloignées l'une de l'autre d'une heure, et de prendre leur différence pour le mouvement horaire. Mais comme les tables ne donnent que le nombre entier de secondes, il pourrait en résulter des erreurs de plusieurs secondes. De plus, le mouvement de la lune n'étant pas uniforme, il faudrait employer au moins les secondes différences, ce qui suppose qu'on a calculé trois lieux de la lune. Il est plus simple et plus sûr, de se servir des formules qui, étant dérivées de la théorie physique, sont la base de toutes les équations précédentes. Le procédé par lequel on conclut ces formules de la théorie, est de chercher une expression générale de la variation momentanée $\partial\Phi$ de la longitude ou latitude vraie, et d'en tirer Φ par l'intégration, qui ne peut se faire que par approximation. Il en résulte, que l'expression de la vitesse ou du mouvement horaire $\partial\Phi$ est plus exacte, que la valeur de Φ qu'on en déduit. Mais le mouvement horaire n'est pas exactement la vitesse $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, multipliée par une heure, parceque le mouvement n'est pas

uniforme pendant une heure: il faut donc tenir compte des secondes différences.

Soit y une équation quelconque de la lune, calculée pour l'époque t, et supposons qu'on cherche la valeur y' de la même équation pour l'époque $t+\Delta t$. Cela posé, en supposant ∂t constant, on aura par le théorême de Taylor,

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{2} + \text{cet.}$$

et le mouvement vrai de la lune, u, dans le tems Δt, est égal au mouvement moyen, m, dans le même tems, plus la variation de toutes les équations $(y'-y)$. En faisant donc $\Delta t = 1$ heure, m sera le moyen mouvement horaire $= 32'\,56'',46$; et le

vrai mouvement horaire en longitude, $u = m + y' - y$,

où il faut mettre successivement toutes les équations de longitude à la place de y: on a donc

$$(A)\ldots. u = m + \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial\partial y}{\partial t^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{2} + \text{cet.}$$

Il ne sera pas inutile d'appliquer cette formule à une des équations précédentes, par exemple, à la plus considérable, celle du centre. En faisant donc

$$6^\circ\,18'\,12'',2 = 0,11001489 = \mathfrak{A}, \qquad 12'\,56'',4 = 0,00376409 = \mathfrak{B},$$
$$37'',3 = 0,00018084 = \mathfrak{C}, \qquad 1'',9 = 0,00000921 = \mathfrak{D},$$

on aura (§. 204.)

$$y = \mathfrak{A}\,.\sin A' + \mathfrak{B}\,.\sin 2A' + \mathfrak{C}\,.\sin 3A' + \mathfrak{D}\,.\sin 4A';$$

ce qui donne

$$\partial y = \mathfrak{A}\,.\partial A'\cos A' + 2\mathfrak{B}\,.\partial A'\cos 2A' + 3\mathfrak{C}\,.\partial A'\cos 3A' + 4\mathfrak{D}\,.\partial A'\cos 4A',$$
$$\partial\partial y = \partial\partial A'\,(\mathfrak{A}\cos A' + 2\mathfrak{B}\,.\cos 2A' + 3\mathfrak{C}\,.\cos 3A' + 4\mathfrak{D}\,.\cos 4A')$$
$$-\partial A'^2\,(\mathfrak{A}\,.\sin A' + 4\mathfrak{B}\,.\sin 2A' + 9\mathfrak{C}\,.\sin 3A' + 16\mathfrak{D}\,.\sin 4A').$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (A), il viendra

$$(B)\ldots. u = m + \frac{\partial A'}{\partial t}\cdot\Delta t\,(\mathfrak{A}\,.\cos A' + 2\mathfrak{B}\,.\cos 2A' + 3\mathfrak{C}\,.\cos 3A' + 4\mathfrak{D}\,.\cos 4A')$$
$$+\frac{\partial\partial A'}{2\,\partial t^2}\cdot\Delta t^2(\mathfrak{A}\,.\cos A' + 2\mathfrak{B}\,.\cos 2A' + 3\mathfrak{C}\,.\cos 3A' + 4\mathfrak{D}\,.\cos 4A')$$
$$-\frac{\partial A'^2}{2\,\partial t^2}\cdot\Delta t^2(\mathfrak{A}\,.\sin A' + 4\mathfrak{B}\,.\sin 2A' + 9\mathfrak{C}\,.\sin 3A' + 16\mathfrak{D}\,.\sin 4A').$$

Or on a (§. 204.)

$A' = A + P + p$, $p = -22'17'',3 . \sin a - 11'' . \sin 2a$, donc

$\partial A' = \partial A + \partial P + \partial p$, $\partial p = -0,00648196 . \partial a \cos a$.

En prenant pour ∂a l'accroissement de l'anomalie du soleil dans une heure $= 2'27'',8 = 0,00071655$, on a effectivement multiplié ∂a par $\frac{\Delta t}{\partial t}$: on a donc $\frac{\partial p}{\partial t} \Delta t = -0,00000464 . \cos a$; ce qui donne

(1) .... $\mathfrak{A} . \frac{\partial A'}{\partial t} \Delta t . \cos A' = -0'',105 . \cos a \cos A' = -0'',052 . \cos (A'-a) - 0'',052 . \cos (A'+a)$.

La différentielle de ce terme, ainsi que ses produits par $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, sont tout-à-fait insensibles. Le premier terme ∂A est le moyen mouvement anomalistique dans le tems ∂t, $\frac{\partial A}{\partial t}$ est sa vitesse, et $\frac{\partial A}{\partial t} \Delta t$ le moyen mouvement pour une heure $= 32'39'',75 = 0,00950136$. Le second terme $\frac{\partial P}{\partial t} \Delta t$ est la quantité, dont la somme P de toutes les 24 équations, calculées avant l'équation du centre y, augmente dans une heure; ou ce qui revient au même, il est cette partie du mouvement horaire, qui résulte des 24 équations P, ainsi que $y' - y$ est la partie qui naît de l'équation du centre y. La somme qui résulte de P, est renfermée dans les *Tab. XLVII. XLVIII.* En nommant donc leur somme $æ$, on aura $\frac{\partial P}{\partial t} \Delta t = æ$, ou le second terme de $\frac{\partial A'}{\partial t} \Delta t = æ$. Quant aux secondes différentielles, on a $\partial\partial A' = \partial\partial P$, parceque $\partial\partial p$ est insensible, ainsi qu'on vient de le voir, et que le mouvement moyen ∂A est constant. On a donc $\frac{\partial\partial A'}{\partial t} \Delta t = \partial æ$, et $\frac{\partial æ}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial\partial A'}{\partial t^2} \Delta t^2$ est la variation horaire de $æ$. La partie la plus considérable de $æ$ est celle qui provient de l'évection (*Tab. XLVIII.*): elle est $40'' \cos (2E - A) = 0,000193 . \cos (2E - A)$; toutes les autres équations ensemble ne montent pas à 3''. On a donc

$\partial æ = -0,000194 . (2\partial E - \partial A) \sin (2E - A)$,

$2\partial E - \partial A$ étant $2\partial ☾ - 2\partial ☉ - \partial A = 65'53'' - 4'56'' - 32'40'' = 28'17'' =$ 0,0082273 pour une heure;

ce qui donne

$\frac{\partial æ}{\partial t} \Delta t = \frac{\partial\partial A'}{\partial t^2} \Delta t^2 = -0,0000016 . \sin (2E - A) = -0'',33 . \sin (2E - A)$,

d'où l'on tire

$\frac{\partial\partial A'}{2\partial t^2} \Delta t^2 . \mathfrak{A} \cos A' = \frac{\mathfrak{A}}{2} . \frac{\partial æ}{\partial t} \Delta t . \cos A' = -0'',018 . \cos A' \sin (2E - A) =$

$$-0'',009 . \sin 2E - 0'',009 . \sin 2(E - A).$$

Ces petits termes ayant les mêmes argumens E et E — A, que la variation ou l'équation XXVI de longitude (*Tab. XXXIV.*), et l'équation V (*Tab. XI.*), on les a réunies à ces équations XXVI et V du mouvement horaire, dans les *Tab. LI. XLVII.* Il ne reste donc dans l'équation (B), que les termes $\partial A'$ et $\partial A'^2$, et nous avons trouvé

$$\frac{\partial A'}{\partial t}\Delta t = \frac{\partial A}{\partial t}\Delta t + æ + \frac{\partial p}{\partial t}\Delta t, \text{ donc}$$

$$\frac{\partial A'^2}{\partial t^2}\Delta t^2 = \frac{\partial A^2}{\partial t^2}\Delta t^2 + 2æ\frac{\partial A}{\partial t}\Delta t + \text{cet.}$$

ce qui étant substitué en (B), donnera

$$(C)\ldots. u = m + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\Delta t + æ\right)(\mathfrak{A} . \cos A' + 2\mathfrak{B} . \cos 2A' + \text{cet.}) + \mathfrak{A} . \frac{\partial p}{\partial t}\Delta t \cos A'$$

$$- \frac{\partial A}{\partial t}\Delta t\left(\frac{\partial A}{2\partial t}\Delta t + æ\right)(\mathfrak{A} . \sin A' + 4\mathfrak{B} . \sin 2A' + \text{cet.}).$$

En introduisant les valeurs précédentes,

$$m = 32'\,56'',46; \quad \frac{\partial A}{\partial t}\Delta t = 0,009501136;$$

$$\mathfrak{A} . \frac{\partial p}{\partial t}\Delta t . \cos A' = -0'',052 . \cos(A' - a) - 0'',052 . \cos(A' + a),$$

$$\mathfrak{A} . æ = æ . 0,11; \quad \mathfrak{B} . æ = æ . 0,00376; \quad \mathfrak{C} . æ = æ . 0,00018;$$

parceque æ est donné en secondes dans les Tab. XLVII. XLVIII. et en rejetant le terme $\cos(A' - a)$, qui est réuni avec l'équation IX (*Tab. XL.*) dans la *Tab. XLVII.* il viendra

$$(D)\ldots. u = 32'\,56'',46 + 3'\,35'',602 . \cos A' + 14'',743 . \cos 2A' + 1'',063 . \cos 3A'$$
$$+ 0'',072 . \cos 4A' + æ(0,11 . \cos A' + 0,0075 . \cos 2A' + 0,0005 . \cos 3A')$$
$$- 0'',052 . \cos(A' + a) - 1'',0242 . \sin A' - 0'',1402 . \sin 2A' - 0'',0152 . \sin 3A'$$
$$- 0'',0014 . \sin 4A' - æ(0,001 . \sin A' + 0,00014 . \sin 2A' + 0,00002 . \sin 3A').$$

Le premier terme constant, et les quatre suivans qui ont l'argument A' ou XXV, sont renfermés dans la *Tab. XLIX.* où l'on a retranché constamment 2'. Prenant pour exemple A' = 0, les cinq termes seront = 32' 56'',46 + 3' 35'',602 + 14'',743 + 1'',063 + 0'',072 = 36' 47'',94; et en retranchant 2', 34' 47'',94; précisément comme dans la table. Le terme $-0'',052 . \cos(A + a)$, dont l'argument est XXV + I, se trouve dans la dernière colonne de la *Tab. XLVII.* où l'on a ajouté la constante 0'',8; ensorte que, pour A + a = 0, on trouvera dans la table, — 0'',05 + 0'',8 = + 0'',75. Le terme

ϖ(0,11 . cos A′ + cet.), renfermé dans la *Tab. L.* a deux argumens, ϖ et A′: le premier est la somme des 24 équations (*Tab. XLVII. XLVIII.*) qui, en négligeant les termes insensibles, ont été réduites à zo. Mais puisque les équations de la *Tab. XLVII.* ont été augmentées de 8″, et celles de la *Tab. XLVIII.* de 46″, chaque argument ϖ dans la *Tab. L.* est trop grand de 54″. Prenant pour exemple, A′ = o et ϖ = 41″, notre équation donnera 41″ (o,11 + o,0075 + o,0005) = 41″. o,118 = 4″,84. Si l'on veut faire usage de la *table L*, il faut prendre l'argument 41″ + 54″ = 95″, et l'on trouvera 10″,84 = 4″,84 + 6′, parceque la constante ajoutée est 6′. On pourrait croire, que les termes suivans sin A′, sin 2A′, etc. auraient pu être compris dans la *Tab. XLIX*, et le dernier terme ϖ (o,001 . sin A′ + cet.) dans la *Tab. L*, qui ont les mêmes argumens A′, et ϖ, A′; mais ces termes sont multipliés par $\partial A'^2$, ou ∂A^2 et $\varpi\ \partial A$, tandis que les termes précédens sont multipliés par ∂A ou ϖ: ces derniers changeront donc de signe, quand on cherche le mouvement pour l'heure précédente, ∂A et ϖ devenant négatifs; mais les premiers conservent le même signe, parceque ∂A^2 et $\varpi\ \partial A$ sont positifs: on les a donc séparés de ceux des Tab. XLIX, L, et on les a appelés *équation du second ordre*. Les quatre termes — 1″,0242 . sin A′ — cet. se trouvent dans la Tab. LVII. sous le titre XXV, augmentés de la constante 1″,048. En faisant A′ = 90°, ces termes donnent — 1″,0242 + 0″,0152 = — 1″,009; et l'on trouve dans la table, 1″,048 — 1″, 009 = 0″,039. Le dernier terme — ϖ (0,001 . sin A′ + cet.). est renfermé dans la *Tab. LVIII*, la constante ajoutée étant 0″,054. En prenant pour exemple, ϖ = 36″ et A′ = 90°, notre équation donnera — 36″. (0,001 — 0,00002) = — 0″,035; dans la table on trouvera, avec les argumens ϖ + 54″ = 90″, et A^I = III^S, 0″,054 — 0″,035 = 0″,018.

Cette analyse détaillée fera comprendre toutes les autres équations du mouvement horaire en longitude.

§. 210. Les termes précédens donnent le mouvement horaire sur *l'orbite*, ils ont donc besoin d'une réduction à l'écliptique, pour donner le mouvement en *longitude*. Soit (*Fig.* 59.) NL l'orbite de la lune L, L*l* son mouvement horaire sur l'orbite, NM l'écliptique, LM un cercle de lati-

tude, donc $NL = \alpha$ l'argument de latitude, $ML = \beta$ la latitude. Cela posé, on aura

$$\text{tang } NM = \text{tang } \alpha \cos v, \text{ donc } \partial . NM = \frac{\partial \alpha \cos v \cos^2 NM}{\cos^2 \alpha} = \frac{\partial \alpha \cos v}{\cos^2 \beta},$$

à cause de $\cos \alpha = \cos NM \cos \beta$. Mais on a aussi

$$\sin \beta = \sin v \sin \alpha, \quad \text{donc } \partial . NM = \frac{\partial \alpha \cos v}{1 - \sin^2 v \sin^2 \alpha},$$

et la réduction du mouvement horaire à l'écliptique, ou ce qu'il faut retrancher du mouvement précédent sur l'orbite $\partial \alpha'$, pour avoir $\partial . NM$, c'est-à-dire $\partial \alpha - \partial . NM =$

$$\varrho = \frac{\partial \alpha (1 - \cos v - \sin^2 v \sin^2 \alpha)}{1 - \sin^2 v \sin^2 \alpha} = \partial \alpha - \partial \alpha \cos v (1 + \sin^2 v \sin^2 \alpha + \sin^4 v \sin^4 \alpha + \text{cet.})$$

et en exprimant $\sin^2 \alpha$, $\sin^4 \alpha$, par $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$,

$$\varrho = \partial \alpha \left\{ 1 - \cos v \left(1 + \tfrac{1}{2} \sin^2 v + \tfrac{3}{8} \sin^4 v\right) + \frac{\cos v}{2} \sin^2 v (1 + \sin^2 v) \cos 2\alpha - \frac{\cos v}{8} \sin^4 v \cos 4\alpha \right\}.$$

En substituant $v = 5° 8' 46''$, on trouvera

$$\varrho = \partial \alpha \, (0,00000035 + 0,00403869 . \cos 2\alpha - 0,00000806 . \cos 4\alpha).$$

La valeur moyenne de $\partial \alpha = 32' 56'',46$ donne

$$\varrho = 0'',0007 + 7'',9823 . \cos 2\alpha - 0'',0159 . \cos 4\alpha = \varrho';$$

et ϱ changera, à proportion que le mouvement vrai $\partial \alpha$ est plus ou moins grand que $32' 56'',46$: on a donc $\varrho = \varrho' . \frac{\partial \alpha}{32' 56'',5}$. Tel est l'arrangement des tables de Mayer. La *Tab.* 66. renferme ϱ' pour l'argument α; la *Tab.* 67. dont l'argument est $\partial \alpha$, donne le facteur $\frac{\partial \alpha}{32' 56'',5}$ par lequel il faut multiplier l'équation de la *Tab.* 66. pour avoir ϱ.

Dans les tables de M. Bürg, la réduction est regardée comme une équation du mouvement horaire, et calculée comme les autres (§. 209.). La réduction est (§. 204.) $R = -6' 46'',8 . \sin 2\alpha$. En faisant donc

$$406'',8 = b', \text{ et en parties du rayon, } 0,001972222 = b,$$

on aura $\frac{\partial R}{\partial t} \Delta t = -2b \partial \alpha \cos \alpha$, et $\frac{\partial \partial R}{\partial t^2} \Delta t^2 = +4b'' \partial \alpha^2 \sin 2\alpha$.

Or le vrai mouvement horaire de la lune relativement aux noeuds, $\partial \alpha$, est égal au mouvement moyen, plus la somme des équations du mouvement horaire. Mais ces équations sont réunies, dans les tables, au mouvement moyen $= 32' 56'',46$ (§. 209). En nommant donc $æ$ la somme des équations du mouvement horaire en longitude, tirées des tables, et le moyen mouve-

ment horaire relativement aux noeuds, $33'4'',4 = 1984'',4 = c''$, et en parties du rayon $0,00962064 = c$, on aura

$$\partial\alpha = c + (æ - 32'56'',46), \text{ donc } \partial\alpha^2 = c^2 + 2c(æ - 32'56'',46).$$

Or la variation horaire de la réduction, ou ce qui revient au même, la réduction du mouvement horaire étant (§. 209.) $\varrho = \frac{\partial R}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\partial R}{2\partial t^2}\cdot\Delta t^2$, il viendra

$$\varrho = -2bc''\cos 2\alpha - 2b(æ - 1976'',46)\cos 2\alpha + 2b''c^2\sin 2\alpha + 4bc(æ - 1976'',46)\sin 2\alpha$$
$$= -7'',8273\,.\cos 2\alpha - 0,00394444\,(æ - 1976'',46)\cos 2\alpha$$
$$+ 0'',0753\,.\sin 2\alpha + 0,0000759\,(æ - 1976'',46)\sin 2\alpha.$$

En faisant $\varrho = -A - B + C + D$,

C, D, sont les équations du second ordre, qui résultent de $\partial\alpha^2$, et qui par conséquent ne changent pas de signe, comme A et B, lorsqu'il s'agit du tems passé (§. 209.). Or on a $A = 7'',8273\,.\cos 2\alpha$, ou $\cos 2\alpha = \frac{A}{7'',8273}$, donc

$$B = \frac{A\,.\,0,003944\ldots.(æ - 1976'',46)}{7'',8273} = A''.0,000503\,93\,(æ - 1976'',46),$$

A'' étant exprimé en secondes. On a pareillement

$$C = 0'',0753\,.\sin 2\alpha, \text{ ou } \sin 2\alpha = \frac{C}{0'',0753}, \text{ donc}$$
$$D = \frac{C\,.\,0,0000759\,(æ - 1976'',46)}{0'',0753} = C''.0,001008\,(æ - 1976'',46).$$

Cette réduction est dans les tables de M. Bürg, l'équation XXVIII. du mouvement horaire. Son premier terme A, ayant pour argument $\alpha = \text{XXVIII}$, est renfermé dans la *Tab. LV;* le second terme, ayant les argumens A'' et $æ$, dans la *Tab. LVI.* Le terme C qui a le même argument α, se trouve dans la *Tab. LVII.* sous le titre XXVIII; le terme D, ayant les argumens C'' et $æ$, est renfermé dans la *Tab. LXI.* En prenant pour exemple,

$\alpha = 30°$, $æ = 38'10'' = 2290''$, on a $A'' = 3'',9136$; $C'' = 0'',0652$;

$B = 3,9136\,.\,0,000504\,.\,313'',54 = 0,00197245\,.\,313'',54 = 0'',6184$;

$D = 0,0000652\,.\,313'',54 = 0'',0204$; d'où il vient

$\varrho = -A - B + C + D = -4'',4464$.

Dans les tables on trouvera (*Tab. LV.*), avec l'argument $\alpha = I^s$, $A = 4'',09$; mais comme on a ajouté la constante $8''$, on a $A'' = -3'',91$. Dans la *Tab. LVI.* la somme des équations $æ$ est trop grande de $10''$: il faut donc prendre l'argument $æ = 38'20''$. Avec cet argument et $A = 4'',1$ on trouve

$B = -10'',62$; c'est-à-dire $B = -0'',62$; parcequ'on a retranché $10''$ de toutes les équations B. Avec l'argument XXVIII $= 1^s$, on trouvera (*Tab. LVII.*) $C = 0'',141$; ou la constante ajoutée étant $0'',075$ (ce qu'on a oublié d'indiquer au bas de la page), $C = +0'',066$. Avec les argumens $\varpi = 38'\,10''$ et $C = 0'',141$ on trouvera (*Tab. LXI.*) $D = -2'',281$; mais comme on a retranché la constante $2'',299$; il viendra $D = +0'',018$; donc $\varrho = -4'',446$ comme ci-dessus.

§. 211. On trouve de la même manière le mouvement horaire en latitude. En prenant pour exemple, la plus grande équation de latitude (§. 208.)

$$B = 5°\,8'\,40'',8 \cdot \sin\alpha - 5'' \cdot \sin 3\alpha = \mathfrak{A} \cdot \sin\alpha - \mathfrak{B} \cdot \sin 3\alpha,$$

on aura

$$\partial B = \mathfrak{A} \cdot \partial\alpha \cos\alpha - 3\mathfrak{B} \cdot \partial\alpha \cos 3\alpha, \quad \partial\partial B = -\mathfrak{A} \cdot \partial\alpha^2 \sin\alpha + 9\mathfrak{B} \cdot \partial\alpha^2 \sin 3\alpha,$$

d'où l'on tirera le mouvement horaire en latitude, $b = \partial B + \frac{\partial\partial B}{2}$, en mettant le mouvement horaire au lieu de $\partial\alpha$, ce qui donnera

$$b = \partial\alpha\,(\mathfrak{A}\cos\alpha - 3\mathfrak{B}\cos 3\alpha) - \frac{\partial\alpha^2}{2}\,(\mathfrak{A}\sin\alpha - 9\mathfrak{B}\sin 3\alpha).$$

En substituant (§. 210.) $\partial\alpha = c'' = 19'4'',4$ et $\dot{c} = 0,00962643$; donc $\frac{\partial\alpha^2}{2} = 0,00004627\,8$; $\mathfrak{A} = 5°\,8'\,40'',8$; $\mathfrak{B} = 5''$; on aura

$$b = 2'\,58'',182 \cdot \cos\alpha - 0'',1443 \cdot \cos 3\alpha - 0'',8571 \cdot \sin\alpha + 0'',0021 \cdot \sin 3\alpha,$$

où il faut observer que les deux derniers termes, étant les équations du second degré, ne changent pas de signe pour l'heure antérieure à l'époque. Les deux premiers termes sont renfermés dans la *Tab. LXII*, les deux derniers dans la *Tab. LXV*. Mais comme nous avons supposé $\partial\alpha$ égal au mouvement moyen $= c$, au lieu du mouvement vrai $\partial\alpha'$ qui est donné par le §. 209. il faut multiplier $\partial\alpha$ par $\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha} = N$, et $\partial\alpha^2$ par $\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\right)^2 = N^2$: on trouve les facteurs N, N^2, dans la *Tab. LXVI*.

§. 212. On a vu dans le *Livre IV.* du *Tome I.* de cet ouvrage, la théorie des parallaxes traitée dans tout son détail. Les méthodes qu'on y trouve, ont été employées dans le tems moderne avec le plus grand succès à l'égard de la lune. L'équation (I. §. 202. 203.) donne immédiatement la parallaxe de la lune sous l'équateur $= \varpi$, ce qui est la parallaxe horizontale pour

les lieux sous l'équateur, que la lune avait dans l'instant de l'observation. Mais la distance de la lune étant variable, à cause du mouvement elliptique et de l'action du soleil, sa parallaxe doit nécessairement éprouver des changemens analogues. Il y a donc une certaine valeur *moyenne* de la parallaxe *équatoriale*, qu'il faut déterminer avec la plus grande précision, parceque c'est la quantité absolue, ou le coëfficient constant duquel dépendent toutes les corrections; et il paraît naturel, de choisir pour cet effet la parallaxe de la lune à sa moyenne distance qui est égale au demi-grand axe de son orbite elliptique. Il serait aisé de déterminer cet axe, si la lune n'était déplacée par l'attraction du soleil, d'ou il résulte que sa vraie distance n'est jamais celle qui convient à la théorie elliptique. La détermination de la parallaxe *moyenne* demande donc des recherches pénibles, et nous allons donner une idée du procédé, par lequel on peut la conclure des observations.

En nommant c la distance moyenne de la lune à la terre, ou le demi-axe de son ellipse, ϖ la parallaxe équatoriale qui répond à c, r la distance de la lune dans l'instant d'une observation, ϖ' la parallaxe équatoriale qui lui convient; on a (I. §. 203.) $\varpi = \frac{1}{c}$, $\varpi' = \frac{1}{r}$, le demi-diamètre de l'équateur terrestre étant pris pour unité. Or l'excentricité γ de l'orbite elliptique étant connue (§. 197.), et l'anomalie vraie v étant donnée dans les tables; on aura (§. 129. (7)) $\frac{r}{c} = \frac{1-\gamma^2}{1-\gamma\cos v} = \frac{\varpi}{\varpi'}$, donc $\varpi = \frac{\varpi'(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v}$. Il est vrai que ce n'est pas tout-à-fait la parallaxe moyenne qu'on cherche, parceque r et ϖ' n'ont pas exactement les valeurs conformes à la théorie elliptique, r dépendant non seulement de v, mais aussi de l'action du soleil. Mais comme l'effet en est tantôt une augmentation, tantôt une diminution de r, le milieu pris entre un grand nombre de résultats, trouvés de la manière précédente, différera peu de la valeur exacte, et il sera corrigé par le procédé suivant. La théorie physique nous apprend les argumens et la forme des corrections de la parallaxe, qui résultent de l'action du soleil, quoiqu'elle ne donne pas exactement leurs coefficiens qui dépendent de ϖ; cependant le rapport qui existe entre ces coëfficiens, est assés connu, pour indiquer ceux qui sont les plus considérables. En les nommant α, β, etc. la parallaxe corrigée sera donnée par une série de cette forme, $\varpi' = \varpi + \alpha\cos A + \beta\cos B +$ cet.

On choisira donc des observations, où cos A et cos B sont nuls, ou $\alpha \cos A + \beta \cos B = 0$: alors on pourra supposer sans erreur sensible $\varpi' = \varpi$; la valeur de ϖ qu'on trouvera par ce procédé, suffira donc pour déterminer exactement les coefficiens α, β, etc. Cela posé, on pourra calculer, avec les argumens A, B, etc. et les coefficiens α, β, etc. les corrections qui conviennent à une observation quelconque de ϖ', dont la somme, étant retranchée de ϖ', donnera la valeur exacte de ϖ.

§. 213. La parallaxe de la lune est si considérable, que les astronomes grecs d'Alexandrie l'avaient déja déterminée avec quelque précision. Suivant Hipparque, la plus grande parrallaxe est 55′ 30″, la plus petite 47′30″. Ptolémée trouva les distances de la lune dans les quadratures, égales à $43\frac{1}{6}$ et $32\frac{5}{6}$ demi-diamètres de la terre, dans les syzygies $64\frac{1}{6}$ et $53\frac{5}{6}$ (1); ce qui donne les parallaxes 79′ 38″ et 104′ 42″ dans les quadratures, et dans les syzygies 53′ 34″, 63′ 51″: ces dernières valeurs approchent beaucoup de la vérité. L'an 1284, Alfonse X, roi de Castille, trouva par le calcul, la plus grande parallaxe = 63′ 17″, la plus petite = 53′ 19″, à peu près comme Ptolémée; ce résultat est plus exact, que celui trouvé ensuite par Copernic, Tycho et Kepler. La plus grande parallaxe est suivant Lalande = 61′ 29″, la plus petite = 53′ 51″; suivant Mayer, 61′ 32″, 53′ 57″, et la moyenne, désignée ci-dessus par ϖ, = 57′ 11″.

Suivant M. Bürg, la parallaxe moyenne sous l'équateur est 57′ 1″; et elle varie, par la nature de l'ellipse, de 54′ 3″,5 à 60′ 18″,5. En effet, si l'on fait $\gamma = 0{,}055027$; $\varpi = 57'1''$, la vraie parallaxe sous l'équateur $= \varpi'$, la distance moyenne de la lune à la terre = 1, le rayon vecteur elliptique $= z$, on aura $\sin \varpi : \sin \varpi' :: z : 1$, donc

$$\sin \varpi' = \frac{\sin \varpi}{z} = \frac{\sin \varpi}{1-\gamma^2}(1+\gamma \cos A) \text{ (§. 129. (7))},$$

A étant l'anomalie vraie, comptée du périgée. En nommant donc $\frac{1}{1-\gamma^2} = 1{,}0030372 = \mathfrak{A}$, on aura

$$\sin \varpi' = \mathfrak{A}(1+\gamma \cos A)\sin \varpi = \mathfrak{A}(1+\gamma \cos A)\varpi\left(1-\frac{\varpi^2}{6}+\text{cet.}\right)$$

donc à cause de $\varpi' = \sin \varpi' + \frac{(\sin \varpi')^3}{6}$,

(1) *Almag. Lib. V. Cap.* 18.

$$\alpha' = \mathfrak{A}(1+\gamma\cos A)\alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)+\frac{\mathfrak{A}^3}{6}\alpha^3(1+3\gamma\cos A+3\gamma^2\cos^2 A+\gamma^3\cos^3 A),$$

ou en faisant pour abréger,

$$1+\frac{\mathfrak{A}^2-1}{6}\alpha^2+\frac{\mathfrak{A}^2\alpha^2\gamma^2}{4}=P,\ \gamma\left(1-\frac{\alpha^2}{6}+\frac{\mathfrak{A}^2\alpha^2}{2}+\frac{\mathfrak{A}^2\alpha^2\gamma^2}{8}\right)=Q,\ \frac{\mathfrak{A}^2\alpha^2\gamma^2}{4}=R,\ \frac{R}{6}\gamma=S,$$

$$\alpha' = \mathfrak{A}\alpha\,(P+Q\cos A+R\cos 2A+S\cos 3A).$$

On trouvera

$$\mathfrak{A}P=1,00303767;\ \mathfrak{A}Q=0,05519924;\ \mathfrak{A}R=0,00000021;\ \text{donc}$$

$$(1)\ldots\ \alpha'=57'\,11'',39+188'',27\,.\cos A+\text{cet.}$$

Comme l'anomalie vraie A a déjà été calculée à l'aide des tables précédentes, savoir $A=A'+$ équ. du centre (§. 204.), l'équation (1) serait beaucoup plus simple que celle employée dans les tables, où l'on a pris pour argument l'anomalie moyenne corrigée A'. En effet, on a (§. 138. (G))

$$z=1-\gamma\cos A'+\frac{\gamma^2}{2}(1-\cos 2A')+\frac{3}{8}\gamma^3(\cos A'-\cos 3A')+\text{cet., donc}$$

$$\frac{1}{z}=1+\gamma\cos A'+\frac{\gamma^2}{2}(\cos 2A'-1)+\frac{3}{8}\gamma^3(\cos 3A'-\cos A')$$
$$+\gamma^2\cos^2 A'+\gamma^3\cos A'(\cos 2A'-1)+\gamma^3\cos^3 A',$$

$\frac{1}{z^3}=1+3\gamma\cos A'$, parceque $\frac{1}{z^3}$ est multiplié par α^3. Cela donne

$$\alpha'=\frac{\alpha}{z}\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)+\frac{\alpha^3}{6z^3}=$$

$$\alpha\left\{1+\gamma\left(1-\frac{\gamma^2}{8}\right)\cos A'+\gamma^2\cos 2A'+\frac{9}{8}\gamma^3\cos 3A'+\frac{\alpha^2}{3}\gamma\cos A'\right\}.$$

En substituant donc $\alpha=57'\,1'',\ \gamma=0,055027$; on aura

$$\alpha^2=0,00027507\,8;\ \frac{\alpha^2}{3}\gamma=0,00000\,50456;\ \text{donc}$$

$$(2)\ldots:\alpha'=57'\,1''+188'',193\,.\cos A'+10'',359.\cos 2A'+0'',641\,.\cos 3A';$$

elle est dans la *Tab. XXXIX.* de M. Bürg,

$$\alpha'=57'\,1''+187'',3\,.\cos A'+10''\,.\cos 2A'+0'',2\,.\cos 3A'.$$

Les perturbations de la lune étant dues à la force, avec laquelle elle est attirée par le soleil, elles doivent nécessairement altérer sa distance à la terre, ou sa parallaxe, d'autant plus que 1) la force perturbatrice est plus grande, ou que le soleil est plus près de la lune, ce qui dépend de *a*, A, et E, 2) que la lune est plus près de l'écliptique, ce qui dépend de sa distance au noeud: ainsi les argumens des corrections de la parallaxe seront composés de *a*, A, E, et $\mathbb{C}-\Omega$ ou $\mathbb{C}+N$; de sorte que la parallaxe dépend

des mêmes argumens que la longitude, mais d'une autre manière. Soit (*Fig.* 85.) tT l'orbite de la lune autour de la terre en S, et supposons que l'attraction du soleil I transporte la lune de T en O, TO étant une fonction des argumens précédens. En nommant ϕ un de ces argumens, on a vu que toutes les équations de longitude ont la forme G sin ϕ, ce qui donne l'angle TSP, ou $\frac{TP}{TS}$. Or $æ = \frac{1}{r}$, r étant le rayon vecteur TS: on a donc $\partial æ = -\frac{\partial r}{r^2}$. Mais TP : PO : : r . G sin ϕ : ∂r : : sin O : cos O; d'où il est à présumer, que ∂r et $\partial æ$ seront fonctions des cosinus des mêmes argumens, dont ∂ ☾ renferme les sinus. Il en résulte, que $\partial æ$ est nul, lorsque ∂ ☾ est un *maximum*, et réciproquement, parceque ces deux équations sont données par les deux côtés perpendiculaires du triangle TPO. En effet, la lune étant en t, elle décrira l'arc tT en vertu de l'action du soleil, les distances St, ST, n'éprouvant aucun changement, parceque IT est tangente à l'orbite. Dans la conjonction Q la lune est attirée suivant QI, l'équation de la distance ou de la parallaxe est un *maximum*, mais la longitude n'éprouve aucune altération. La parallaxe ainsi corrigée, sous l'équateur, est suivant les tables de M. Bürg,

$$
\begin{aligned}
æ' = {} & 57'\,1'' + (187'',3 . \cos A' + 10'' . \cos 2A' + 0'',2 . \cos 3A')\ (\text{XXXIX}) \\
& + (37'',3 . \cos(2E - A) + 0'',3 . \cos 2(2E - A))\ (\text{Evection, XL}) \\
& - (1'' . \cos E - 26'' . \cos 2E - 0'',2 . \cos 3E)\ \text{Variation, XLI}) \\
& - 0'',3 . \cos a\ (\text{XLII.})\ \text{Equ. I.}) - (0'',2 . \cos(E - A + 2'' . \cos 2(E - A))\ (\text{Equ. V.}) \\
& - 0'',1 . \cos(2E + A)\ (\text{Equ. VII.}) + 0'',2 . \cos(A - a)\ (\text{IX} + 0'',7 . \cos(2E + a)\ (\text{X}) \\
& + 0'',8 . \cos(2E - a)\ (\text{XI} + 1'' . \cos(2E - A + a)\ (\text{XIII}) + 0'',6 . \cos(2E - A - a)\ (\text{XIV}) \\
& + 0'',4 . \cos(\odot + N)\ (\text{XVIII}) - 0'',8 . \cos(2☾' + 2N' - A')\ (\text{XXVII}).
\end{aligned}
$$

La parallaxe équatoriale $æ'$ donne la parallaxe horizontale H, pour chaque lieu dont la distance z au centre de la terre est donnée, $H = æ' z$: la parallaxe moyenne d'un lieu est donc $= z . 57'\,1''$, toujours plus petite que celle sous l'équateur. Enfin H donnera la parallaxe pour une hauteur quelconque.

La distance de la lune à la terre résulte immédiatement de sa parallaxe: elle est en parties du rayon de la terre, $r = \frac{1}{\sin æ'}$. Le mouvement elliptique, et les perturbations produites par l'action du soleil, la font varier de 53' à 62': d'où il résulte la plus grande distance de la lune $= \frac{1}{\sin 53'} = 64,8657$

rayons de la terre, la plus petite $= \frac{1}{\sin 62'} = 55,4505$; et la moyenne distance $= 60$ rayons de la terre. Si l'on veut exprimer ces quantités en lieues, dont 25 font un degré de l'équateur, on aura le demi-diamètre de l'équateur terrestre $= 57°17'44''48''' \ldots = 57,295777 \ldots \times 25 = 1432,39$ lieues; d'où il viendra la distance moyenne de la lune $= 85943,4$ lieues, qui peut varier de 79427 à 92913 lieues.

CHAPITRE VII.

Grosseur de la Lune.

§. 214. La distance ou la *parallaxe* d'un astre, son diamètre apparent, et sa grosseur réelle, sont tellement liées ensemble que, deux de ces quantités étant données, on trouve immédiatement la troisième. Soient (*Fig.* 60.) C, L, les centres, $CT = z$, $Ll = R$, les demi-diamètres de la terre et de la lune, $LC = r$ leur distance, et Cl, LT, tangentes aux surfaces de la lune et de la terre: cela posé, $LCl = \varrho$ est le demi-diamètre de la lune, vu du centre de la terre, ou le *demi-diamètre central*, $CLT = H$ sa parallaxe horizontale qui convient à la hauteur du pole du lieu T, ou au rayon $CT = z$, et à la distance r; c'est donc la parallaxe équatoriale ϖ, si T est un lieu dans l'équateur. En prenant donc pour l'unité des distances le demi-diamètre de l'équateur, on aura

$$\varpi = \frac{1}{r}, \quad H = \varpi z = \frac{z}{r}, \quad \text{ou } r = \frac{z}{H} = \frac{1}{\varpi},$$

$$\sin\varrho \text{ ou } \varrho = \frac{Ll}{CL} = \frac{R}{r}, \text{ donc } \varrho = R\varpi, \text{ et } R = \frac{\varrho}{\varpi} = \frac{z\varrho}{H};$$

c'est-à-dire, le vrai diamètre de la lune est au diamètre de l'équateur terrestre ou à tel autre diamètre de la terre, comme le diamètre apparent de la lune est à la parallaxe horizontale sous l'équateur ou dans un lieu donné. Pour trouver le vrai diamètre de la lune, on n'a donc qu'à tirer des tables sa parallaxe horizontale, et à observer son diamètre apparent dans l'instant, pour lequel on a calculé la parallaxe. Le rapport entre la parallaxe équatoriale et le diamètre central de la lune est donc constant, et l'on a trouvé par le milieu d'un grand nombre d'observations, que ce rapport $\frac{\varrho}{\varpi} = R$ est à très-peu près $\frac{3}{11}$, ou suivant M. Bürg, 0,27293. En multipliant donc une parallaxe équatoriale

donnée, par $\frac{\varrho}{æ} = 0{,}27293$, on aura le demi-diamètre central ϱ pour le même instant: on le trouve dans la *Tab. XLIII.* de M. Bürg, où les nombres de la seconde colonne, divisés par ceux de la première, donnent le quotient constant 0,27293.

Le *vrai diamètre* de la lune est donc 0,27293 diamètres de l'équateur terrestre; sa *surface* est $(0{,}27293)^2 = 0{,}0744908 = \frac{1}{134245}$ de celle de la terre; et son *volume* est $(0{,}27293)^3 = 0{,}0203308 = \frac{1}{49{,}1865}$ de celui de la terre; d'où il est aisé d'exprimer la grosseur de la lune en lieues ou telle autre mesure.

§. 215. Pour calculer des éclipses et des occultations d'étoiles par la lune, il est nécessaire de connaître le diamètre de la lune, tel qu'il paraîtra dans un lieu donné et dans un tems donné. Le diamètre central de la lune est $2\varrho = æ.0{,}54586$: en faisant donc $æ = 53'$, $æ = 57',1''$, $æ = 62'$, on aura le plus petit diamètre central de la lune $= 28'55'',84$; le diamètre moyen $= 31'7'',4$; et le plus grand $= 33'50'',6$. C'est le diamètre *géocentrique* qu'il ne faut pas confondre avec le diamètre, vu de la surface de la terre. En supposant même que, pendant une rotation de la terre, la distance de la lune au centre de la terre ne change pas sensiblement, il est impossible que sa distance à un point donné de la surface de la terre reste constamment la même, et son diamètre apparent doit nécessairement changer en raison inverse de la distance. Supposons (*Fig.* 61.) que T soit le centre, M un point de la surface de la terre, et que le centre de la lune prenne sucessivement les positions L, l, λ, par la rotation de la terre: alors on a $LT = lT = \lambda T$, et en nommant $2\varrho'$ le diamètre apparent de la lune à la hauteur l, on aura $\varrho : \varrho' :: Ml : Tl$, ou $\varrho' = \frac{Tl}{Ml}\varrho$. Il est donc clair, que le diamètre apparent sera le plus grand au zénit λ, et le plus petit dans l'horizon L, parceque $M\lambda < Ml$ et $Ml < ML$. Le diamètre de la lune, vu d'un lieu M, dans l'horizon duquel elle est en L, ou son *diamètre horizontal* est au diamètre central, comme TL est à ML. En faisant donc $TM = 1$, TL est à peu près $= 60$ (§. 213.), partant $ML = \sqrt{(60^2 - 1)} = 60 - \frac{1}{120}$, et $TL : ML :: 1 : 1 - \frac{1}{7200}$: donc, ϱ étant environ 15′ dont la 7200me partie est 0″,12, il suit que la différence entre les deux diamètres, central et horizontal, est insensible.

§. 216. A mesure que la lune s'élève au dessus de l'horizon, elle approche de l'observateur en M, et par conséquent son diamètre apparent augmente. En effet, on a

$$\varrho' = \frac{Tl}{Ml}\varrho = \varrho\frac{\sin\lambda Ml}{\sin\lambda Tl},$$

$\lambda Ml = 90^\circ - \theta'$ étant la distance apparente au zénit, et $\lambda Tl = 90^\circ - \theta$ la distance vraie. On a donc

$$\varrho' = \varrho\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}, \text{ et } \varrho' - \varrho = \sigma = \varrho\frac{\cos\theta' - \cos\theta}{\cos\theta}.$$

La correction du demi-diamètre, ou ce qu'il faut ajouter au demi-diamètre horizontal ou central ϱ, pour avoir le demi-diamètre apparent à la hauteur θ ou θ', est donc

$$(1)\ldots\ \sigma = \frac{2\varrho}{\cos\theta}\cdot\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta'}{2}.$$

En nommant H la parallaxe horizontale, h la parallaxe de hauteur, et en développant jusqu'au carré de H, ce qui suffit ici, on aura $h = H\cos\theta'$, et $\theta' = \theta - h$, donc

$$\sigma = \frac{2\varrho}{\cos\theta}\sin\frac{h}{2}\sin\left(\theta-\frac{h}{2}\right) = \varrho h\left(\operatorname{tg}\theta\cos\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) = \varrho h\left(\operatorname{tg}\theta - \frac{h}{2}\right) = \varrho H\cos\theta'\left(\operatorname{tg}\theta - \frac{H}{2}\cos\theta'\right) =$$
$$\varrho H\left(\operatorname{tang}\theta\cos(\theta-h) - \frac{H}{2}\cos^2\theta'\right) = \varrho H\left(\sin\theta + H\sin^2\theta - \frac{H}{2}\cos^2\theta\right),$$

ou en mettant (§. 214.) $\frac{\varrho}{0{,}27293} = 3{,}66394\ldots\varrho = n\varrho$ à la place de H,

$$(2)\ldots\ \sigma = n\varrho\left(\varrho\sin\theta + \frac{n}{4}\varrho^2(1 - 3\cos 2\theta)\right).$$

Si l'on veut exprimer (1) par la hauteur apparente θ', on a $\theta = \theta' + h = \theta' + n\varrho\cos\theta'$, donc

$$\sigma = \frac{h\varrho}{\cos(\theta'+h)}\sin\left(\theta' + \frac{h}{2}\right) = \frac{n\varrho^2}{1 - n\varrho\sin\theta'}\left(\sin\theta' + \frac{n}{2}\varrho\cos^2\theta'\right)$$
$$= n\varrho^2\left(\sin\theta' + n\varrho\sin^2\theta' + \frac{n}{2}\varrho\cos^2\theta'\right), \text{ ou}$$
$$(3)\ldots\ \sigma = n\varrho\left(\varrho\sin\theta' + \frac{n}{4}\varrho^2(3 - \cos 2\theta')\right).$$

En prenant la valeur $\varrho = 17' = 0{,}0049451$; on aura à très-peu près

$$\sigma = 3737'', 22\ldots 0{,}005\ldots\sin\theta' = 18'', 7\ldots\sin\theta',$$

d'où l'on voit, que le diamètre apparent de la lune peut augmenter de $37''$ depuis l'horizon jusqu'au zénit.

§. 217. La proposition précédente, que la grosseur apparente de la lune croît avec sa hauteur, paraît contraire à une expérience généralement connue, qui nous fait croire que la lune paraît la plus grande à l'horison. En mesurant le diamètre de la lune avec des micromètres, ou en la regardant avec des lunettes, on voit qu'on s'est trompé, et que le diamètre augmente effectivement avec la hauteur, dans le rapport qui vient d'être prouvé: il s'en suit, que cette illusion optique cesse, dès qu'on regarde la lune isolée, et que par conséquent elle provient des objets qui environnent la lune, et avec lesquels on la compare sans le savoir. On sait que chaque objet paraît moins grand, s'il est isolé, ou suspendu en l'air: une colonne à côté d'un grand batiment paraît être plus grande, que dans une place vide; ainsi la lune paraîtra plus grande à l'horizon, étant environnée d'une foule d'autres objets. Il faut cependant convenir, que cela n'explique pas, pourquoi la même illusion a lieu sur mer, où l'horizon est libre.

Suivant une autre explication, donnée déjà par Ptolémée (1), cette illusion vient de ce que nous croyons la lune à l'horizon, plus éloignée qu'au zénit: nous sommes dans le même cas, que lorsque nous prenons une mouche qui passe devant nos yeux, pour un oiseau, parceque nous lui attribuons une grande distance. La question est donc, pourquoi nous croyons la lune à l'horizon plus éloignée; et la réponse ordinaire est, que c'est parceque la lune nous paraît derrière une foule d'objets terrestres, tandis qu'au zénit rien ne se présente entre l'oeil et la lune. Mais comme la même illusion a lieu sur mer, une raison plus juste est peut-être la faiblesse de la lumiere de la lune à l'horizon qui, suivant les principes de la perspective aérienne, la fait paraître plus éloignée. Il est aussi probable, que les vapeurs de l'horizon produisent une irradiation, qui fait paraître la lune, ainsi que les étoiles, plus grande à la vue simple qu'avec des téléscopes. Une raison plus importante est peut-être l'expérience connue de tout le monde, que le ciel ne paraît pas comme un hémisphère, mais comme une voute surbaissée, dont le rayon de la base, suivant quelques observations, est trois à quatre fois

(1) *Almag. Lib. IX. Cap.* 2. „Distantiae majores ad horizontem visibus modo apparent, et minores in medii coeli locationibus".

plus grand que la hauteur: la lune nous paraîtra donc moins éloignée au zénit qu'à l'horizon.

Enfin on a expliqué cette illusion par la construction de notre oeil: et cette explication serait sans doute la plus satisfaisante, si les observations, sur lesquelles elle est fondée, étaient mieux constatées. On a dit que l'oeil ressemble à une lentille achromatique, avec cette différence, que son ouverture est variable, en se rétrécissant ou dilatant, à mesure que la lumière est plus ou moins forte. Notre oeil voit donc la lune, lorsqu'elle a son plus bel éclat au zénit, par une ouverture plus petite, que la lune affaiblie par les vapeurs de l'horizon, Or, dit-on, l'expérience nous apprend, que l'image d'un objet luisant, formée par une lentille achromatique, à la même distance, est plus grande, à mesure que l'ouverture est plus large: l'image de la lune, projétée sur la rétine, sera donc plus grande à l'horizon, où nous la regardons à travers une ouverture plus large, qu'au zénit où la prunelle se rétrécit.

CHAPITRE VIII.

Rotation de la lune.

§. 218. La surface de la lune est constamment couverte de taches plus ou moins grandes, qu'on reconnaît aisément à la vue simple. Peu de tems après l'invention des lunettes on dressa des cartes de la lune qui, étant comparées avec des observations postérieures, fournirent le moyen de parvenir à une connaissance exacte du changement des taches. On aperçut sans peine, qu'en faisant abstraction de quelques exceptions peu considérables, les taches sont invariables, et que leur situation relativement à l'oeil ne change point, ensorte qu'on voit constamment les mêmes taches, et que la lune nous présente toujours la même face. Si c'était vrai à la rigueur, il en résulterait que la lune, dans le tems d'une révolution autour de la terre, *tourne* une fois *sur un axe*, perpendiculaire au plan de son orbite, et que les vitesses angulaires de ces deux mouvemens sont exactement égales: car dans aucun autre cas il n'est possible, que nous voyions constamment la même partie de la lune. Mais des observations plus détaillées ont prouvé, que cela est sujet à quelques exceptions. Des taches qu'on voit très-près du bord de la lune, sortent du disque visible, après s'être approchées du bord, tandis qu'au bord opposé d'autres taches entrent dans le disque. Ce phénomène arrive tantôt au bord oriental et occidental, tantôt au bord boréal et austral; et cette inégalité apparente de la rotation de la lune est appelée sa *libration:* il est aisé de l'expliquer de la manière suivante. Toutes les rotations des corps célestes, que nous pouvons observer, étant parfaitement uniformes, il faut supposer qu'il en est de même de celle de la lune; et les observations l'ont confirmé. Mais le mouvement de la lune dans son orbite étant très-inégal, il en résultera qu'en général

la lune nous présentera toujours la même face, si la période de sa rotation est égale au mois sidéral; mais les taches sur le bord oriental ou occidental disparaîtront, si le mouvement de la lune dans son orbite est plus ou moins vite que le mouvement moyen. D'ailleurs, si l'axe de rotation n'est pas exactement perpendiculaire au plan de l'orbite, les taches au bord supérieur ou inférieur disparaîtront, à mesure que la lune s'éloigne du noeud ascendant ou descendant de son équateur. Il faut y ajouter deux autres causes, dont l'une est purement optique comme les précédentes, au lieu que l'autre est physique. Quand même la lune dirigerait constamment la même moitié vers le centre de la terre, ensorte que la droite joignant les centres de la lune et de la terre rencontrât toujours le disque lunaire dans le même point; l'oeil placé sur la surface de la terre, se trouverait tantôt d'un côté de cette ligne, tantôt de l'autre, à cause du mouvement diurne de la terre, ensorte que la lune lui paraîtrait faire, dans une journée, des oscillations dans le sens de la rotation de la terre; et il est aisé de voir que cet effet n'est autre chose que la parallaxe. Enfin, si la lune n'est pas une sphère homogène, ses parties plus élevées ou plus denses seront attirées plus fortement par la terre, d'où il résultera des inégalités réelles de sa rotation. Ainsi les oscillations de la lune sont de quatre espèces, dont la dernière est un effet *physique*, ou une inégalité réelle; les trois autres, n'étant qu'apparentes, sont composées de la libration *diurne*, la libration en *longitude* et en *latitude*, la période des deux dernières étant le mois.

§. 219. Les élémens de la rotation de la lune, ou la position de son équateur, c'est-à-dire, les points où il traverse l'écliptique, les *noeuds*, et l'angle formé par ces deux plans, l'*inclinaison*, se trouvent par les mêmes méthodes qui ont été employées pour le soleil (§. 162. *suiv.*). Mais comme ces méthodes ne donnent pas une parfaite précision, on fera mieux d'employer une approximation. Il est aisé de s'assurer par les méthodes précédentes, que l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique est un très-petit angle, et que le noeud descendant de l'équateur lunaire, où il s'abaisse au dessous de l'écliptique, coïncide à peu près avec le noeud ascendant de son orbite, où elle s'élève vers le nord de l'écliptique. En faisant donc

la longitude du noeud ascendant de l'orbite $= \Omega$,

celle du noeud descendant de l'équateur lunaire $= \Omega + \omega$,

l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique $= \nu$;

ν et ω sont si petits, qu'on peut égaler leurs cosinus à l'unité; et Ω est connu pour une époque quelconque.

Après avoir trouvé par observation (§. 164.) la longitude et la latitude sélénocentriques d'une tache, l et b, il faut mettre dans l'équation I (§. 165.), ν au lieu de y, et $90° - b$ au lieu de a, ce qui donnera

$$\cos x = \cos \nu \sin b + \sin \nu \cos b \cos z,$$

$90° - x = 90° - PM$ (*Fig.* 45.) étant la déclinaison sélénocentrique de la tache, et $z = PEM$. Puisque E, P, sont les poles de l'écliptique et de l'équateur lunaire, la longitude du dernier étant constamment de 90° plus grande que celle de son noeud descendant, la longitude du pole P sera $= 90° + \Omega + \omega$, celle de la tache $M = l$, d'où il suit

$z = l - 90° - \Omega - \omega$, donc $\cos z = \sin(l - \Omega - \omega) = \sin(l - \Omega) - \omega \cos(l - \Omega)$; ce qui donne à l'équation précédente cette forme:

$$\cos x = \sin b + \nu \cos b \sin(l - \Omega) - \nu\omega \cos b \cos(l - \Omega).$$

Comme $\nu = PE$ n'est que 1° ou 2°, la différence entre PM, EM, sera très-petite: en faisant donc $PM = EM - y$, ou $x = 90° - b - y$, on aura à très-peu près, $\cos x = \sin(b + y) = \sin b + y \cos b$, ce qui étant substitué dans l'équation précédente, donnera

$$y = \nu \sin(l - \Omega) - \nu\omega \cos(l - \Omega) = 90° - b - x,$$

donc la déclinaison sélénocentrique de ta tache

$$90° - x = b + \nu \sin(l - \Omega) - \nu\omega \cos(l - \Omega).$$

Trois équations d'une même tache donneront trois équations de cette forme, et par conséquent les trois inconnues qu'elles renferment, x, ν, ω.

Il résulte de toutes les observations, sans excepter celles faites par Hévelke il y a à peu près 200 ans, que ω ne monte pas à 4°: on peut donc faire $\omega = 0$, parcequ'une détermination exacte de cette quantité n'est pas possible; ensorte qu'il est généralement supposé, que *le noeud descendant de l'équateur lunaire coïncide avec le noeud ascendant de l'orbite de la lune.* Il s'en suit, que les noeuds de l'équateur lunaire ont un mouvement rétrograde,

égal à celui des noeuds de l'orbite. L'*inclinaison* ν de l'équateur lunaire relativement à l'écliptique est suivant Mayer $= 1°29'$, suivant Lalande $= 1°43'$.

Imaginons trois plans menés par le centre de la lune, dont l'un est son équateur, l'autre le plan moyen de son orbite, et le troisième parallèle à l'écliptique: il suit de ce qui précède, que ces trois plans ont une commune section, que le troisième plan tombe entre les deux autres, et qu'il fait avec le premier et le second plan des angles de $1°43'$ et de $5°9'$; d'où il résulte que l'inclinaison de l'équateur de la lune par rapport à son orbite est $1°43' + 5°9' = 6°52'$ (1). Dans l'espace de 6793 jours (§. 205.) les poles des deux premiers plans décrivent, autour du pole de l'écliptique, contre l'ordre des signes, deux petits cercles, parallèles à l'écliptique, dont les demi-diamètres sont les arcs de $1°43'$ et de $5°9'$; ensorte que la différence entre les longitudes de ces deux poles est constamment 180°, et que tous les trois poles sont toujours situés sur un grand cercle, le pole de l'écliptique étant placé entre les deux autres.

§. 220. La position des taches relativement à l'équateur lunaire n'est point altérée par la rotation de la lune: elle sera donc déterminée par leur distance à l'équateur et au premier méridien, ou par leur latitude et longitude sélénocentriques, en termes de géographie, ainsi que cela se fait pour les pays de la terre. On a pris avec raison pour le *premier méridien* de la lune, celui qui passe par le centre du disque lunaire, lorsque le lieu vrai de la lune est égal au lieu moyen. Il en résulte, que le premier méridien est toujours à peu pres le milieu de la face que la lune tourne vers la terre, en ne s'en écartant jamais à l'orient ou l'occident, que de l'équation de la lune, ou de sa libration en longitude. Or la rotation de la lune étant la même que son mouvement moyen dans l'orbite, on trouvera pour une époque donnée, la longitude sélénocentrique du premier méridien, d'où se comptent les degrés de l'équateur, en ajoutant 180° à la longitude moyenne de la lune: ce qui donne aussi la distance du premier méridien au noeud ascendant de l'équateur

(1) M. Delambre (*Astr. théor. et prat. T. III. Ch. XXIX.* §. 69.) trouve cet angle $= 5°9' - 1°43' = 3°26'$, parcequ'il suppose que les noeuds ascendans de l'équateur de la lune et de son orbite coïncident, ensorte que l'équateur tombe entre l'orbite et l'écliptique.

lunaire, qui coïncide constamment avec le noeud descendant de l'orbite. Soit (*fig.* 62.) E le pole de l'écliptique ΥB, P le pole de l'équateur lunaire CA, N son noeud ascendant, PC le premier méridien, et M une tache: connaissant CN, on trouvera la longitude sélénocentrique CA. Dans le triangle PEM on connaît $PE = \nu$, $EM = 90° - b$, $PEM = z = l - 90° - \Omega - \varpi$ (§. 219.), d'où l'on tire $\cot EPM = \tang NA = \frac{\tg b \sin \nu}{\sin z} - \frac{\cos \nu}{\tg z} = \frac{-\nu \tang b}{\cos (l - \Omega)}$ $+ \tang (l - \Omega)$, et $CA = CN + NA$. On a vu précédemment (§. 219.), comment se trouve la latitude sélénocentrique $AM = 90° - x$. C'est de cette manière qu'on a construit des catalogues des taches de la lune, suivant leurs longitudes et latitudes (1).

La position des taches par rapport à l'équateur lunaire étant invariable, leur situation apparente dans le disque lunaire dépendra de celle de l'équateur qui, suivant les lois de la projection, paraît comme une ellipse, dont la grandeur et la situation seront déterminées à l'aide des formules (§. 158.), où il faut substituer l'inclinaison de l'équateur lunaire au lieu de ν, son noeud ascendant ou le noeud descendant de l'orbite $\mathfrak{V}$ au lieu de Ω, la longitude et la latitude de la lune au lieu de $\mathfrak{h}$ et de β. On aura donc le petit axe de l'équateur elliptique par rapport au grand axe, ou le petit axe en parties du rayon de la lune,

$$(1) \ldots . \sin \Phi = \nu \cos \beta \sin (\mathfrak{C} - \mathfrak{V}) - \sin \beta.$$

Or $\sin (\mathfrak{C} - \mathfrak{V}) = -\sin (\mathfrak{C} - \Omega)$, et $\nu = 89'$ ou $103'$: le petit axe sera donc

$$\sin \beta + 89'. \cos \beta \sin (\mathfrak{C} - \Omega) = \sin (\beta + 89' \sin (\mathfrak{C} - \Omega)).$$

L'angle ψ, ou l'inclinaison du petit axe au cercle de latitude vers l'orient, est donné par l'équation II.

$$\tang \psi = \tg \nu \cos (\mathfrak{C} - \Omega), \quad \text{ou} \quad \psi = 89'. \cos (\mathfrak{C} - \Omega).$$

§. 221. Les recherches sur la nature des parties lumineuses et opaques de la lune, appartiennent plutôt à la physique qu'à l'astronomie, et paraissent être inutiles, parcequ'il est aisé de prévoir, qu'il n'en résultera rien de certain. Il n'est pas digne du philosophe, de prendre la terre qu'il habite, pour modèle de la formation des autres corps célestes, et d'imaginer que nôtre continent, nos isles, et nos mers, se retrouvent dans les taches blanches et

(1) Voy. les *Tables astron. publ. par l'Acad. roy. des Sc. de Berlin, Tom. I. pag.* 17.

noires de la lune. La nature est trop riche, pour qu'il nous soit permis de supposer une analogie parfaite entre ses différens ouvrages; et il est probable que chaque corps céleste a des beautés particulières, dont nous ne pouvons avoir aucune idée, ainsi qu'un aveugle né ne peut se faire une idée des couleurs, ou ainsi que l'homme qui n'a que cinq sens, ne peut imaginer les organes dont la nature a doué les habitans des autres planètes, pour leur faire sentir les objets dont ils sont environnés.

Les observations des éclipses solaires et des occultations des étoiles semblent prouver, que la lune est environnée d'un fluide transparent qui détourne la lumière de sa route droite: mais cette *atmosphère* réfractive doit être fort différente de la nôtre. L'action du soleil résoud en vapeurs la plupart des corps: les exhalaisons des corps à la surface de la lune monteraient donc en l'air, et formeraient dans l'atmosphère des nuages qui couvriraient parfois une partie de la lune. Mais on n'aperçoit la moindre variation, ni dans l'éclat de la lune, ni dans l'état de son atmosphère. La lune n'a donc pas cet air dense, auquel nous devons la chaleur, la pluie, et toutes les sources de la vie animale et végétale; l'invariabilité de ses taches semble même indiquer, que sa surface est d'une dureté impénétrable. En un mot, la lune paraît être un corps dur, froid, et inhabitable pour des êtres, semblables aux animaux de la terre; une planète qui n'est pas encore parvenue à sa maturité, préparée peut-être par de fréquentes éruptions volcaniques, ou qui, après avoir rempli sa destinée, se trouve actuellement dans un état de dépérissement.

Si la lune est environnée d'une atmosphère réfractive, le commencement d'une occultation du soleil ou d'une étoile par la lune sera retardé, et la fin sera accélérée du double de la réfraction horizontale, parceque le dernier et le premier rayon de lumière, en traversant l'atmosphère lunaire, décrira une courbe, concave du côté de la lune, et pliée deux fois par la réfraction. Or les observations les plus exactes ont prouvé, que cette influence est insensible, et que la réfraction horizontale sur la lune, s'il y en aune, est moindre que 2″, et par conséquent mille fois plus petite que celle de l'atmosphère terrestre. L'air de la lune devrait donc être mille fois

plus rare que le nôtre, et par conséquent plus rare que le *vacuum* dans nos meilleures machines pneumatiques, dans lequel aucun animal ne peut vivre.

Cependant les observations de Schröter, qu'il a publiées dans ses *Fragmens Sélénotopographiques,* paraissent indiquer, que le tems qu'il fait sur ce satellite, n'est pas tout-à-fait invariable, et qu'il y a même une espèce de végétation. Mais les variations que cet astronome a observées, sont inconsidérables, et il convient que la lune n'a ni mers ni rivières, parcequ'on reconnaît distinctement des élévations et des cavités dans les taches noires qu'on avait prises pour des mers.

Ce qu'il y a de plus certain, c'est que la lune est couverte de *montagnes* très hautes, et de rochers, ou de masses d'une matière inconnue, dure et brillante. Plusieurs parmi les points les plus brillans, étant situés dans le segment non-éclairé de la lune, se distinguent de la partie obscure qui les environnne, par leur lumière; mais comme ils finissent par disparaître à une plus grande distance de la ligne de lumière, on voit que ce n'est pas une lumière propre, mais que ces taches sont illuminées par le soleil plus longtems que les parties voisines; ainsi que les sommets des montagnes de la terre sont dorés par la lumière du soleil longtems avant son lever et après son coucher, pendant que le pays voisin est à l'ombre. Il paraît donc être hors de doute, que ce sont des montagnes, dont la hauteur pourra être déterminée par le procédé suivant. Soit (*Fig.* 63.) L le centre, AC le côté obscur de la lune, CB une montagne, et AB le dernier rayon du soleil qui vient de raser la lune en A, la ligne de lumière passant par A. Ayant donc mesuré la plus grande distance AB de la ligne de lumière, à laquelle le point lumineux B disparaît, soit $AL = \varrho$, $AB = \mu\varrho$: on aura $LB = \varrho\sqrt{(1+\mu^2)}$, et la hauteur de la montagne $CB = \varrho\{\sqrt{(1+\mu^2)}-1\} = \frac{\mu^2}{2}\varrho$. Suivant les observations de Hévelke, la plus grande valeur de μ est $\frac{1}{13}$, ce qui donne la hauteur $= \frac{1}{338}$ du demi-diamètre de la lune, ou $\frac{1}{214}$ suivant Schröter. Les plus hautes montagnes de la terre ne s'élèvent pas à une lieue et demie, ou à $\frac{1}{1000}$ du rayon terrestre: en conséquence, il y a sur la lune des montagnes, qui sont, à proportion des deux planètes, presque cinq fois

plus hautes que celles de la terre; et leur hauteur absolue serait presque deux lieues.

Schröter a vu une foule de cavités dans la lune, dont quelques unes ont une lieue et demie de profondeur, et six lieues de diamètre. Elles sont environnées de remparts ou de montagnes, dont la masse les remplirait exactement: il est donc probable, que toutes ces élévations de la lune ont été produites par des éruptions volcaniques, qui se font peut-être encore. M. Herschel croit en avoir vu. Au tems de la nouvelle lune, il aperçut au milieu de la lune obscure, trois points lumineux, qui ressemblaient à des charbons ardens et couverts d'un peu de cendre, et dont l'un avait une lieue de diamètre. Leur lumière dura plusieurs jours, en éprouvant des variations qui ne dépendaient nullement de l'accroissement de la lune, et au bout de ce tems elle s'éteignit tout-à-fait (Voy. *Philos. Transact. Vol. LXXVII. Part.* 1. *pag.* 229.).

LIVRE V.

DES OCCULTATIONS ET DES ÉCLIPSES.

CHAPITRE. I.

Classification de ces phénomènes.

§. 222. Les *éclipses* et *occultations* des corps célestes sont des phénomènes frappans même pour ceux qui ne s'occupent point de l'astronomie; des phénomènes qui ont dû étonner et effrayer les premiers observateurs, qui devinrent ensuite un objet de curiosité, et qui servent encore de preuve, sur laquelle le public juge de la justesse et de la sureté de la théorie de l'astronomie. Le spectacle majestueux du ciel étoilé, parsemé d'une infinité de sphères brillantes, le mouvement calme et solemnel de cette voute magnifique, qui paraît obéir à des lois éternelles; tout cela fit de l'observation du ciel l'occupation la plus douce des premiers bergers, qui servait à chasser l'ennui de leurs nuits oisives, en leur présentant chaque jour de nouvelles scènes. L'interruption inattendue de leurs jouissances journalières, la disparition subite et inconcevable des objets qu'ils étaient accoutumés de regarder avec admiration et vénération, devaient leur inspirer une crainte des suites funestes de ce dérangement apparent; et ils ne pouvaient être tranquilles, en voyant qu'une cause inconnue priva les plus beaux ornemens du ciel, de la

lumière qui avait éclairé leurs jours et leurs nuits. Le retour de cette lumière, les fréquentes répétitions de ces phénomènes qui n'eurent jamais de suites funestes, étaient nécessaires pour leur donner le courage, de les regarder sans peur, de les attendre même avec impatience. La peur et la curiosité firent des éclipses les évènemens les plus importans, qui furent notés dans les plus anciens tems. Dès que cela fut fait, il était naturel d'examiner, s'il ne s'y manifestait pas un certain ordre, qui pût servir à prédire l'époque d'un évènement semblable; et aussi tôt qu'on eut découvert une période, et qu'on se fut aperçu qu'elle était intimement liée avec les mouvemens périodiques des deux corps célestes, ces phénomènes rentraient dans la classe des autres objets de l'astronomie, et leur cause ne pouvait plus être un secret. Ils devinrent entre les mains des astronomes une source des découvertes les plus utiles, et longtems après, les observations des éclipses de lune furent la seule base de la théorie des mouvemens de cet astre.

§. 223. Lorsque les centres ou quelques parties de trois corps célestes se trouvent sur une même ligne droite, les rayons d'un des deux corps extérieurs ne peuvent pas arriver à l'autre, étant interceptés, au moins en partie, par celui qui est au milieu. Le corps B (*Fig.* 64.) *couvrira* l'objet C, ou le fera disparaître à l'oeil, supposé en A, entièrement ou en partie; mais l'oeil en B verra les deux corps A et C, opposés l'un à l'autre, pourvu qu'ils aient assés de lumière. Mais si A est un corps opaque, qui reçoit la lumière de C, le corps B interceptera la lumière qui est nécessaire pour que A soit visible: A entrera dans l'ombre que B projette du côté opposé au corps lumineux C, et par conséquent il sera invisible ou *éclipsé,* soit que l'oeil se trouve en B, soit qu'il se trouve dans un lieu quelconque D: l'oeil en D verra, que le corps A entre dans l'ombre du corps B, et quil est éclipsé de plus en plus. Tout cela suppose que la route de la lumière est une ligne droite. Si, en traversant plusieurs milieux, la lumière est détournée de sa route, l'occultation n'aura lieu, que si les lieux apparens, ou altérés par les réfractions, se trouvent sur une même ligne droite. Mais la réfraction étant peu considérable, et indépendante des distances, elle aura la même influence sur les deux corps; et le plus souvent il serait tout-à-fait inutile d'en tenir compte.

Les différentes espèces de ces phénomènes peuvent être comprises sous le terme général d'*occultations*; mais la diversité du spectacle qu'ils présentent, et des règles qu'il faut suivre pour les calculer, exige leur classification. Comme tout se réduit à trouver l'instant, où des parties données des trois corps se trouvent sur une même ligne droite, il est aisé de voir, que ce calcul suppose une connaissance exacte des mouvemens des corps célestes, de leurs diamètres apparens, et de leurs distances ou parallaxes. La théorie de leurs mouvemens donne le lieu vrai de chacun à une époque donnée; les parallaxes et les diamètres nous apprennent, de combien les centres peuvent s'écarter de la ligne droite, sans que d'autres parties de ces corps cessent de couvrir l'une l'autre: elles détermineront donc la durée et les autres circonstances de ces phénomènes, d'où il suit, que leurs observations serviront à rectifier le calcul, ou les élémens employés dans le calcul. Cela seul prouverait la grande importance de ces phénomènes, qui se manifestera davantage par la suite.

§. 224. L'observateur ou la terre étant en B (*Fig.* 64.), le corps lumineux ou le soleil en C, la terre projettera suivant la direction BA une ombre, dont le diamètre va en décroissant de B en A, et devient nul à une certaine distance BA, parceque le soleil est plus grand que la terre. Chaque corps opaque A sera éclipsé, en traversant l'ombre BA; il le sera d'autant plus, qu'il est plus près de B. En général il est aisé de voir que deux conditions sont indispensables, pour que A s'enfonce totalement dans l'ombre, ou que l'éclipse soit *totale:* il faut 1) que A soit plus petit que B, parceque tous les diamètres de l'ombre sont plus petits que celui de la terre, 2) que A soit assés près de B, pour que le diamètre de l'ombre à cette distance soit plus grand que celui du corps A. Relativement à la terre, la lune est le seul corps céleste qui puisse remplir ces deux conditions, lorsqu'elle est en A opposée au soleil C, ou qu'elle est pleine: aussi voit-on souvent la *pleine lune* éclipsée entièrement ou en partie, et les *éclipses lunaires* n'arrivent jamais qu'à la pleine lune. Un observateur, placé en D hors de la ligne ABC, verra également la lune éclipsée, ainsi que nous voyons en D les éclipses des satellites A, lorsqu'ils s'enfoncent dans l'ombre de Jupiter B. Il s'en suit que, si la lune était occultée par un autre corps B, la terre D

verrait une éclipse lunaire, quand même la lune ne serait pas pleine; mais les seuls corps célestes qui puissent se placer entre le soleil et la lune, savoir Vénus et Mercure, sont si éloignés de la lune, qu'elle est toujours hors de leur ombre, dans quelque point de la droite CB qu'elle se trouve. Il en est de même, lorsque la terre étant en B, un autre corps se trouve en A au lieu de la lune. En effet, les planètes supérieures, étant opposées au soleil, seraient éclipsées aussi bien que la lune, si leur distance à la terre n'était si grande, qu'elles se trouvent toujours hors des limites de l'ombre de la terre. Elles nous paraissent dans leur plus bel éclat, dans l'instant même où elles devraient être éclipsées, parceque la terre est trop petite, pour leur cacher une partie sensible du disque solaire.

§. 225. L'oeil étant en A, et deux corps célestes en B et C, le corps B cachera à l'oeil une partie de C, aussi souvent que la droite AC passe par B. Cette *occultation* totale ou partielle peut être envisagée sous différens points de vue, selon la nature et la grandeur des corps B, C. Le cas le plus simple serait celui, où B et C ont la même grosseur apparente: si l'un des trois corps, ou tous les trois ont, dans ce cas, un mouvement propre, l'occultation peut être totale, mais elle ne peut durer qu'un instant. S'ils n'ont ni mouvement propre ni parallaxe diurne, l'occultation peut durer longtems. Comme ces suppositions n'ont lieu que relativement aux étoiles fixes, dont la parallaxe annuelle est aussi insensible, l'occultation d'une étoile par une autre sera visible dans tous les lieux de la terre, où les étoiles sont visibles, et elle durera continuellement, à moins que le système solaire ou les étoiles n'aient un mouvement propre, ou que la parallaxe annuelle ne soit sensible. Dans un pareil cas, l'étoile la plus éloignée paraîtra derrière l'autre: c'est ce qui paraît effectivement être le cas de quelques *étoiles doubles*, ainsi qu'on l'a vu plus haut.

En général, si B est assés grand pour couvrir le corps C entier, et que C n'est pas un corps qui éclaire la terre, comme le soleil ou la lune, on appelle cela une *occultation* proprement dite. Telles sont les occultations d'une planète par une autre, des étoiles par les planètes, et principalement celles des étoiles ou des planètes par la lune. Pour cet effet, il est nécessaire que la grandeur apparente de B soit au moins égale à celle de C.

Mais si la grosseur apparente de C est beaucoup plus grande que celle de B, le disque de C ne peut pas être couvert par B, mais on verra B passer sur le disque de C comme une petite tache: c'est ce qu'on appelle un *passage*. Puisqu'aucun corps céleste ne passe entre la terre et la lune, les seuls phénomènes de cette espèce pour la terre, sont les passages des planètes inférieures sur le soleil, et des satellites de Jupiter sur le disque de cette planète. Il est aisé de voir, que ce cas a toujours lieu, si le corps A est assés éloigné de B, pour se trouver hors des limites de l'ombre de B, qui se rapporte à la lumière que B reçoit de C. C'est ainsi que les passages des planètes inférieures se présentent à la terre et à la lune, et ceux de la terre et de chaque planète inférieure aux planètes supérieures: les éclipses annulaires de soleil y appartiennent aussi.

§. 226. Si le corps C, occulté par la lune B, est le soleil qui illumine la terre A, il en résulte une *éclipse solaire*. Puisque le diamètre apparent de la lune est à peu près égal à celui du soleil, et quelque fois plus grand, la lune en conjonction, ou la *nouvelle lune* peut effectuer une éclipse totale de soleil; et c'est le seul corps, qui soit assés grand pour produire cet effèt. Afin que le soleil C soit couvert par la lune B, il est nécessaire que l'oeil A se trouve à peu près sur la droite CBA, et assés près de B: la situation de l'oeil n'est donc pas indifférente, et le phénomène ne sera pas le même pour tous les lieux de la terre; en d'autres mots, la parallaxe de la lune fait, que de chaque lieu de la terre on voit une autre éclipse de soleil, et que la même éclipse peut être visible dans un lieu, et invisible dans un autre, quoique le soleil soit au dessus de l'horizon. Du reste il est visible, que pendant une éclipse solaire la terre A est dans l'ombre de la lune, et que par conséquent on verra de la lune, et de chaque autre corps céleste, une *éclipse de terre*. C'est ainsi qu'on voit de la lune une éclipse solaire, lorsque nous avons une éclipse lunaire: alors la lune est en A, et la terre en B couvre le soleil C.

CHAPITRE II.

Les Éclipses de Lune.

§. 227. On a vu, que les *Eclipses de Lune* ne dépendent point du lieu d'où elles sont vues; parceque la lune est enveloppée dans l'ombre: le calcul de ces phénomènes est donc très-facile; et comme le lieu est indifférent, où l'oeil est supposé, il sera plus simple, d'arranger le calcul entier pour le centre de la terre.

La terre sera regardée ici comme une sphère parfaite, de sorte que les sections de l'ombre, perpendiculaires à l'axe, sont des cercles, quelle que soit leur distance; et l'ombre formera un corps conique ou cylindrique, dont l'axe est la ligne droite CBA (*Fig.* 64.) qui joint les centres du soleil et de la terre. Sans connaître exactement la distance ou la parallaxe du soleil, il résulte de toutes les observations, sans excepter celles des anciens, que cet astre est beaucoup plus grand que la terre; d'où il suit, que l'ombre projettée par la terre est un *cône*, dont le sommet est à l'opposite du soleil. L'*axe de l'ombre* CBA est toujours situé dans l'écliptique, et dirigé vers un point A dont la longitude est de 180° plus grande que celle du soleil, ensorte que la situation de l'axe est entierement déterminée par la *longitude du soleil*. La longueur et les sections de l'ombre dépendent de la grosseur du soleil et de la terre, et de leur distance, conséquemment du *diamètre* et de la *parallaxe du soleil*. La dernière n'est connue que par les éclipses et passages, et elle est si petite qu'on pourrait la négliger tout-à-fait ici: cependant nous l'employerons comme un élément connu à peu près, qui sera corrigé par les éclipses.

L'ombre de la terre n'étant pas cylindrique, mais conique, la distance BA, à laquelle la lune traversera l'ombre, n'est pas indifférente. On a vu, que

l'ombre a des limites qui dépendent du diamètre et de la parallaxe du soleil: ces élémens donneront aussi la section à la distance BA de la lune à la terre; il est donc nécessaire de connaître la *parallaxe de la lune*. L'orbite lunaire n'étant pas dans le plan de l'écliptique, la lune peut être hors de l'écliptique dans l'instant de son opposition: elle ne passera donc pas par l'axe de l'ombre, mais le point A de l'axe, auquel la pleine lune répond perpendiculairement, sera donné par la parallaxe.

Après avoir trouvé la section de l'ombre, qui convient à la distance AB, on verra, si la lune approchera assés de l'axe A, pour traverser l'ombre. La distance du centre de la pleine lune à l'axe est sa latitude, et la distance du bord le plus proche est la différence entre la latitude et le demi-diamètre de la lune: donc la *latitude* et le *diamètre de la lune* sont des élémens essentiels.

Tous ces élémens étant variables, il faut les déterminer pour le même instant; et il est tout simple de choisir pour cela l'instant de l'opposition. Mais comme les éclipses durent plusieurs heures, il faut connaître les *mouvemens horaires du soleil* et de la *lune*, celui de la dernière tant en *longitude* qu'en *latitude*; ces élémens serviront à déterminer les positions de l'axe CB et de la lune, pour chaque instant pendant quelques heures avant et après l'opposition.

§. 228. Pour éviter des calculs inutiles, il faut commencer par examiner s'il y aura éclipse ou non: le tems sera celui de l'opposition. On serait donc obligé de calculer toutes les oppositions ou pleines lunes, ainsi que la parallaxe et la latitude de la lune, pour voir s'il y aura éclipse, ou si l'opposition sera *écliptique*. Mais comme ce calcul préliminaire n'a pas d'autre but, que de juger, si le calcul exact des élémens de l'éclipse est nécessaire ou non, on n'a pas besoin d'une grande précision, et l'on peut se contenter du procédé suivant. Après avoir déterminé généralement le *plus grand* et le *plus petit* diamètre de l'ombre dans la région de la lune, il suffira de chercher le diamètre et la latitude de la lune: on appelle cela les *termes écliptiques*, ou *limites des éclipses*. En effet, si la différence entre la latitude et le demi-diamètre est plus grande que le plus grand diamètre de l'ombre, il ne peut y avoir éclipse; si cette différence est plus petite que le plus petit diamètre, on est sûr qu'il y en aura une. Pour comparer ces limi-

tes avec la latitude qui est un angle géocentrique, il faut exprimer aussi le diamètre de l'ombre par l'angle, sous lequel il est vu du centre de la terre. A la rigueur, l'opposition n'est pas l'instant où la lune approche le plus de l'axe de l'ombre; mais la différence est inconsidérable, comme on le verra ci-après.

§. 229. Supposons que S, T, (*Fig.* 65.) soient les centres du soleil et de la terre, et que dans un plan quelconque S*st*T qui passe par l'axe de l'ombre ST, on ait mené deux tangentes au soleil et à la terre *st*, *sτ*, qui coupent l'axe ST en C et en F. Si le plan SC*s* tourne sur l'axe SC, il se formera un cône *t*C*τ*, dont le sommet est en C. Quelque part que l'oeil se trouve au dedans de ce cône, le soleil entier lui sera caché: car il est aisé de voir, que chaque droite, menée d'un point de ce cône à un point quelconque du soleil, doit nécessairement rencontrer la terre, et que par conséquent nul point dans ce cône ne peut recevoir des rayons du soleil; c'est pourquoi *t*C*τ* est appelé le *cône d'ombre*. Mais aussitôt que l'oeil sort de ce cône, il verra au moins une partie du soleil; il en sera de même, si l'oeil se trouve dans l'axe SC, mais au delà de C du côté de A: C est donc le point qui a été appelé plus haut la *limite de l'ombre*. A mesure que l'oeil s'écarte du cône d'ombre de *l* en L, il verra une plus grande partie du soleil, dont une autre partie lui sera invisible jusqu'à une certaine distance: il est donc dans la *pénombre*. Il est aisé de voir que cet espace est limité par le cone *τ*F*t* qui est appelé le *cône de pénombre:* en effet, d'un point quelconque M hors de ce cône on verra le soleil entier, parceque la droite M*s* ne recontre pas la terre; mais d'un point D dans la partie G*tτ*H de ce cône, on ne verra qu'une partie du soleil, parceque la ligne D*s* doit nécessairement rencontrer la terre.

§. 230. Si la lune L entre dans l'ombre en *l*, et qu'on ait tiré la ligne droite *s*TD; le demi-diamètre géocentrique de l'ombre est CT*l* = DT*l* − DTC = *u*. Or TD étant la prolongation du côté *s*T du triangle T*sl*, on aura

DT*l* = T*lt* + T*st*, et DTC = ST*s*, donc *u* = T*lt* + T*st* − ST*s*.

Mais T*lt* = P est le demi-diamètre de la terre, vu de la lune, c'est-à-dire

la parallaxe horizontale de la lune; $Tst = p$ est la parallaxe horizontale du soleil, et $STs = r$ le demi-diamètre apparent du soleil: d'où il suit que dans tous les cas

le demi-diamètre de l'ombre est la somme des parallaxes horizontales de la lune et du soleil, moins le demi-diamètre du soleil, $u = P + p - r$.

Lorsque la lune M touche en λ le cône de pénombre, le rayon de la section est $\upsilon = CT\lambda = T\lambda\tau + TF\tau = T\lambda\tau + SFs$, et $SFs = SCs + \tau st$, $SCs = STs - Ts\tau$, donc

$\upsilon = T\lambda\tau + STs - Tst + \tau st$. Mais on a

$T\lambda\tau = P$, $STs = r$, $Tst = p$, $\tau st = 2p$: d'où il résulte que

le demi-diamètre de la pénombre est la somme des parallaxes horizontales de la lune et du soleil, plus le demi-diamètre du soleil, $\upsilon = P + p + r$.

L'entrée de la lune dans l'ombre commence dans l'instant, où son bord l ou λ touche le cône d'ombre, son centre L ou M en étant encore éloigné du demi-diamètre apparent de la lune $LTl = MT\lambda = R$: il s'en suit qu'une éclipse peut avoir lieu, quoique la latitude de la lune soit de l'angle R plus grande que u ou υ. Cela donne la limite des éclipses, ou la latitude, avec laquelle la lune entre dans l'ombre ou dans la pénombre,

$$P + p + R - r \text{ et } P + p + R + r.$$

L'aplatissement de la terre fait que l'ombre $tC\tau$ n'est pas un cône exact, mais un conoïde dont la base $t\tau$ est elliptique, et varie à chaque instant à cause de la rotation de la terre. Il faudrait des calculs extrêmement compliqués, si l'on voulait déterminer rigoureusement pour chaque instant la figure de ce cône, et celui de ses diamètres où se fera l'immersion ou l'émersion, parceque les sections ne sont pas circulaires. Heureusement, cette précision est tout-à-fait inutile, d'autant plus que la figure de la terre n'est pas parfaitement connue. Il est donc naturel de prendre le plus grand diamètre que l'ombre peut avoir dans la région de la lune, ou ce qui revient au même, la plus grande parallaxe horisontale de la lune, c'est-à-dire la *parallaxe équatoriale* qu'il faut mettre à la place de P.

§. 231. Dans le calcul même d'une éclipse, il faut tirer des tables les parallaxes et les diamètres qui ont lieu au tems de l'éclipse; mais dans le

calcul préliminaire, où il s'agit seulement de choisir les syzygies *écliptiques*, il suffit de connaître les *maxima* et *minima* de ces élemens. Comme la pénombre a toutes les gradations depuis l'obscurité totale jusqu'à l'éclat de la pleine lune, il est impossible de l'observer avec quelque précision: c'est pourquoi l'on se borne ici à l'ombre proprement dite, dont la limite est $= P+p+R-r$ (§. 230.), qui par conséquent sera d'autant plus grande, que P, p, R, sont plus grands, et r plus petit. Or les *maxima* et *minima* de ces élemens sont (§. 215. et I. §. 135.),

$P = 62'$, $R = 16'55''$, $r = 16'18''$; et $P = 53'$, $R = 15'34''$, $r = 15'45''$; $p = 9''$;

donc la plus grande latitude que la lune puisse avoir dans l'instant de son immersion ou émersion, est $= 62' + 9'' + 16'55'' - 15'45'' = 63'19''$;

et la plus petite $= 53' + 9'' + 15'34'' - 16'18'' = 52'25''$:

la première est la limite, au delà de laquelle il ne peut y avoir éclipse; la dernière est celle, où l'on est sûr qu'il y en aura une.

L'usage ordinaire est d'exprimer ces limites, non par la latitude, mais par son argument, lequel pouvant être différent pour la même latitude, à cause des variations de l'inclinaison de l'orbite lunaire, il en résultent différentes limites. En nommant ν l'inclinaison, β la latitude, α l'argument de latitude, on a (§. 83.) $\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin\nu}$. Or la plus grande inclinaison étant $= 5°\,17'\,34''$, la plus petite $= 5°\,0'\,0''$ (§. 206.), on trouvera la plus grande et la plus petite valeur de α par les équations, $\sin\alpha = \frac{\sin 63'19''}{\sin 5°}$ et $\sin\alpha = \frac{\sin 52'25''}{\sin 5°17'34''}$: ce qui donne les limites $\alpha = 12°11'57''$ et $\alpha = 9°30'50''$. En conséquence, si la pleine lune est éloignée du noeud de plus de $12°12'$, il ne peut y avoir éclipse; mais si elle en est éloignée de moins de $9°31'$, on est sûr qu'il y en aura une. Il ne peut donc y avoir d'incertitude, que lorsque l'argument de latitude est entre $9°31'$ et $12°12'$.

Relativement à la pénombre, il faut mettre $\beta = P+p+R+r = 1°35'22''$ dans l'équation $\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin\nu}$, ce qui donnera pour la limite de la pénombre, $\alpha = 18°33'30''$.

Pour faciliter ce calcul préliminaire, on a construit des tables qui donnent, avec une précision suffisante pour ce but, le tems des syzygies qui

arriveront dans chaque année, avec l'argument de latitude: ces tables présentent donc immédiatement les syzygies écliptiques (1).

§. 232. Après s'être assuré par le procédé précédent, qu'une pleine lune sera ou pourra être écliptique, il faut tirer des tables, pour l'instant de l'opposition, les élémens suivans:

Longitude vraie du soleil $= \odot$,

Longitude vraie de la lune sur l'écliptique $= \mathfrak{C}$,

Mouvement horaire du soleil $= h$,

Mouvement horaire de la lune sur l'orbite $= H$, sur l'écliptique $= G$,

Parallaxe équatoriale de la lune $= P$, celle du soleil $= p$,

Demi-diamètre du soleil $= r$, celui de la lune $= R$,

Latitude de la lune $= b$,

Accroissement de la latitude dans une heure $= \beta$.

Toutes ces quantités, excepté b et β, sont constamment positives: b est positif ou négatif, selon que la latitude est boréale ou australe; β est positif, lorsque la latitude boréale augmente ou la latitude australe diminue, c'est-à-dire quand la lune approche du pole boréal; dans le cas contraire β est négatif. Si la différence entre $\odot$ et $\mathfrak{C}$ n'est pas exactement 180°, l'époque supposée n'est pas la véritable opposition; mais par le moyen de G et h, on trouvera aisément, combien il faut ajouter ou retrancher du tems supposé, pour que $\mathfrak{C} - \odot$ soit $= 180°$: ce qui donnera le tems T de la vraie opposition. Puisque l'éclipse ne durera que quelques heures, on peut, sans erreur sensible, calculer le lieu de la lune pour chaque instant durant l'éclipse, à l'aide des mouvemens horaires; ou ce qui revient au même, on peut supposer le mouvement de la lune rectiligne et uniforme, ce qui facilite singulièrement le calcul.

§. 233. Soit (*Fig.* 66.) ♌E l'écliptique, ♌B l'orbite lunaire, donc ☊ le noeud ascendant; soit $\odot$ le point de l'écliptique, opposé au soleil, ou le centre de l'ombre dans la région de la lune, et $\odot\mathfrak{C} = b$ perpendiculaire à l'écliptique, donc $\mathfrak{C}$ le lieu de la lune dans l'instant de l'opposition. En faisant $\mathfrak{C}L = H$, et en menant LN, $\mathfrak{C}$M, perpendiculairement et parallèlement

(1) *Tab. astron. publ. par l'Acad. de Berlin, T. II. pag.* 98.

à l'écliptique, L sera le lieu de la lune une heure après l'opposition, $LN = b + \beta$, donc $LM = \beta$, et $\complement M = V(H^2 - \beta^2) = G$. Ainsi on trouvera, pour chaque instant, le point L que la lune occupera sur la droite $\complement L$, ce qui donnera la distance de la lune au centre de l'ombre, $\odot L = V(\odot N^2 + NL^2) = V(G^2 + (b+\beta)^2)$, en supposant immobile le point $\odot$. Mais ce point avançant du même côté que la lune, il vaut mieux de substituer au vrai mouvement de la lune, son mouvement *relatif*, avec lequel elle s'éloigne ou approche du point $\odot$. En faisant $\odot S = h$, au bout d'une heure $\odot$ sera en S, la lune en L: pour que les points $\odot$, $\complement$, puissent être regardés comme immobiles, il faut ramener S et L parallèlement de la quantité $S\odot = Ll = h$; alors l aura la même situation relativement à $\odot$, que L relativement à S. La droite vb qui joint les points $\complement$, l, représente donc l'*orbite relative*, $\complement l = \eta$ est le *mouvement horaire relatif* de la lune, et l'on a $lm = LM = \beta$, $\complement m = \odot n = \complement M - Ll = G - h$. Le triangle $\complement ml$ fournit donc l'équation

$$\eta = V(G^2 - 2Gh + h^2 + \beta^2) = V(H^2 + h^2 - 2hV(H^2 - \beta^2)).$$

Comme H est beaucoup plus grand que β, il viendra

$$V(H^2 - \beta^2) = H\left(1 - \frac{\beta^2}{2H^2} - \frac{\beta^4}{8H^4} - \text{cet.}\right),$$

et en exprimant en secondes toutes les quantités, on aura à peu près $\beta = 180''$, $H = 1980'' = 11\beta$, donc $\frac{\beta^4}{8H^4} = \frac{1}{117128}$, et $H.\frac{\beta^4}{8H^4} = 0'',01$. On a donc sans erreur sensible, $V(H^2 - \beta^2) = H\left(1 - \frac{\beta^2}{2H^2}\right)$, et

$$\eta = V\left(H^2 + h^2 - 2Hh + \frac{b}{H}\beta^2\right) = V\left((H-h)^2 + \frac{b\beta^2}{H}\right) = H - h + \frac{b\beta^2}{2H(H-b)} + \text{cet.}$$

où l'on peut négliger le dernier terme qui est toujours au dessous d'une seconde. Ainsi il vient

$$\eta = H - h.$$

On procèdera donc ainsi, pour construire l'orbite relative. Ayant tiré une ligne arbitraire CE (*Fig.* 67.) qui représente l'écliptique, on y prendra $\odot$ pour le point immobile de l'opposition. D'après une échelle quelconque on élèvera sur CE la perpendiculaire $\odot\complement = b$, on fera $\odot n = V(H^2 - \beta^2) - h$, et $nl = b + \beta$ perpendiculaire à CE: cela posé, la droite passant par les points $\complement$, l, sera l'orbite relative. La *figure* représente le cas où l'opposition arrive

après le noeud ascendant; et il est aisé de voir, comment il faut procéder dans les autres cas. Maintenant on peut marquer au point ☾ le tems T de l'opposition, en l une heure de plus, en l' une heure de moins, après avoir fait $☾l = ☾l' = \eta = H - h$; l'on peut ainsi diviser l'orbite en minutes et secondes, si l'échelle employée le permet, et l'on trouvera sans calcul, le lieu relatif de la lune pour chaque instant.

§. 234. On fera sur la même échelle, ⊙C et ○E, égales au demi-diamètre de l'ombre $u = P + p - r$, et de ce rayon et du centre C on décrira un demi-cercle EBC qui représentera la moitié de la section de l'ombre dans la région de la lune.

L'équation $u = P + p - r$ se fonde sur la supposition, que le cône d'ombre est terminé par les tangentes du soleil et de la terre, c'est-à-dire, que tous les rayons du soleil peuvent librement parvenir à la lune, qui ne rencontrent aucun point du globe terrestre. Mais la terre étant environnée d'une atmosphère qui, près de sa surface agit fortement sur les rayons solaires, il est à présumer, qu'elle interceptera une partie de ces rayons, de manière à produire une ombre sensible dans la région de la lune. L'expérience l'a confirmé, et pour satisfaire aux observations, il faut augmenter la parallaxe de la lune P de sa soixantième partie, suivant Mayer. En effet, il faut regarder cette correction comme une augmentation du rayon de la terre, en y ajoutant une partie de l'atmosphère; et cette augmentation influera seulement sur les angles $Tlt = P$ (*Fig.* 65.) et $Tst = p$, et non pas sur l'angle $STs = r$ ou $LTl = R$: la correction $\frac{p}{60} = 0'',14$ est insensible.

Toutes les circonstances d'une éclipse dépendent de la distance de la lune au centre ⊙ de l'ombre (*Fig.* 67.). L'éclipse est à son *maximum*, lorsque cette distance est un *minimum*. La lune touchera le cône d'ombre, et l'*éclipse commencera* ou *finira* en d et en f, quand la distance du centre de la lune au point ⊙ est $⊙D = ⊙F = u + R = \frac{61}{60} P + p + R - r$. Le *commencement* et la *fin* de l'*éclipse totale* arrivera, lorsque la lune touche le cône d'ombre intérieurement en g et h, la distance des centres étant $⊙G = ⊙H = u - R = \frac{61}{60} P + p - R - r$.

§. 235. Le point le plus important de l'orbite relative est celui, où la distance des centres de la lune et de l'ombre est un *minimum*, non-seulement parceque ce point indique la nature et la grandeur de l'éclipse entière, mais parcequ'il est la base du calcul de toutes les autres phases. Ce point A du plus grand obscurcissement est donné par la droite $\odot A$, perpendiculaire à l'orbite relative; et la position et l'époque de chaque point de l'orbite, A, D, F, etc. seront déterminées par la distance du point C de l'opposition, parceque c'est le seul point qu'on a tiré immédiatement des tables. En nommant donc m la *plus courte distance* $A\odot$, et n le segment AC de l'orbite, renfermé entre l'opposition et la plus grande phase, on aura dans les triangles semblables $A\odot C$, $C\,l\,m$, $\odot A C$ étant $= 90° = C\,m\,l$, et $l\,C\,m = 90° - A C \odot = A \odot C$,

$$m = \frac{\odot C \,.\, C\,m}{C\,l} = \frac{b(\gamma(H^2-\beta^2)-b)}{H-b} \text{ et } n = \frac{\odot C \,.\, l\,m}{C\,l} = \frac{b\beta}{H-b}.$$

On simplifiera la première formule, en introduisant l'angle $A\odot C = l\,C\,m = \omega$, qui est l'inclinaison de l'orbite relative sur l'écliptique. En effet on a

$$\sin\omega = \frac{l\,m}{C\,l} = \frac{\beta}{H-b}, \quad m = b\cos\omega, \quad n = b\sin\omega.$$

Puisqu'on suppose les diamètres de la lune et de l'ombre invariables durant toute l'éclipse, et le mouvement de la lune uniforme, on a $\odot D = \odot F$, $\odot G = \odot H$, etc. et les segmens égaux de l'orbite, AD et AF, AG et AH, seront parcourus dans des tems égaux. Le point du *plus grand obscurcissement* A est donc en même tems le *milieu* de l'éclipse entière et de toutes les phases.

§. 236. L'éclipse sera *totale* ou *partielle*, selon qu'en A la lune entière s'enfonce dans l'ombre, ou qu'une partie de la lune reste hors de l'ombre. L'éclipse est *centrale*, si A coïncide avec $\odot$, ensorte que la pleine lune arrive précisément dans le noeud. Il n'y aura pas éclipse du tout, si la lune en A est entièrement hors de l'ombre. Si le bord α de la lune tombe en B, ensorte que la lune touche intérieurement le cône d'ombre, l'éclipse totale ne durera qu'un instant (*totalis sine mora*): dans un pareil cas la plus courte distance des centres, m est $= \odot B - A\alpha$, ou $b\cos\omega = P + p - r - R$. L'éclipse sera donc *totale*, et *momentanée* ou *durant quelque tems*, si b est égal à

$\frac{P+p-r-R}{\cos\omega}$ ou plus petit: elle sera *partielle*, si $b > \frac{P+p-r-R}{\cos\omega}$, et elle durera jusqu'à ce que les points a et B coïncident, c'est-à-dire, que la lune touche l'ombre extérieurement. Ceci arrive, lorsque $m = \odot B + A a$, ou $b\cos\omega = P+p-r+R$; ce qui donne une limite plus exacte des éclipses: il y aura éclipse, ou il n'y en aura pas, selon que b est moins ou plus grand que $\frac{P+p-r+R}{\cos\omega}$. Enfin, l'éclipse sera *centrale*, si m est nul, ou $b = 0$, parceque $\cos\omega$ ne peut devenir nul: cela arrive, lorsque l'opposition a lieu dans le noeud même.

§. 237. On appelle *grandeur* de l'éclipse la partie de la lune qui, à l'instant du plus grand obscurcissement en A, s'est enfoncée dans l'ombre, et cette partie est mesurée sur le diamètre de la lune, qui se trouve sur la ligne $\odot A$, et qui par conséquent est le moins obscurci. On a coutume de l'exprimer en *doigts*, ou en douzièmes parties du diamètre de la lune, et de diviser chaque doigt en 60 *minutes*. Si l'éclipse est partiale, PL étant l'orbite du centre de la lune, la grandeur de l'éclipse sera $BM = \odot B - (\odot L - LM) = u + R - m$. Si elle est totale, l'orbite étant DF, on imagine que le point le plus éloigné de la lune α est hors de l'ombre, et l'on appelle grandeur de l'éclipse la distance du point le plus proche a à la circonférence B de l'ombre; elle sera donc plus grande que 12 doigts. On a alors également $Ba = \odot B - (\odot A - A a) = u + R - m$. Or R étant constamment de 6 doigts, on aura dans tous les cas,

la *grandeur ou la plus grande phase de l'éclipse, exprimée en doigts* $= \frac{6(u+R-m)}{R}$.

§. 238. Désignons par les noms d'*entrée* et de *sortie*, d'*immersion* et d'*émersion*, le *commencement* et la *fin* de l'*éclipse* générale ou *partielle*, et de l'éclipse *totale*: on aura pour l'instant de l'entrée et de la sortie, $\odot D = \odot F = u + R$, et pour l'immersion et l'émersion $\odot G = \odot H = u - R$: donc $AD = AF = \sqrt{((u+R)^2 - m^2)}$, et $AG = AH = \sqrt{((u-R)^2 - m^2)}$. La première expression devient imaginaire, si m est plus grand que $u + R$, et la dernière, si m est plus grand que $u - R$; ce qui est conforme au §. 236. La lune en P sera éclipsée de μ doigts, lorsque $IK = \frac{\mu}{6} R$, donc la dis-

tance des centres $\odot P = \odot I - IK + KP = u - \frac{\mu}{6} R + R$, et $LP = \sqrt{\left\{\left(u + \frac{6-\mu}{6} R\right)^2 - m^2\right\}}$.

La supposition de l'uniformité du mouvement donne le tems τ que la lune emploie à parcourir un segment donné x de son orbite relative DF: il est en secondes $\tau = \frac{3600 . x}{H - b}$; d'où il est aisé de conclure

l'intervalle de tems entre l'opposition et le milieu de l'éclipse,

$$t = \frac{3600 . n}{H - b} = \frac{3600 . b \sin \omega}{H - b} = \frac{3600 . b \beta}{(H - b)^2},$$

donc l'*époque du milieu* A, d'où il faut compter tous les autres tems $= T - t$. La valeur de $t = \frac{3600 . b \beta}{(H - b)^2}$ est positive ou négative, en même tems que $b \beta$, ou selon que b et β ont le même signe ou des signes contraires. Le *milieu* arrivera donc *avant* l'opposition, si la *latitude*, soit boréale soit australe, est *croissante*, et *après* l'opposition, si la *latitude* est *décroissante*: le premier cas aura lieu, si l'éclipse arrive après le noeud, le second, si elle arrive avant le noeud.

On trouvera de la même manière les instans de

$$\text{l'}\textit{entrée} = T - \frac{3600 \{b \sin \omega + \sqrt{((u+R)^2 - b^2 \cos^2 \omega)}\}}{H - b},$$

$$\text{la } \textit{sortie} = T - \frac{3600 \{b \sin \omega - \sqrt{((u+R)^2 - b^2 \cos^2 \omega)}\}}{H - b},$$

$$\text{l'}\textit{immersion} = T - \frac{3600 \{b \sin \omega + \sqrt{((u-R)^2 - b^2 \cos^2 \omega)}\}}{H - b},$$

$$\text{l'}\textit{émersion} = T - \frac{3600 \{b \sin \omega - \sqrt{((u-R)^2 - b^2 \cos^2 \omega)}\}}{H - b},$$

$$\text{la } \textit{phase de } \mu \textit{ doigts} = T - \frac{3600 \left\{b \sin \omega \pm \sqrt{\left(\left(u + \frac{6-\mu}{6} R\right)^2 - b^2 \cos^2 \omega\right)}\right\}}{H - h}.$$

Le double signe $\pm$ dans la dernière formule vient de ce que chaque phase arrive deux fois, avant et après le milieu.

§. 239. Les élémens C, P, etc. qui entrent dans les formules précédentes, font voir, que les observations des éclipses lunaires peuvent servir à vérifier la théorie de la lune: aussi Hipparque et Ptolémée surent-ils bien en profiter. On a aussi vu (I. §. 174.), qu'on peut employer les mêmes observations, pour trouver la longitude géographique. Mais il a déjà été

observé, que l'ombre se confond tellement avec la pénombre, qu'il est impossible d'observer à une minute près la limite de la véritable ombre. Quand l'immersion et l'émersion ont été observées par la même personne avec la même lunette, il est à présumer, que l'observateur a fait la même estime de l'intensité de l'ombre dans les deux instans, de manière que le milieu entre les deux observations sera à peu près le vrai milieu de l'éclipse: et si l'éclipse a été observée de cette manière en plusieurs lieux de la terre, les tems du milieu, comptés d'après le méridien de chaque endroit, donneront la différence des méridiens. La même méthode, appliquée à l'immersion et l'émersion des différentes taches de la lune, donnera autant de résultats, dont on prendra le milieu. Mais en général, il s'en faut beaucoup que les éclipses de lune donnent la même précision que celles de soleil.

§. 240. La lune, étant totalement éclipsée, et se trouvant même dans l'axe du cône d'ombre, présente des diversités remarquables dans différentes éclipses. Quelquefois elle ressemble à un charbon ardent, quelquefois elle est noire et disparaît tout-à-fait. Ces diversités proviennent principalement de l'état de nôtre atmosphère, qui intercepte plus ou moins de rayons solaires, ou les laisse parvenir, par la réfraction, dans la partie de l'ombre que la lune traverse. Mais il y a encore une autre circonstance qui a une influence considérable sur ce phénomène: c'est la distance du sommet du cône d'ombre C (*Fig.* 65.), à laquelle la lune traverse l'ombre ou l'axe TC. Les rayons solaires, en passant par l'atmosphère près de la surface de la terre, sont pliés par la réfraction vers l'axe, de sorte qu'ils le recontrent dans des points c ou γ, entre la terre et le sommet C, et par conséquent répandent un peu de lumière sur la lune, lorsqu'elle traverse l'ombre. Plus la lune se rapproche de C, ou plus qu'elle est éloignée de la terre, plus elle recevra de ces rayons: elle aura donc une faible lumière, si elle traverse l'ombre près de C, mais près de la terre elle sera à peine visible. Cependant il est très-rare, que la lune éclipsée disparaisse tout-à-fait.

CHAPITRE III.

Les éclipses de Soleil en général.

§. 241. Les *Éclipses de Soleil* sont un de ces phénomènes que nous avons appelés *occultations*. Le soleil ne perd pas sa lumière, comme la lune éclipsée, mais la terre est privée de sa lumière empruntée; ce n'est pas une ombre, l'enveloppant de tous côtés, comme un voile qui nous le rend invisible, c'est la lune qui, à une très-grande distance, passe entre le soleil et la terre. Le phénomène entier dépend donc de la situation de l'oeil. En quelque point de son orbite que la lune se trouve, elle projette toujours, du côté opposé au soleil, un cône d'ombre, et l'oeil qui se trouvera placé dans ce cône, verra une éclipse de soleil. Or la terre ne peut passer par ce cône que successivement; une partie, un pays de la terre après l'autre y entrera; la terre peut le traverser de manière qu'une partie seulement entre dans l'ombre, tandis qu'une autre reste dehors; enfin, une partie de la terre sera, pendant toute l'éclipse qui ne dure que quelques heures, du côté de nuit, qui a le soleil sous l'horizon, et par conséquent ne verra rien de l'éclipse. Il est donc évident, qu'une éclipse de soleil sera visible, et même totale, dans une partie de la terre, et invisible ou partielle dans une autre; qu'enfin toutes les circonstances de ce phénomène, la grandeur, le commencement, la fin, etc. seront différentes pour chaque lieu de la terre: il faudra donc calculer les éclipses solaires pour chaque lieu en particulier. Mais on peut envisager cet objet sous un point de vue plus général, en examinant les phénomènes que l'éclipse présentera à la terre entière, sans distinguer les différens lieux: ce qui fait la seconde, ou la première partie de ce calcul. Outre ces deux parties il y a encore un troisième calcul. Dans les instans du commencement et de la fin

de l'éclipse, la terre touche le cône d'ombre: or une sphère ne pouvant toucher un cône que dans un seul point, il n'y aura qu'un seul lieu de la terre qui verra le commencement, et un autre verra la fin. Dans l'instant du plus grand obscurcissement, où la terre s'enfonce le plus profondement dans l'ombre, c'est-à-dire dans le milieu de l'éclipse, où la distance du centre de la terre à l'axe de l'ombre est un *minimum*, il y aura un point de la surface de la terre, lequel, en approchant le plus de cet axe, verra la plus grande phase de l'éclipse: ce point unique est celui, où la perpendiculaire, menée du centre de la terre à l'axe de l'ombre, rencontre la surface de la terre. Il importe de déterminer tous ces points marquans, et cette partie du calcul servira à déterminer, non-seulement les limites de la visibilité de l'éclipse sur la terre, mais aussi les lieux situés le plus favorablement pour l'observation de l'éclipse.

§. 242. On peut donc diviser le calcul des éclipses solaires en trois parties. La *première* concerne l'obscurcissement, ou l'*éclipse de la terre en général*: on y regarde la terre comme une sphère, éclairée par le soleil, qui est privée, successivement et en partie, de sa lumière par l'interposition de la lune, sans distinguer les différens points de ce globe: c'est ainsi que nous avons calculé les éclipses de lune, sans faire attention aux différentes taches de ce satellite. Ce calcul est extrèmement simple, parceque la rotation de la terre n'y a aucune influence: il répond aux questions suivantes. »L'éclipse sera-t-»elle *totale* ou *partielle* seulement? Est-il un point de la terre, où le centre »de la lune paraîtra couvrir le centre du soleil? et dans un pareil cas, le »diamètre apparent de la lune sera-t-il égal à celui du soleil, sera-t-il plus »grand, ou moins grand? c'est-à-dire, l'éclipse sera-t-elle *centrale, totale sans* »ou *avec durée*, ou *annulaire*? A quelle heure arrivera le *commencement*, le »*milieu*, et la *fin* de l'éclipse partiale et totale? De combien de doigts sera »la *plus grande phase*? A quelle heure commenceront et finiront les phases »de 2, 3, etc. doigts?« Ces questions peuvent être proposées de la manière suivante. »La terre traversera-t-elle l'ombre *plenière* de la lune, ou la *pén-»ombre* seulement? Est-ce que l'*axe* du cône d'ombre la rencontrera? A »quelle époque *touchera*-t-elle les deux cônes d'ombre et de pénombre? Quelle

»sera sa *plus courte distance* à l'axe?« etc. Tout cela prouve, que cette première partie du calcul est, relativement à la terre vue de la lune, ce que sont les éclipses lunaires, par rapport à la lune vue de la terre: c'est pourquoi je l'appellerai *éclipse de terre*. Les deux calculs sont aussi presque les mêmes.

§. 243. L'objet de la *seconde* partie est l'*éclipse des différens lieux de la terre*. On peut supposer l'observateur dans la lune, ou dans tel autre point hors de la terre, et l'objet de l'observation sera, comme dans la première partie, la terre et non le soleil: c'est ainsi que, dans les éclipses lunaires, nous observons l'immersion successive des taches de la lune dans l'ombre de la terre. Il est aisé de voir, que ces phénomènes dépendent de la rotation de la terre et de la parallaxe; ce qui rend cette partie du calcul plus compliquée; elle s'occupe des questions suivantes. »Quels sont les »lieux de la terre, qui verront les *premiers* et les *derniers* le *commencement* »et la *fin* de l'éclipse *partiale* et *totale*? Dans quel lieu verra-t-on la *plus* »*grande phase*?« etc. En le regardant comme une éclipse de terre, vue de la lune, ces questions devront être énoncées de la manière suivante. »Quelle »est la *route* sur la surface de la terre, que prendront le *centre* de l'ombre, »l'*ombre* elle-même, et la *pénombre*? quels sont les lieux que les ombres »rencontreront les *premiers* et les *derniers*? Par quels pays passera la *limite de* »*l'ombre*, qui sépare les lieux où l'éclipse se verra, de ceux où elle sera in»visible? Quel point de la terre sera, à l'instant du milieu de l'éclipse, dans »l'*axe de l'ombre*, ou lequel en sera le plus près?« etc. Il est impossible de déterminer d'une manière aisée, la route de l'ombre, autrement que par une projection, ou à l'aide d'un globe artificiel et d'autres instrumens. Mais comme il n'entre pas dans le plan de cet ouvrage, d'exposer en détail de pareilles méthodes qui appartiennent à l'astronomie pratique, je me bornerai à ce que donne le calcul; mais en même tems je tâcherai d'expliquer succinctement les principes, sur lesquels se fondent les méthodes pratiques.

§. 244. La *troisième* partie regarde les phénomènes de l'*éclipse de soleil*, vus d'*un lieu donné de la terre*, où l'observateur est supposé être placé. Les questions principales qui y appartiennent, sont celles-ci. »A quelle

»heure ce lieu verra-t-il le *commencement* et la *fin* de l'éclipse *totale* et *par-*
»*tielle*, ou l'attouchement des bords du soleil et de la lune? quelle est l'épo-
»que, où le soleil entier, vu de ce lieu, commencera et finira d'être couvert
»par la lune; c'est-à-dire, où le bord précédent et suivant de la lune tou-
»chera interieurement le soleil? à quelle heure les deux centres paraîtront
»coïncider? de quelle grandeur paraîtra la partie éclipsée du soleil à l'in-
»stant de la *plus grande phase?* Est-ce que la lune sera alors au *nord* ou au
»*sud* du soleil? quelle est la situation relativement à l'horizon du lieu
donné, qu'auront les points de contact et de la plus grande phase?« etc.

Cette partie du calcul est la plus importante pour l'astronomie, parce-qu'elle sert à comparer les observations avec le calcul, et par conséquent à vérifier les élémens de la lune, et la position géographique des lieux, qui ont été employés dans le calcul. Supposons, pour exemple, que le calcul soit bien d'accord avec la plupart des observations, tandis qu'il se trouve une différence considerable entre le calcul et les observations faites dans un lieu A: dans un pareil cas on peut conclure, que les élémens du soleil et de la lune, employés dans le calcul, sont exacts, mais que la position géographique du lieu A a besoin de correction. Or la latitude des lieux pouvant toujours être déterminée avec assés de précision, les observations des éclipses de soleil serviront à corriger la *longitude* des lieux. Les règles qu'il faut suivre dans cette recherche, formeront la *quatrième* partie du calcul.

CHAPITRE IV.

L'Éclipse de la Terre en général.

§. 245. Le calcul des éclipses de soleil est simplifié, ainsi que celui des éclipses de lune, en supposant le soleil et la terre immobiles, et en attribuant à la lune son mouvement relatif (§. 233.). On a vu qu'il suffit pour cet effet, de diminuer le mouvement horaire de la lune en longitude de celui du soleil, sans changer le mouvement en latitude. Cela posé, imaginés que la ligne droite qui joint les centres du soleil et de la lune, ou l'*axe de l'ombre*, tourne autour du centre immobile du soleil, en suivant l'orbite relative de la lune: il est visible, que l'oeil placé dans la prolongation de cet axe, verra une éclipse de soleil *centrale*. Tant que cet axe rencontre quelque point de la terre, l'éclipse centrale a lieu sur la terre, et elle peut être de deux espéces. Le diamètre apparent de la lune est toujours à peu près égal à celui du soleil; mais il sera un peu plus ou moins grand, à proportion de sa distance à la terre. S'il y a parfaite *égalité*, la lune couvrira le soleil *entier*, mais à cause du mouvement de la lune, cela ne peut durer, dans chaque lieu de la terre, qu'un instant: l'éclipse sera *totale* et *momentanée* (*totalis sine mora*); mais malgré cela elle peut durer quelque tems sur la terre en général, parceque l'axe de l'ombre rencontre successivement d'autres points de la terre. Si la lune paraît *plus grande* que le soleil, elle débordera de manière que le soleil sera environné d'un anneau obscur de la lune, qui est concentrique aux disques des deux astres, et dont la largeur est égale à la quantité dont le demi-diamètre de la lune excède celui du soleil, $R - r$. L'éclipse centrale ne dure qu'un moment pour chaque lieu de la terre; mais les deux centres peuvent s'éloigner l'un de l'autre de toute

la largeur de cet anneau, $R - r$, sans que l'éclipse cesse d'être totale: elle sera donc *totale pendant quelque tems* (*totalis cum mora*) pour chaque lieu où elle est centrale. Enfin, si le diamètre de la lune est *plus petite* que celui du soleil, cet astre ne peut pas être caché entièrement par la lune, autour de laquelle il se formera une couronne lumineuse, ou un anneau du soleil, dont la largeur est $r - R$: l'éclipse sera *annulaire*, et durera jusqu'à ce que la distance des deux centres est égale à $r - R$. Il en suit, que l'éclipse peut être totale ou annulaire, sans être centrale, si la distance apparente des centres est moindre que $\pm (R - r)$, sans être nulle. Si cette distance est, durant toute l'éclipse, plus grande que $\pm (R - r)$, le soleil ne sera éclipsé ni totalement ni centralement, et l'éclipse sera seulement *partielle*.

Si les diamètres apparens du soleil et de la lune sont à très-peu près égaux, il peut arriver un phénomène singulier. On a vu (§. 216.), que la grandeur apparente du diamètre de la lune dépend de sa hauteur, et qu'il peut augmenter de $18''$ depuis l'horizon jusqu'au zénit. Ainsi la même éclipse peut être totale pour un lieu qui voit les centres de la lune et du soleil au zénit, tandis qu'elle est annulaire pour un autre lieu qui les voit près de l'horizon.

L'éclipse peut avoir lieu, et même être totale, ou annulaire, sans que l'axe de l'ombre rencontre la terre: il suffit, qu'une droite, menée par des points quelconques du soleil et de la lune, passe par la terre. Les limites des éclipses seront déterminées par la surface conique qui touche le soleil et la lune. L'axe de ce cône, qui est celui de l'ombre, décrira l'orbite relative de la lune; sa base sera un grand cercle du soleil, supposé immobile; et l'oeil, placé derrière la lune dans ce *cône d'ombre*, verra une éclipse totale ou annulaire. Imaginés une tangente du soleil et de la lune, passant par deux côtés opposés de ce cône: cette tangente, en tournant sur l'axe de l'ombre, décrira deux cônes opposés, dont le commun sommet tombera dans l'axe entre le soleil et la lune, et dont l'un s'élargira derrière la lune. Ce cône tronqué est le *cône de pénombre*: car l'oeil, placé dans ce cône, verra une éclipse partielle, qui commencera et finira dans l'instant, où l'oeil entre dans ce cône, et qu'il en sort.

On peut donc représenter les circonstances d'une éclipse solaire de cette manière. On voit une éclipse *centrale*, lorsque l'oeil se trouve dans l'*axe* de l'ombre. L'éclipse *totale commence*, et l'*annulaire finit*, lorsque la droite qui touche les bords *orientaux* du soleil et de la lune, rencontre l'oeil. L'éclipse *totale finit*, et l'*annulaire commence*, quand une droite, menée de l'oeil, touche les bords *occidentaux* des deux astres. L'éclipse *partielle commence*, lorsque la droite, menée de l'oeil au bord *occidental du soleil*, touche le bord *oriental de la lune*: elle *finit*, quand le rayon visuel est tangent au bord *oriental du soleil* et au bord *occidental de la lune*. Quand l'axe de l'ombre rencontre un lieu de la terre, qui aura alors une éclipse centrale, la lune peut s'éloigner du soleil de $R - r$, ou de $r - R$, ou de $R + r$, avant que l'éclipse cesse d'être *totale*, *annulaire*, ou *partielle*: il faut donc augmenter le demi-diamètre ou la limite de l'éclipse centrale, de $R - r$, ou $r - R$, ou $R + r$, pour avoir les limites de l'éclipse centrale, annulaire, ou partielle.

§. 246. Soient (*Fig.* 68.) S, T, les centres du soleil et de la terre, supposés immobiles, *s*, *t*, des points de leurs surfaces, OLE l'orbite relative de la lune de l'occident O à l'orient E, qui n'est pas dans le même plan que ST; et qu'on mène les tangentes St, st, $s\tau$. Si le point L est dans l'écliptique, ou que la conjonction arrive dans le noeud même, le centre T de la terre, et le point A de sa surface, verront une éclipse centrale à l'instant de la nouvelle lune. Dans d'autres cas, la droite SL qui joint les centres du soleil et de la lune, ou ce qui revient au même, l'axe de l'ombre, ne passera pas par le centre de la terre, mais elle en rencontrera d'autres points, si la lune est assés près du noeud. Cela aura encore lieu avant et après la conjonction, jusqu'à ce que l'axe SL coïncide avec la tangente St ou $S\tau$, qui seront par conséquent les limites de l'éclipse centrale. Si St, en tournant sur l'axe ST, décrit un cône, il y aura éclipse centrale sur la terre en général, lorsque ce cône coupe l'orbite OE; il n'y en aura pas dans le cas contraire. Dans le premier cas, OE coupera nécessairement la surface conique en deux points, dont le premier ou l'occidental soit *l*. L'éclipse centrale commencera donc, lorsque le centre de la lune est en *l*; et elle finira à la même distance orientale de L. La distance géocentrique

des centres du soleil et de la lune est alors $STl = Tlt - TSt = P' - p$; d'où il suit que:

le *demi-diamètre de l'éclipse centrale est la différence entre les parallaxes de la lune et du soleil* $(P' - p)$;

l'éclipse centrale durera donc aussi longtems, que la distance géocentrique des centres du soleil et de la lune n'est pas plus grande que $P' - p$.

Le centre de la lune étant en M, de sorte que son bord oriental N touche la tangente st, le point t de la terre verra seul le contact extérieur des deux disques; le lieu t' verra le premier le commencement de l'éclipse partielle. Ainsi l'éclipse générale commencera et finira, lorsque la distance géocentrique des centres est $STM = STs + sTN + NTM = STs + (TNt - Tst) + NTM = r + (P' - p) + R$:

le *demi-diamètre de l'éclipse partielle est la somme des demi-diamètres du soleil et de la lune, plus la différence de leurs parallaxes*, ou *la somme des demi-diamètres du soleil* (r), *de la lune* (R), *et de l'éclipse centrale* $(P' - p)$.

Dans l'instant où, le centre de la lune étant en m, son bord occidental N touche la tangente ts, le lieu t qui, à cause de la rotation de la terre, n'est plus le même que le lieu t' précédent, verra le premier le commencement de l'éclipse annulaire, si r est plus grand que R, ensorte que m tombe à l'occident de la droite St; d'où il suit, que dans les instans du commencement et de la fin de l'éclipse annulaire, la distance géocentrique des centres du soleil et de la lune est $STm = STN - NTm = (STs + sTN) - NTm = (STs + TNt - Tst) - NTm = r + P' - p - R$;

le *demi-diamètre de l'éclipse annulaire est égal au demi-diamètre de l'éclipse centrale* $(P' - p)$, *plus la différence dont le demi-diamètre du soleil excède celui de la lune* $(r - R)$.

Enfin, si le centre de la lune est en μ, son bord occidental n touchant la tangente $s\tau$, le lieu τ verra le dernier la fin de l'éclipse totale, en supposant que R est plus grand que r, ensorte que μ tombe à l'orient de la droite τS: car chaque autre lieu A verra déjà le bord occidental s du soleil, et un instant après, la même partie du soleil ne sera plus cachée à l'oeil placé en τ, à cause du mouvement relatif de la lune de μ en E. La distance

géocentrique des centres, dans les instans du commencement et de la fin de l'éclipse totale sera donc $ST\mu = STn + nT\mu = (sTn - r) + R = T\tau - Ts\tau - r + R = P - p - r + R$;

le *demi-diamètre de l'éclipse totale est égal à celui de l'éclipse centrale* $(P - p)$, *plus la quantité dont le demi-diamètre de la lune excéde celui du soleil* $(R - r)$. On observera que ces résultats sont parfaitement d'accord avec ceux du §. précédent.

§. 247. Il faut faire ici une remarque concernant les parallaxes P, p, qui était inutile dans le calcul des éclipses lunaires. Puisque les points t, τ, sont des lieux différens de la terre, au commencement et à la fin de l'éclipse partiale, totale, et centrale, P aura dans toutes les formules précédentes des valeurs différentes, étant la parallaxe horizontale qui convient à la latitude des lieux t, τ, conformément à l'aplatissement de la terre. Mais ces lieux étant inconnus, on commence par calculer le commencement et la fin de l'éclipse, et l'on conclut les lieux t, τ, de la situation que le globe terrestre doit avoir à ces époques: il n'y a donc pas d'autre moyen, que de faire un premier calcul, en donnant à P une valeur moyenne, par exemple, la parallaxe sous l'équateur. Ayant trouvé avec cette valeur de P, le commencement et la fin de l'éclipse, on calculera les lieux t, τ, qui verront les premiers le commencement, et les derniers la fin: après quoi on mettra à la place de P la parallaxe horizontale sous le parallèle de ces lieux, et l'on fera encore une fois le calcul avec cette valeur corrigée de P; ce qui donnera plus exactement les instans du commencement et de la fin de l'éclipse, ainsi que les lieux t, τ. La correction qui en résulte pour la parallaxe du soleil p, est insensible.

§. 248. Nous avons exposé les phénomènes, tels qu'ils paraissent, vus de la terre; et cette manière de les envisager, est sans doute la plus naturelle et la plus exacte, et elle suffit entièrement, pour calculer toutes les circonstances d'une éclipse solaire. Cependant il ne sera pas inutile, de considérer cet objet important, d'une autre manière qui est adoptée par la plupart des astronomes. On regarde les phénomènes généraux d'une éclipse de soleil comme une éclipse de terre, en transportant l'observateur dans la lune, et en supposant que la terre traverse l'ombre de la lune, avec un mouve-

ment égal, mais contraire au mouvement relatif de la lune. Cela doit nécessairement donner les mêmes résultats: car il est aisé de voir, que le mouvement de la terre, vue de la lune, sera égal et opposé à celui de la lune, vue de la terre. D'après cette manière de se représenter les choses, la lune projettera dans la région de la terre divers cônes d'ombre, la pénombre, et l'ombre totale ou annulaire: et à mesure que la terre vient toucher ces cônes, l'eclipse partiale, totale ou annulaire, commencera ou finira. Cela arrive donc, lorsque la distance sélénocentrique des centres de l'ombre et de la terre est égale à la somme des demi-diamètres de la terre et de l'ombre.

Il suit de ce qui précède (§. 229.) que, si $s\sigma$, $t\tau$, (*Fig.* 65.) sont les disques du soleil et de la lune, l'*ombre totale* sera limitée par le cône $tC\tau$, la *pénombre* par le cône tronqué $Gt\tau H$. L'oeil placé dans le premier cône, aura une éclipse totale: d'un point L du second cône, on verra une partie du soleil cachée; et hors des deux cônes en M, on verra le soleil entier. En faisant tourner le triangle SCs sur l'axe SC, il naîtra deux cônes, ayant un commun sommet C, dont l'un SCs renferme l'ombre totale, et l'opposé BCE l'ombre *annulaire*. En effet, ayant mené d'un point A de ce dernier cône la tangente à la lune At, elle rencontrera un point N du disque solaire, sN étant la largeur de l'anneau lumineux qui environne la partie obscurcie de la lune NS; et par rapport à l'oeil A, $SAN = R$ est plus petit que $SAs = r$, ce qui est le caractère des éclipses annulaires. L'éclipse sera donc totale ou annulaire, selon que la terre traversera le cône $tC\tau$ suivant OW, ou le cône ECB suivant ow. La terre se trouve dans le même cône, mais à une très-grande distance de C, lorsqu'une planète inférieure passe sur le soleil. En supposant que l'axe ST est immobile, et que la terre décrit OW ou ow par son mouvement relatif, il est clair, que le commencement et la fin de l'éclipse partiale, totale, annulaire, et centrale, aura lieu, lorsque la terre touche la pénombre en $M\lambda$, l'ombre totale en Ll, l'ombre annulaire en IK, et lorsqu'elle touche l'axe SC. Dans tous ces cas, la distance sélénocentrique de la terre à l'axe SC est égale à la somme des demi-diamètres de la terre et de l'ombre dont il s'agit: ainsi l'on aura pour le commencement de l'éclipse partielle $CTM = CT\lambda + \lambda TM$, pour la fin de

l'éclipse totale $CTL = CTl + LTl$, et pour le commencement de l'éclipse annulaire $CTI = CTK + KTI$. Le demi-diamètre sélénocentrique de la terre n'étant autre chose que la parallaxe horizontale de la lune, il reste à déterminer les diamètres des ombres.

§. 249. Le demi-diamètre sélénocentrique de la pénombre est $CT\lambda = T\lambda\tau + TF\tau = R + (Ts\tau + STs)$, $Ts\tau$ étant le demi-diamètre héliocentrique de la lune, et STs le demi-diamètre sélénocentrique du soleil. En nommant a, b, c, les distances de la terre au soleil, de la lune au soleil et à la terre, d, e, les vrais demi-diamètres de la terre et de la lune, on aura $e = 0{,}27293.d$ (§. 214.), et $Ts\tau = \frac{e}{b}$. Or les diamètres apparens étant en raison inverse des distances, on a $STs = \frac{a}{b}r$. Mais dans le tems des nouvelles lunes, $b = a - c$, et c est environ $60.d$ (§. 213.): on a de plus, $p = \frac{d}{a}$ ou $a = \frac{d}{p}$, donc $b = \frac{d(1-60p)}{p}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{1-60p}$, et $\frac{e}{b} = \frac{0{,}27293.p}{1-60p}$. En substituant $p = 8'',6 = 0{,}00004126$; $r = 16' = 960''$, on trouvera $Ts\tau = \frac{2'',35}{1-0{,}002476} = 2'',36$, et $STs = \frac{r}{1-0{,}002476} = r + 2'',38$; donc $Ts\tau + STs = r + 4'',7$. Le dernier terme peut être négligé ici: on aura donc $CT\lambda = R + r$;

le *demi-diamètre de la pénombre est la somme des demi-diamètres du soleil et de la lune*, $(R + r)$.

On peut donc mettre partout, sans erreur sensible, $Ts\tau = Tst = 0$ et $STs = r$, donc $SCs = STs - Tst = r$. Cela posé, on trouvera $CTl = Tlt - SCs = R - r$, et $CTK = SCs - TKt = r - R$, c'est à dire,

les *demi-diamètres de l'ombre totale ou de l'ombre annulaire sont les quantités, dont le demi-diamètre de la lune est plus ou moins grand que celui du soleil*, $R - r$ ou $r - R$.

Ces deux diamètres sont donc de nature opposée. En effet, l'ombre est totale ou annulaire, selon que la route de la terre est en deçà ou au delà de C, et relativement au soleil, selon que le bord de la lune, dans l'éclipse centrale, tombe au dehors ou au dedans du disque solaire, ou bien, selon que l'anneau est obscur ou lumineux, extérieur ou intérieur: donc l'une des deux valeurs doit être positive, l'autre négative. Il faut que $R - r$, avant que de

devenir négatif, soit nul: et c'est ce qui arrive en C, où $R=r$. Le point C est donc la limite entre les éclipses totale et annulaire, et donne une éclipse centrale momentanée qu'on peut regarder comme totale ou comme annulaire. Pour que l'éclipse soit centrale, il faut qu'un point de la terre se trouve dans l'axe de l'ombre: sous ce rapport on peut dire que

le diamètre de l'ombre centrale est nul.

§. 250. Ce qui précède, ne se rapporte qu'au centre de la terre: une partie de la terre restera donc dans l'ombre, jusqu'à ce qu'elle s'en est éloignée d'un de ses rayons; d'où il suit qu'il faut ajouter au rayon de l'ombre le demi-diamètre sélénocentrique de la terre P, pour avoir le rayon de l'éclipse, c'est-à-dire la distance *sélénocentrique* du centre de la terre à l'axe de l'ombre, dans l'instant du commencement et de la fin de l'éclipse partiale, totale, annulaire, et centrale. Mais comme on emploie dans le calcul la distance *géocentrique* des centres du soleil et de la lune, il faut mettre $P-p$ à la place de P. En effet, la terre étant en L à la fin de l'éclipse totale, la distance sélénocentrique est $CTL=CTl+lTL=(Tlt-SCs)+lTL=R-r+P$; et la distance géocentrique $TLS=CTL-CSL=CTL-CSl-LSl=(R-SCs+P)-(Sls-SCs)-p=R+P-r-p=CTL-p$. Il faut donc ajouter au demi-diamètre de l'ombre la différence des parallaxes $P-p$, pour avoir le demi-diamètre géocentrique de l'éclipse, ou la distance des centres du soleil et de la lune au moment du commencement et de la fin de l'éclipse: ce qui donnera les formules précédentes (§. 246.) qui sont exactes.

On doit juger, par un calcul préalable, si la nouvelle lune sera *écliptique*, c'est-à-dire, si la latitude de la lune en conjonction, ou plutôt dans la plus courte distance de l'axe, sera plus petite que $P-p+R+r$. La plus grande latitude, à laquelle il peut y avoir éclipse de soleil, est par conséquent (§. 231.) $62'-9''+16'55''+16'18''=1°35'4''$, et la plus petite, où l'on est sûr qu'il y aura eclipse, est $53'-9''+15'34''+15'45''=1°24'10''$. L'argument de latitude correspondant se trouvera par les équations (§. 231.) $\sin\alpha=\frac{\sin 1°35'4''}{\sin 5°}$ et $\sin\alpha=\frac{\sin 1°24'10''}{\sin 5°17'34}$: on aura donc

la *limite au delà de laquelle il ne peut y avoir éclipse*, $\alpha=18°29'48''$,

et *la limite où il doit y avoir éclipse*, $\alpha=15°23'24''$.

§. 251. Après s'être assuré à l'aide des tables (§. 231.), que l'argument de latitude dans l'instant d'une nouvelle lune est renfermé entre ces limites, on calculera au moyen des tables du soleil et de la lune, le tems vrai de la conjonction $=T$, et pour la même époque les autres élémens, h, H, b, β, P, R, r (§. 232.): avec lesquels on déterminera, en se servant du même procédé, l'orbite relative et l'angle ω qu'elle fait avec l'écliptique, $\sin\omega = \frac{\beta}{H-b}$ (§. 235.); d'où l'on tirera (*Fig.* 67.) $AC = n = b\sin\omega$, et $A\odot = m = b\cos\omega$. Au moyen de la plus courte distance m, on trouvera plus exactement les conditions des éclipses. L'éclipse sera *centrale*, si $m < P-p$ ou $b < \frac{P-p}{\cos\omega}$; *centrale sans durée*, si $b = \frac{P-p}{\cos\omega}$; *totale*, si $b < \frac{P-p+R-r}{\cos\omega}$ et $R > r$; *annulaire*, si $b < \frac{P-p+r-R}{\cos\omega}$ et $r > R$; elle ne sera que *partiale*, lorsque $b > \frac{P-p\pm(R-r)}{\cos\omega}$ et $b < \frac{P-p+R+r}{\cos\omega}$. Il en suit, que l'éclipse, par rapport à la terre en général, sera totale, annulaire, ou partielle, *sans durée*, si $b = \frac{P-p\pm(R-r)}{\cos\omega}$ ou $b = \frac{P-p+R+r}{\cos\omega}$: dans les deux premiers cas, il n'y aura qu'un seul lieu de la terre, auquel le soleil entier sera caché un instant, ou qui verra un moment la lune entière sur le disque solaire; dans le dernier cas, un seul lieu de la terre verra un instant le contact des deux disques, ce qui ne peut pas être observé. Il faut encore remarquer, que l'éclipse peut être totale sans durée dans chaque lieu particulier, et que cependant l'éclipse totale sur la terre entière dure longtems, parceque plusieurs lieux la voient successivement, mais chacun un instant seulement: c'est le cas, à la vérité très-rare, où R et r sont exactement égaux; encore faut-il observer, qu'à la rigueur cela ne peut pas arriver, parceque R a dans chaque lieu une autre valeur qui dépend de la hauteur de la lune. Du reste, les éclipses centrale et totale sont synonymes, dans le cas où $R = r$.

§. 252. Ayant décrit (*Fig.* 67.) trois cercles du centre $\odot$ (qui est le point de la conjonction), et des rayons des éclipses centrale, totale ou annulaire, et partielle, $P-p$, $P-p\pm(R-r)$ et $P-p+R+r$; il est visible, que chaque éclipse commencera et finira, lorsque le centre de la lune se trouve dans les points de son orbite relative DF, où elle coupe l'un de ces trois cercles. On aura donc par le procédé précédent (§. 238.), en faisant successivement $\odot D = \odot F$ égal à $P-p$, à $P-p\pm(R-r)$, et à $P-p+R+r$,

Instant du milieu ou de la plus grande phase $= T - \frac{3600 . b \sin\omega}{H-h}$,

Commencement et fin de l'éclipse centrale $= T - \frac{3600\{b\sin\omega \pm \sqrt{((P-p)^2 - b^2\cos^2\omega)}\}}{H-h}$,

Commencement et fin de l'éclipse totale ou annulaire $=$

$$T - \frac{3600}{H-h}\{b\sin\omega \pm \sqrt{[(P-p \pm (R-r))^2 - b^2\cos^2\omega]}\},$$

Commencement et fin de l'éclipse partielle $=$

$$T - \frac{3600}{H-h}\{b\sin\omega \pm \sqrt{[(P-p+R+r)^2 - b^2\cos^2\omega]}\};$$

le signe + du radical se rapportant au commencement, le signe — à la fin.

On appelle *grandeur* ou *phase* de l'éclipse solaire, la partie du diamètre du soleil, divisé en 12 *doigts* $= \frac{r}{6}$, qui est occultée par la lune. L'instant où le centre de la lune touche la circonférence du cercle de l'éclipse partielle, est le premier où le contact des deux disques est vu de la terre; la grandeur de l'éclipse est donc nulle. La lune étant arrivée en G, la distance des centres sera plus petite que $P-p+R+r$, et la partie occultée du diamètre du soleil sera $P-p+R+r-\odot G$: donc, pour trouver le tems où la phase sera de μ doigts, il faut faire $P-p+R+r-\odot G = \frac{\mu}{6} r$, ou $\odot G = P-p+R+\frac{6-\mu}{6} r$, d'où il suit $AG = \sqrt{\{(P-p+R+\frac{6-\mu}{6} r)^2 - m^2\}}$, partant

Commencement et fin de la phase de μ *doigts* $=$

$$T - \frac{3600}{H-h}\left\{b\sin\omega \pm \sqrt{[(P-p+R+\frac{6-\mu}{6} r)^2 - b^2\cos^2\omega]}\right\}.$$

La *plus grande phase* dans le milieu A est $AB = \odot B - \odot A = \frac{6(P-p+R+r-b\cos\omega)}{r} = F$ doigts; d'où il suit que, si l'éclipse est *centrale sans durée*, $b\cos\omega$ étant $= P-p$ (§. 251.), on aura $F = \frac{6(R+r)}{r}$, ce qui est de $\frac{6(R-r)}{r}$ plus grand, ou de $\frac{6(r-R)}{r}$ doigts plus petit que 12 doigts, selon que l'éclipse est totale ou annulaire. Si l'éclipse est *totale sans durée*, $b\cos\omega$ étant $= P-p+R-r$, on aura $F = 12$ doigts; si l'éclipse totale dure quelque tems, F est de plus de 12 doigts. Les éclipses *annulaires sans durée* donnent $b\cos\omega = P-p+r-R$, et $F = \frac{12R}{r} < 12$ doigts. Si l'éclipse *annulaire dure* quelque tems, on a $b\cos\omega < P-p+r-R$, donc $F > \frac{12R}{r}$, et F peut excéder 12 doigts. Pour se former une idée juste de ce que c'est qu'une éclipse plus grande que 12 doigts, il faut se rappeler que la phase AB est la quantité

dont le soleil s'est enfoncé dans l'ombre: donc, si F est de $12+\lambda$ doigts, cela veut dire que l'immersion du soleil dans l'ombre est de λ doigts plus grande, qu'il ne fallait pour rendre l'éclipse totale ou annulaire; ce qui détermine la durée de cette éclipse. Si l'éclipse est *partielle*, $b\cos\omega$ est plus grand que $P-p\pm(R-r)$, et moins grand que $P-p+R+r$, donc $F<12$ doigts; si elle ne dure qu'un instant, on a $b\cos\omega=P-p+R+r$, donc $F=0$.

La phase dans la conjonction ☾ est

$$\odot C-\odot \mathbb{C}=\frac{6(P-p+R+r-b)}{r}\text{ doigts.}$$

CHAPITRE V.

L'Éclipse des différens lieux de la Terre.

§. 253. La seconde partie du calcul comprend les questions suivantes:

1. quels lieux de la terre verront *les premiers le commencement*, et *les derniers la fin* de l'éclipse partiale, totale ou annulaire, et centrale?

2. quel est le lieu de la terre qui, dans l'instant du *milieu*, verra une éclipse *centrale*, ou le *plus grand obscurcissement* du soleil?

3. quels pays verront successivement une éclipse partiale, totale, ou centrale? quelle est la *route* que prendront sur la surface de la terre, l'*ombre*, la *pénombre*, et le *centre* de l'ombre?

Il sera supposé dans ce calcul, que les époques de toutes les phases remarquables pour la terre en général, ont été trouvées pour le méridien d'un lieu A, par les méthodes du *Chap. IV.* Mais outre ces élémens, il faut tirer des tables, pour l'époque de la nouvelle lune, l'*obliquité* de l'écliptique, la *déclinaison du soleil*, et sa variation horaire.

§. 254. L'éclipse partielle commence ou finit dans un lieu de la terre, lorsqu'il voit le contact extérieur du soleil et de la lune: ce lieu sera le premier ou le dernier qui verra ce phénomène, s'il voit le contact dans l'instant, où le commencement ou la fin arrive pour la terre en général, c'est-à-dire où la distance géocentrique des centres du soleil et de la lune est $= P - p + R + r$, ou celle des bords $= P - p$. Or la distance, vue de ce lieu, est dans le même instant nulle: conséquemment la quantité $P - p$, dont la distance apparente a été diminuée, est l'effet des parallaxes. Il s'en suit, que le lieu qui verra le premier le commencement, ou le dernier la fin, doit être tellement situé, 1) que la parallaxe est un *maximum*, 2) qu'elle est employée

entièrement à approcher la lune du soleil. La première condition exige, que le point du contact du soleil et de la lune soit dans l'horizon apparent de ce lieu; la seconde suppose que les deux centres se trouvent dans le même cercle vertical, ou que le grand cercle, passant par les deux centres, soit perpendiculaire à l'horizon. Comme P est beaucoup plus grand que p, il sera plus simple d'imaginer, que la lune seule a une parallaxe $= P - p$, qui l'abaisse vers l'horizon, le soleil n'étant point déplacé par la parallaxe.

Au *commencement* de l'éclipse, la lune est encore à l'occident du soleil: il faut donc que la parallaxe la transporte vers l'orient, pour l'approcher du soleil; et comme elle abaisse tous les corps, le point du contact doit être dans la partie *orientale* de l'horizon, ou dans le point du *lever*. A la *fin* de l'éclipse, la lune est à l'orient du soleil: il faut donc que la parallaxe la transporte vers l'occident, ou que le point du contact soit dans l'horizon *occidental*, ou dans le point du *coucher*.

Le lieu qui verra le premier le commencement de l'éclipse, sera donc déterminé par ces conditions. La lune vient de se lever, le soleil commence à se lever, le bord inférieur de la lune et le bord supérieur du soleil paraissent dans l'horizon oriental; et le grand cercle qui, au commencement de l'éclipse générale, passe par les centres du soleil et de la lune, est perpendiculaire à l'horizon de ce lieu. Il en est de même du *lieu qui verra le dernier la fin de l'éclipse*, avec cette différence, qu'il faut mettre le coucher et l'occident, à la place du lever et de l'orient.

Ce que nous venons de trouver par des raisonnemens, se déduira avec la même facilité de la *figure* 65. Lorsque le soleil est en S, la lune en T, la terre en M, touchant en λ la pénombre, l'éclipse partielle commencera, et le lieu λ verra le premier ce commencement. La ligne $s\lambda H$, tangente à la terre en λ, représente l'horizon du lieu λ: la lune $t\tau$ est élevée sur l'horizon, le soleil $s\sigma$ est abaissé sous l'horizon $s\tau\lambda$. Le bord inférieur de la lune τ (qui est en même tems le bord oriental, attendu que le mouvement de la lune autour de la terre, $t\tau$, se dirige d'occident en orient), et le bord supérieur et occidental du soleil s, sont en contact dans l'horizon λH qui, par conséquent, est la partie orientale de l'horizon. Cela est encore évident par ce

que la terre tourne sur son axe d'occident en orient, de sorte que le lieu λ, étant transporté en m, voit le lever du soleil. Si, dans la fin de l'éclipse, la terre touche la pénombre en n, le lieu n qui voit le dernier la fin, a le soleil entier $s\sigma$ au dessous, et la lune $t\tau$ au dessus de son horizon $Gn\sigma$, qui est l'horizon occidental, parceque le bord oriental de la lune τ est plus élevé que le bord occidental t, et que la rotation de la terre transporte le lieu n en γ, ensorte que les deux astres se couchent. D'ailleurs, puisque la terre touche le cône d'ombre en λ et n, la prolongation du rayon de la terre $M\lambda$ doit nécessairement passer par l'axe du cône STC: donc $M\lambda$ et ST sont dans le même plan, ou S et T sont situés dans le plan vertical $M\lambda TS$ du lieu λ.

Tout cela s'applique également à l'éclipse totale, en substituant le cône $sC\sigma$ au cône GFH.

§. 255. Soit (*Fig.* 69.) QDad la projection ortographique de la terre, dont le pole est le soleil, de manière que S représente le centre de la terre, et le lieu qui a le soleil au zénit dans un instant donné; soit P le pole élevé ou illuminé, CE l'écliptique d'occident en orient, et OH l'orbite relative de la lune, la rotation de la terre se faisant suivant la même direction: PBQdaSP sera la moitié occidentale, PSaqDBP la moitié orientale de l'hémisphère illuminé de la terre; et tous les lieux de la terre Q, d, décriront des cercles parallèles autour de P, en traversant l'hémisphère supérieur ou illuminé de Q en D ou de d en q: faisons $SQ = P - p$, $SO = P - p + R + r$, donc $QO = R + r$. Cela posé, il est clair que l'éclipse centrale commencera et finira sur la terre en général, lorsque OH coupe la circonférence du cercle QDqd, et l'éclipse partielle au moment où OH coupe le cercle CAE en O et H: Q verra donc le premier le commencement au lever du soleil, parceque Q est sur le point de se lever au dessus de la limite QdqD de l'hémisphère illuminé par le soleil, et que toute autre distance OB est plus grande que OQ. Suivant les principes de la projection ortographique, tous les grands cercles, passant par l'oeil ou par S, se changent en lignes droites qui font entre elles les mêmes angles que les grands cercles. Or BPS est le cercle de déclinaison du soleil: en faisant donc ASF égal à l'angle de position $\varkappa$, F étant pris a gauche ou à droite de S, selon que le cercle de latitude SF est à

l'occident ou à l'orient du cercle de déclinaison SP, c'est-à-dire selon que le soleil est dans les signes ascendans ou descendans (I. §. 76. 77.); en prenant $FSG = \omega$ à gauche ou à droite, selon que la latitude de la lune est croissante ou décroissante (§. 235. 238.); on connaît les angles $ASG = \varkappa + \omega$, et $GSO = GSH$ par l'équation $\cos GSO = \frac{GS}{SO} = \frac{m}{P - p + R + r}$. Cela donne l'angle $ASO = GSO + \varkappa + \omega$, qui est le même que l'angle sphérique PSQ; SQ est un *quadrans*, et SP est la distance du soleil au pole, donc $SP = 90^\circ - D$, D étant la déclinaison boréale du soleil au commencement de l'éclipse. On aura donc dans le triangle sphérique PSQ,

$$\cos PQ = \cos PS \cos SQ + \sin PS \sin SQ \cos ASO;$$

or $PQ = 90^\circ - f$ étant la distance du lieu Q au pole, et $SQ = 90^\circ$, la *latitude* f du lieu Q sera donnée par l'équation

$$\sin f = \cos D \cos (GSO + \varkappa + \omega),$$

f étant de même nature que le pole P et la déclinaison du soleil D, ou de nature opposée, selon que $\sin f$ est positif ou négatif.

On a dans le même triangle,

$$\text{tang } SPQ = \frac{\sin PSQ}{\cot SQ \sin PS - \cos PS \cos PSQ} = -\frac{\text{tang } (GSO + \varkappa + \omega)}{\sin D}.$$

En nommant L la longitude du lieu A, pour le méridien duquel on a calculé toutes les époques de l'éclipse générale (§. 253.), par ex. de Paris, et en supposant que l'éclipse commence t heures après le midi vrai de Paris; le soleil S ou le méridien PS sera $15\,t$ dégrés à l'occident du méridien de Paris, ou la longitude du lieu S sera $L - 15t$: or les longitudes géographiques étant comptées suivant la direction QPS, la *longitude* du lieu Q sera

$$l = L - 15\,t - SPQ.$$

On verra aisément les modifications que la *figure* 69. et les formules précédentes éprouveront, lorsque la latitude de la lune est australe.

Le même procédé donnera, pour le lieu D qui verra le dernier la fin en H, l'angle $ASH = GSH - (\varkappa + \omega)$, la *latitude* f par l'équation $\sin f = \cos D \cos ASH$, l'angle SPD par l'équation $\text{tang } SPD = -\frac{\text{tg } ASH}{\sin D}$, et la *longitude* $l = L - 15\,t + SPD$; t étant le tems de la fin de l'éclipse générale, pour Paris, et D la déclinaison du soleil à cette époque.

En mettant à la place de t le commencement ou la fin de l'éclipse totale ou annulaire, et de l'éclipse centrale, et au lieu de D la déclinaison du soleil qui répond à chacune de ces époques; les formules précédentes donneront les lieux qui verront les premiers le commencement, ou les derniers la fin de ces éclipses. Alors l'angle $GSO = GSH$ sera donné par une de ces équations, $\cos GSO = \frac{m}{P - p \pm (R - r)}$ ou $\cos GSO = \frac{m}{P - p}$.

§. 256. On trouvera de la même manière le lieu qui, dans l'instant du milieu, verra une éclipse centrale, ou *la plus grande phase*. L'éclipse est centrale, si l'orbite relative QD traverse la projection de la terre $QdqD$. En abaissant donc sur QD la perpendiculaire Sg, g sera le milieu de l'éclipse, $Sg = m$ la plus courte distance géocentrique, et le lieu dont la projection est g, aura une éclipse centrale. Ce lieu étant perpendiculairement élevé sur le point g de sa projection, la droite Sg de la projection sera au rayon SQ, comme le sinus de l'arc $Sg = x$, dont le lieu g est éloigné de S, est à l'unité: on a donc

$$\sin x = \frac{Sg}{SQ} = \frac{m}{P - p}.$$

Connaissant dans le triangle sphérique PSg, $PS = 90° - D$, $Sg = x$, $PSg = x + \omega$, on aura

$$\cos Pg = \sin f = \sin D \frac{\sqrt{((P-p)^2 - m^2)}}{P - p} + \frac{m}{P - p} \cos D \cos (x + \omega),$$

$$\text{tang } SPg = \frac{m \sin (x + \omega)}{\cos D \sqrt{((P-p)^2 - m^2)} - m \sin D \cos (x + \omega)}, \text{ et}$$

$$l = L - 15\,t \mp SPg,$$

les signes — et + se rapportant aux cas, où Sg est à l'occident du cercle de déclinaison SP, ainsi que la *figure* 69. le représente, ou à l'orient; et D étant la déclinaison du soleil, t le tems de Paris, dans le milieu de l'éclipse. Pg étant le méridien du lieu g, le soleil est dans la *figure* à l'orient de ce méridien, et le lieu g verra l'éclipse centrale *avant midi*; il la verra *après midi*, si Sg tombe à l'orient de SP.

Si l'éclipse n'est pas centrale, le milieu arrivera en G, et le lieu γ verra la plus grande phase, parceque toute autre distance GB est plus grande que $G\gamma$. On a de même

$PS\gamma = \alpha + \omega$, $PS = 90° - D$, $S\gamma = 90°$, donc

$\cos P\gamma = \sin f = \cos D \cos(\alpha+\omega)$, $\operatorname{tang} SP\gamma = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\omega)}{\sin D}$, et $l = L - 15t \mp SP\gamma$, selon que la perpendiculaire SG tombe à l'occident ou à l'orient du cercle de déclinaison SB. Dans le premier cas le lieu γ verra le milieu de l'éclipse et la plus grande phase au lever du soleil, dans le dernier cas au coucher du soleil; attendu que la rotation de la terre fait tourner le lieu γ autour de P suivant $\gamma g \delta$.

§. 257. On trouvera le lieu qui verra l'éclipse centrale dans un instant quelconque, en mettant à la place de t le tems donné pour Paris, et à la place de m la distance géocentrique des centres à cette époque. Cette distance $\odot\lambda$ (*Fig.* 67.) se trouve de deux manières. L'intervalle entre le milieu de l'éclipse A et le tems donné, étant converti en arc, au moyen du mouvement relatif η de la lune, donnera le segment de l'orbite $A\lambda$, donc $\odot\lambda = \sqrt{(m^2 + A\lambda^2)}$. D'un autre côté, les mouvemens horaires β et η donneront la latitude $\lambda\mu = b$, et la différence entre les longitudes du soleil et de la lune $\odot\mu = B$, d'où il viendra $\odot\lambda = \sqrt{(B^2 + b^2)}$.

§. 258. La *troisième* question (§. 253.) ne saurait être résolue facilement dans toute son étendue, que par des *constructions* qui doivent être expliquées dans l'astronomie pratique. Cependant les principes généraux qui conduisent à la solution de ce problème, peuvent être compris sans construction. La route du centre de l'ombre, ou de l'éclipse centrale, sur la surface de la terre, sera trouvée par le procédé du §. 257, lequel donnera les lieux qui verront successivement l'éclipse centrale. Ayant joint tous ces points par une courbe, sur une mappemonde ou sur un globe, cette courbe s'écartera insensiblement de la vraie route du centre de l'ombre, si l'on a déterminé par le calcul un nombre suffisant de points. Parmi ces points il y en a quatre, plus remarquables que les autres, qu'on a coutume de calculer: ce sont les deux points qui verront le commencement et la fin de l'éclipse centrale, celui qui verra l'éclipse centrale dans l'instant du milieu, et celui qui verra le *soleil centralement éclipsé dans le méridien*. On a vu (§. 255. 256.), comment les trois premiers points se trouvent: il ne reste donc que le quatrième. Comme les astres ne sortent pas du méridien par l'effet de la

parallaxe, les lieux *vrais* des deux centres seront aussi dans le méridien de ce lieu, ou dans le même cercle de déclinaison. On n'a donc qu'à chercher, au moyen des mouvemens horaires, l'instant où les ascensions droites du soleil et de la lune sont les mêmes: si cet instant arrive durant l'éclipse centrale, il y aura un lieu de la terre qui verra l'éclipse centrale à midi, et il sera trouvé par les formules du §. 256, en y substituant les valeurs de D et de la distance géocentrique des centres (§. 257.), qui conviennent à cette époque.

§. 259. Ayant tracé, par le procédé précédent, la route du centre de l'ombre, on trouvera aisément, à l'aide d'un globe artificiel, la route de l'ombre et de la pénombre, ou la bande de la terre, qui sera successivement couverte par l'ombre. Soient (*Fig.* 70.) S, L, C, les centres du soleil, de la lune, et de la terre $\tau TMtr$, SL l'axe de l'ombre, qui rencontre la terre dans le centre T de l'ombre, ou de sa section circulaire dans la région de la terre; et soit tu cette section, ensorte que $TLt = TLu$ est le demi-diamètre sélénocentrique de l'ombre ou de la pénombre, donc $TLt = TLu = \pm(R-r)$ ou $R+r$, celui de la terre étant $= P$: d'où il suit, que $Vt = Vu$ est au rayon de la terre, comme $\pm(R-r)$ ou $R+r$ est à P. Un disque circulaire tu, dont le diamètre est à celui du globe artificiel dans ce rapport, étant fixé dans la situation tu, couvrira tous les lieux de la terre qui se trouvent dans l'ombre, au moment où T a une éclipse centrale; et les points T sont déjà marqués sur le globe (§. 258.). Pour fixer tu perpendiculairement à ST, on peut regarder ST, SC, comme parallèles, parcequ'elles ne font jamais un angle plus grand que $p = 8''$. Ayant donc disposé le globe de manière que CS soit vertical, et que par conséquent, le lieu M qui a le soleil au zénit, soit élevé de 90° sur l'horizon du globe, on n'aura qu'à donner au disque tu, la position horizontale. En menant le disque tu, le long d'une règle horizontale, ensorte que son centre V répond perpendiculairement sur le point T qui voit l'éclipse centrale; et en tournant en même tems le globe, ensorte que son point zénital M est celui qui a le soleil au zénit, dans l'instant où le point T qui répond perpendiculairement sous V, a l'éclipse centrale; les lieux, couverts par le disque, auront dans ce moment l'éclipse totale

ou partiale: ce qui suffit, pour tracer la route de l'ombre sur une mappemonde. Comme P est deux fois plus grand que $R+r$, l'ombre ne peut jamais couvrir la terre entière; mais une moitié du disque Vu ou du cône VLu, peut s'étendre au delà de la terre, si le centre de l'ombre T est considérablement éloigné de la droite SC: alors toute la partie $T\tau r$ de la terre se trouve dans l'ombre, mais il n'y a que la partie $T\tau$ qui puisse voir l'éclipse, parcequ'il est nuit dans l'autre partie τr.

§. 260. En général il est aisé de voir, que la route du centre de l'ombre, et des deux ombres qui l'accompagnent, est dirigée *d'occident en orient* sur la surface de la terre. Supposons que dans un instant quelconque, les centres du soleil, de la lune, de la terre, et de l'ombre, soient en S, L, C, T, (*Fig.* 71.) sur une même droite, l'éclipse étant centrale pour le centre de la terre; au bout d'environ deux heures, la lune aura parcouru, par son mouvement relatif d'occident en orient, l'angle $LC\lambda = 1°$ ou $LC\lambda = 2\eta$, et le centre de l'ombre a été transporté de T en τ. Or les angles soustendus par de petits arcs étant en raison inverse des rayons ou des distances, on aura

$$L\lambda = LC\lambda \cdot CL, \text{ et } LS\lambda = \frac{L\lambda}{LS} = \frac{CL}{LS} LC\lambda = \frac{c}{b} LC\lambda \text{ (§. 249.)} = \frac{60.p}{1 - 60.p} LC\lambda,$$

ou à très-peu près $LS\lambda = 60\,p\,.\,1° = 0{,}002476 . 3600'' = 8'',9 = p$: d'où il suit que $S\tau$ est tangente à la terre, et que par conséquent $S\tau C = 90°$, et $SC\lambda = 90° - 9'' = 90°$. Cet angle $TC\tau$ est sujet à des variations, à proportion que η est plus ou moins grand que la valeur de $30'$ que nous avons supposée ici, ensorte que $TC\tau = \frac{2\eta}{1°} 90°$. Mais il faut observer encore, que cet angle, quoique constamment dirigé d'occident en orient, n'est pas situé dans l'équateur, mais dans l'orbite relative de la lune, qui fait avec l'équateur l'angle $PSG = \omega \pm \varkappa$ (*Fig.* 69.), et avec le méridien l'angle $\Phi = 90° - (\omega \pm \varkappa)$ qui peut varier de 90° à 61°. Soit donc (*Fig.* 75.) E le pole de l'équateur, le soleil en λ, l'angle $E\lambda L = \Phi$, $E\lambda = 90° - D$, et $\lambda L = \frac{2\eta}{1°} 90° = 180\,\eta$: cela posé, on aura

$$\text{tang } \lambda EL = \frac{\sin \Phi}{\cos D \cot \lambda L - \sin D \cos \Phi} = \frac{\cos(\omega \pm \varkappa)}{\cos D \cot 180\,\eta - \sin D \sin(\omega \pm \varkappa)}.$$

En nommant δ l'accroissement horaire de la déclinaison boréale de la lune, il viendra

$EL = 90° - (D + 2\delta)$, et $\cos lEL = \frac{\cos lL - \cos El \cos EL}{\sin El \sin EL} = \frac{\cos 180\eta - \sin D \sin(D+2\delta)}{\cos D \cos(D+2\delta)}$,

D étant la déclinaison du soleil et de la lune, au moment où elle commença à parcourir l'arc Ll (*Fig.* 72.). On a donc à très-peu près $\cos 180\,\eta = 0$, et $\cos lEL = -\operatorname{tg} D \operatorname{tg}(D + 2\delta)$. Or on a généralement $\sin D = \cos\varepsilon \sin b + \sin\varepsilon \sin \complement \cos b$, ε étant l'obliquité, donc dans les éclipses, où b est presque nul, $\sin D = \sin\varepsilon \sin \complement$ à peu près, et $\delta = \frac{\partial \complement \sin\varepsilon \cos \complement}{\cos D}$, $\partial\complement$ étant $= H$ (§. 232.): en faisant donc $\sin\varepsilon = 0,4$, on aura $\delta = \frac{0,4 . H \cos \complement}{\cos D}$. L'équation précédente donne à peu près $\cos lEL = \cos\psi = \frac{\cos 180\,\eta}{\cos^2 D} - \operatorname{tg} D \operatorname{tg}(D + 2\delta)$, et $\operatorname{tg}(D + 2\delta) = \frac{\operatorname{tg} D + 2\delta}{1 - 2\delta \operatorname{tg} D}$, donc $\cos\psi = \frac{\cos 180\,\eta}{\cos^2 D} - \frac{\sin D (\sin D + 0,8 . H \cos \complement)}{\cos^2 D - 0,8 . H \cos \complement \sin D}$, et en substituant $\sin D = 0,4 . \sin \complement$,

$$\cos\psi = \frac{\cos 180\,\eta}{1 - 0,16 . \sin^2 \complement} - \frac{0,16 . \sin \complement (\sin \complement + 2H \cos \complement)}{1 - 0,16 . \sin \complement (\sin \complement + 2H \cos \complement)}.$$

Le mouvement relatif η peut varier d'environ 26′ à 35′: on aura donc à peu près la plus grande valeur positive de $\cos\psi$, en faisant $\sin \complement = 0$, $\eta = 26'$, et la plus grande valeur négative, en faisant $\sin \complement = 1$, $\eta = 35'$; ce qui donnera $\cos\psi = \cos 78°$, et $\cos\psi = \frac{\cos 10° - 0,16}{0,84} = -\frac{0,42}{0,84} = -\frac{1}{2}$; donc $\psi = 78°$ et $\psi = 120°$. En conséquence, l'ombre de la lune parcourt en deux heures un arc terrestre de 78° à 120° d'occident en orient, tandis que dans le même tems, la rotation de la terre fait parcourir au lieu T un arc de 30° suivant la même direction, ensorte que le centre de l'ombre tombe, dans l'instant suivant, sur un lieu t qui est plus oriental que T: d'où il résulte, 1) que dans tous les cas, la route de l'ombre sur la terre se dirige des pays occidentaux aux pays orientaux, 2) que la vitesse de l'ombre dans le sens de l'orbite, lL, est de $90\,\eta$ par heure, c'est à dire de 39′ à 53′; 3) que la vitesse dans le sens de l'équateur, et relativement aux pays qu'elle traverse, $lEL = \frac{\psi - 30}{2}$, peut varier de 24′ à 45′.

CHAPITRE VI.

L'Éclipse de Soleil dans un lieu déterminé de la terre.

§. 261. Les objets principaux de cette troisième partie du calcul sont 1. le *commencement*, 2. la *fin*, 3. le *milieu*, ou l'instant et la dimension de la *plus grande phase*, 4. la *position* des points de l'*immersion*, de l'*émersion*, et de la *plus grande phase*, relativement au cercle vertical, passant par le soleil; ce qui donnera la route apparente de la lune sur le disque solaire, pour le lieu donné.

Ce calcul est un peu compliqué, à cause de la rotation de la terre, et du changement continuel de la parallaxe à différentes hauteurs, qui en résulte. Chaque lieu de la terre participe non-seulement au mouvement annuel du centre de la terre, mais aussi au mouvement diurne de son parallèle. Il est vrai que ce dernier mouvement est uniforme; mais comme les diverses parties du parallèle sont différemment situées et dirigées relativement à l'orbite lunaire, il n'est pas permis de supposer uniforme le mouvement diurne d'un lieu de la terre, par rapport au soleil et à la lune: d'où il résulte, qu'il est plus difficile de déterminer l'orbite *apparente* de la lune pour un lieu donné, que l'orbite *géocentrique* dans la première partie de ce calcul, et que la méthode directe dont nous nous sommes servis précédemment, ne peut pas être appliquée ici. Cependant la durée entière des éclipses est assés courte, pour qu'on puisse regarder l'orbite apparente comme une ligne droite, dont les arc très-petits sont décrits uniformement. Cela supposé, il suffira de calculer exactement, pour trois instans durant l'éclipse, la position apparente de la lune relativement au soleil, au moyen des parallaxes, et de regarder la ligne droite, menée par deux de ces points, comme l'orbite apparente de

la lune, dans laquelle on déterminera les autres points par interpolation. Le commencement, la fin, et le milieu de l'éclipse apparente, trouvés à très-peu près par cette méthode, seront corrigés par le calcul des parallaxes; et un petit nombre d'essais suffira, pour donner ces époques avec une grande précision.

C'est la marche générale à suivre dans le calcul qui est l'objet de ce chapitre. Appelons, pour abréger, T le lieu pour lequel on se propose de calculer l'éclipse apparente, f sa latitude, P la parallaxe horizontale de la lune sous cette latitude.

§. 262. Pour faciliter le calcul, on choisira pour les trois points qui serviront à tracer l'orbite apparente, des époques peu éloignées du commencement, de la fin, et du milieu de l'éclipse apparente. Mais comme ces époques sont inconnues, on a coutume d'employer une *construction* qui donne tout le détail de l'éclipse apparente, d'une manière fort simple, quoique moins exacte que le calcul. Pour cet effêt il faut construire, suivant les règles d'une projection quelconque, la terre, le parallèle ou le mouvement géocentrique du lieu T, et l'orbite relative de la lune, donnée par la première partie du calcul. Alors, ayant divisé le parallèle et l'orbite lunaire en heures et minutes, on pourra trouver pour un instant quelconque, la position de la lune et du lieu T relativement à un point fixe, tel que le centre du soleil: ce qui donnera immédiatement la position apparente de la lune par rapport au soleil. On choisit ordinairement pour cet effêt la projection la plus simple, qu'on appelle *ortographique*, suivant laquelle tous les points sont projettés par des droites, perpendiculaires à un plan fixe, et par conséquent là où ils paraîtraient à une distance infinie, et perpendiculaire à ce plan. On sait que la projection d'un cercle quelconque est une ellipse, dont le petit axe est au grand, comme le cosinus de l'inclinaison du plan du cercle sur celui de la projection est à l'unité (§. 79.). Le grand axe est la projection de celui des diamètres du cercle, qui est situé dans le plan, passant par le centre du cercle, et parallèle au plan de la projection; le petit axe est la projection du diamètre qui est perpendiculaire au précédent. Le plan de la projection sera le grand cercle de la terre, dont le pole a le soleil au zénit, dans l'instant où T a midi. Alors l'oeil est supposé

dans le soleil, le centre de la projection est la projection du centre du soleil, et du lieu de la terre qui a le soleil au zénit dans cet instant, et la projection entière représente, dans chaque instant, l'hémisphère de la terre, illuminé par le soleil. Comme la distance du soleil n'est pas infinie, on corrigera cette erreur, en faisant le rayon de la projection $= P - p$ au lieu de P. On verra aisément, qu'il est nécessaire de supposer la déclinaison du soleil invariable durant toute l'éclipse, parcequ'un changement de la déclinaison donnerait une autre projection.

§. 263. Soit MPS (*Fig.* 72.) le méridien, dans lequel le soleil est supposé immobile, et où le lieu T se trouve à midi; P le pole, S le lieu qui a le soleil au zénit, MT le diamètre du parallèle que T parcourt en 24 heures, ensorte que la projection de MT sera le petit axe de l'ellipse; soit $D = 90° - PS$ la déclinaison du soleil dans le milieu de l'éclipse. Les points S, T, P, M, seront projettés en C, t, p, m, et le rayon de la projection sera $P - p = c$ (§. 262. 25o.): d'où il vient

$$Cp = c \sin PS = c \cos D,\ Ct = c \sin ST = c \sin (f - D),$$

$$Cm = c \sin (PS + PM) = c \sin (90° - D + 90° - f) = c \sin (f + D),$$

et le grand axe de l'ellipse, $MT = 2c \sin PT = 2c \cos f$.

En décrivant donc avec le rayon $CA = CB = c$ (*Fig.* 73.) le cercle ADB, en élevant sur AB la perpendiculaire CD, et en faisant $Ct = c \sin (f - D)$, $Cm = c \sin (f + D)$, les points t et m donneront la position et la grandeur du petit axe tm; en tirant donc la perpendiculaire ab sur son milieu c, et faisant $ca = cb = c \cos f$, ab sera le grand axe de l'ellipse; et ayant fait $Cp = c \cos D$, p sera la projection du pole élevé, qui tombera toujours au delà du centre c de l'ellipse, vu que $Cc = \frac{Ct + Cm}{2} = c \sin f \cos D$, et $Cp = c \cos D$, donc $Cp > Cc$. Le demi-petit axe est $cm = \frac{Cm - Ct}{2} = c \cos f \sin D$. Au moyen des deux axes, on peut construire l'ellipse, passant par les points a, m, b, t: en nommant les abscisses $cd = x$, les ordonnées $dn = y$, on aura $y^2 = \frac{cm^2}{ca^2}(ca^2 - x^2) = \sin^2 D (c^2 \cos^2 f - x^2)$. Mais comme il est nécessaire, de diviser le parallèle en heures et minutes, il vaudra mieux se servir de la construction suivante.

La droite Cpm représente un méridien fixe, dans lequel le soleil se trouve constamment, et chaque lieu de la terre lorsqu'il a midi: conséquemment, si le pole p est dans l'hémisphère supérieur, ou illuminé par le soleil, ou ce qui revient au même, si la latitude du paralléle atb est de même nature que la déclinaison du soleil D, ftg sera la projection de l'arc diurne, et gmf celle de l'arc nocturne. Soit donc ftg dans l'hémisphère supérieur la direction d'occident en orient par le midi t, ensorte que le lieu T, par le mouvement diurne, parcourra $fatbgmf$, le soleil se lèvera, lorsque T est en f, il se couchera, lorsque T est en g: il aura 6 heures du matin en a, 6h. du soir en b, midi en t, et minuit en m. Si f et D sont de nature opposée, gmf sera l'arc diurne, ftg l'arc nocturne, m sera midi, t minuit, g le lever, et f le coucher du soleil. Ayant donc construit sur le grand axe ab, comme diamètre, un cercle aEb, il résulte de la nature de l'ellipse, que pour une abscisse donnée $cd = x$, les ordonnées de l'ellipse et du cercle sont entre elles, comme le petit et le grand axe, ou en nommant $de = z$, $y : z :: c\cos f \sin D : c\cos f$, donc $y = z\sin D$. Le cercle aEb est le vrai parallèle du lieu T, l'ellipse $amgt$ est sa projection: T décrira donc le cercle uniformement, à raison de 15° par heure; et chaque point du cercle est projetté en n, où la ligne ed, perpendiculaire à ab ou AB, rencontre l'ellipse. Supposons donc, que le *quadrans* Eeb soit divisé en 6 ou 12 arcs égaux, c'est-à-dire en heures ou demi-heures, et que Ee réponde à une heure ou 15°: cela posé, e et n seront les points du parallèle et de sa projection, où se trouvera le lieu T, quand il compte 11 heures du soir, etc. En faisant donc $de : dn :: cE : cm :: 1 : \sin D$, on construira de cette manière l'ellipse entière, et on l'aura divisée en même tems en heures, etc.

§. 264. L'orbite relative de la lune sera construite suivant les mêmes règles, dont nous nous sommes servis pour l'éclipse générale, avec cette différence, que CD n'est pas ici le cercle de latitude, mais de déclinaison: on aura donc besoin de l'angle de position $\varkappa$, qui a été déjà calculé (§. 255.). On fera suivant les règles précédentes (*Fig.* 74.), $DCF = \varkappa$, $CE = b$, ou $CA : CE :: P - p : b$; alors CF sera le cercle de latitude, et E le lieu de la lune en conjonction. En faisant de plus, $EM = \beta$, en élevant sur CF la perpendicu-

laire MN, et en faisant $EN = \eta = H - h$, N sera aussi dans l'orbite: en joignant donc E, N, LENU sera l'orbite relative de la lune. On marquera en E le tems de la vraie conjonction, qui est donné par la première partie du calcul, et qui doit être réduit au méridien de T, dont la longitude est connue; et l'on divisera, au moyen du mouvement relatif η, l'orbite LU en heures et minutes du méridien de T, en partant de E. En comparant deux points de l'orbite et de l'ellipse, auxquels est marqué le même tems, par exemple N et R, leur distance RN, prise sur l'échelle où $CD = P - p$, donnera la distance apparente des centres du soleil et de la lune pour le lieu T, qui a lieu dans l'instant marqué. En effet, la parallaxe du soleil étant ici nulle, parcequ'on en a tenu compte, en faisant le rayon CD égal à la parallaxe relative $P - p$, l'observateur en R verra le soleil suivant une droite, perpendiculaire au plan de la *figure*, et passant par R, parceque le soleil est supposé perpendiculaire sur C; et la lune sera perpendiculaire sur N: sa distance apparente au soleil sera donc mesurée par l'arc NR qu'on peut égaler à son sinus, parcequ'il est toujours plus petit que $P - p$ ou qu'un degré.

§. 265. Cela posé, on trouvera le *commencement* et la *fin* de l'éclipse partiale et totale en T, en cherchant avec un compas, ouvert de $R + r$ et $R - r$, deux points dans l'ellipse et dans l'orbite, éloignés l'un de l'autre de $R \pm r$, et répondant au même tems. La *plus grande phase* ou le milieu de l'éclipse se trouvera à l'aide du compas, en cherchant deux tems égaux, marqués dans l'ellipse et l'orbite, où ces deux lignes s'approchent le plus l'une de l'autre: l'ouverture du compas donnera la plus courte distance, ou la plus grande phase, et les tems marqués donneront l'époque du milieu, qui sera à très-peu près le milieu entre les époques du commencement et de la fin, qu'on vient de trouver.

La méthode précédente des projections donnera à une minute près, ces époques: car elle n'est pas exacte, étant fondée sur de faux principes, en supposant, par exemple, la déclinaison du soleil invariable durant l'éclipse, etc. Il faudra donc corriger les époques qu'on vient de trouver, par le calcul des parallaxes.

§. 266. L'effet des parallaxes sur les éclipses se trouvera par le moyen des formules (I. §. 210.). En nommant τ le tems vrai pour le méridien de T, A l'ascension droite du soleil, l, b, la longitude et la latitude de la lune, $f' = f - \omega$ la hauteur du pole de T, corrigée par l'aplatissement de la terre, H la parallaxe horizontale de la lune sous la latitude f', diminuée de $p = 8'',6$, ε l'obliquité de l'écliptique, et $M = 15\tau + A$; on commencera par calculer l'angle auxiliaire Φ, la hauteur et la longitude du Nonagésime K, N, au moyen des formules $\text{tang } \Phi = \frac{\sin M}{\text{tg } f'}$, $\cos K = \frac{\sin f' \cos(\varepsilon + \Phi)}{\cos \Phi}$, $\text{tang } N = \frac{\text{tg } M \sin(\varepsilon + \Phi)}{\sin \Phi}$, et la *parallaxe de longitude* en secondes, $\Delta l = \left(\frac{\sin H \sin K}{\cos b}\right) \frac{\sin(l - N)}{\sin 1''} + \left(\frac{\sin H \sin K}{\cos b}\right)^2 \frac{\sin 2(l - N)}{\sin 2''} + \left(\frac{\sin H \sin K}{\cos b}\right)^3 \frac{\sin 3(l - N)}{\sin 3''}$.

Ensuite on calculera $\text{tang } \xi = \frac{\text{tg } K \cos(l - N + \frac{1}{2}\Delta l)}{\cos \frac{1}{2}\Delta l}$, et la *parallaxe de latitude*, $\Delta b = -\left(\frac{\sin H \cos K}{\cos \xi}\right) \frac{\cos(b + \xi)}{\sin 1''} - \left(\frac{\sin H \cos K}{\cos \xi}\right)^2 \frac{\sin 2(b + \xi)}{\sin 2''} + \left(\frac{\sin H \cos K}{\cos \xi}\right)^3 \frac{\cos 3(b + \xi)}{\sin 3''}$.

Après cela on aura la longitude apparente de la lune, $l' = l + \Delta l$, et la latitude apparente, $b' = b + \Delta b$. On verra dans le §. cité, dans quels cas la longitude et la latitude est augmentée ou diminuée. Le lieu du soleil n'est point altéré par la parallaxe, parcequ'on en a tenu compte, en mettant $H - p$ au lieu de H.

§. 267. Ce calcul donnera, pour un instant quelconque, la *distance apparente* de la lune au soleil. Soit (*Fig.* 75.) $l\lambda$ l'écliptique, l le lieu vrai et apparent du soleil, L le lieu apparent de la lune, $Ll = s$ la distance apparente des centres. Cela posé, on aura

$$l\lambda = B = l' - \odot, \quad L\lambda = b', \text{ donc } \cos s = \cos B \cos b'.$$

Pour en déduire la phase apparente, il faut connaître les demi-diamètres apparens. Celui du soleil ne diffère jamais du géocentrique, quelle que soit sa hauteur, mais le diamètre de la lune croît avec sa hauteur. En nommant R le demi-diamètre central en secondes, tiré des tables ou des éphémérides, le demi-diamètre apparent à la hauteur vraie θ sera (§. 216.)

$$R' = R\{1 + 3{,}66394 \cdot R \sin 1'' [\sin \theta + 0{,}916 \cdot R \sin 1'' (1 - 3 \cos 2\theta)]\}.$$

Le *commencement* et la *fin* de l'éclipse apparente arrive, lorsque $s = R' + r$: on peut donc répéter le calcul précédent, jusqu'à ce qu'on aura trouvé des

valeurs de s et R′ telles, que s soit exactement $= R' + r$. Le milieu entre ces deux époques sera à très-peu près l'instant du *milieu:* du moins il en résultera très-exactement *la plus grande phase* qui, étant à son *maximum*, ne change qu'insensiblement. Ayant donc calculé s et R′ pour le tems du milieu entre le commencement et la fin, on aura la plus grande phase de l'éclipse. Si (*Fig.* 67.) $\odot$ B, LM, sont les demi-diamètres apparens du soleil et de la lune, la distance apparente des centres sera $\odot L = s$, et la plus grande phase $BM = \odot B - (\odot L - LM) = r + R' - s = \frac{6(r+R'-s)}{r}$ doigts.

§. 268. Pour éviter ce calcul un peu long, dont on a besoin pour trouver exactement $s = r + R'$, on peut se servir d'une *interpolation*. Après avoir déterminé, par un calcul rigoureux, les valeurs de B, b', R′ (§. 267.), qui conviennent aux époques supposées du commencement, de la fin, et du milieu, on connaît la vitesse, avec laquelle ces quantités changent: les trois époques serviront donc à construire, par interpolation, une table qui, de dix en dix, ou de cinq en cinq minutes, présentera en quatre colonnes, les valeurs de $\log\cos b' = x$, $\log\cos B = y$, $x + y = z$, et $\log\cos(r + R') = a$. Puisque R′ ne change que de 18″ depuis l'horizon jusqu'au zénit, on peut supposer a constant, en donnant à R′ la valeur qui convient au tems du milieu de l'éclipse apparente, connu à peu près. Pour le commencement et la fin, on a $s = r + R$, ou $\cos B \cos b' = \cos(r + R')$, donc $z = a$: le tems, pour lequel on aura trouvé dans la table une valeur de z, égale à a, sera donc l'instant du commencement ou de la fin; et il est aisé de trouver ce tems, par le moyen des différences entre les nombres de la table.

Dans le milieu de l'éclipse s est un *minimum*, $\partial s = 0$: l'équation $\cos s = \cos B \cos b'$ donnera donc $0 = \partial B \sin B \cos b' + \partial b' \cos B \sin b'$, ou $\text{tang}\, B = -\frac{\partial b'}{\partial B} \text{tang}\, b'$. On trouvera $\frac{\partial b'}{\partial B}$ au moyen des valeurs de b' et B de 5 en 5 minutes, données par la table; et l'on peut égaler b' à la valeur que la table présente pour le milieu entre le commencement et la fin. Connaissant donc B, on trouvera dans la table le tems qui répond à cette valeur de B, et la plus grande phase sera $= r + R' - s$.

Les trois époques, trouvées de cette manière, seront corrigées par le calcul des parallaxes (§. 266.). Au reste, il est aisé de voir qu'au lieu de

la table, on peut se servir d'une construction, semblable à celle que nous avons employée pour l'éclipse générale. Après avoir calculé, pour deux époques, la longitude et la latitude apparentes de la lune, $\mathbb{C}'$, $\mathbb{C}''$, b', b'', et la longitude vraie du soleil, $\odot'$, $\odot''$, on prendra sur la droite CE (*Fig.* 67.) qui représente l'écliptique, $\odot\mu = \odot' - \mathbb{C}'$, $\odot n = \mathbb{C}'' - \odot''$, on élevera les perpendiculaires $\mu\lambda = b'$, $nl = b''$, on tracera par λl l'orbite apparente $D\lambda lF$, le soleil étant supposé immobile en $\odot$, et on la divisera, au moyen des tems marqués en λ et l, en minutes. En décrivant du centre $\odot$ et du rayon $\odot D = \odot F = r + R'$, un cercle qui coupe $D\lambda lF$ en D et F, les tems marqués en D et F donneront les instans du commencement et de la fin de l'éclipse pour le lieu T. Le tems, marqué en A qui est le milieu de la ligne DF, est l'instant de la plus grande phase, et $\odot A$, perpendiculaire à DF, est la plus courte distance, et la plus grande phase sera $r + R' - \odot A = \frac{6(r + R' - \odot A)}{r}$ doigts.

§. 269. Il ne reste que la *quatrième* question (§. 261.). Soient au commencement de l'éclipse apparente pour le lieu T, (*Fig.* 76.) S, L, les centres du soleil et de la lune, M le point d'*immersion*, ECSI l'écliptique, SD le cercle de latitude, SV le cercle vertical, et LC perpendiculaire à l'écliptique. L'angle parallactique VSD sera trouvé de la manière suivante. Si la *figure* 4. représente la moitié occidentale du ciel pour le lieu T, P le zénit, E le pole de l'équateur, F le soleil, on aura $PE = 90° - f$, $EF = 90° - D$, $PEF = 15\tau$, et l'angle $PFE = \zeta$, dont le cercle de déclinaison s'écarte du cercle vertical vers l'occident, sera donné par l'équation

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{\sin 15\tau}{\text{tg}\,f \cos D - \sin D \cos 15\tau}.$$

Or l'angle de position $\varkappa$, que fait le cercle de latitude avec celui de déclinaison vers l'occident, étant donné par l'équation $\text{tang}\,\varkappa = \text{tg}\,\varepsilon \cos \odot$ (I. §. 76.), l'angle dont le cercle de latitude s'écarte du cercle vertical vers l'occident, sera $\zeta + \varkappa = v$, ζ ou $\varkappa$ devenant négatifs, si le cercle de déclinaison tombe à l'orient du cercle vertical, ou à l'occident du cercle de latitude. Si $v = \pm\zeta \pm \varkappa$ est négatif, le cercle de latitude sera à l'orient du cercle vertical, ce qui est le cas dans la *Fig.* 76. où par conséquent il faut

regarder v comme négatif. On a donc $\sin \mathrm{LSC} = \frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{LS}}$ ou $\cos \mathrm{LSD} = \frac{b'}{\mathrm{R}' + r'}$ et l'angle qu'on cherche, est

$$\mathrm{MSV} = \mathrm{LSD} - \mathrm{DSV} = \mathrm{LSD} + (\zeta + \varkappa) = q';$$

c'est l'angle dont le point d'immersion est éloigné du cercle vertical vers l'*occident* ou l'*orient*, selon que q' est *positif* ou *négatif*.

Pour l'*émersion* en N on a

$$\cos \mathrm{DSN} = \frac{b''}{\mathrm{R}'' + r}, \quad \mathrm{VSN} = \mathrm{DSN} + \mathrm{DSV} = \mathrm{DSN} - (\zeta' + \varkappa') = q'',$$

b'', R'', ζ', $\varkappa'$, étant les valeurs, calculées pour l'instant où finit l'éclipse. L'émersion est à l'*orient* ou à l'*occident* du cercle vertical, selon que q'' est *positif* ou *négatif*.

Pour le *milieu* en M (*Fig.* 77.) on a $\cos \mathrm{LSC} = \frac{\mathrm{SC}}{\mathrm{SL}}$, ou

$$\sin \mathrm{DSL} = \frac{\odot - \mathbb{C}}{s},$$

$\odot$, $\mathbb{C}$, s, étant la longitude vraie du soleil, la longitude apparente de la lune, et la plus courte distance, calculées pour le milieu. Ayant donc calculé pour la même époque l'angle $\mathrm{DSV} = -v = -(\zeta + \varkappa)$, on aura

$$\mathrm{VSM} = \mathrm{DSL} - \mathrm{DSV} = \mathrm{DSL} + (\zeta + \varkappa) = q.$$

L'angle DSL sera *positif* ou *négatif*, c'est-à-dire le point du milieu sera à l'*occident* ou à l'*orient* du cercle de latitude, selon que le milieu arrivera *avant* ou *après* la conjonction apparente, c'est-à-dire selon que $\odot$ est plus ou moins grand que $\mathbb{C}'$, ou ce qui revient au même, selon que la latitude apparente de la lune est croissante ou décroissante. Le même angle sera *obtus*, si la latitude est *australe*, ce qui est évident par l'équation $\cos \mathrm{DSL} = \frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{LS}} = \frac{b'}{s}$. Le point du milieu tombera à l'occident ou à l'orient du cercle vertical, selon que q se trouvera positif ou négatif, après avoir donné aux angles DSL, ζ et $\varkappa$, les signes qui leur conviennent.

CHAPITRE VII.

Correction des Élémens de la Lune et des Longitudes géographiques par l'observation des éclipses de soleil.

§. 270. Comme la correction de la théorie de la lune, et des longitudes des lieux où une éclipse solaire a été observée, est sans doute l'usage le plus utile qu'on puisse faire de ces phénomènes, on a imaginé pour cet effet une foule de méthodes, dont la plupart exigent un calcul extrêmement long. Elles consistent à calculer, avec les élémens tirés des tables, et la différence supposée entre le méridien A, pour lequel sont construites les tables, et celui du lieu T de l'observateur, l'effet de la parallaxe, ou la distance apparente du soleil et de la lune, pour le lieu T, et pour l'époque où la phase de l'éclipse a été observée. Cette phase doit être la même que celle que donne le calcul: s'il y a donc quelque différence, cela prouve, en faisant abstraction de l'erreur d'observation, que les élémens qui ont servi de base au calcul, ne sont pas justes, et que par conséquent, les tables ou le tems supposé dans le calcul, c'est-à-dire, la longitude supposée du lieu T, ont besoin d'être corrigées. Le but du *chapitre* présent est de déduire ces corrections, de la différence qui se trouve entre le calcul et l'observation. Comme les éclipses de soleil sont ordinairement observées dans un grand nombre de lieux, dont la longitude est exactement connue, il est naturel de commencer par comparer les observations, faites dans ces lieux, où le tems n'a besoin d'aucune correction. Alors on aura immédiatement la correction des élémens de la lune; et en employant ces élémens corrigés, dans le calcul pour les lieux dont la longitude n'est pas exactement connue, il resultera la correction du tems ou de la longitude de ces lieux. L'analyse sui-

vante paraît la plus simple. On calculera, sur les élémens des tables, à l'aide des formules précédentes, la distance apparente des centres pour l'instant d'une observation: on introduira dans les formules, des corrections des élemens de la lune et du tems de l'observation, comme des quantités inconnues, et l'on cherchera la correction de la distance des centres s, qui en résulte. La distance s, ainsi corrigée, doit être parfaitement d'accord avec la distance observée: on aura donc, en les égalant, autant d'équations de condition, qu'il y a d'observations, au moyen desquelles on déterminera une correction inconnue après l'autre, par la méthode ordinaire de l'élimination.

§. 271. Pour éviter des répétitions inutiles, j'employerai les mêmes formules et dénotations, dont je me suis servi jusqu'à présent, et je supposerai la même position de la lune relativement au soleil, et des angles sphériques qui entrent dans le calcul des parallaxes. Qu'on rapporte donc la *figure* 78. à la *figure* 75, ΥBA étant l'écliptique, S, L, les centres du soleil et de la lune, $Ll = \xi$ la parallaxe de la lune, diminuée de celle du soleil, ensorte que $L l \Upsilon$ représente un grand cercle, passant par le zénit du lieu T, et LA, lB, deux cercles de latitude, menés par les lieux vrai et apparent de la lune. Les lieux L, l, S, ainsi que la distance apparente des centres $Sl = s$, étant calculés sur les tables, il s'agit de trouver la petite correction ∂s de s, qui résulte d'un petit changement des élémens des tables et du tems supposé. Les plus importans de ces élémens sont la longitude, la latitude, et la parallaxe équatoriale de la lune; la longitude du soleil, les mouvemens horaires, et la latitude du lieu T, n'ont ordinairement besoin d'aucune correction. Soit donc le tems vrai de la conjonction géocentrique pour le méridien des tables A, qui a été tiré des tables, $= T$, la longitude du soleil et de la lune, calculée pour cet instant, $= L$, le mouvement horaire du soleil $= h$, celui de la lune en longitude $= G$, en latitude $= \beta$, sa latitude $= l$, sa parallaxe sous l'équateur $= æ$, la parallaxe horizontale pour le lieu $T = P = \lambda æ$, la longitude orientale de T relativement à $A = m$ heures, et le tems vrai de l'observation en $T = n$ heures: cela posé, le tems vrai de l'observation compté du méridien A sera $= (n - m)$ heures, et le tems écoulé depuis la conjonction, $t = (n - m - T)$ heures, l'angle ho-

raire du soleil à l'occident du méridien T étant $= 15\,ns$ donc, si la différence des méridiens m n'est pas juste, t aura besoin d'une correction, $\partial t = -\partial m$.

Les tables donnent pour le tems t, les longitudes vraies du soleil $= \mathrm{L} + ht = \odot$, de la lune $= \mathrm{L} + \mathrm{G}t = \mathbb{C}$, et la latitude vraie de la lune $= l + \beta t = b$. Soit (*Fig.* 75.) E le pole de l'écliptique ΥC, L, l, les lieux apparens de la lune et d'une étoile éclipsée par la lune, les latitudes apparentes des deux astres, $\mathrm{CL} = l'$, $\mathrm{D}l = \lambda'$, la différence des longitudes apparentes $\mathrm{DEC} = \mathrm{E}$: cela posé, on aura dans le triangle $l\mathrm{EL}$,

$$\cos \mathrm{L}l = \sin \lambda' \sin l' + \cos \lambda' \cos l' \cos \mathrm{E}.$$

§. 272. Dans le cas présent on a $\mathrm{L}l = s$, et λ' est connu, ou nul si l est le soleil: d'où il suit

$$\partial s \sin s = \partial \mathrm{E} \sin \mathrm{E} \cos \lambda' \cos l' + \partial l' \cos \mathrm{E} \cos \lambda' \sin l' - \partial l' \sin \lambda' \cos l',$$

et la différence des longitudes vraies, suivant les tables, est après la conjonction $\mathbb{C} - \odot = (\mathrm{G} - h)\,t$. En nommant donc Π et ϖ les parallaxes de longitude et de latitude, on aura $\Pi = \mu\,(\mathrm{P} - p) = \mu\,(\lambda æ - p)$, $\varpi = \nu\,(\lambda æ - p)$, les facteurs μ, ν, étant donnés par les formules du §. 266. la latitude apparente de la lune sera $l' = l + \varpi + \beta t$, et la différence des longitudes apparentes de la lune et du soleil, $\mathrm{E} = \Pi + (\mathrm{G} - h)\,t$. Mais si la longitude, la latitude, et la parallaxe équatoriale, ont besoin des corrections x, y, z, on aura

$$\partial \mathrm{E} = x + \partial \Pi + (\mathrm{G} - h)\,\partial t, \quad \partial l' = y + \partial \varpi + \beta \partial t, \quad \text{et l'on a}$$

$$\partial \Pi = \lambda \mu z, \quad \partial \varpi = \lambda \nu z, \quad \text{donc en faisant } \mathrm{G} - h = g,$$

$\partial s \sin s = (x + \lambda\mu z + g\partial t) \sin \mathrm{E} \cos \lambda' \cos l' + (y + \lambda\nu z + \beta\partial t)\,(\cos \mathrm{E} \cos \lambda' \sin l' - \sin \lambda' \cos l')$, ou

$$(\mathrm{A}) \begin{cases} \partial s = x \dfrac{\cos\lambda' \sin(gt+\Pi) \cos(l+\beta t+\varpi)}{\sin s} + y \dfrac{\cos\lambda' \cos(gt+\Pi) \sin(l+\beta t+\varpi) - \sin\lambda' \cos(l+\beta t+\varpi)}{\sin s} \\ + \lambda z \dfrac{\mu \cos\lambda' \sin(gt+\Pi) \cos(l+\beta t+\varpi) + \nu \cos\lambda' \cos(gt+\Pi) \sin(l+\beta t+\varpi) - \nu \sin\lambda' \cos(l+\beta t+\varpi)}{\sin s} \\ + \partial t \dfrac{\cos(l+\beta t+\varpi)\,(g \cos\lambda' \sin(gt+\Pi) - \beta \sin\lambda') + \beta \cos\lambda' \cos(gt+\Pi) \sin(l+\beta t+\varpi)}{\sin s}. \end{cases}$$

Dans les éclipses de soleil on a $\lambda' = 0$, d'où il viendra

$$\partial s = x \frac{\sin(gt + \mu\lambda æ - \mu p) \cos(l + \beta t + \nu\lambda æ - \nu p)}{\sin s} + y \frac{\cos(gt + \mu\lambda æ - \mu p) \sin(l + \beta t + \nu\lambda æ - \nu p)}{\sin s}$$

$$+ \lambda z \frac{\mu \sin(gt + \mu\lambda æ - \mu p) \cos(l + \beta t + \nu\lambda æ - \nu p) + \nu \cos(gt + \mu\lambda æ - \mu p) \sin(l + \beta t + \nu\lambda æ - \nu p)}{\sin s}$$

$$+ \partial t \frac{g \sin(gt + \mu\lambda æ - \mu p) \cos(l + \beta t + \nu\lambda æ - \nu p) + \beta \cos(gt + \mu\lambda æ - \mu p) \sin(l + \beta t + \nu\lambda æ - \nu p)}{\sin s},$$

*

ou à trés-peu près

$$\partial s = x\frac{gt+\mu\lambda\varpi-\mu p}{s}+y\frac{l+\beta t+\nu\lambda\varpi-\nu p}{s}+\lambda z\frac{\mu(gt+\mu\lambda\varpi-\mu p)+\nu(l+\beta t+\nu\lambda\varpi-\nu p)}{s}$$

$$+\partial t\frac{g(gt+\mu\lambda\varpi-\mu p)+\beta(l+\beta t+\nu\lambda\varpi-\nu p)}{s}; \text{ c'est-à-dire,}$$

$$\partial s = \frac{E}{s}x+\frac{l''}{s}y+\frac{E\Pi+l'\varpi}{\varpi s}z+\frac{gE+\beta l''}{s}\partial t.$$

Ayant donc calculé l'angle Φ au moyen de l'équation $\sin\Phi=\frac{E}{s}$, on peut faire $s^2=L l^2=l\lambda^2+L\lambda^2$ (*Fig.* 75.) $=E^2+l'^2$ (dans les éclipses de soleil), d'où il suit $\Phi=lL\lambda$, $\cos\Phi=\frac{l''}{s}$, donc

$$\partial s = x\sin\Phi+y\cos\Phi+\frac{\Pi\sin\Phi+\varpi\cos\Phi}{\varpi}z+(g\sin\Phi+\beta\cos\Phi)\partial t.$$

Soit maintenant L le lieu vrai de la lune, l son lieu apparent, $Ll=\xi$ la parallaxe de hauteur: cela posé, on aura $L\lambda=-\varpi$, $l\lambda=-\Pi\cos l'=-\Pi$ à peu près. Ayant donc calculé l'angle parallactique $ELZ=v$ (§. 269.), qui est ici positif, parceque le cercle vertical LZ est à l'orient de celui de latitude LE; on aura $\Pi=-l\lambda=-\xi\sin v$, $\varpi=-\xi\cos v$, et à peu près $\xi=(P-p)\cos\theta$, θ étant la hauteur de la lune; d'où il viendra

$$\partial s = x\sin\Phi+y\cos\Phi-\frac{\xi}{\varpi}z\cos(v-\Phi)+(g\sin\Phi+\beta\cos\Phi)\partial t;$$

∂s étant la quantité, dont la distance apparente des centres qu'on a observée, est plus grande que celle qu'on a tirée des tables.

§. 273. En désignant par s et (s) la distance apparente des centres, qu'on a observée, et celle qu'on a tirée des tables, on aura l'équation de condition, $(s)+\partial s=s$. Les observations les plus exactes sont celles du commencement et de la fin de l'éclipse partiale, et totale ou annulaire; et l'on a pour ces époques $s=R'+r$, et $s=\pm(R'-r)$, R' étant à peu près $=R(1+3,664.R\sin\theta.\sin 1'')$ (§. 216.). En faisant donc pour abréger

$$\sin\Phi=A,\ \cos\Phi=B,\ \frac{\xi}{\varpi}\cos(v-\Phi)=C,\ g\sin\Phi+\beta\cos\Phi=D,$$

on connaît s, ayant observé le commencement et la fin de l'éclipse, ou ayant mesuré la distance avec le micromètre: chaque observation donnera donc une équation de cette forme,

$$(s)+Ax+By-Cz+D\partial t=s.$$

Les quatre inconnues $x, y, z, \partial t$, ont la même valeur durant toute l'éclipse; les trois premières même pour toute la terre; tandis que ∂t a une autre valeur pour chaque lieu. Si la longitude du lieu est bien exactement connue, ∂t est nul; mais il est possible que les demi-diamètres qu'on a tirés des tables, (r), (R'), ont besoin d'être vérifiés: alors on aura, par l'observation du commencement et de la fin de l'éclipse partiale, deux équations de cette forme,

$$(A) \ldots\ldots (s) + Ax + By - Cz = (r) + (R') + (\partial r + \partial R'),$$

les quantités (s), A, B, C, R', ayant des valeurs différentes dans les deux observations. Deux observations de l'immersion ou de l'émersion, faites dans deux autres lieux bien connus, ou de l'une et de l'autre dans un seul lieu, donneront deux équations toutes pareilles; et ces quatre équations suffiront, pour déterminer les quatre inconnues $x, y, z, (\partial r + \partial R')$. Pour trouver ∂r et $\partial R'$, il est nécessaire d'avoir une observation du commencement ou de la fin de l'éclipse totale ou annulaire, où $s = r - R'$; il en résultera une équation de cette forme

$$(B) \ldots\ldots (s) + Ax + By - Cz = (r) - (R') + (\partial r - \partial R'),$$

qui donnera $\partial r - \partial R'$, les autres inconnues étant déjà déterminées; d'où l'on tirera

$$\partial r = \frac{\partial r + \partial R'}{2} + \frac{\partial r - \partial R'}{2}, \text{ et } \partial R' = (\partial r + \partial R') - \partial r.$$

Quand il n'y a pas un nombre suffisant d'observations, on peut négliger les corrections $\partial r, \partial R'$, et même z, qui sont ordinairement beaucoup plus petites que x et y. Les observations, faites dans un lieu connu, donneront alors deux équations de cette forme,

$$(s) + Ax + By = s,$$

qui suffisent pour trouver x et y. Si, par le moyen des observations, faites en des lieux dont la longitude est exactement connue, on a trouvé les corrections $x, y, z, \partial r, \partial R'$, on mettra $L + x, l + y, \varpi + z, r + \partial r, R + \partial R$, au lieu de L, l, ϖ, r, et R, et l'on calculera, avec ces élémens corrigés, $\cos(s) = \cos E \cos \ell'$: cette valeur de (s) sera exacte, à la correction ∂t près; on aura donc

$$(s) - D\partial t = s, \text{ ou } \partial t = \frac{(s) - s}{D},$$

de sorte qu'une seule observation suffira, pour corriger la longitude du lieu.

Quand on a comparé un grand nombre d'observations, on apercevra que les valeurs résultantes de x, y, etc. sont un peu différentes, et l'on verra aisément que cela vient des erreurs d'observation. On approchera de la vérité, en prenant un milieu de tous les résultats, ensorte que les corrections x, y, etc. et les erreurs d'observation soient aussi petites que possible, et que les dernières soient tant négatives que positives. Les bornes que je me suis prescrites, ne me permettent pas d'exposer les règles que l'analyse moderne a données pour cet effet. Du reste, on trouvera tous ces calculs expliqués par un grand nombre d'exemples, dans les *Nov. Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. XIV. Part. II. pag.* 335. *sqq.* Voyés aussi *Astr. Théor. et Prat. par M. Delambre, Tom. II. pag.* 419. *suiv.*

CHAPITRE VIII.

Éclipses des étoiles et des planètes par la lune ou par des planètes.

§. 274. Les occultations des étoiles par la lune et les planetes, ou d'une planète par une autre, sont des phénomènes de la même espèce que les éclipses solaires, et ils sont calculés suivant les mêmes règles. Il ne sera donc parlé ici que de ce qui les distingue des éclipses de soleil; et c'est principalement la grosseur, le lieu hors de l'écliptique, et le mouvement propre ou nul de l'astre éclipsé. Si une *étoile fixe* est *éclipsée par la lune*, tous les élémens qui se rapportent à la lune, sont les mêmes que les précédens; mais ceux du soleil, qui est remplacé par une étoile, éprouvent des modifications. Puisque le diamètre apparent et le mouvement propre des étoiles fixes sont nuls, il faut faire dans les formules précédentes, $r = 0$, $h = 0$, et $\eta = H$. Le commencement et la fin de l'éclipse générale, et apparente pour un lieu particulier, ou l'*immersion* et l'*émersion*, ont lieu dans l'instant où la distance géocentrique du centre de la lune à l'étoile est $= R + P$, ou la distance apparente $= R(1 + 3,664 . R \sin \theta . \sin 1'' + \text{cet.})$; et elles ne durent qu'un instant, de sorte qu'il n'y a point de différence entre l'éclipse partiale et totale.

Le calcul de la conjonction vraie n'a aucune difficulté, parceque la longitude de l'étoile est invariable durant l'éclipse. Ayant donc calculé pour cet instant, où le lieu A compte le tems T, la latitude, le mouvement horaire, et les autres élémens de la lune, soit (*Fig.* 78.) E le pole de l'écliptique ΥA, F l'étoile fixe, lL la vraie orbite de la lune, L le point de la conjonction $LA = b$ et $FA = \lambda$, les latitudes de la lune et de l'étoile, le

mouvement horaire de la lune sur l'orbite $lL = H$, et en latitude, $\lambda L = \beta$. En nommant ω l'inclinaison de l'orbite de la lune sur le petit cercle $l\lambda$, parallèle à l'écliptique, on aura $lL\lambda = 90° - \omega$, $\sin\omega = \frac{\beta}{H}$,

la plus courte distance $FM = m = FL\cos\omega = (b - \lambda)\cos\omega$,

et la distance du milieu à la conjonction, $LM = n = (b - \lambda)\sin\omega$.

On aura donc en secondes,

$$\text{le } \textit{tems du milieu} = T - \frac{3600\,(b-\lambda)\sin\omega}{H},$$

$$\text{le } \textit{tems de l'immersion} \text{ et de l'}\textit{émersion} =$$

$$T - \frac{3600}{H}\{(b-\lambda)\sin\omega \pm \sqrt{[(P+R)^2 - (b-\lambda)^2\cos^2\omega]}\},$$

$$\text{la } \textit{durée de l'occultation} = \frac{7200}{H}\sqrt{\{(P+R)^2 - (b-\lambda)^2\cos^2\omega\}}.$$

La situation des étoiles relativement à l'écliptique n'étant point déterminée, les limites de leurs éclipses ne peuvent pas être assignées, comme celles des éclipses solaires; mais on peut suivre l'ordre inverse, en déterminant la plus grande latitude, ou la zone qui renferme toutes les étoiles que la lune peut éclipser pour quelque lieu de la terre; et c'est à peu près le *Zodiaque*. En effet, il est clair que la latitude d'une étoile, éclipsée par la lune, ne peut pas excéder la somme de la plus grande latitude de la lune, de sa parallaxe sous l'équateur, et de son plus grand demi-diamètre: ce qui donne, pour limite des étoiles, la latitude de $5°17'34'' + 62' + 16'55'' = 6°36'30''$. En tirant sur un globe céleste une ligne qui passe par les lieux de la lune, que les éphémérides donnent pour tous les jours, et en promenant sur cette ligne le centre d'un cercle de carton, dont le rayon est le sinus de $P + R = \sin 1,273 . P$, le rayon du globe étant pris pour unité; ce carton couvrira toutes les étoiles qui seront éclipsées par la lune, et qu'on soumettra à un calcul rigoureux.

§. 275. Les formules que nous avons trouvées (§. 255. 256.) pour les lieux qui verront le commencement, la fin, et le milieu d'une éclipse, ont besoin ici d'une petite modification, parceque S (*Fig.* 69.) n'est pas le soleil, mais une étoile hors de l'écliptique: QdqD est donc la projection de la terre sur le grand cercle, dont le pole est l'étoile S; PS est le cercle horaire de l'étoile, Qdq est la direction d'occident en orient, suivant laquelle

la terre tourne autour de P qui est le pole homologue à la déclinaison de l'étoile. La longitude et la latitude de l'étoile, l, λ, ou son ascension droite et sa déclinaison, ϱ, δ, donnent l'angle de position $ASF = \varkappa$, et la direction du cercle de latitude SF (§. 25. V. VI.), qui tombe du côté occidental du cercle de déclinaison, si $\varkappa$ est positif, ce qui est le cas dans la *Fig.* 69. En faisant $\sin\omega = \frac{\beta}{H}$ (§. 274.), $FSG = \omega$, $SG = m = (b - \lambda)\cos\omega$, et ayant tiré par G la droite OH, perpendiculaire à SG, OH sera l'orbite relative de la lune; le lieu de la terre Q verra le premier l'immersion, D verra le dernier l'émersion, et γ verra la plus grande phase, ou la plus longue durée de l'occultation de l'étoile par la lune; si OH traverse la projection QdqD, g sera le lieu qui, dans le milieu de l'éclipse, verra le centre de la lune dans la direction de l'étoile. Maintenant on trouvera de la même manière (§. 255.), pour l'immersion et l'émersion,

$$\cos GSO = \cos GSH = \frac{GS}{SO} = \frac{m}{P+R}, \quad ASO = GSO + \varkappa + \omega, \quad ASH = GSH - \varkappa - \omega,$$

d'où l'on conclura les *latitudes* f, f' des lieux Q, D, au moyen des équations

$$\sin f = \cos\delta \cos ASO, \qquad \sin f' = \cos\delta \cos ASH,$$

et les angles SPQ, SPD, au moyen des équations

$$\text{tang } SPQ = -\frac{\text{tg } ASO}{\sin\delta}, \qquad \text{tang } SPD = -\frac{\text{tg } ASH}{\sin\delta}.$$

En nommant donc L la longitude du lieu A qui compte t et t' heures après midi, lorsque l'éclipse commence en O et finit en H, les angles horaires du soleil à l'occident du méridien de A seront $15t$ et $15t'$, ceux de l'étoile $15t + A - \varrho$ et $15t' + A' - \varrho$, A et A' étant les ascensions droites du soleil au commencement et à la fin de l'éclipse: ces derniers angles seront $15t - \varrho$ et $15t' - \varrho$, si t, t', signifient le tems sidéral. Soit Pq le méridien du lieu A, Pγ celui d'où l'on compte les longitudes: cela posé, on aura $\gamma Pq = L$, $qPS = 15t + A - \varrho$ ou $15t' + A' - \varrho$, par conséquent

$$\text{la } \textit{longitude} \text{ du lieu } Q = \gamma PQ = L - 15t - A + \varrho - SPQ,$$

$$\text{et la } \textit{longitude} \text{ du lieu } D = \gamma Pq + qPD = L - 15t' - A' + \varrho + SPD.$$

Le lieu Q verra le premier l'immersion au moment du lever de l'étoile, et le lieu D verra le dernier l'émersion au coucher de l'étoile.

Pour le lieu γ qui verra *la plus grande phase*, on a (§. 256.)

$$PS\gamma = \varkappa + \omega, \quad \sin f = \cos\delta \cos(\varkappa + \omega), \quad \text{tang } SP\gamma = -\frac{\text{tg}(\varkappa+\omega)}{\sin\delta},$$

et sa *longitude* $= L - 15\,t'' - A'' + \varrho \mp SP\gamma$;

A'' étant l'ascension droite du soleil dans le milieu de l'éclipse, et t'' le tems que le lieu A compte dans cet instant. On prendra le signe supérieur (—) ou inférieur (+), selon que SG tombe à l'occident ou à l'orient du cercle horaire SP: dans le premier cas le lieu γ verra le *milieu* au lever de l'étoile, et dans le second cas au coucher.

Si l'éclipse est *centrale*, m étant plus petit que P, on aura pour le lieu g qui verra l'occultation centrale au moment du milieu de l'éclipse générale (§. 256.),

$$\sin f = \frac{\sqrt{(P^2 - m^2)}}{P}\sin\delta + \frac{m}{P}\cos\delta\cos(\varkappa+\omega),$$

$$\text{tang } SPg = \frac{m\sin(\varkappa+\omega)}{\cos\delta\sqrt{(1^2 - m^2)} - m\sin\delta\cos(\varkappa+\omega)}, \quad \text{donc}$$

la longitude du lieu $g = L - 15\,t'' - A'' + \varrho \mp SPg$.

Les signes (—) et (+) se rapportent aux cas, où Sg est à l'occident ou à l'orient du cercle de déclinaison SP: dans le premier cas le lieu g verra l'occultation centrale *avant* la culmination de l'étoile, dans le second cas il la verra *après* la culmination.

§. 276. Le calcul des parallaxes donnera également l'occultation *apparente* pour un lieu donné de la terre, en mettant dans les formules précédentes δ à la place de D, et en faisant $p = 0$: on aura donc par le même procédé (§. 266.), la longitude et la latitude apparentes de la lune, $\mathbb{C}'$ et b'. Soit (*Fig.* 75.) L le lieu apparent de la lune, l le lieu vrai et apparent de l'étoile, sa longitude $= l$, sa latitude $= \lambda$; de sorte qu'on a $L\lambda = b' - \lambda$, $CD = \mathbb{C}' - l$, $l\lambda = (\mathbb{C}' - l)\cos\lambda$. On en conclura, pour chaque instant, la distance apparente du centre de la lune à l'étoile, $Ll = s$, par l'équation (§. 271.)

$$\cos s = \sin\lambda\sin b' + \cos\lambda\cos b'\cos(\mathbb{C}' - l),$$

$$\text{ou } s = \sqrt{\{(b'-\lambda)^2 + (\mathbb{C}'-l)^2\cos^2\lambda\}};$$

et le lieu donné verra l'immersion ou l'émersion, dans l'instant où

$$s = R(1 + 3{,}664\,.\,R\sin\theta\sin 1'' + \text{cet.}).$$

Le seul changement qu'il faut faire aux formules (§. 269.) qui ont servi à déterminer les points de la lune, où se fera l'immersion et l'émersion, c'est de mettre $b' - \lambda$ à la place de b', et de faire $r = 0$. Alors elles donneront la position de ces points relativement au diamètre vertical de la lune, et l'on connaîtra par ce moyen, les taches de la lune, qui sont le plus près de ces points; ce qui est surtout nécessaire, pour observer l'immersion.

§. 277. Les observations de l'éclipse d'une étoile, principalement celles de l'immersion, offrent un moyen plus exact que les éclipses solaires, de corriger la longitude du lieu et la théorie de la lune, parce qu'il est plus facile, de saisir le moment où l'étoile disparaît subitement, que celui où la lune touche le disque du soleil, son entrée se faisant très-lentement. Le calcul est le même, avec cette différence qu'il faut faire dans les formules (§. 271. *suiv.*) $h = 0$ et $r = 0$. En mesurant avec un micromètre la distance des deux astres, quand l'étoile est très-près de la lune, on peut multiplier les observations dans un seul lieu. Alors, le demi-diamètre de la lune étant aussi mesuré ou calculé, chaque observation donnera la distance apparente s de l'étoile au centre de la lune, et par conséquent une équation de la forme (A) (§. 271.). Cette méthode, étant étendue à de plus grandes distances, est le moyen ordinaire dont se servent les navigateurs, pour trouver la longitude.

§. 278. Dans les *éclipses d'une étoile par une planète*, P, R, H, β, se rapportent à la planète, H et β étant les mouvemens géocentriques, ensorte que H deviendra négatif, si la planète est rétrograde. On les conclura des mouvemens héliocentriques, tirés des tables, ou on les trouvera immédiatement, si l'on observe la planète au méridien avant et après l'occultation. Dans ce dernier cas il est plus commode, d'employer dans le calcul les mouvemens en ascension droite et en déclinaison. Mais ces phénomènes sont si rares, qu'il serait inutile de s'y arrêter plus longtems.

Dans les *éclipses d'une planète* par la lune ou par une autre planète, on employera les mêmes formules qui ont servi à calculer les éclipses solaires: au lieu de p et r on mettra la parallaxe et le demi-diamètre de la planète occultée, ou la plus éloignée. Le mouvement relatif de la lune ou de la

planète la plus proche, en longitude et en latitude, est la vitesse, avec laquelle elle approche de la planète plus éloignée suivant ces deux directions. Le premier est donc la différence des deux mouvemens géocentriques en longitude, si les deux planètes sont directes ou rétrogrades; c'est la somme, si l'une est directe et l'autre rétrograde. Le mouvement relatif en latitude est la différence ou la somme des deux mouvemens, selon qu'ils sont dirigés vers le même pole de l'écliptique, ou vers les poles opposés. On suppose immobile la planète dont le mouvement est le plus lent, en attribuant à l'autre le mouvement relatif. On peut tirer de ces observations les mêmes résultats, pour corriger les élémens des planètes et la longitude du lieu. Mais ces phénomènes sont extrèmement rares.

LIVRE VI.

DES PASSAGES DES PLANÈTES SUR LE DISQUE DU SOLEIL.

CHAPITRE. I.

Les Périodes des passages.

§. 279. Quoique les *Passages des planètes inférieures* soient des espèces d'éclipses de soleil, et par conséquent se calculent à peu près de la même manière, ils méritent, à cause de leur importance, une explication particulière. Ces phénomènes sont importans, tant par rapport aux élémens de ces planètes, qu'à l'égard de la théorie du système solaire entier. Ils sont, relativement aux planètes inférieures, ce que sont les oppositions des planètes supérieures, en fournissant le seul moyen, d'observer immédiatement la conjonction, et par conséquent une longitude héliocentrique. D'ailleurs, la planète étant nécessairement près de son noeud, les passages sont très-favorables, pour déterminer la position de son orbite relativement à l'écliptique. Kepler fut le premier qui s'aperçut de l'importance des passages. Il les calcula pour la première fois en 1629 sur ses propres tables, et il annonça pour 1631 des passages de *Vénus* et de *Mercure*, dont le dernier fut observé à Paris par Gassendi le 7 Novembre, huit jours avant la mort de Kepler. Les erreurs des tables Roudolphines de Kepler firent que le calcul ne lui indiqua pas

le passage de Vénus, qui eut lieu en 1639, et qui heureusement avait été prédit par les tables de Landsberg, beaucoup moins parfaites que celles de Kepler. Venus ayant une latitude australe assés considérable pendant son passage, les tables de Kepler, en donnant la latitude trop grande de 8′, firent passer la planète au dessous du soleil, tandis que les tables de Landsberg, dont l'erreur était de 16′ dans le sens opposé, la faisaient remonter sur le soleil. Horrockes, ayant calculé sur ces tables la conjonction de Vénus, trouva qu'il y aurait un passage; et ce hasard heureux occasionna la première observation de ce phénomène intéressant, faite par Horrockes et Crabtree le 4 Décembre 1639.

§. 280. Dans ce tems, et longtems après, on ne se doutait pas, qu'on pourrait retirer d'autre utilité de ces phénomènes, que de corriger les élémens des planètes inférieures. Halley fut le premier qui aperçût qu'on pouvait en faire un usage, très-important pour tout le système solaire. Le demi-diamètre de l'orbite de la terre servait de mesure dans toutes les recherches sur les distances des planètes, et toutes les distances étaient exprimées en parties de ce demi-diamètre. La troisième loi de Kepler donnait le rapport des distances des planètes au soleil, mais aucune de ces distances n'était connue en nombres absolus. Il suffisait donc de connaître une seule distance, et il était naturel de s'en tenir au demi-diamètre de l'orbite de la terre, qui devait être donné par rapport à une ligne moins longue, dont la grandeur pouvait se mesurer immédiatement. Le rayon de la terre était la mesure la plus favorable qu'on pût choisir, et le grand problème de l'astronomie était réduit à trouver le rapport des demi-diamètres de la terre et de son orbite, ou la *parallaxe du soleil.* Tel était l'état de l'astronomie, il y a à peu près 60 ans. Le système solaire, autant qu'il était connu alors, peut être regardé comme la carte d'un pays, dressée avec la plus grande précision, mais dont l'échelle était perdue. Il suffit de connaître la distance de deux lieux sur une pareille carte, pour déterminer les distances de tous les autres: et ces deux lieux sur la carte du système solaires sont le soleil et la terre, dont la distance est donnée par la parallaxe du soleil. Halley développa cette idée en 1691, et il prouva, que les passages de *Vénus*

étaient plus favorables que ceux de Mercure, pour déterminer la parallaxe du soleil, mais qu'il n'y en aurait pas avant l'an 1761: il calcula dix-sept passages de Vénus depuis 918 jusqu'à l'an 2117. La découverte parut si importante à ce grand astronome, qu'il adressa à la postérité la prière, de ne pas oublier que c'était un anglais qui eût eu le premier cette idée. Le passage de Vénus fut observé en 1761 et 1769, et ce phénomène n'aura pas lieu avant le 9 Décembre 1874. Les passages de *Mercure* sont beaucoup plus fréquens.

§. 281. Il est visible, que le calcul des passages doit être fondé sur les mêmes principes, que celui des éclipses de soleil. Mais comme il s'agit de déterminer, par le moyen des passages, un angle de 8″ à 9′ à un dixième d'une seconde près, la longitude des lieux doit être bien connue, et il faut porter plus de soin, que dans les éclipses, pour choisir d'avance les lieux les plus favorables pour ces observations. Comme les passages de Vénus ne reviennent ordinairement qu'au bout d'un siècle, il serait très-inutile, de soumettre chaque conjonction inférieure à un calcul préalable, pour voir s'il y aura un passage. Il vaut mieux chercher les périodes de ces phénomènes; et pour cet effet il est nécessaire, de déterminer exactement les *limites* des passages, c'est-à-dire la plus grande distance de la planète au noeud, à laquelle les passages peuvent arriver.

Il suit de ce qui précéde, que la plus grande distance géocentrique des centres du soleil et de la planète, qui puisse la faire paraître sur le disque du soleil, est (§. 246.) $P - p + R + r$, P, p, étant les parallaxes, et R, r, les demi-diamètres apparens de la planète et du soleil. Or le demi-diamètre de Vénus à la moyenne distance de la terre au soleil est $= 8'', 25$ (§. 153.), et la distance moyenne de Vénus au soleil (§. 120.) $= 0,723323$, celle de la terre étant prise pour unité; d'où il suit la distance moyenne de Vénus à la terre dans les conjonctions inférieures $= 0, 2766677$. Ainsi, les diamètres apparens étant en raison inverse des distances, on trouvera le demi-diamètre géocentrique de Vénus dans les passages R, au moyen de la proportion

$$0, 2766677 : 1 :: 8'', 25 : R, \text{ partant } R = 30''.$$

Il est vrai que les parallaxes P, p, ne sont connues que par les passages de Vénus: ainsi dans le premier calcul on doit négliger la petite quantité $P - p$. Maintenant on sait que p est à peu près $= 8'',5$: donc, les parallaxes étant également en raison inverse des distances, la proportion précédente donnera

$$P = 30'',5 \text{ et } P - p = 22''.$$

Au moyen des *maxima* et *minima* du demi-diamètre du soleil r, $16'\,18''$ et $15'\,45''$, on trouvera les limites géocentriques, $17'\,10''$ ou $16'\,37''$: le milieu $= 16'\,54''$ est la plus grande *latitude géocentrique*, dans laquelle il peut y avoir un passage de Venus.

Comme les tables donnent les lieux héliocentriques, il sera plus commode d'y adapter ce calcul; ce qui se réduit à chercher la latitude héliocentrique qui répond à la géocentrique de $16'\,54'$. Soient (*Fig.* 79.) S, T, V, les centres du soleil, de la terre, et de la planète dans la conjonction inférieure; ayant abaissé sur l'écliptique la perpendiculaire VE, SET sera une ligne droite, et l'on aura $ST = 1$, $SE = 0,7233323$; $TE = 0,2766677$, et $VTE = 16'\,54''$. Il en résulte $VE = TE \text{ tang } T = SE \text{ tang } S$, donc $\text{tang } S = \frac{TE}{SE} \text{ tang } 16'\,54''$, et la latitude héliocentrique $S = 6'\,28''$. C'est en même tems la distance héliocentrique des centres de la terre et de Vénus, à laquelle le contact extérieur des bords du soleil et de Vénus peut être vu de la terre, ce qui est le commencement et la fin du passage général. Pour en déduire la distance héliocentrique de Vénus au noeud $= \alpha$, qui est la limite des passages, on a $\sin \alpha = \frac{\sin 6'\,28''}{\sin \nu}$, ν étant l'inclinaison de l'orbite de Vénus $= 3°\,23'\,35''$ (§. 143.), d'où il résulte

la *limite héliocentrique* des passages de *Vénus*, $\alpha = 1°\,49'\,17''$.

§. 282. Pour en conclure les *périodes* des passages, on peut se tenir aux mouvemens moyens de la terre et de Vénus. La durée d'une révolution synodique de Vénus est (§. 99.) 583 jours 22 h. 6 m. 55,9 s. ce qui fait une année tropique plus 218 j. 16 h. 18 m. 4 s. et durant ce tems la terre décrit un arc de $215°\,32'\,27''$, dont le point de chaque conjonction inférieure est plus avancé que celui de la précédente. Les noeuds de Vénus ont un mouvement rétrograde relativement aux étoiles fixes de $19''$ par an (§. 143.), et par con-

séquent un mouvement direct par rapport aux points équinoxiaux de 31″, ce qui fait 50″ dans une révolution synodique: d'où il suit, que chaque conjonction inférieure est plus éloignée du noeud que la précédente, d'un arc de 215° 31′ 37″. En partant d'une conjonction inférieure, dont la distance au noeud est connue, et en y ajoutant 215° 31′ 37″, on aura la distance au noeud dans la conjonction suivante, et ainsi de suite: de cette manière on trouvera les conjonctions dont la distance au noeud est moindre que la limite $\alpha =$ 1° 49′ 17″. Comme les passages peuvent arriver avant ou après le noeud ascendant ou descendant, les conjonctions où il peut y avoir passage, sont celles dont la distance au noeud ascendant est entre 258° 11′ et 1° 49, ou entre 178° 11′ et 181° 49′.

Il y a en général *quatre* cas, où les passages peuvent avoir lieu: 1) avant le ☊, 2) après le ☊, 3) avant le ☋, 4) après le ☋: désignons-les par A, B, C, D. La distance de A et B sera = 0 ou = 3° 38′, selon que A et B arrivent dans le noeud ou dans les limites. La plus petite distance de A et C est celle du ☊ à la limite de C = 178° 11′, et la plus grande est celle de la limite de A au ☋ = 181° 49′. La plus petite distance de A et D, ou du ☊ au ☋, est = 180°, la plus grande est la distance des limites de A et de D = 183° 38′. La plus petite distance de A au passage prochain en A est celle du ☊ à la limite = 358° 11′, la plus grande est celle de la limite au ☊ = 1° 49′. Si l'on part de B, au lieu de A, il en naîtra encore quelques autres distances. La plus petite distance de B à C est celle d'une limite à l'autre = 176° 22′, et la plus grande, du ☊ au ☋ = 180°. La plus petite distance de B à A est celle d'une limite à l'autre = 356° 22′, et la plus grande = 360°. Les périodes des passages seront donc déterminées par ces distances de l'un à l'autre:

1. de 356° 22′ à 3° 38′; 2. de 176° 22′ à 183° 38′.

On peut partir de tel noeud qu'on veut, et il est aisé de juger, si le passage prochain aura lieu auprès du même noeud, ou du noeud opposé, la condition 1. se rapportant au même noeud, et 2. aux noeuds opposés.

En ajoutant 215° 31′ 37″ pour chaque conjonction, et en retranchant de la somme les revolutions entières de 360°, on trouvera qu'aucune dis-

tance ne tombera entre les limites 1. qu'après 5, après 147, et après 152 conjonctions, etc. ni entre les limites 2. qu'après 71, après 76, et après 81 conjonctions. En effêt, dans 5 révolutions synodiques ou 7 ans 362 j. 21 h. 54 m. la distance au noeud α augmente de cinq fois 215° 31′ 37″ ou de 357° 38′ 5″, ce qui donne une période de B à A, ou de D à C. On trouvera de la même manière les autres périodes que présente le tableau suivant.

Nombre des révolut. synod.	Tems écoulé Ans, jours, heures	Accroissemet de α	Périodes
5	7. 362. 22.	357°. 38′.	de B à A, ou de D à C.
71	113. 185. 11.	182. 25.	de A à D, ou de C à B.
76	121. 183. 18.	180. 0.	de A ou B à C ou D.
81	129. 181. 10.	177. 41.	de B à C, ou de D à A.
147	235. 3. 11.	2. 26.	de A à B, ou de C à D.
152	243. 1. 2.	± quelques minutes	de A à A ou B, ou de B à B ou A.

Il faut cependant observer: 1) que ces périodes ne déterminent que la *possibilité* d'un passage, et que pour qu'un passage ait lieu en effêt, il est nécessaire que le passage précédent soit arrivé, tantôt près du noeud, tantôt près des limites; 2) qu'il est même impossible que les passages arrivent au bout de chaque période, parcequ'une période se rapporte au passage A, une autre à B; 3) que, comme dans tout ce calcul on a employé les mouvemens moyens, les passages pourront n'avoir pas lieu à cause du mouvement vrai, et réciproquement.

Il résulte de ce qui précède, les *périodes* suivantes *des passages de Vénus* en nombres ronds:

1) 8 ans, moins 2 jours et demi; 2) 113 ans et demi, plus 3 jours;
3) 121 ans et demi, plus un jour; 4) 129 ans et demi, moins un jour;
5) 235 ans, plus 3 jours et demi; 6) 243 ans, plus un jour.

Il est aisé de voir, que les deux premières périodes suffisent, pour en composer, par addition, tout le reste et plusieurs autres périodes. En ajoutant

par ex. 1) à 6), on aura une période de 251 ans, c'est-à-dire de B à A, ou de D à C. Les périodes de 121 ans et demi, et de 243 ans, sont les plus sures, parceque la distance au noeud est nulle.

Comme le noeud ascendant de Vénus est actuellement dans 2 signes et $14\frac{3}{4}$ degrés, et que le mouvement de ses noeuds est très-lent, la longitude géocentrique du soleil sera constamment à peu près $8^s\,15°$ ou $2^s\,15°$, selon que le passage a lieu dans le noeud ascendant ou descendant: les passages arriveront donc à peu près quinze jours avant le *solstice* d'hiver ou d'été.

§. 283. Les *limites* et *périodes* des passages de *Mercure* se calculent de la même manière. Comme son diamètre apparent est très-petit, et que sa parallaxe est à peu près égale à celle du soleil, on peut prendre pour limite géocentrique le demi-diamètre moyen du soleil $= 16'$. En supposant la distance moyenne de Mercure au soleil $= 0,3871$ (§. 120.), on trouvera la latitude héliocentrique $= 25'\,20''$ (§. 281.), d'où l'on conclura, au moyen de l'inclinaison de 7°, la distance héliocentrique au noeud, $\alpha = 3°\,28'$, ce qui est la *limite* des passages.

Dans une révolution synodique de Mercure de 115 jours 21 h. 3 m. 34,2 s. (§. 99.) le soleil parcourt $114°\,12'\,51''$ relativement aux points équinoxiaux, et $114°\,12'\,37''$ par rapport aux noeuds de Mercure, qui avancent dans ce tems de 14″ (§. 143.). Mais le mouvement de Mercure est trop inégal, pour qu'on puisse se contenter du mouvement moyen. En ajoutant ensemble les plus grandes équations du centre de Mercure et du soleil (§. 140.), on verra que dans l'instant de la conjonction moyenne, la vraie distance de Mercure au soleil peut être $25°\,35'\,23''$. Mercure emploie, d'après le moyen mouvement synodique, 8 jours 5 h. 43 m. à parcourir cet arc: la vraie conjonction peut donc arriver 8 j. 5 h. 43 m. avant ou après la moyenne. Comme le soleil décrit dans ce tems un arc de $8°\,7'\,12''$, et que dans l'instant de la conjonction moyenne, son lieu vrai est supposé plus avancé que le lieu moyen, de sa plus grande équation du centre $= 1°\,55'\,36'',5$; il en résulte, que le lieu vrai de la conjonction peut différer de 10°3′ du lieu moyen. Il faut donc ajouter cet arc aux limites, si l'on emploie les mouvemens moyens: ce qui donne $13°\,31'$ pour la plus grande distance du noeud. En y ajoutant

*

la limite de 3° 28′, dont la conjonction précédente peut avoir été éloignée du noeud, la plus grande distance de deux passages peut être = 17°: d'où résultent ces limites.

1) de A à B, 0 à 17°; 2) de A à C, 163° à 180°;

3) de A à D, 180° à 197°; 4) de B à A, 343° à 360°;

ou généralement

1) pour deux passages dans le même noeud, 343° à 17°,

2) dans les noeuds opposés, 163° à 197°.

En ajoutant 114° 12′ 37″, pour chaque révolution synodique de 115 jours 21 h. 3, 6 m. on trouvera que 8 révolutions, ou deux ans 196 j. 12 h. 49 m. donnent la distance $\alpha = 193°41$, ce qui est renfermé entre les limites 2): 19 révolutions, ou 6 ans 10 j. 5 h. 11 m. donneront $\alpha = 10°$, ce qui entre dans les limites 1). Ainsi on trouvera pour la première limite, les *périodes* qui ramènent les passages de Mercure, en nombres ronds, 6, 7, et 13 ans, et pour la seconde période $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$ ans; dont on peut composer, par addition, d'autres périodes: par ex. $7+13=20$ ans, $6+7+13=26$, $26+7+13=46$, cinq fois $46+26+7=263$ ans; cette dernière est la plus exacte. Il suit de la longitude actuelle du noeud ascendant de Mercure, 1^s 16°, que les passages dans le ☊ ne peuvent arriver qu'au commencement de *Novembre*, et ceux dans le ☋ au commencement de *Mai*. Dans la dernière saison la terre est près de l'aphélie de Mercure, qui est dans 8^s 14°: elle est moins éloignée de Mercure, et la latitude géocentrique de cette planète est plus grande, au mois de Mai qu'au Novembre, sa distance au noeud étant supposée la même. Mercure pourra donc paraître sur le disque solaire au mois de Novembre, et passer au-dessus ou au-dessous au mois de Mai, quoique la latitude héliocentrique soit la même: c'est pour cette raison, que les passages de Mercure sont presque trois fois plus fréquens au mois de Novembre qu'au mois de Mai.

CHAPITRE II.

Calcul des passages pour les différens lieux de la terre.

§. 284. Le calcul pour la terre en général, qui a été l'objet de la première partie des éclipses de soleil, est la partie la moins importante des passages; mais ce calcul est nécessaire, parcequ'il sert de base à celui des parallaxes. On peut employer dans cette première partie du calcul, qui ne diffère pas de celui des éclipses, les lieux et les mouvemens héliocentriques, qu'on a tirés des tables. Les longitudes et les latitudes héliocentriques de Vénus, qui répondent à deux époques peu éloignées de la conjonction, donnent le mouvement héliocentrique en longitude et en latitude, G et β; or Vénus et la terre tournant autour du soleil dans le même sens, le mouvement relatif de Vénus en longitude sera la différence entre son mouvement et celui de la terre. En nommant donc h le vrai mouvement horaire du soleil, le mouvement relatif de Vénus sur l'écliptique sera (*Fig.* 67.) $\mathbb{C}m = G - h$, et le mouvement horaire en latitude $lm = \beta$, $\odot$ et $\mathbb{C}$ étant les centres de la terre et de Vénus dans la conjonction, et DF l'orbite relative de Vénus, vue du soleil. En nommant l'inclinaison de cette orbite sur l'écliptique, $l\mathbb{C}m = A\odot\mathbb{C} = \omega$, on aura

$$\text{tang}\,\omega = \frac{\beta}{G-h};$$

et le mouvement relatif sur l'orbite, $\mathbb{C}l$ ou $\eta = \frac{\beta}{\sin\omega} = \frac{G-h}{\cos\omega}$.

Soit donc $\odot\mathbb{C} = b$ la latitude héliocentrique de Vénus dans l'instant de la conjonction, et qu'on fasse les angles $\mathbb{C}\odot C = 90°$, et $\odot\mathbb{C}D = 90° - \omega$: alors CE sera l'écliptique, DF l'orbite relative de Vénus, et D, F, seront les points de l'immersion et de l'émersion, si $\odot D$ et $\odot F$ sont les distances hé-

liocentriques des centres de Vénus et de la terre, au commencement et à la fin du passage. On a vu (§. 281.) que la distance géocentrique dans ces instans est (*Fig.* 79.) $VTE = R + r + P - p$: en nommant donc les rayons vecteurs de la terre et de Vénus, $ST = V$, $SV = v$, la distance accourcie SE ne différera pas sensiblement de v, parceque la planète est près de son noeud: on aura donc $VE = v \tang VSE = (V - v) \tang VTE$, et parceque ces angles ne sont pas plus grands que 16′,

$$VSE = \varrho = \frac{V - v}{v}(R + r + P - p),$$

$R + P - p$ étant à peu près 52″ (§. 281.). En faisant donc, sur la même échelle sur laquelle on a fait (*Fig.* 67.) $\odot C = b$, $\odot D = \odot F = \frac{V - v}{v}(r + 52'')$, D et F seront les points où le passage commence et finit. On trouvera les tems qui répondent à ces points, en divisant l'orbite relative de Vénus en heures et minutes, au moyen du mouvement horaire η, ou en se servant du calcul qui a été exposé dans le *Livre* précédent. On aura donc

$$AC = n = b \sin \omega, \quad A\odot = m = b \cos \omega, \quad AD = AF = V(\varrho^2 - m^2).$$

La plus courte distance héliocentrique m sera convertie en distance géocentrique μ, par le moyen de l'équation $\mu = \frac{m v}{V - v}$. La latitude géocentrique dans la conjonction est $b' = \frac{b v}{V - v}$, donc $\frac{\mu}{b'} = \frac{m}{b} = \cos \omega$: d'où il suit que l'angle que fait l'orbite géocentrique avec l'écliptique, est le même que l'angle ω. En faisant donc $C\odot A = 90° - \omega$, et $\odot A = \mu$, et tirant par A la perpendiculaire DAF à $\odot A$, DAF sera l'orbite relative de Vénus, vue de la terre. On prendra sur la même échelle, $\odot D = \odot F = R + r + 22''$, et l'on marquera en F, D, A, les tems du commencement, de la fin, et du milieu, qu'on a déjà calculés pour le passage en général; ce qui suffit, pour diviser l'orbite relative en heures et minutes. Il est aisé de donner à l'orbite la position qui lui convient, selon que la conjonction arrive avant ou après le noeud ascendant ou descendant. Au reste il est visible que, dans tous les cas, le mouvement géocentrique et relatif de Vénus est dirigé *d'orient en occident*, et que par conséquent, *l'immersion se fait sur le bord oriental du soleil, et l'émersion sur le bord occidental*, parceque les planètes sont *rétrogrades* dans les conjonctions inférieures.

§. 285. Pour déterminer la parallaxe du soleil, ce qui est le résultat le plus important des passages, il est absolument nécessaire de savoir, de quelle manière ces phénomènes seront vus de chaque lieu de la terre, pour en choisir ceux qui sont le plus favorablement situés. La méthode suivante, fondée sur la théorie des projections, est très-commode pour cet effet.

Soit (*Fig.* 80.) TAF la terre, E son centre, t un point de sa surface, A le lieu qui a le soleil S au zénit, TF son horizon, Vénus en V, VtLf un plan perpendiculaire à SE et parallèle à TF: cela posé, VES sera la distance géocentrique des centres, VtS $= \sigma$ la distance apparente ou parallactique pour le lieu t. Si la parallaxe du soleil était nulle, cet astre serait vu du lieu t suivant la ligne $t\lambda$ parallèle à ES, et Vénus suivant tV. Mais en attribuant à Vénus la parallaxe relative P$-p$ au lieu de P, il faut regarder la parallaxe du soleil comme nulle, et par conséquent supposer V$t\lambda = \sigma$. Comme ces angles, durant le passage, ne sont pas plus grands que 16′, leur rapport ne différera pas sensiblement de celui de leurs sinus, $\frac{V\lambda}{Vt}$, c'est-à-dire, les distances apparentes des centres σ seront comme les lignes Vλ, parceque la distance de Vénus à la terre, Vt, peut être regardée comme constante. En projettant donc chaque lieu de la terre t en λ, $t\lambda$ étant perpendiculaire à VL et parallèle à ES, Vλ représentera la distance apparente des centres pour ce lieu, si P$-p$ est substitué à P; il faut maintenant déterminer l'unité de ces quantités. La projection du centre de la terre et du lieu A sera L, et en abaissant sur ES la perpendiculaire $t\tau$, on aura Lλ = $t\tau$ = Et sin tES; et pour la projection f du lieu F on aura de même Lf = EF sin FES = EF. En supposant Vénus en v, la distance des centres, vue du lieu F, sera fv: il verra donc l'occultation centrale, si fv est nul; et comme il est le premier ou le dernier de tous les lieux de la terre, la distance géocentrique est dans le même instant du commencement ou de la fin du passage = P$-p$ (§. 281.). Or, Vénus étant en f, la distance géocentrique est représentée par Lf, d'où il suit que Lf ou le rayon de la projection de la terre EF = P$-p$. Cela posé, on aura la proportion, EF est à Lλ comme P$-p$ est à la distance des centres, vue du lieu t, et la projection λ de chaque lieu t sera éloignée du centre de la projection L, de la quan-

tité $t\tau = Et \sin tES = (P - p) \sin tES$, ce qui est conforme aux règles de la projection ortographique. En traçant donc l'orbite relative et géocentrique de Vénus (§. 284.) sur une échelle quelconque, et en faisant sur la même échelle, le rayon de la terre $= P - p$, la projection ortographique des lieux de la terre donnera exactement, sur cette échelle, la distance apparente des centres pour ces lieux, $V\lambda$. Il est visible, qu'il faut employer dans cette construction les angles géocentriques, en multipliant tous les angles héliocentriques, trouvés précédemment, par $\frac{v}{V-v}$ (§. 284.).

§. 286. Soit (*Fig.* 81.) SF perpendiculaire à l'écliptique EC, $FSG = \omega$ (§. 284.), qu'on prenne sur une échelle quelconque, $SF = \frac{v}{V-v} b$, $SG = \mu = \frac{v}{V-v} m$ (§. 284.), $SA = SB = P - p$, $SE = SC = SH = r$, et qu'on mène par F et G l'orbite relative VN d'orient en occident: cela posé, le mouvement horaire $\frac{v}{V-v} \eta$ servira à diviser l'orbite VN en heures et minutes, en marquant en F le tems de la conjonction. Au moment ou Vénus est en H, la distance des centres, vue de S, c'est-à-dire du centre de la terre ou du lieu qui a le soleil au zénit, sera $SH = r$, donc le lieu S verra le centre de Vénus sur le bord du soleil. Ayant mené la droite HDSd, la distance apparente des centres sera pour le lieu D, $HD = r - (P - p)$, et pour le lieu d, $Hd = r + (P - p)$ (§. 285.). Si le rayon du cercle SH est $= r + R$ ou $r - R$, le lieu S verra, lorsque Vénus est en H, le contact extérieur ou intérieur: le lieu D verra Vénus avancée sur le disque solaire de $P - p$, et d la verra éloignée du bord du soleil de $P - p$: le lieu D aura donc déjà vu l'immersion, mais d ne la verra pas encore. Comme il en est de même de l'émersion, cela fait connaître les quatre points importans de la terre, savoir les lieux qui verront *le premier* et *le dernier l'immersion*, et ceux qui verront *le premier et le dernier l'émersion*. Supposons qu'on ait décrit du centre S et des rayons $SV = r + P - p$, $SI = r - (P - p)$, des cercles qui coupent l'orbite relative en V, N, et I, L, et que les rayons SV, SN, SI, SL, rencontrent la projection de la terre en Aa, Mm, Bb, Rr: alors A, b, r, M, seront ces quatre endroits. En effet, on a pour tous les quatre, les distances apparentes des centres,

$$AV = SV - (P - p) = r, \quad bI = SI + (P - p) = r,$$
$$rL = SL + (P - p) = r, \quad MN = SN - (P - p) = r.$$

Mais si l'on prend au delà de V ou N un point v ou n sur l'orbite, la plus courte distance apparente des centres pour la terre entière sera vu ou nv, et l'un et l'autre est plus grand que $AV = MN = r$: Vénus, étant en v ou n, ne sera donc vu sur le disque solaire d'aucun lieu de la terre, et A, M, sont les lieux qui verront l'immersion du centre de Vénus avant tous les autres lieux, et l'émersion après tous les autres: ce sera le contact extérieur ou intérieur, si $SV = r + P - p \pm R$. En prenant sur l'orbite un point F entre I et L, SF sera plus petit que $SI = r - (P - p)$, donc la plus grande distance des centres sur toute la terre, $fF = SF + (P - p)$, sera moindre que r; d'où il suit que tous les lieux de la terre verront Vénus sur le soleil; b sera donc le lieu qui verra le dernier l'entrée, et r celui qui verra le premier la sortie. L'entrée et la sortie seront donc vues sur la terre entière, durant tout le tems que Vénus emploie à parcourir les segmens VI et LN.

Il est vrai que les points A, b, et M, r, ne sont pas diamétralement opposés; mais comme, dans ce calcul général, on ne demande pas une précision parfaite, il est permis de substituer à b et r les points a et m, qui sont diamétralement opposés à A et M. L'erreur qu'on commettra, sera l'angle aSb ou mSr: elle sera donc diminuée de la moitié, si l'on prend les points du milieu D et d au lieu de A et b, et pour la sortie Q et q au lieu de M et r. Cette substitution sera d'une grande utilité dans la suite, parcequ'il est nécessaire de connaître les points de la terre qui se trouvent sur la droite qui joint les centres de la terre et de Vénus, pendant l'entrée et la sortie pour la terre entière, ou ce qui revient au même, pendant que Vénus décrit les parties VI et LN de son orbite. Le calcul sera donc singulièrement simplifié, en substituant à tous ces points le lieu D pour l'entrée, et Q pour la sortie. Mais il faut avant tout voir, à combien peut monter cette erreur, c'est-à-dire l'angle $bSd = BSD = HSI$.

En faisant pour abréger, $HSI = \psi$, $SI = r - (P - p) = s$, on aura $\cos HSG = \frac{SG}{SH} = \frac{\mu}{r}$, et $\cos ISG = \frac{\mu}{s}$, donc

$$\sin\psi = \sin(\mathrm{HSG} - \mathrm{ISG}) = \frac{\mu}{rs}\{\sqrt{(r^2-\mu^2)} - \sqrt{(s^2-\mu^2)}\}.$$

Cette valeur est nulle, si μ est nul, et elle croît avec μ, mais seulement jusqu'à une certaine limite, parceque ψ devient imaginaire, lorsque μ est plus grand que s. L'angle ψ sera donc un *maximum*, en même tems que son sinus, parceque ψ est toujours moindre que 90°. En différentiant l'équation précédente relativement à ψ et μ, on aura pour le *maximum* l'équation

$$(r^2-2\mu^2)\sqrt{(s^2-\mu^2)} = (s^2-2\mu^2)\sqrt{(r^2-\mu^2)},$$

dont le carré donnera

$$\mu^2(r^4-s^4) = r^2s^2(r^2-s^2), \text{ ou } \mu^2 = \frac{r^2s^2}{r^2+s^2}.$$

En faisant $r^2+s^2 = u^2$, on aura

$$\mu = \frac{rs}{u},\ \sqrt{(r^2-\mu^2)} = \frac{r^2}{u},\ \sqrt{(s^2-\mu^2)} = \frac{s^2}{u}, \text{ et } \sin\psi = \frac{r^2-s^2}{r^2+s^2}.$$

En supposant $r = 16'$, $\mathrm{P}-p = 22''$, il viendra

$$s = 938'',\ \mu = 11'\,11'', \text{ et } \psi = 1°\,19'\,40''.$$

La plus grande erreur qu'on puisse commettre, est donc $1°\,19'\,40''$, mais le plus souvent elle sera beaucoup moins considérable.

§. 287. La position du premier lieu D d'où l'on verra l'entrée, et du dernier Q d'où l'on verra la sortie, est donnée par le point S qui, au moment de l'entrée ou de la sortie, a le soleil au zénit (§. 285.). Soit (*Fig.* 69.) QDqd l'hémisphère illuminé de la terre, P le pole boréal ou austral, selon que le passage de Vénus arrive au moins de Juin ou de Décembre, S le lieu qui a le soleil au zénit, au moment de l'entrée, PSa son méridien, et nommons D, δ, les déclinaisons du soleil et de Vénus, qui sont nécessairement du même côté de l'équateur. Si δ est plus grand que D, sa latitude est de même nature que D, et l'orbite OH tombera du côté de P: si c'est au mois de Juin, la latitude boréale du lieu S sera $=$D. Or O étant le côté occidental, H le côté oriental, de manière que la terre tourne sur son axe dans le sens QSD, H sera le point d'entrée, et O celui de sortie (§. 284.). Pour tracer l'orbite relative, on calculera l'angle de position ASF $= x$ (§. 255.), le cercle de latitude SF s'inclinant vers l'occident, parcequ'au commencement de Juin le soleil est dans les signes ascendans; dans les passages du mois

de Décembre ce sera le contraire. Si la conjonction arrive *après* le passage par le noeud, la perpendiculaire sur l'orbite, SG, tombera du côté de SF d'où l'on voit arriver Vénus, c'est-à-dire vers l'*orient*; si elle arrive *avant* le noeud, SG tombera vers l'*occident* de SF, comme dans la *figure*, où la latitude est supposée boréale, et par conséquent la conjonction avant le noeud descendant, où arrivent les passages du mois de Juin (§. 282.). En faisant donc $FSG = \omega$, $SB = SQ = P - p$, $SG = \mu = \frac{v\,b\cos\omega}{V - v}$ (§. 284.), et en tirant par G une perpendiculaire sur SG, elle représentera l'orbite relative, vue de la terre, HGO.

Soient t et t' les instans de l'entrée H et de la sortie O, calculés pour le méridien de Paris dont la longitude $= L$: la latitude du lieu S sera $= D$, et la longitude $= L - 15\,t$, pour l'entrée, et l'on a $ASG = \varkappa + \omega$, $\cos GSH = \cos GSO = \frac{\mu}{SH}$, la distance géocentrique des centres SH étant $= r$, ou $r + P - p$, ou $r + P - p \pm R$, selon qu'il s'agit de l'entrée et de la sortie du centre de Vénus, vue du centre de la terre ou de la terre en général, du contact extérieur ou intérieur. En nommant donc f et l la latitude et la longitude du lieu D qui verra le premier l'entrée, on aura (§. 255.)

$$ASH = GSH - ASG,\quad \sin f = \cos PD = \cos D\cos ASH,$$

$$\text{tang}\,SPD = -\frac{\text{tg}\,ASH}{\sin D},\quad \text{et}\quad l = L - 15\,t + SPD.$$

La latitude f' et la longitude l' du lieu Q qui verra le dernier la sortie, se calculera de même au moyen des équations,

$$ASO = GSO + \varkappa + \omega,\quad \sin f' = \cos D'\cos ASO,$$

$$\text{tang}\,SPQ = -\frac{\text{tg}\,ASO}{\sin D'},\quad \text{et}\quad l' = L - 15\,t' - SPQ,$$

D et D′ étant les déclinaisons du soleil au moment de l'entrée et de la sortie.

Maintenant on connaît aussi les lieux d et q, diamétralement opposés à D et Q, d étant le dernier de tous les points de la terre d'où l'on verra l'entrée, et q le premier qui verra la sortie: leurs latitudes sont $-f$ et $-f'$, leurs longitudes $l + 180°$ et $l' + 180°$.

Le soleil répondant perpendiculairement sur le point S, les lieux D, Q, d, q, se trouveront dans la limite de l'hémisphère illuminé, ils auront donc le soleil à l'horizon. Or la terre tournant autour du pole P de Q en

D, et de *d* en *q*, les lieux D, *q*, sortiront de l'hémisphère éclairé, et Q, *d*, y entreront: d'où il suit, que D verra *le premier l'entrée au coucher du soleil*, *d* verra *le dernier l'entrée au lever du soleil*, *q* verra *le premier la sortie au coucher du soleil*, et Q verra *le dernier la sortie au lever du soleil*.

§. 288. Il est visible, que tous les lieux, situés dans le demi-cercle *aq*DB, auront le soleil couchant dans cet instant, et que ceux dans B*Qda* verront le soleil lever; ces deux demi-cercles formant un grand cercle DQ*dq*D dont le pole est S. Si donc on élève un globe terrestre de manière que S se trouve dans le zénit, DQ*dq* sera l'horizon du globe. Tous les lieux dans la moitié supérieure du globe verront l'entrée ou la sortie, selon que le lieu S a été calculé pour l'une ou pour l'autre, c'est-à-dire, selon que sa latitude et longitude est D et L−15*t* ou D′ et L−15*t*′. Exactement parlant, ces lieux ont le soleil levé au moment de l'entrée ou de la sortie, quoiqu'à cause des parallaxes, ils ne verront pas Vénus sur le soleil, s'ils n'approchent pas assés de HO, pour que la distance de leur projection devienne moindre que SH, ce qui est principalement le cas des lieux *d*, *a*, *q*, les plus éloignés de HO. En effet, au commencement de l'entrée il n'y a que le lieu D qui puisse la voir, et les lieux auprès de *a* et *q* auront le soleil couchant, avant qu'ils se soient assés rapprochés de HO, pour voir l'entrée. Mais comme le point H représente ici tout le segment d'entrée VI (*Fig.* 81.), et que la distance de I à tous les points de la terre est moindre que SH, à cause de SI$\doteq r-(P-p)\doteq$ SH − S*b*, donc *b*I$\doteq$SH (§. 286.), on peut dire que tous ces lieux verront l'entrée, en regardant VI comme un point; mais cela n'est exact, que tant qu'on tient compte seulement de la rotation de la terre, en faisant abstraction des parallaxes. Le lieu S étant donc déterminé pour l'entrée, les lieux dans la moitié orientale de l'horizon *q*DB, ayant le soleil couchant, ne verront rien du passage que l'entrée; tandis que ceux dans la partie occidentale B*Qda* verront le passage entier, parcequ'ils ont le soleil levant. Si S est le point qu'on a calculé pour la sortie, les lieux B*Qda* ne verront que la sortie, parce qu'un moment auparavant le soleil ne s'était pas levé; tandis que les lieux *aq*DB ont vu le passage entier, parceque le soleil se couche au moment où tout est fini. Les lieux qui sont au dessus de l'horizon DQ*dq*, verront le

passage entier ou en partie, à mesure qu'ils sont plus ou moins éloignés du cercle qui forme l'horizon oriental Dq au moment de l'entrée, ou l'horizon occidental Qd au moment de la sortie. Tout cela n'est vrai qu'à peu près, et sujet à quelques réstrictions. Nous avons déjà observé, que le point S est supposé le même pour toute l'entrée ou la sortie, au lieu qu'effectivement, pendant l'entrée de V en I (*Fig.* 81.), ou la sortie de L en N, plusieurs lieux viennent occuper successivement le zénit et l'horizon du globe: on a donc fait abstraction de l'effet des parallaxes, VI, LN.

D'un autre côté on a supposé que SD tombe à l'orient de SB, ce qui est ordinairement le cas. Cependant le contraire arrivera, si GSH est plus petit que GSA: alors D verra *le premier l'entrée au lever du soleil.* Pour que cela arrive, il faut que GSH soit moindre que $\varkappa + \omega$: or les plus grandes valeurs de ces angles sont $\varkappa = 23° 28'$, le soleil étant dans l'équateur, et $\omega = 9°$; il faut donc que GSH soit plus petit que 32°, ou $\cos GSH > \cos 32°$, donc $\frac{\mu}{r} > \cos 32°$, et $\mu > 13' 22''$. Mais comme dans les passages de Vénus, le soleil n'est éloigné du solstice que de 15°, $\varkappa$ sera environ 7°, $\varkappa + \omega$ tout au plus 16°: il faut donc que μ soit plus grand que $r \cos 16°$, ou $\mu > 15' 9''$, de manière que Vénus décrira une très-petite corde sur le soleil.

Nous avons dit que les lieux BDqa qui ont le soleil couchant au moment de l'entrée, ne verront que cela. Cependant, s'ils sont près de B ou de P, leur arc diurne peut être si grand, qu'ils s'élèvent entre B et Q au dessus de l'hémisphère illuminé durant le passage; de manière qu'ils verront aussi la sortie. Il en est de même des lieux BQd qui voient le soleil lever au moment de la sortie: ils peuvent avoir vu l'entrée avant le coucher du soleil, si leur arc diurne est assés grand. Quant au point B et tous les lieux entre B et P, le soleil ne s'y couche pas du tout.

§. 289. Ce qui précède, suffit pour déterminer toutes les circonstances d'un passage pour les différens pays de la terre. La *fig.* 82. représente les deux hémisphères de la terre, P étant le pole boréal, p le pole austral, et AQR l'équateur d'occident en orient. Après avoir déterminé les lieux E et I qui auront le soleil au zénit, dans les instans de l'entrée et de la sortie générale (§. 287.), l'on décrira les grands cercles BCDDFB et HCGGFH dont

les poles sont E et I, et qui se sont trouvés dans l'horizon du globe (§. 288.); enfin on marquera les points C et F (B et *a* dans la *Fig.* 69.) qui séparent les parties occidentale et orientale de ces cercles, de manière que CBBF sont les lieux qui verront l'entrée au lever du soleil (BQ*da* dans la *fig.* 69.), CDDF ceux qui verront l'entrée au coucher du soleil, CHHF verront la sortie au lever, et CGGF au coucher du soleil. Ces cercles partageront la terre entière en quatre portions, dont l'une verra le passage *entier*, l'autre ne verra que l'*entrée*, la troisième la *sortie*, et la quatrième n'en verra *rien*; ainsi que c'est indiqué dans la *figure*. Au commencement, le soleil étant en E, l'hémisphère illuminé sera l'espace BCDRB+BFDAB; il est nuit dans l'espace BCDHB+BFDHB. Les lieux BC et BF ont le soleil levant, parceque la rotation de la terre se fait de Q en R; les points C, F, qui séparent l'horizon oriental et occidental, sont la commune section des grands cercles PE*p*P et BCDFB, le premier étant le cercle horaire BPS*a* (*Fig.* 69.), et le second l'horizon BQ*dq*D. Les lieux BC et BF verront donc le passage entier, et CBBF est une des limites de la première portion. Les lieux entre BC et G, et entre BF et G, où le soleil s'est déjà levé au moment de l'entrée, verront pareillement le passage entier, à l'exception de ceux qui verront le coucher du soleil durant le passage. Les lieux CDDF verront l'entrée au coucher du soleil, et il y a des lieux entre CDDF et G, qui verront le coucher du soleil durant le passage. Tous les pays dans l'hémisphère illuminé BDG, où le soleil se couche après la sortie, verront donc le passage entier; et ceux qui ont le soleil couchant avant la sortie, ne verront que l'entrée. La limite entre ces deux portions sera donc formée par les lieux CGGF, où le soleil se couche au moment même de la sortie: le cercle CGGF est donc la seconde limite de la première partie qui voit toute la durée du passage; cette partie sera par conséquent l'espace renfermé par les cercles CBBF et CGGF, ainsi que c'est indiqué dans la *Fig.* 82. par le mot *Tout*. La seconde partie DCGGFD ne verra que le commencement du passage, ce qui est indiqué par le mot *Entrée*. Dans les lieux entre CBF et H le soleil ne se lève qu'après l'entrée, et peut-être même après la sortie: dans le premier cas ils ne verront que la fin du passage, dans le dernier

ils n'en verront rien du tout. Dans les pays entre CDF et H l'entrée arrive après le coucher du soleil: ils ne peuvent donc voir que la sortie, si le soleil se lève auparavant; ils ne verront rien du passage, si le soleil se lève après la sortie. La limite entre ces deux portions est donc la ligne CHHF, qui passe par les lieux qui auront le lever du soleil au moment où le passage finit: d'où il suit, que BCHHFB est la troisième partie qui ne voit que la fin du passage, et CDHHFD la quatrième partie qui ne voit rien du tout; ce qui est indiqué par les mots *Sortie* et *Rien*.

Les points d'intersection C, F, ne sont pas tout-à-fait les mêmes que ceux qui séparent les demi-cercles occidentaux CBF, CHF, d'avec les demi-cercles orientaux CDF, CGF, parceque E ne coincide pas avec I. Mais la différence est si peu considérable, qu'on se permet ordinairement, de confondre les uns avec les autres. Cependant il faut avoir égard à cette différence, pour éclaircir une contradiction apparente. Le point F, appartenant également aux cercles FB et FD, verra l'entrée au lever et au coucher du soleil: en effet, étant situé dans le méridien EPF, il est identique avec le lieu B (*Fig.* 69.), dont le parallèle rase l'horizon du soleil en B, de manière que le soleil ne se couche pas. Le même point F, appartenant au cercle GFH (*Fig.* 82.), doit voir la sortie au lever et au coucher du soleil: c'est maintenant un point du méridien IPF (le point B de la *Fig.* 69.); mais S et B ou F, ne sont pas les mêmes points pour la sortie que pour l'entrée, à cause de la rotation de la terre. Les deux points F sont peu éloignés l'un de l'autre, et également distans du pole P: entre ces deux points, mais un peu plus loin du pole, il y a un troisième point F qui verra l'entrée au coucher, et la sortie le lendemain au lever du soleil, et qui par conséquent, ne verra que le commencement et la fin du passage, de sorte que sa nuit est précisément égale à la durée du passage. Il en est de même de C ou de *a* (*Fig.* 69.). Il faut distinguer deux points *a*, dont l'un verra l'entrée, et l'autre la sortie, au lever et au coucher du soleil: ces points ne verront donc que le commencement ou la fin, parceque le soleil ne s'y lève pas, en rasant l'horizon. Entre ces deux points, mais un peu plus près du pole, il y a un point C qui verra l'entrée au lever, et la sortie au coucher du

soleil, et par conséquent précisément toute la durée du passage, qui est égale à son arc diurne.

§. 290. Si les parallaxes du soleil et de Vénus étaient tout-à-fait insensibles, tous les lieux de la terre verraient l'entrée et la sortie dans le même instant que le centre de la terre; et la différence entre les tems, comptés dans chaque lieu, donnerait immédiatement celle des longitudes géographiques, ainsi que cela se fait dans les éclipses de lune. Mais l'effet des parallaxes est, que non-seulement l'*entrée* et la *sortie* n'est pas vue des différens lieux en même tems, mais que la *durée* du passage est très-différente: il est donc clair qu'en renversant la question, on pourra déterminer la parallaxe par l'entrée, la sortie, ou la durée, observées en différens lieux dont la position est connue; d'où résultent deux méthodes, fondées sur les *tems* de l'entrée et de la sortie, ou sur la différence de la *durée*. La dernière méthode, proposée par Halley, suppose qu'on a observé exactement la sortie aussi bien que l'entrée. Il est aisé de voir, que le résultat sera d'autant plus exact, que la différence des tems de l'entrée ou de la sortie, observés en deux lieux, est plus grande: les points A, *b*, *r*, M (*Fig.* 81.), qui ont été trouvés (§. 287.), ou les lieux qui en sont peu éloignés, seront donc les plus favorables pour ces sortes d'observations. Pour se servir de l'autre méthode, il sera nécessaire de faire des recherches générales sur les époques, où l'entrée et la sortie sera vue de différens lieux de la terre, pour en choisir ceux qui auront la plus longue, ou la plus courte durée du passage.

§. 291. Si l'on a calculé le tems que Vénus emploie à parcourir les portions VI et LN de son orbite relative (*Fig.* 81.), ou la durée de l'entrée et de la sortie, on peut diviser ces portions en minutes, et déterminer les lieux de la terre qui, de minute en minute, verront l'entrée ou la sortie. Supposons (*Fig.* 83.) que V et I soient les points du premier et du dernier instant de l'entrée, que VI soit divisé en minutes, et que $Vu = \lambda$ soit une de ces parties, qui est donnée par le mouvement géocentrique de Vénus. On aura donc

$$SV = r + (P - p),\quad SG = \mu,\quad GV = \sqrt{(SV^2 - SG^2)},\quad Gu = GV - \lambda,$$

d'où il suit

$Su = V(Gu^2 + \mu^2)$, $\text{tang}\, GSu = \frac{Gu}{\mu}$, et $ASu = GSu - (\varkappa + \omega)$ (§. 287.).

Au moment où Vénus est en u, l'entrée sera vue de tous les lieux de la terre, dont la projection est éloignée de u du demi-diamètre du soleil r (§. 286.). En faisant donc $u\alpha = u\beta = r$, tous ces lieux seront situés dans la périphérie d'un petit cercle $\alpha\beta$, dont l'axe est Sau, et le pole en a: pour déterminer ce cercle, il faut connaître la position du pole a, et l'arc $a\alpha = a\beta$ ou l'angle $aS\beta$. Or on a comme ci-dessus (§. 287.),

$$\cos Pa = \cos D \cos ASu \text{ et } \text{tang}\, SPa = -\frac{\text{tg}\, ASu}{\sin D},$$

D étant la déclinaison du soleil pendant l'entrée VI. Cela donne

la latitude du point $a = 90° - Pa$, et sa longitude $= L - 15\tau + SPa$,

τ étant le tems compté à Paris, pour lequel on cherche le pole a, qui est aussi le lieu de la terre qui, dans le même instant, verra la plus grande phase. On a de plus l'angle $aS\beta$ dans le triangle $Su\beta$, dont on connaît les trois côtés

$$Su = V(Gu^2 + \mu^2), \quad u\beta = r, \quad \text{et} \quad S\beta = P - p.$$

Maintenant il est facile de trouver sur un globe terrestre les lieux $\alpha\beta$. Du pole a, avec un compas dont l'ouverture est égale au nombre de degrés de $\alpha\beta$, pris sur l'équateur ou le méridien du globe, on décrira un cercle $\alpha\beta$, passant par tous les lieux qui verront l'entrée au moment que Vénus est en u. Si l'on a une projection stéréographique de la terre, on n'a qu'à marquer trois points du cercle $\alpha\beta$ sur le globe, et l'on décrira un cercle par ces trois points sur la mappemonde.

Comme on n'a pas besoin d'une grande précision, on peut se servir d'un procédé plus simple. On a (*fig.* 81.) $SV = r + (P - p)$, $SI = r - (P - p)$, de sorte que Vénus approche du centre S de $2(P - p) = Dd$, pendant qu'elle parcourt la portion VI de son orbite. En substituant aux différens points entre A et B (qui sont les poles a des cercles $\alpha\beta$ dans la *fig.* 83.), le point intermédiaire D, et pour la sortie le point Q, D et Q étant connus par ce qui précède (§. 287.), et en supposant que Vénus, en parcourant VI, s'approche du soleil d'une manière uniforme, on pourra diviser VI et Dd en ν parties égales qui répondront les unes aux autres, et les

tems où Vénus arrive dans chaque division de VI, s'y trouveront déjà marqués. Soit donc Dδ l'une de ces parties de Dd, et T le tems que Vénus met à parcourir VI: cela posé, δ sera le point sur Dd qui verra l'entrée, lorsque le tems $\frac{T}{\nu}$ est écoulé après le premier instant de l'entrée en V. Maintenant, $SD = P - p$ étant à peu près la cinquantième partie de $SH = r$, on peut, sans erreur sensible, supposer que tous les points dans la périphérie d'un cercle, dont δ est le centre et $\delta\varepsilon$ le rayon, sont aussi éloignés de H que δ, et que par conséquent, ils verront également l'entrée. On connaît donc le pole D de ce cercle, et de tous les cercles qui verront l'entrée d'une minute à l'autre: on a de plus $D\delta = \frac{Dd}{\nu} = \frac{2(P-p)}{\nu}$, et $\cos D\varepsilon = 1 - \frac{D\delta}{DS} = 1 - \frac{2}{\nu} = \frac{\nu - 2}{\nu}$. Il est aisé de décrire, sur un globe ou une carte, le cercle entier, au moyen du pole D et de l'arc Dε; et l'on déterminera par le même procédé, les lieux qui verront la sortie, une, deux, etc. minutes après le premier instant en L, ainsi que les lieux qui, à une époque donnée, verront Vénus avancée sur le soleil d'un doigt, de deux doigts, etc. en faisant (*Fig.* 83.) $u\alpha = u\beta = r - \frac{1}{6}r$ ou $= r - \frac{2}{6}r$, etc.

§. 292. Quand on a tracé ces cercles sur un globe, pour chaque minute durant l'entrée et la sortie, on trouvera l'instant où chaque lieu de la terre verra l'entrée et la sortie, par le tems marqué au cercle dans lequel se trouvera ce lieu: ce qui donne aussi la durée du passage pour chaque lieu. On pourra ainsi choisir les lieux, où il y a la plus grande différence entre les tems de l'entrée ou de la sortie, et ceux dans lesquels la durée du passage sera la plus longue ou la plus courte; c'est-à-dire les lieux où les observations du passage donneront le résultat le plus exact pour la parallaxe. En général, la différence de la durée provient de deux causes, de la parallaxe et du mouvement diurne de la terre. Par l'effet de la parallaxe, chaque lieu de la terre verra Vénus décrire une autre corde sur le soleil: si, par exemple, la latitude de Vénus est boréale, les pays méridionaux la verront plus élevée que les pays septentrionaux; elle décrira donc une corde moins grande. La rotation de la terre prolonge ou raccourcit la durée du passage, selon que les lieux ont dans leurs parallèles, la même direction que celle de Vénus, ou la direction opposée. Un lieu qui, dans la partie de son parallèle qui est

tournée vers le soleil, ou dans son arc diurne, avance d'occident en orient, et par conséquent va à la rencontre de Vénus, la verra avancer plus rapidement vers l'orient: la durée du passage sera plus courte pour lui que pour le centre de la terre. Dans la partie opposée du parallèle, qui renferme le minuit, le lieu suivra la même direction que Vénus, d'orient en occident: son mouvement relatif lui paraîtra plus lent, et la durée plus longue, qu'au centre de la terre ou plutôt de son parallèle. Il s'en suit, que la durée sera la plus longue dans les lieux qui ont la conjonction de Vénus à minuit, et où le soleil ne se couche pas, ou se couche après l'entrée et se lève avant la sortie; et que la durée sera la plus courte, dans les lieux où la conjonction arrive à midi.

CHAPITRE III.

Calcul des passages pour un lieu déterminé de la terre.

§. 293. Les principes sur lesquels se fonde le calcul pour un lieu déterminé de la terre, ont été exposés en détail dans le *Chap. VI. du Liv. V.* et l'on peut se servir ici des mêmes formules, en substituant les élémens géocentriques de Vénus à ceux de la lune. On se rappellera que tout se réduit à ce problème, *trouver pour un tems et un lieu donné, la distance apparente des centres du soleil et de Vénus, par le calcul des parallaxes.* Comme la méthode précédente (§. 291.) donne, pour un lieu quelconque, le moment de l'entrée et de la sortie à peu près, on calculera pour cet instant la distance apparente des centres, et l'on changera le tems, jusqu'à ce que la distance se trouve égale à $r \pm R$, ce qui donne le *contact extérieur ou intérieur.* Le milieu entre les deux époques donnera à très-peu près l'instant de la plus courte distance, ou de *la plus grande phase* (§. 267.).

Soit T le tems vrai de la conjonction, pour le méridien de Paris, $T + t$ le tems pour lequel on cherche la distance apparente, de sorte que $15(T + t)$ est l'angle-horaire du soleil à l'occident du méridien de Paris, et $15(T + t + n) = 15\tau$ par rapport au méridien du lieu donné, qui est de n heures $= 15n$ degrés plus oriental que Paris. Pour cet instant, on calculera avec les longitudes et latitudes géocentriques qui sont données par ce qui précède,

l'ascension droite géocentrique du soleil $= A$, de Vénus $= \alpha$,

la déclinaison du soleil $= D$, de Vénus $= \delta$.

Cela posé, les formules (§. 266.) donneront les angles M, ϕ, K, N; et il

faut mettre $P - p = 22''$ à $23''$ au lieu de H, d'où il viendra, en négligeant les puissances de $P - p$,

la *parallaxe de longitude*, $\Delta l = \frac{(P-p)\sin K \sin (l - N)}{\cos b}$,

$$\text{tang } \xi = \text{tang } K \cos (l - N), \text{ et}$$

la *parallaxe de latitude*, $\Delta b = -\frac{(P-p)\cos K \cos (\xi + b)}{\cos \xi}$,

l et b étant la longitude et la latitude géocentriques de Vénus pour cet instant. En nommant donc L la longitude du soleil, on aura

la longitude apparente de Vénus, $l' = l + \Delta l$,

la latitude apparente, $b' = b + \Delta b$, ce qui donnera (§. 267.)

$$\cos s' = \cos (L - l') \cos b',$$

s' étant la distance apparente ou parallactique des centres.

§. 294. Les formules précédentes supposent, que les angles M, K, etc. sont les mêmes pour le soleil et pour Vénus, ce qui n'est pas rigoureusement vrai. Il faudrait donc calculer les parallaxes pour les deux astres; mais on peut s'en dispenser, en calculant la parallaxe du soleil, et en déduisant celle de Vénus, où l'on peut négliger le carré de P, p, et le produit de s^2 par P ou p, parceque s est tout au plus 16′.

Soit (*Fig.* 79.) TES l'écliptique suivant l'ordre des signes, S, V, les lieux géocentriques du soleil et de Vénus, calculés sur les tables, pour le tems $T + t$ de Paris, ou le tems t après la conjonction: Vénus étant rétrograde, sa longitude sera moindre que celle du soleil. En nommant L la longitude géocentrique du soleil et de Vénus, λ la latitude géocentrique de Vénus, son mouvement horaire en longitude $= \gamma$, en latitude $= \beta$, le mouvement horaire du soleil $= h$, tous ces élémens étant calculés sur les tables pour l'instant de la conjonction; on aura pour le tems $T + t$,

la longitude géocentrique du soleil, $\odot = L + ht$, de Vénus, $\varphi = L - \gamma t$,

et sa latitude géocentrique, $b = \lambda + \beta t$.

En nommant s la distance géocentrique, donnée par les tables, et l'angle $VSE = \sigma$, on aura

$$\text{tang } \sigma = \frac{\lambda + \beta t}{\odot - \varphi} = \frac{\lambda + \beta t}{(h + \gamma) t}, \text{ et } s = \frac{\lambda + \beta t}{\sin \sigma} = \frac{(h + \gamma) t}{\cos \sigma}, \text{ ou}$$

$$b = s \sin \sigma, \quad \odot - \varphi = s \cos \sigma.$$

§. 295. L'obliquité de l'écliptique ε donne l'angle de position du soleil $\varkappa$, par le moyen de l'équation $\text{tang}\,\varkappa = \text{tg}\,\varepsilon \cos \odot$ I. §. 76. I. 3.), et en nommant la latitude du lieu f, l'angle horaire du soleil $q = 15\,\tau$ (§. 293.), sa distance au zénit k, et l'angle parallactique ζ, les formules (I. §. 34. I. 1. 3.) donneront

$$\cos k = \sin f \sin \mathrm{D} + \cos f \cos \mathrm{D} \cos q, \quad \text{tang}\,\zeta = \frac{\sin q}{\text{tg}\, f \cos \mathrm{D} - \sin \mathrm{D} \cos q}.$$

La partie boréale du cercle de déclinaison tombera à l'orient du cercle de latitude, et à l'occident du cercle vertical, si $\varkappa$ et ζ sont positifs: par conséquent, le cercle de latitude s'inclinera du cercle vertical vers l'occident d'un angle

$$v = \varkappa + \zeta.$$

Soit (*Fig.* 75.) $\Upsilon \mathrm{D} \mathrm{C}$ l'écliptique, E son pole, Z le zénit, L le lieu géocentrique de Vénus, l son lieu apparent, et qu'on nomme $\mathrm{ZL} = k'$, $\mathrm{ZLE} = l\mathrm{L}\lambda = v'$, les parallaxes horizontales du soleil et de Vénus, p, P, leurs parallaxes de hauteur, ξ, ξ'. Cela posé, on aura

$\mathrm{L}l = \xi' = \mathrm{P} \sin k'$, la parallaxe de latitude, $\mathrm{L}\lambda$ ou $\partial b = -\mathrm{P} \sin k' \cos v'$, $l\lambda = \mathrm{P} \sin k' \sin v'$, et la parallaxe de longitude, CD ou $\partial \varphi = -\frac{\mathrm{P} \sin \mathrm{K}' \sin v'}{\cos b}$, et à cause de $\cos b = 1 - \frac{b^2}{2} = 1 - \frac{s^2}{2} \sin^2 \sigma = 1$ (§. 294.),

$$\partial \varphi = -\mathrm{P} \sin k' \sin v'.$$

On trouvera pareillement pour le soleil,

$$\partial \odot = -p \sin k \sin v, \quad \partial \mathrm{B} = -p \sin k \cos v,$$

B étant la latitude du soleil qui est abaissé sous l'écliptique par l'effet de la parallaxe. On aura donc $s^2 = (\odot - \varphi)^2 + (b - \mathrm{B})^2$, dont la différentielle est

$$s\,\partial s = (\odot - \varphi)(\partial \odot - \partial \varphi) + b(\partial b - \partial \mathrm{B}),$$

à cause de $\mathrm{B} = 0$. En substituant $\odot - \varphi = s \cos \sigma$ et $b = s \sin \sigma$ (§. 294.), il viendra

$$\partial s = (\partial \odot - \partial \varphi) \cos \sigma + (\partial b - \partial \mathrm{B}) \sin \sigma;$$

et en introduisant les valeurs précédentes de $\partial \varphi$, $\partial \odot$, ∂b, $\partial \mathrm{B}$,

$$(\mathrm{A}) \ldots, \partial s = \mathrm{P} \sin k' (\sin v' \cos \sigma - \cos v' \sin \sigma) + p \sin k \sin (\sigma - v).$$

Si la *Fig* 84. représente le ciel occidental pour le lieu donné, Z son zénit, E le pole de l'ecliptique $\Upsilon \mathrm{V} \odot$, P le pole de l'équateur, $\odot$, φ, les lieux géocentriques du soleil et de Vénus; on aura

$Z\odot = k$, $Z\varphi = k'$, $Z\odot E = v$, $Z\varphi E = v'$, $\odot\varphi = s$, $\varphi V = b$, $E\varphi = 90^\circ - b$, $\odot V = \odot - \varphi$, $V\odot\varphi = \sigma$, $E\odot\varphi = 90^\circ - \sigma$, $Z\odot\varphi = 90^\circ - \sigma + v$, $E\odot = 90^\circ$:

d'où l'on tirera dans le triangle $EZ\odot$,

$$\cos ZE = \cos E\odot \cos Z\odot + \sin E\odot \sin Z\odot \cos Z\odot E = \sin k \cos v,$$

et dans le triangle $EZ\varphi$,

$$\cos Z\varphi E = \frac{\cos ZE - \cos Z\varphi \cos E\varphi}{\sin Z\varphi \sin E\varphi},$$

ou en substituant $\cos ZE = \sin k \cos v$,

$$\cos v' = \frac{\sin k \cos v - \cos k' \sin b}{\sin k' \cos b},$$

et à cause de $\sin b = s \sin \sigma$, et $\cos b = 1$, à très-peu près,

$$(a) \ldots \sin k' \cos v' = \sin k \cos v - s \cos k \sin \sigma.$$

On a de plus dans le triangle $E\varphi\odot$,

$$\text{tang } E\varphi\odot = \frac{\sin E\odot\varphi}{\cot E\odot \sin s - \cos s \cos E\odot\varphi} = -\text{tang } E\odot\varphi = -\cot\sigma,$$

et dans le triangle $Z\varphi\odot$,

$$\text{tang } Z\varphi\odot = \frac{\sin Z\odot\varphi}{\cot Z\odot \sin s - \cos s \cos Z\odot\varphi} = \frac{\cos(\sigma - v)}{s \cot k - \sin(\sigma - v)}.$$

Mais $Z\varphi E = v' = E\varphi\odot - Z\varphi\odot$: les deux équations précédentes donneront donc

$$\text{tang } v' = -\frac{\cot\sigma\,(s \cot k - \sin(\sigma - v)) + \cos(\sigma - v)}{s \cot k - \sin(\sigma - v) - \cot\sigma \cos(\sigma - v)} =$$

$$\frac{\sin\sigma\cos(\sigma - v) - \cos\sigma\sin(\sigma - v) + s\cos\sigma\cot k}{\cos\sigma\cos(\sigma - v) + \sin\sigma\sin(\sigma - v) - s\sin\sigma\cot k} = \frac{\sin v + s\cos\sigma\cot k}{\cos v - s\sin\sigma\cot k} =$$

$$\left(\text{tg } v + \frac{s\cos\sigma\cot k}{\cos v}\right)\left(1 + \frac{s\sin\sigma\cot k}{\cos v}\right) = \text{tg } v + \frac{s\cot k}{\cos^2 v}(\cos\sigma\cos v + \sin\sigma\sin v), \text{ ou}$$

$$(b) \ldots \text{tang } v' = \text{tang } v + \frac{s\cot k\cos(\sigma - v)}{\cos^2 v}.$$

En substituant les valeurs (a) (b) dans le premier terme de (A) qui est $P \sin k' \cos v' (\cos\sigma \text{ tang } v' - \sin\sigma)$, il deviendra

$$P(\sin k \cos v - s\cos k \sin\sigma)\left(\cos\sigma \text{ tang } v - \sin\sigma + \frac{s\cot k\cos\sigma\cos(\sigma - v)}{\cos^2 v}\right) =$$

$$P(\sin k\cos\sigma\sin v - \sin k\sin\sigma\cos v) + \frac{P s\cos k}{\cos v}(\cos\sigma\cos(\sigma - v) - \sin\sigma\cos\sigma\sin v + \sin^2\sigma\cos v)$$

$$= -P\sin k\sin(\sigma - v) + P s\cos k;$$

ce qui étant substitué en (A), donnera

$$(B) \ldots \partial s = -(P - p)\sin k\sin(\sigma - v) + P s\cos k =$$

$$-(P - p)\sin k\left\{\sin(\sigma - v) - \frac{P s}{P - p}\cot k\right\},$$

ou en calculant un angle

$$\psi = \frac{P\, s \cot k}{(P-p)\cos(\sigma - v)}, \text{ et en faisant } \sin\psi = \psi,\ \cos\psi = 1,$$

$$\partial s = -(P-p)\sin k \sin(\sigma - v - \psi).$$

En nommant donc ϱ la distance apparente ou parallactique des centres, on aura

$$(C) \ldots . \varrho = s - (P-p)\sin k \sin(\sigma - v - \psi).$$

Cette formule très-simple suffit pour résoudre tous les problèmes qui peuvent se présenter dans cette matière.

Il sera bon de remarquer ce qui suit. 1) Si l'angle parallactique $v = \varkappa + \zeta$ est négatif, c'est-à-dire, si le cercle de latitude est à l'orient du cercle vertical, il viendra $\psi = \frac{P\, s \cot k}{(P-p)\cos(\sigma + v)}$ et $\partial s = -(P-p \sin k \sin(\sigma + v - \psi)$. 2) Au moment de l'entrée, et en général *avant* la conjonction, ♀ est plus grand que ⊙, et ⊙ — ♀ a une valeur négative: tang σ (§ 294.) a donc passé par l'infini à l'état négatif, d'où il suit que σ est obtus, ce qui est d'ailleurs évident, parceque $\sin\sigma = \frac{b}{s}$ est positif, tandis que $\cos\sigma = \frac{\odot - \varphi}{s}$ est négatif. L'angle VSE (*Fig.* 79.) est donc $180° - \sigma$, et il faut mettre $180° - \sigma$ au lieu de σ, ou $\sin\sigma$ sera positif et $\cos\sigma$ négatif: d'où il viendra *avant la conjonction*,

$$\psi = -\frac{P\, s \cot k}{(P-p)\cos(\sigma + v)}, \text{ et } \partial s = -(P-p)\sin k \sin\left(\sigma + v - \frac{P\, s \cot k}{(P-p)\cos(\sigma + v)}\right).$$

3) Si l'entrée arrive avant midi, et la sortie après midi, v sera le plus souvent négatif avant midi, s'il est positif après midi: dans un pareil cas les formules n'éprouveront aucun changement. 4) Dans la conjonction même on a $P : p :: V : V - v$ (§. 284.), d'où il suit $P : P - p :: V : v$, et $\psi = \frac{V}{v} - \frac{s \cot k}{\cos(\ldots - v)}$. 5) Si le soleil est près du zénit, $\cot k$ et ψ seront d'une grandeur considérable: en ce cas il faut se tenir à la formule (B).

CHAPITRE IV.

Détermination des parallaxes et correction des élémens de Vénus.

§. 296. L'équation (B) ou (C) (§. 295.) donnera la valeur exacte de la distance apparente ϱ, si les tables, sur lesquelles on a calculé s, n'ont besoin d'aucune correction. On peut supposer exactes les tables du soleil; mais celles de Vénus, et principalement celles de Mercure, doivent être corrigées par les observations des passages (§. 279.). Le vrai tems de l'observation peut être supposé parfaitement connu; mais pour en conclure le tems vrai à Paris $= T + t$, il faut connaître la longitude du lieu T où l'observation a été faite: si elle n'est pas bien sure, le tems t aura aussi besoin d'une correction. En nommant donc x, y, ∂t, les corrections de la longitude de Vénus, de sa latitude, et du tems ou de la longitude géographique, et en conservant les dénominations précédentes (§. 294.), on aura

la longitude géocentrique de Vénus en conjonction $= L + x$,

sa latitude $= \lambda + y$,

le tems vrai de l'observation pour Paris $= T + t + \partial t$.

On aura donc pour l'instant de l'observation,

la longitude du soleil $= L + ht + h\partial t$,

la longitude de Vénus $= L + x - \gamma t - \gamma\partial t$,

sa latitude $= \lambda + y + \beta t + \beta\partial t$.

En différentiant l'équation $s^2 = (\odot - ♀)^2 + b^2$ par rapport à ces corrections, on trouvera

$s\partial s = (\odot - ♀)(\partial\odot - \partial ♀) + b\partial b$, $\partial\odot = h\partial t$, $\partial ♀ = x - \gamma\partial t$, $\partial b = y + \beta\partial t$,

et en substituant (§. 294.) $\odot - ♀ = s\cos\sigma$, $b = s\sin\sigma$, il viendra

$$\partial s = -x\cos\sigma + y\sin\sigma + ((h+\gamma)\cos\sigma + \beta\sin\sigma)\,\partial t.$$

§. 297. En mettant $s+\partial s$ à la place de s dans l'équation (C) (§. 295.), et en faisant le rapport des distances du soleil et de Vénus à la terre, qui est exactement connu par les tables, $= 1 : n$, de sorte que $P = \frac{p}{n}$, et n à peu près $\frac{2}{7}$; on aura

$$\varrho = (s) - x\cos\sigma + y\sin\sigma + ((h+\gamma)\cos\sigma + \beta\sin\sigma)\,\partial t - (P-p)\sin k\sin(\sigma-v-\psi),$$

(s) étant la distance géocentrique, tirée des tables. Les inconnues de cette équation sont x, y, p, ∂t; tout le reste est connu par les tables, ou par les formules précédentes: on peut donc donner à l'équation cette forme,

$$\varrho = (s) - Ax + By + C\partial t - Dp.$$

Chaque observation donne ϱ: ayant donc calculé pour le tems de l'observation, les quantités (s), A, B, C, D, on aura autant d'équations de la forme précédente, qu'il y a d'observations. Quatre observations suffiraient donc, pour déterminer les quatre inconnues. Les trois premières x, y, p, ont toujours la même valeur, en quelque lieu que les observations soient faites, tandis que ∂t aura une valeur différente pour chaque lieu. Si donc, dans un lieu dont la longitude n'est pas bien connue, une seule observation a été faite, elle ne peut pas servir à déterminer x, y, p, parcequ'il est impossible d'éliminer ∂t par la comparaison avec d'autres équations, où ∂t a une valeur différente. Mais si x, y, p, sont déjà déterminés par d'autres observations, celle-là donnera une équation de ϱ qui ne renferme qu'une seule variable ∂t, et qui, par conséquent, servira à corriger la longitude du lieu. S'il y a deux observations, faites dans un lieu inconnu, elles seviront non-seulement à corriger sa longitude, mais aussi la parallaxe, les corrections des tables, x, y, étant trouvées par d'autres observations. Quatre observations, faites dans un même lieu, suffiront pour déterminer la parallaxe, la longitude du lieu, et les corrections des tables; et une observation isolée, faite dans un lieu dont la longitude est connue, pourra être combinée avec d'autres observations, pour déterminer x, y, p, parceque ∂t est nul. Le but principal de ces observations étant la détermination de p, et de x, y, il faut corriger la longitude du lieu par le moyen d'une éclipse solaire, ou par des occultations, de manière que ∂t est nul: alors l'équation précédente deviendra

$$\varrho = (s) - Ax + By - Dp.$$

Les observations les plus sures sont celles du contact extérieur et intérieur, qui donnent $\varrho = r \pm R$: dans chaque lieu, où tout le passage a été visible, on aura donc quatre observations pareilles. Mais comme les demi-diamètres, r, R, peuvent aussi avoir besoin de corrections ∂r, ∂R, les contacts extérieur et intérieur donneront quatre observations de cette forme,

$$(r) \pm (R) + \partial r \pm \partial R = (s) - Ax + By - Dp,$$

où il y a cinq inconnues. On peut se passer de ces corrections, en combinant les deux observations du même contact, qui donnent toujours la même valeur de $\varrho = r \pm R$, quelle que soit l'erreur de r ou de R. La combinaison des deux contacts donnera une équation de la forme,

$$(s) - Ax + By - Dp = (s') - A'x + B'y - D'p.$$

§. 298. Au reste, il est facile de déterminer exactement le diamètre de Vénus par l'observation de l'immersion, et principalement de l'émersion. Soit (*Fig.* 67.) F*l*G l'orbite relative pour le lieu T de l'observateur, ⊙ le centre du soleil, λG l'arc que Vénus paraît décrire relativement au soleil dans le tems t, λν un arc de cercle décrit du centre ⊙, de sorte que Gν est la quantité dont la distance ϱ a augmenté dans le tems t. Un arc quelconque de l'orbite, $G\lambda = a$, répond donc à un changement de la distance apparente, $G\nu = \partial\varrho = a \cos \lambda G\nu = a \cos A\lambda\odot = a \cos \Phi$. Le mouvement horaire η' dans l'orbite relative pour le lieu T, donne l'arc parcouru dans un tems quelconque t,

$$a = \frac{\eta' t}{3600''}, \text{ et } \partial\varrho = \frac{\eta' t \cos \Phi}{3600''}.$$

Si t est le tems que, par observation, Vénus a employé à entrer sur le soleil ou à sortir, ce qui est la durée de l'immersion ou de l'émersion pour le lieu T, on a $\partial\varrho = 2R$, donc

$$R = \frac{\eta' t \cos \Phi}{7200''};$$

Φ étant l'angle Aλ⊙ qui répond à l'entrée ou à la sortie; on le trouvera par le procédé suivant. Soient $ln = b'$, $\lambda\mu = b''$, les latitudes apparentes, $\odot n = B'$, $\odot\mu = B''$, les différences des longitudes apparentes, qu'on a trouvées par le calcul parallactique pour les tems t' et t'' de l'entrée et de la sortie: cela posé on aura

$l\lambda^2 = (B' + B'')^2 + (b' - b'')^2$, $\eta' = \frac{3600''}{t'' - t'} l\lambda$, $\text{tg}\, A\odot\mathbb{C} = \text{tg}\, l\mathbb{C}m = \text{tg}\,\omega = \frac{b' - b''}{B' + B''}$,

le tems de la conjonction apparente en $\mathbb{C} = t' + \frac{3600''.B'}{\eta' \cos\omega} = T'$,

la latitude apparente dans la conjonction, $\odot\mathbb{C} = b' - \frac{T' - t'}{t'' - t'}(b' - b'') = b$,

la plus courte distance, $\odot A = m' = b\cos\omega$.

Pour une distance apparente quelconque $\odot\lambda = s'$, on a $\sin\Phi = \frac{m'}{s'}$; donc pour l'entrée et la sortie, t étant la durée de l'immersion ou de l'émersion,

$$s' = r,\ \sin\Phi = \frac{m'}{r},\ R = \frac{\eta' t \cos\Phi}{7200''}.$$

On peut, sans erreur sensible, substituer l'orbite géocentrique à l'orbite apparente, en mettant à la place de η' le mouvement relatif η vu du centre de la terre: alors on aura pour tous les lieux de la terre, $\sin\Phi = \frac{m}{r}$ et $R = \frac{\eta t \cos\Phi}{7200''}$. Quand R a été déterminé de cette manière, on peut faire dans l'équation précédente $\partial R = 0$ et $\partial r = 0$.

§. 299. En supposant même la longitude du lieu T parfaitement connue, il peut y avoir erreur dans le tems de l'observation, par deux raisons. Comme la planète n'est visible que lorsqu'elle a déjà entamé le soleil, il arrive ordinairement que l'entrée est observée un peu trop tard, et la sortie trop tôt: les observations du contact intérieur sont plus sures. Il en résulte, que la correction ∂t peut avoir différentes valeurs dans les observations, faites dans un même lieu. Une autre erreur est celle de la pendule: c'est la plus nuisible, et la plus difficile à découvrir. Les observations du dernier passage de Vénus ont fait voir, que des astronomes très-habiles peuvent se tromper de quinze secondes sur le contact extérieur.

§. 300. Le passage de Vénus en 1761 avait été employé avec succès, pour déterminer la parallaxe du soleil, et plusieurs astronomes étaient allés aux pays les plus éloignés, pour y observer ce phénomène aussi rare qu'important. Les observations donnèrent la parallaxe du soleil entre 8″, 6 et 10″. Cette différence considérable provenait peut-être de ce que, dans le calcul, on n'avait pas eu égard aux erreurs des tables, x, y, ou de ce que les observateurs ne s'étaient pas servis de lunettes de la même espèce, ce qui paraît nécessaire, pour pouvoir être sûr, qu'ils ont estimé le contact à la même distan-

ce des centres. Quoiqu'il en soit, le problème de la parallaxe du soleil ne pouvait être regardé comme parfaitement résolu, et les astronomes espéraient que le passage de 1769 donnerait cette solution, d'autant qu'il était encore plus favorable que celui de 1761. Ce passage fut observé dans presque tous les pays de l'Europe, et plusieurs Souverains dépensèrent des sommes considérables, pour envoyer des astronomes aux autres parties du monde, et pour y faire des conquêtes pour les sciences. La France et l'Angleterre envoyèrent des observateurs aux deux Indes, et aux isles de la mer pacifique. Mais les observations les plus importantes devaient se faire en Russie, et principalement dans la partie asiatique de cet empire, à cause de sa vaste étendue et de sa situation particulière; et il faut convenir, que les observations, faites par sept astronomes dans les différentes provinces de cet empire, ont le plus contribué à la détermination de la parallaxe du soleil. C'est à ces nobles entreprises, qu'on doit la grande précision avec laquelle on connaît aujourd'hui la parallaxe du soleil, et l'étendue du système solaire. La comparaison et le calcul d'un grand nombre d'observations, fait avec le plus grand soin, ont donné le résultat, que la *parallaxe moyenne du soleil* est $=8'',6$. Le calcul par lequel on parvient à ce résultat, est exposé en détail dans l'*Astron. théor. et prat. par M. Delambre, Tom. II. Chap.* 27. Ce qu'on trouvera dans les §§. suivans, suffira pour éclaircir tout ce qui pourra être obscur dans ce calcul.

§. 301. Les observations les plus importantes sont celles de l'entrée et de la sortie, et surtout du contact intérieur, faites en des lieux où ces tems diffèrent le plus les uns des autres: on peut en déduire la parallaxe du soleil par deux méthodes, par la différence des époques de l'entrée et de la sortie, ou de la durée du passage (§. 290.): cette dernière méthode paraît être la plus exacte. Dans l'exposé de ces méthodes je distinguerai par un trait et par deux traits, les quantités qui se rapportent à l'entrée et à la sortie, et je supposerai que tous les tems sont réduits au méridien de Paris. En nommant donc t', T', les tems de l'entrée observée, et de celle qu'on aurait vue du centre de la terrre, $t'-T'$ et $t''-T''$ seront les effets des parallaxes suivant la première méthode, et $(t''-t')-(T''-T')$ suivant la seconde. Comme T', T'' ont une valeur constante pour tous les pays de la terre, on peut éliminer ces

quantités, en comparant plusieurs observations, d'où résulteront des équations qui ne renferment que t', t'', et les parallaxes, t' et t'' étant donnés par les observations. Comme les effets de la parallaxe ϖ doivent nécessairement avoir la forme $P\varpi$, P étant une fonction de ϖ, qui deviendra une quantité constante, si l'on néglige les puissances de ϖ, on peut faire $t' - T' = A'\varpi$, etc. d'où il résultera autant d'équations de la forme suivante, qu'il y a d'observations:

$$t' - T' = A'\varpi,\ t'' - T'' = A''\varpi,\ \tau' - T' = B'\varpi,\ \tau'' - T'' = B''\varpi.$$

En éliminant T' et T'', on aura

$T' = t' - A'\varpi = \tau' - B'\varpi$, et $T'' = t'' - A''\varpi = \tau'' - B''\varpi$, d'où l'on tirera

$$(a) \ldots\ \varpi = \frac{t' - \tau'}{A' - B'} \text{ et } \varpi = \frac{t'' - \tau''}{A'' - B''},$$

les lettres t, A, se rapportant à un lieu A, et τ, B, à un autre lieu B. En nommant donc les durées observées en A et B, $\theta = t'' - t'$, et $\theta' = \tau'' - \tau'$, les dernières équations donneront

$$(b) \ldots\ \varpi = \frac{\theta - \theta'}{(A'' - A') + (B' - B'')},$$

les équations (a) se rapportant à la première méthode, et (b) à la seconde. Il est vrai que les coefficiens A', etc. sont composés d'élémens dont une partie est tirée des tables: mais comme ce sont des angles dont les sinus sont multipliés par la parallaxe, ainsi qu'on va le voir, les erreurs des tables y auront une influence insensible, qui sera encore compensée par les différences $A' - B'$, $A'' - A'$, etc.

Supposons donc qu'on ait calculé sur les tables, pour le tems t',

l'obliquité de l'écliptique $= \varepsilon$,

la déclinaison du soleil $= D'$,

sa longitude $= \odot'$,

la longitude géocentrique de Vénus $= \varphi'$,

la latitude géocentrique de Vénus $= b'$,

le demi-diamètre du soleil $= r$, de Vénus $= R$,

la parallaxe horizontale du soleil $= p'$, celle de Vénus $= P'$,

la parallaxe horizontale du soleil à sa moyenne distance $= \varpi$,

la distance apparente ou parallactique des centres $= \rho'$,

la distance géocentrique $= s'$.

On a par ce qui précède (§. 295. 294.)

$$\text{tang } x' = \text{tang } \varepsilon \cos \odot',$$
$$\cos k' = \sin f' \sin D' + \cos f' \cos D' \cos q',$$
$$\text{tang } \zeta' = \frac{\sin q'}{\text{tg } f' \cos D' - \sin D' \cos q'}, \quad v' = x' + \zeta',$$
$$\text{tang } \sigma' = \frac{b'}{\odot' - \varphi'}, \quad s' = \frac{b'}{\sin \sigma'};$$

f' étant la latitude du lieu, et q' l'angle horaire du soleil à l'occident du méridien du lieu, qui est donné par le tems observé de l'entrée ou de la sortie. On a de plus, pour l'entrée (§. 295.),

$$\psi' = \frac{P' s' \cot k'}{(P' - p') \cos (\sigma' + v')}, \quad \varrho' = s' - (P' - p') \sin k' \sin (\sigma' + v' - \psi'),$$

et pour la sortie,

$$\psi'' = \frac{P'' s'' \cot k''}{(P'' - p'') \cos (\sigma'' - v'')}, \quad \varrho'' = s'' - (P'' - p'') \sin k'' \sin (\sigma'' - v'' - \psi'').$$

En nommant

le rayon vecteur de la terre $= V$, celui de Vénus $= v$,

la distance de Vénus à la terre $= u$,

son élongation du soleil $= e$, on aura

$$p = \frac{\varpi}{V}, \quad \text{et } P = \frac{V p}{u} = \frac{\varpi}{u}.$$

Le soleil, la terre, et Vénus étant en S, T, V (*Fig.* 79.), on a $STV = e$, $\sin SVT = \frac{V}{v} \sin e$, $\cos SVT = -\frac{\sqrt{(v^2 - V^2 \sin^2 e)}}{v}$, $u = \frac{V \sin (SVT + e)}{\sin SVT}$, donc

$$u = V \cos e - \sqrt{(v^2 - V^2 \sin^2 e)}.$$

Au moment de l'entrée et de la sortie, e est $= r$, d'où il viendra

$$u = V \cos r - v + \frac{V^2}{2v} \sin^2 r = V - v + \frac{V}{2v} (V - v) r^2 = (V - v) \left(1 + \frac{V r^2}{2v}\right), \text{ donc}$$

$$P = \frac{\varpi}{V - v} \left(1 - \frac{V r^2}{2v}\right), \text{ et } P - p = \frac{\varpi}{V (V - v)} \left(v - \frac{V^2 r^2}{2v}\right) = \frac{\varpi v}{V (V - v)} \left(1 - \frac{V^2 r^2}{2v2}\right).$$

Maintenant on peut, sans erreur sensible, faire $P = P' = P''$ et $p = p' = p''$, ce qui donnera

$$\psi' = \frac{V s' \cot k'}{v \cos (\sigma' + v')}, \quad \varrho' = s' - \frac{\varpi v}{V (V - v)} \left(1 - \frac{V^2 r^2}{2v^2}\right) \sin k' \sin (\sigma' + v' - \psi'),$$

$$\psi'' = \frac{V s'' \cot k''}{v \cos (\sigma'' - v'')}, \quad \varrho'' = s'' - \frac{\varpi v}{V (V - v)} \left(1 - \frac{V^2 r^2}{2v^2}\right) \sin k'' \sin (\sigma'' - v'' - \psi'').$$

Si l'on veut tenir compte de l'aplatissement de la terre $= \delta$, il faut mettre

$f - \delta \sin 2f$ au lieu de f, et $\varpi(1 - \delta \sin^2 f)$ au lieu de ϖ (I. §. 201. 203.).

En supposant l'aplatissement $\delta = \frac{1}{300}$, et en faisant pour abréger,

$$\frac{v}{V(V-v)}\left(1 - \frac{V^2 r^2}{2v^2}\right) = \nu, \quad \left(1 - \frac{\sin^2 f}{300}\right) \sin k' \sin(\sigma' + v' - \psi') = g',$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2 f}{300}\right) \sin k'' \sin(\sigma'' - v'' - \psi'') = g'',$$

on aura les équations

$$\varrho' = s' - \nu g' \varpi, \quad \varrho'' = s'' - \nu g'' \varpi.$$

Il faut se rappeler (§. 295. n. 4.) que, si k est très-petit, la formule (B) donnera

$$g' = \left(1 - \frac{\sin^2 f}{300}\right)\left(\sin k' \sin(\sigma' + v') - \frac{V}{v} s' \cos k'\right),$$

$$g'' = \left(1 - \frac{\sin^2 f}{300}\right)\left(\sin k'' \sin(\sigma'' - v'') - \frac{V}{v} s'' \cos k''\right).$$

La distance géocentrique des centres est donc plus grande que la distance apparente, de $s' - \varrho' = \nu g' \varpi$ et de $s'' - \varrho'' = \nu g'' \varpi$. En nommant donc x', x'', les tems que Vénus emploie à s'approcher du centre du soleil de $\nu g' \varpi$ et de $\nu g'' \varpi$, l'entrée géocentrique arrivera au tems $t' + x' = T'$, et la sortie géocentrique au tems $t'' - x'' = T''$. En faisant

le mouvement horaire héliocentrique de Vénus $= H$, du soleil $= h$,

le mouvement horaire relatif en longitude $= H - h$,

le même, vu de la terre $= \frac{v(H-h)}{V-v} = \eta'$,

le mouv. hor. géocentrique sur l'orbite relative $= \frac{v(H-h)}{(V-v)\cos\omega} = \eta$;

on aura (§. 298.)

$$x' = \frac{\nu g' \varpi}{\eta \cos\Phi} 3600'', \quad x'' = \frac{\nu g'' \varpi}{\eta \cos\Phi} 3600'',$$

l'angle Φ étant donné par l'équation $\sin\Phi = \frac{m}{r}$. Or si l'on nomme

la latitude géocentrique de Vénus en conjonction $= b$,

son mouvement horaire héliocentrique en latitude $= \beta'$,

son mouvement hor. géocentrique en latitude $= \beta$, on aura

$$\beta = \frac{v\beta'}{V-v}, \quad \sin\omega = \frac{\beta}{\eta}, \quad m = b\cos\omega, \text{ et } \sin\Phi = \frac{m}{r}.$$

En désignant par τ', τ'', g''', g^{IV}, les valeurs de t', t'', et g', g'', relatives à un autre lieu, et en faisant pour abréger,

$$\frac{3600'' \cdot \nu}{\eta\cos\Phi} = n,$$

on aura pour ce lieu,

$$T' = \tau' + n g''' \varpi, \qquad T'' = \tau'' - n g^{IV} \varpi.$$

En comparant ces valeurs avec les précédentes, $T' = t' + n g' \varpi$, $T'' = t'' - n g'' \varpi$, il viendra

$$(1) \ldots . \varpi = \frac{t' - \tau'}{n(g''' - g')} = \frac{t'' - \tau''}{n(g'' - g^{IV})}; \quad (2) \ldots . \varpi = \frac{(t'' - t') - (\tau'' - \tau')}{n(g' + g'' - g''' - g^{IV})},$$

l'équation (1) donnant la solution par la première méthode, et (2) par la seconde.

§. 302. Le procédé ordinaire est, d'attribuer à Vénus seule le mouvement relatif et la parallaxe relative $P - p$, en supposant le soleil immobile et sans parallaxe. Cette méthode est parfaitement exacte à l'égard des éclipses solaires, parceque la parallaxe du soleil est presque insensible par rapport à celle de la lune; mais quoiqu'elle soit moins exacte pour les passages, il ne sera pas inutile de l'exposer ici, en l'appliquant au contact intérieur, qui est le plus sûr. En conservant donc toutes les dénotations précédentes, on aura pour l'instant t', où le contact interieur a été observé dans un lieu A,

la différence apparente des longitudes $= ♀' - ⊙' + \Delta l'$,

la latitude apparente $= b' + \Delta b'$,

$\Delta l'$, $\Delta b'$, étant les parallaxes relatives de longitude et de latitude, calculées pour l'instant t'. La distance apparente des centres étant $r - R$, on aura l'équation

$$(A) \ldots . (r - R)^2 = (♀' - ⊙' + \Delta l')^2 + (b' + \Delta b')^2.$$

Pour l'instant t'' de la sortie on aura pareillement

la différence apparente des longitudes $= ⊙'' - ♀'' - \Delta l''$,

la latitude apparente $= b'' + \Delta b''$,

d'où l'on tirera l'équation

$$(B) \ldots . (r - R)^2 = (⊙'' - ♀'' - \Delta l'')^2 + (b'' + \Delta b'')^2.$$

En faisant pour abréger,

$$\frac{(t' - T')\eta'}{3600''} = M', \quad \frac{(t' - T')\beta}{3600''} = N', \quad \frac{(t'' - T'')\eta'}{3600''} = M'', \quad \frac{(t'' - T'')\beta}{3600''} = N'',$$

on trouvera pour l'instant T', Vénus étant rétrograde,

la différence géocentrique des longitudes $= ♀' - ⊙' + M'$,

la latitude géocentrique $= b' - N'$,

et pour le tems T'',

différence géocentrique des longitudes $= \odot'' - \varphi'' - M''$,

latitude géocentrique $= b'' - N''$;

d'où l'on tirera ces deux équations

$$(C) \ldots . (r - R)^2 = (\varphi' - \odot' + M')^2 + (b' - N')^2,$$

$$(D) \ldots . (r - R)^2 = (\odot'' - \varphi'' - M'')^2 + (b'' - N'')^2.$$

En comparant l'équation (C) avec (A), (D) avec (B), et en négligeant les carrés des parallaxes, il viendra

$$(E) \ldots . 2M'(\varphi' - \odot') + M'^2 - 2b'N' + N'^2 = 2(\varphi' - \odot'')\Delta l' + 2b'\Delta b',$$

$$(F) \ldots . -2M''(\odot'' - \varphi'') + M''^2 - 2b''N'' + N''^2 = -2(\odot'' - \varphi'')\Delta l' + 2b''\Delta b''$$

Mais $N' = \frac{\beta}{\eta'} M' = M' \operatorname{tang} \omega$, et $N'' = M'' \operatorname{tang} \omega$: en faisant donc, pour abréger,

$$(\varphi' - \odot') \cos \omega - b' \sin \omega = A', \qquad (\odot'' - \varphi'') \cos \omega + b'' \sin \omega = A'',$$

$$2(\varphi' - \odot')\Delta l' + 2b'\Delta b' = \lambda', \qquad 2(\odot'' - \varphi'')\Delta l'' - 2b''\Delta b' = \lambda'',$$

les équations (E) (F) se transformeront en

$$0 = M'^2 \sec^2 \omega + 2A'M' \sec \omega - \lambda', \qquad 0 = M''^2 \sec^2 \omega - 2A''M'' \sec \omega + \lambda'',$$

dont les racines sont

$$M' \sec \omega = -A' \pm \sqrt{(A'^2 + \lambda')}, \qquad M'' \sec \omega = A'' \mp \sqrt{(A''^2 - \lambda'')}.$$

Quant au double signe du radical, on verra aisément, qu'on aurait pu également comparer (C) avec (B) et (D) avec (A), c'est-à-dire, l'entrée géocentrique avec la sortie observée, et réciproquement: alors on aurait eu $t' - T'$ au lieu de $t'' - T''$, et $t' - T''$ au lieu de $t' - T'$, ce qui aurait augmenté M'' et M': d'où il est aisé de voir, que le signe inférieur se rapporte à cette combinaison. Il faut donc prendre le signe supérieur dans le cas actuel, où il s'agit de comparer l'entrée avec l'entrée, et la sortie avec la sortie: ce qui est d'ailleurs évident, parceque t' et t'' peuvent arriver avant ou après T' et T'', et que par conséquent M' et M'' peuvent devenir positifs ou négatifs, ce qui suppose le signe supérieur. En négligeant donc les carrés des parallaxes λ', λ'', on aura

$$M' \sec \omega = -A' + A'\left(1 + \frac{\lambda'}{2A'^2}\right), \quad M'' \sec \omega = A'' - A''\left(1 - \frac{\lambda''}{2A''^2}\right), \text{ donc}$$

$$(G) \ldots . M' = \frac{\lambda' \cos \omega}{2A'}, \qquad M'' = \frac{\lambda'' \cos \omega}{2A''}.$$

Mais $M' = \frac{(t' - T')\eta'}{3600''} = \frac{(t' - T')\eta \cos \omega}{3600''}$, et $M'' = \frac{(t'' - T'')\eta \cos \omega}{3600''}$; ce qui

étant substitué dans les équations (G), donnera, en faisant $\frac{3600''}{\eta} = C$,

$$(H) \ldots . t' - T' = \frac{C\lambda'}{2A'}, \quad \text{et} \quad t'' - T'' = \frac{C\lambda''}{2A''}.$$

Faisons $\Delta l' = a'\varpi$, $\Delta b' = \alpha'\varpi$, $\Delta l'' = a''\varpi$, $\Delta b'' = \alpha''\varpi$: cela posé on aura

$$(a) \ldots . \lambda' = 2a'(\varphi' - \odot')\varpi + 2\alpha' b'\varpi, \quad \lambda'' = 2a''(\odot'' - \varphi'')\varpi - 2\alpha'' b''\varpi.$$

Soient maintenant pour un autre lieu B,

τ', τ'', les instans des observations de l'entrée et de la sortie,

φ''', $\odot'''$, b''', φ^{IV}, $\odot^{IV}$, b^{IV}, les lieux géocentriques, calculés pour ces instans,

$$\Delta l''' = c'\varpi, \quad \Delta b' = \gamma'\varpi, \quad \Delta l^{IV} = c''\varpi, \quad \Delta b'' = \gamma''\varpi,$$

$$(b) \ldots . \lambda''' = 2c'(\varphi''' - \odot''')\varpi + 2\gamma' b'''\varpi, \quad \lambda^{IV} = 2c''(\odot^{IV} - \varphi^{IV})\varpi - 2\gamma'' b^{IV}\varpi,$$

$$B' = (\varphi''' - \odot''')\cos\omega - b'''\sin\omega, \quad B'' = (\odot^{IV} - \varphi^{IV})\cos\omega + b^{IV}\sin\omega.$$

Cela posé, les observations du lieu B donneront les équations

$$(I) \ldots . \tau' - T' = \frac{C\lambda'''}{2B'}, \quad \text{et} \quad \tau'' - T'' = \frac{C\lambda^{IV}}{2B''}.$$

En comparant les équations (H) et (I), on aura

$$(c) \ldots . T' = t' - \frac{C\lambda'}{2A'} = \tau' - \frac{C\lambda'''}{2B'}, \quad \text{et} \quad T'' = t'' - \frac{C\lambda''}{2A''} = \tau'' - \frac{C\lambda^{IV}}{2B''},$$

$$(d) \ldots . T'' - T' = t'' - t' - \frac{C\lambda''}{2A''} + \frac{C\lambda'}{2A'} = \tau'' - \tau' - \frac{C\lambda^{IV}}{2B''} + \frac{C\lambda'''}{2B'},$$

d'où l'on tirera ces équations

$$t' - \tau' = \frac{C\lambda'}{2A'} - \frac{C\lambda'''}{2B'}, \quad t'' - \tau'' = \frac{C\lambda''}{2A''} - \frac{C\lambda^{IV}}{2B''},$$

$$(t'' - t') - (\tau'' - \tau') = \frac{C\lambda''}{2A''} - \frac{C\lambda'}{2A'} - \frac{C\lambda^{IV}}{2B''} + \frac{C\lambda'''}{2B'}.$$

En substituant dans ces équations les valeurs de λ', λ'', λ''', λ^{IV}, il viendra

$$(3) \ldots . \varpi = \frac{t' - \tau'}{\frac{C}{A'}(a'(\varphi' - \odot') + \alpha' b') - \frac{C}{B'}(c'(\varphi''' - \odot'') + \gamma' b''')} =$$

$$\frac{t'' - \tau''}{\frac{C}{A''}(a''(\odot'' - \varphi'') - \alpha'' b'') - \frac{C}{B''}(c''(\odot^{IV} - \varphi^{IV}) - \gamma'' b^{IV})},$$

$$(4) \ldots . \varpi = \frac{(t'' - t') - (\tau'' - \tau')}{\left\{\begin{array}{l} \frac{C}{A''}(a''(\odot'' - \varphi'') - \alpha'' b'') - \frac{C}{A'}(a'(\varphi' - \odot') + \alpha' b') \\ - \frac{C}{B''}(c''(\odot^{IV} - \varphi^{IV}) - \gamma'' b^{IV}) + \frac{C}{B'}(c'(\varphi''' - \odot''') + \gamma' b''') \end{array}\right\}}.$$

*

Les quantités a, c, α, γ, sont données par les équations (L) (M) (S) (T) (I. §. 210.), où il faut mettre $\nu\varpi\left(1-\frac{\sin^2 f}{300}\right)$ au lieu de H, $f-\frac{\sin 2f}{300}=f'$ au lieu de β', et ♀ au lieu de l. On a donc

$$M=15t+\text{Asc. dr. }\odot,\quad \tang\Phi=\frac{\sin M}{\tang f'},\quad \cos K=\frac{\sin f'\cos(\varepsilon+\Phi)}{\cos\Phi},$$

$$\tang N=\frac{\tg M\sin(\varepsilon+\Phi)}{\sin\Phi},\quad \tang\xi=\tang K\cos(♀-N),$$

$$\Delta l=H\sin K\sin(♀-N),\quad \Delta b=-\frac{H\cos K\cos(b+\xi)}{\cos\xi},\quad \text{donc}$$

$$\varpi\text{ ou }c=\nu\left(1-\frac{\sin^2 f}{300}\right)\sin K\sin(♀-N),\quad \alpha\text{ ou }\gamma=-\nu\left(1-\frac{\sin^2 f}{300}\right)\frac{\cos K\cos(b+\xi)}{\cos\xi}.$$

Il est aisé de voir, que les tems, t', t'', τ, τ'', dans les formules (1) et (3), doivent être réduits au même méridien: cette première méthode qui donne la parallaxe par les différens instans de l'entrée ou de la sortie, suppose donc, que la longitude des deux lieux A et B est exactement connue, ce qui n'est pas nécessaire dans la seconde méthode qui donne la parallaxe par la durée du passage; c'est pourquoi cette méthode est préférable. Cependant on ne peut se passer de la première méthode, si l'on veut comparer une seule observation de l'entrée ou de la sortie.

§. 303. Pour faire comprendre parfaitement les deux méthodes précédentes, je vais les appliquer aux observations du contact intérieur, faites à Wardhuus et en Californie le 3 Juin 1769. On trouve le calcul de ces observations et de plusieurs autres en détail, dans l'*Astron. théor. et prat. de M. Delambre, T. II. p. 486. suiv.* d'où je tirerai les élémens que fournissent les tables. Ils donnent pour le centre de la terre, et pour l'instant de la conjonction vraie,

Tems vrai à Paris, $T=10^h\,15'\,2''$,

$\odot=♀=73°\,27'\,21''$; $b=+623'',5042$; $H=3'\,58'',14$; $h=2'\,23'',5$;
$H-h=94'',64$; $\beta'=-14'',2$; $\beta=-35'',6863$; $\eta'=-237'',8414$; $\omega=8°\,31'\,59''$;
$\eta=-240'',5$; $m=616'',6$; $r=943'',7$; $R=27'',6$; $\Phi=42°\,18'\,17''$;
$\varepsilon=23°\,28'\,1''$; $\log C=1,1751808$; $\log\frac{C}{\cos\Phi}=1,3061981$; $lV=0,0065302$;
$lv=9,8610503$; $\frac{V^2r^2}{2v^2}=0,0000192\,74$; $\log\nu=0,3936740$.

Les observations de Wardhuus donnent

Hauteur du pole, $f = 70°22'36''$, longitude à l'orient de Paris $= 1^h55'37''$;

$\frac{\sin 2f}{300} = 7'15''$; $\frac{\sin^2 f}{300} = 0{,}002958$; hauteur du pole corrigée, $f = 70°15'21''$,

$\log\left(1 - \frac{\sin^2 f}{300}\right) = 9{,}9987135$; $t' = 9^h34'5''$ (à Paris $= 7^h38'28'' = T - 2^h{,}609444$);

$t'' = 15^h27'36''$ (à Paris $= 13^h31'59'' = T + 3^h{,}2825$).

Avec les coëfficiens du tems, $-2^h{,}609444$ et $+3^h{,}2825$, et les mouvemens horaires, h, η', β, on trouvera

$\odot' = 73°21'6''{,}55$; $\odot'' = 73°35'12''{,}04$; $\varphi' - \odot' = 620''{,}63$; $\odot'' - \varphi'' = 780''{,}71$;

$b' = 716''{,}62$; $b'' = 506''{,}36$;

d'où l'on calculera, à l'aide des formules précédentes,

Asc. dr. $\odot' = 71°56'40''{,}09$; $D' = 22°25'41''{,}94$; $\varkappa' = +7°5'23''{,}06$;

Asc. dr. $\odot'' = 72°11'47''{,}97$; $D'' = 22°27'25''{,}62$; $\varkappa'' = +6°59'36''{,}47$;

$\sigma' = 49°6'20''{,}7$; $\sigma'' = 32°58'1''{,}2$; $q' = 15t' = 143°31'15''$;

$q'' = 15t'' = 180° + 51°54'0''$; $k' = 83°47'57''{,}4$; $\zeta' = +11°39'19''{,}8$;

$k'' = 80°23'33''{,}5$; $\zeta'' = -15°38'31''$; $v' = +18°44'42''{,}9$;

$v'' = -8°38'54''{,}5$; $s' = \frac{b'}{\sin\sigma'} = 948''{,}01$; $s'' = 930''{,}54$;

$\sigma' + v' = +67°51'3''{,}6$; $\sigma'' - v'' = +41°36'55''{,}7$; $\psi' = 6'21''{,}9$; $\psi'' = 4'54''{,}5$;

$\sigma' + v' - \psi = +67°44'41''{,}7$; $\sigma'' - v'' - \psi' = +41°32'1''{,}2$;

$\log g' = 9{,}9625448$; $\log g'' = 9{,}8141321$; $\log \nu g' = 0{,}3562188$;

$\log \nu g'' = 0{,}2078061$; $\log n g' = 1{,}6624169$;

$\log n g'' = 1{,}5140042$; $n g' = 45{,}9639$; $n g'' = 32{,}6591$.

Les observations de Californie donnent

$f = 23°3'42''$, longitude à l'occident de Paris $= 7^h28'10''$;

$\frac{\sin 2f}{300} = 8'15''{,}6$; $\frac{\sin^2 f}{300} = 0{,}000507$; hauteur du pole corr. $f' = 22°55'26''{,}4$;

$\log\left(1 - \frac{\sin^2 f}{300}\right) = 9{,}9997798$; $\tau' = 0^h17'27''$ ($7^h45'37'' = T - 2^h{,}49028$);

$\tau'' = 5^h54'50''$ ($13^h23'0'' = T + 3^h{,}13278$); $\odot''' = 73°21'23''{,}64$;

$\odot^{IV} = 73°34'50''{,}55$; $\varphi''' - \odot''' = 592''{,}29$; $\odot^{IV} - \varphi^{IV} = 745''{,}1$; $b''' = 712''{,}38$;

$b^{IV} = 511''{,}71$; Asc. dr. $\odot''' = 71°56'58''{,}45$; Asc. dr. $\odot^{IV} = 72°11'24''{,}9$;

$D''' = 22°25'44''{,}0$; $D^{IV} = 22°27'23''{,}0$; $\varkappa''' = +7°5'16''{,}0$; $\varkappa^{IV} = +6°59'45''{,}3$;

$\sigma''' = 50°15'32''{,}5$; $\sigma^{IV} = 34°28'48''{,}0$; $q''' = 4°21'45''$; $q^{IV} = 88°42'30''$;

$k''' = 4°3'18''{,}7$; $k^{IV} = 80°19'48''{,}2$; $\zeta''' = +82°8'59''{,}7$; $\zeta^{IV} = +69°4'36''{,}3$;

$v''' = +89°14'15''7$; $v^{IV} = +76°4'21'',6$; $\sigma''' + v''' = 139°29'48'',2$;
$\sigma^{IV} - v^{IV} = -41°35'33'',6$; $s''' = 926'',44$; $s^{IV} = 903'',89$.

Comme l'angle k''' est très-petit, il faut calculer g''' par la formule, donnée pour ce cas (§. 301.). Ainsi l'on trouvera

$$ng''' = +1,986484; \quad ng^{IV} = -32,822875.$$

Pour comparer les observations, faites en ces deux lieux, d'après les formules (1) (2) (§. 301.), on a

$n(g''' - g') = -43,97742$; $n(g'' - g^{IV}) = +65,48197$; $t' - \tau' = -429''$;
$t'' - \tau'' = +539''$; $(t'' - t') - (\tau'' - \tau') = +968''$; ce qui donne

(1)..... $\varpi = 9'',7550$; $\varpi = 8'',2313$; (2)..... $\varpi = 8'',8435$;

d'où l'on voit que la parallaxe, conclue de la durée du passage, approche le plus de la valeur moyenne $8'',6$; et que le résultat de l'immersion est le moins exact.

Suivant la seconde méthode (§. 302.), on a, outre les valeurs précédentes, pour l'observation de l'entrée à Wardhuus,

$\varphi' = (\varphi' - \odot) + \odot' = 73°31'27'',2$; $M = 215°27'55''$; $b' = +11'56'',6$;
$A' = +507,427$; $\Phi = -11°45'49''$; $K = 19°42'33''$; $N = 144°40'18''$;
$\xi = 6°36'11''$; $\varphi' - N = -71°8'50'',8$; $\xi + b' = 6°48'7'',6$; $a' = -0,787752$;
$\alpha' = -2,322693$;

et pour la sortie à Wardhuus,

$\varphi'' = \odot'' - (\odot'' - \varphi'') = 73°22'11'',3$; $M = 304°5'48''$; $b'' = +8'26'',4$;
$A'' = +847,202$; $\Phi = -16°33'11''$; $K = 12°53'57'',5$; $N = 31°58'11'',6$;
$\xi = 9°44'51'',5$; $\varphi'' - N = 41°23'59'',7$; $\xi + b'' = 9°53'17'',9$; $a'' = +0,364386$;
$\alpha'' = -2,40493$.

Pour l'entrée observée en Californie,

$\varphi''' = 73°31'15'',9$; $M = 76°18'43'',5$; $b''' = +11'52'',4$; $B' = +480,030$;
$\Phi = +66°28'40''$; $K = 89°56'45'',8$; $N = 77°24'42''$; $\xi = 89°56'45'',3$;
$\varphi''' - N = -3°53'26''$; $\xi + b''' = 90°8'37'',7$; $c' = -0,167884$; $\gamma' = +0,006195$;

et pour la sortie,

$\varphi^{IV} = 73°22'25'',5$; $M = 160°53'54'',9$; $b^{IV} = +8'31'',7$; $B'' = +812,78$;
$\Phi = +37°43'56''$; $K = 76°16'28''$; $N = 153°37'25''$; $\xi = 34°44'8'',06$;
$\varphi^{IV} - N = -80°15'0''$; $\xi + b^{IV} = 34°52'40'',3$; $c'' = -2,368927$; $\gamma'' = -0,586064$.

On en tirera

$$(e)\ldots\begin{cases}\frac{C}{A'}\,a'\,(\varphi'-\odot)=-14,42213=d'; & \frac{C}{A'}\,a'\,b'=-49,10073=\delta'.\\ \frac{C}{A''}\,a''\,(\odot''-\varphi'')=+5,02626=d''; & \frac{C}{A''}\,a''\,b''=-21,51570=\delta'';\\ \frac{C}{B'}\,c'\,(\varphi'''-\odot''')=-3,10067=e'; & \frac{C}{B'}\,\gamma'\,b'''=+0,13761=\varepsilon';\\ \frac{C}{B''}\,c''\,(\odot^{IV}-\varphi^{IV})=-32,50678=e''; & \frac{C}{B''}\,\gamma''\,b^{IV}=-5,52302=\varepsilon'';\\ \frac{C}{A'}\,(a'\,(\varphi'-\odot')+\alpha'\,b')-\frac{C}{B'}\,(c'\,(\varphi'''-\odot'')+\gamma'\,b''')=-60,5598=E';\\ \frac{C}{A''}\,a''\,(\odot''-\varphi'')-\alpha''\,b'')-\frac{C}{B''}\,(c''\,(\odot^{IV}-\varphi^{IV})-\gamma''\,b^{IV})=+53,52572=E';\\ E''-E'=+114,08552.\end{cases}$$

On a déjà trouvé

$$t'-\tau'=-429'';\ t''-\tau''=+539'';\ (t''-t')-(\tau''-\tau')=+968'';$$

d'où l'on tirera ces valeurs de ϖ:

$$(3)\ldots.\ \varpi=\frac{t'-\tau'}{E'}=7'',0839;\quad \varpi=\frac{t''-\tau''}{E''}=10'',0699;$$

$$(4)\ldots.\ \varpi=\frac{(t''-t')-(\tau''-\tau')}{E''-E'}=8'',5044.$$

On voit que la durée donne ici également un résultat plus approchant de la vérité. Le milieu entre les deux valeurs de ϖ qu'on a trouvées par la durée seule, 8″,8435 et 8″,5044 est

$$\varpi=8'',674.$$

Le milieu entre les quatre valeurs (1) et (3) est $\varpi=8'',785$; le milieu entre les deux valeurs (3) est 8″,577; à très-peu près 8″,6.

M. Delambre trouve 8″,616 au lieu de 8″,674. La différence provient probablement de ce que cet astronome a négligé les termes multipliés par b, et qu'il a calculé les élémens, ☉, ♀, b, M, etc. non pour les instans de l'entrée et de la sortie observées, mais pour le centre de la terre.

§. 304. Quand la parallaxe du soleil aura été déterminée par le procédé précédent, elle servira à corriger les élémens de Vénus, et principalement la latitude et la position du noeud. Il est aisé de voir qu'en changeant la latitude de Vénus, la corde qu'elle parcourt sur le disque solaire, sera éloignée ou approchée du centre du soleil, et par conséquent diminuée ou augmentée: il en sera de même de la durée. Mais un changement de longitude

n'affecte point la corde, dans laquelle il fait avancer ou retarder la planète, de sorte que cela n'influe pas sur la durée, mais seulement sur le tems absolu de l'entrée et de la sortie. Il est donc clair que les premières formules (1) (3) serviront à corriger la longitude, et les formules (2) (4) à corriger la latitude. Comme la durée donne un résultat plus sûr, on fera bien de procéder de cette manière. Après avoir corrigé la latitude par la durée, on calculera avec cette latitude corrigée, et l'inclinaison parfaitement connue, l'argument de latitude et le noeud, ce qui servira à corriger la longitude.

Suivant la seconde méthode (§. 202.) on a (c) $T' = t' - \frac{C\lambda'}{2A'}$, etc. ou en substituant les valeurs (*a*) (*b*), et en se servant des abbréviations (*e*) (§. 303.), on aura

$T' = t' - (d' + \delta')\varpi = \tau' - (e' + \varepsilon')\varpi$; $T'' = t'' - (d'' - \delta'')\varpi = \tau'' - (e'' - \varepsilon'')\varpi$.

Or on a (§. 303.), en réduisant les tems au méridien de Paris,

$t' = 7$ h. $38' 28''$, $t'' = 13$ h. $31' 59''$; $\tau' = 7$ h. $45' 37''$, $\tau'' = 13$ h. $23' 0''$;

$d' = -14,422$; $\delta' = +49,101$; $d'' = +5,026$; $\delta'' = -21,516$;

$e' = -3,101$; $\varepsilon' = +0,138$; $e'' = -32,507$; $\varepsilon'' = -5,523$.

En faisant donc $\varpi = 8'',6$; on aura

$T' = 7$h.$38'28 + 9'6'',3 = 7$h.$47'34'',3$ ou $T' = 7$h $45'37'' + 25'',5 = 7$ h.$46'2'',5$;

$T'' = 13$h.$31'59'' - 3'48'',3 = 13$h.$28'10'',7$ ou $T'' = 13$h.$23' + 3'52'',1 = 13$h.$26'52'',1$.

$$T'' - T' = 5 \text{ h. } 40' 36'',4 \text{ ou } T'' - T' = 5 \text{ h. } 40' 49'',6.$$

Le milieu serait $T'' - T' = 5$ h. $40' 43''$. M. Delambre trouve par un grand nombre d'observations, la durée géocentrique observée, $\theta = 5$ h. $41' 50''$. La durée, donnée par les tables, se trouve à l'aide du triangle A⊙G (*Fig.* 67.), dans lequel on a $\odot A = m = 616'',6$; $\odot G = r - R = 916'',1$; $AG = \delta = \sqrt{1532,7.299,5}$, et la durée $= 2C\delta$: elle est suivant M. Delambre, qui suppose $r - R = 915'',1$; $\theta' = 5$ h. $37' 22''$. Avec la valeur corrigée $r - R = 916'',1$ on trouvera $\delta = 677'',53$, et $\theta = 5$ h. $38' 3''$. Les tables donnent donc la durée trop petite de $4' 28'' = 268'' = \partial\theta$, ou de $3' 47''$, et par conséquent la latitude trop grande de ∂b, et la vraie latitude géocentrique dans la conjonction sera $= b - \partial b$, b étant celle calculée sur les tables $= +10' 23'',5$. La correction ∂b se trouvera par le procédé suivant.

Les équations $\delta^2 = (r-R)^2 - m^2$ et $m = b\cos\omega$, donnent $\partial\delta = -\frac{m\,\partial m}{\delta}$ et $\partial m = \partial b\cos\omega$, donc $\partial\delta = -\frac{m}{\delta}\partial b\cos\omega$. Or $\theta = 2C.\delta$, donc $\partial\theta = -\frac{2Cm}{\delta}\partial b\cos\omega = -\frac{2Cm^2}{b\delta}\partial b$. Mais on a trouvé par observation, $\partial\theta = -268''$ ou $227''$: la dernière valeur donne l'équation $\partial b = \frac{b\delta}{Cm^2}$. $113'',5$ ou à cause de $b = 623'',5$, $\partial b = 8'',42$; la première valeur aurait donné $\partial b = 9'',93$. M. Delambre trouve $\partial b = 4''$. Qu'il me soit permis d'observer, que ce grand astronome a calculé sur une formule qui n'est pas juste (*Astr. théor. et prat. T. II. p.* 507.), en faisant $\sin u = \frac{m}{r-R}$ et $\theta = 2Cb\,\text{tang}\,u$. L'angle u est donc AG⊙, d'où il suit $AG = \delta = m\cot u$, et $\theta = 2Cm\cot u = \frac{2Cb\cos\omega}{\text{tang}\,u}$ au lieu de $2Cb\,\text{tg}\,u$, qui donnerait $\theta = 4\,\text{h.}\,44'$ au lieu de $5\,\text{h.}\,37'$. Dans un autre endroit (*pag.* 488. 489.) M. Delambre calcule θ à l'aide des formules: $u' = 90° - (90° - u - \omega)$, $u'' = 90° - (90° - u + \omega)$, qui donnent les différences des longitudes, à l'entrée $= s\cos u'$, à la sortie $= s\cos u''$, d'ou il vient la corde, réduite à l'écliptique $= s(\cos u' + \cos u'')$, et $\theta = \frac{3600''}{\eta'}\,s(\cos u' + \cos u'') = \frac{Cs}{\cos\omega}(\cos u' + \cos u'') = 2\,\text{h.}\,25'\,36'' + 3\,\text{h.}\,11'\,46'' = 5\,\text{h.}\,37'\,22''$. Introduisons l'angle u dans cette équation: l'on aura $\theta = \frac{2Cs}{\cos\omega}\cos\frac{u'+u''}{2}\cos\frac{u'-u''}{2}$; mais $\frac{u'+u''}{2} = u$, $\frac{u'-u''}{2} = \omega$, donc $\theta = 2Cs\cos u$, et en substituant $s = \frac{m}{\sin u} = \frac{b\cos\omega}{\sin u}$, $\theta = \frac{2Cb\cos\omega}{\text{tang}\,u}$, comme ci-dessus. J'ai pris la liberté de relever cette petite erreur qui pourrait embarrasser quelques lecteurs, pour faire voir, avec quelle attention j'ai lu cet excellent ouvrage.

L'erreur géocentrique $8'',42$ sera réduite au soleil, en la multipliant par $\frac{V-v}{v}$: la correction de la latitude héliocentrique deviendra ainsi $-3'',35$; et la latitude héliocentrique corrigée dans la conjonction $= 4'\,8'',1 - 3'',35 = 4'\,4'',7$. L'inclinaison de l'orbite de Vénus étant $3°\,23'\,35''$, la latitude $4'\,4'',7$ donnera la distance de Vénus au noeud, réduite à l'écliptique, $1°\,8'\,47''$. La conjonction arriva avant le noeud descendant, d'où il résulte la longitude héliocentrique du ♊ $= ☿ + 1°\,8'\,47'' = ⊙ + 181°\,8'\,47''$, ⊙ étant la longitude du soleil au moment de la conjonction. Quoique les tables du soleil n'aient pas besoin d'être corrigées, le tems de la conjonction, et par conséquent ⊙, dépendra de la longitude de Vénus. Soit T′, T″, le milieu entre tous les tems de l'entrée et de la sortie géocentriques, calculés par les opérations

exposées au commencement de ce §: $\frac{T'+T''}{2} = M$ sera le tems du milieu du passage géocentrique. Le tems dont la conjonction arrive avant le milieu, est $C.n = C b \sin\omega$, b étant la latitude corrigée 4′ 4″,7. On aura donc le tems corrigé de la conjonction, $T = M - C b \sin\omega$. En calculant sur les tables, la longitude de la terre $= L$ qui répond au tems T, L sera en même tems la longitude héliocentrique de Vénus; la comparaison avec la longitude tirée des tables, donnera donc l'erreur des tables en longitude. On a aussi la longitude du noeud descendant $= L + 1^\circ\,8'\,47''$.

LIVRE VII.

DES SATELLITES.

CHAPITRE. I.

Découverte des Satellites.

§. 305. On appelle *Lunes, Planètes secondaires,* ou *Satellites,* les corps célestes qui ne circulent autour du soleil que médiatement, le centre de leurs orbites n'étant pas le soleil, mais une planète principale qu'ils accompagnent dans sa route autour du soleil. Cette définition se rapporte au système de Copernic: car d'après celui de Ptolémée, toutes les planètes, sans excepter le soleil, sont des satellites de la terre, tandis que suivant Copernic, le soleil est le centre de toutes les orbites planétaires, la terre n'ayant qu'un seul satellite, dont la théorie a été exposée en détail dans le *Liv. IV.* Comme la terre est une des plus petites planètes du système solaire, et qu'il paraît que les planètes supérieures ont plus besoin de lunes qui puissent éclairer leurs nuits, et que leurs grandes masses sont plus capables de gouverner des systèmes subordonnés, il était naturel de penser, que ces planètes devaient être entourées de satellites. Pour décider cette supposition par les observations, il est nécessaire d'examiner d'avance, comment les satellites d'une planète supérieure doivent se présenter à la terre. Un observateur, éloigné de la

terre de 3000 de ses diamètres, verrait le demi-diamètre de la terre sous un angle dont la cotangente $= 6000$, ce qui fait $34'',5$ ou le double du demi-diamètre de Jupiter. Le rayon de l'orbite de la lune serait vu sous un angle 60 fois plus grand, ou de $34'\ 30''$, et le demi-diamètre de la lune sous l'angle $\frac{3}{11}\ 34'',5 = 9''$, à peu près comme Vénus. L'observateur, placé entre le soleil et la terre, verrait donc deux étoiles à peu près de la grandeur de deux fois Jupiter et de Vénus, qui tourneraient autour du soleil en une année, d'occident à l'orient; le mouvement de la grande étoile paraîtrait assés uniforme, mais la petite étoile se trouverait tantôt à droite tantôt à gauche de la grande, et elle passerait par dessus ou par dessous d'elle, sans s'en écarter de plus de $34'$, ou du diamètre de la lune, vu de la terre. En passant derrière la terre, la lune disparaîtrait souvent, étant couverte par la terre, ou perdant sa lumière déjà à quelque distance. Dans la conjonction inférieure l'observateur verrait, outre ces deux corps, une tache ronde et opaque (l'ombre de la lune), qui passerait sur le grand disque.

Ces conséquences sont évidentes, et si l'on aperçoit effectivement des phénomènes semblables, il faut conclure qu'ils naissent d'un objet semblable, d'une planète entourée de son satellite. Ce raisonnement n'est pas une pure analogie, mais une démonstration astronomique: car en astronomie on appelle satellite chaque corps, dont le mouvement s'explique et se calcule à l'aide de l'hypothèse, que son centre est quelque planète connue, quand même on ne pourrait pas prouver rigoureusement par la mesure des distances, qu'il décrit un cercle autour de cette planète.

C'est en général la méthode qui sert à distinguer les satellites d'avec les autres astres. Les étoiles fixes ont aussi un mouvement propre, quoique très-lent; mais il n'est pas périodique, ou sa période est si immense, que des milliers d'années ne suffisent pas pour la mesurer. En conséquence, si l'on aperçoit deux ou plusieurs étoiles, très-près l'une de l'autre, qui ont un mouvement plus rapide, en s'éloignant l'une de l'autre de deux côtés, sans franchir une certaine limite, et qui suivent le mouvement plus simple de la plus grande étoile; on peut en inférer, que les petites étoiles sont des satellites de la grande étoile.

§. 306. En supposant la parallaxe du soleil $= 9''$, la terre à la distance de Jupiter qui est 5, 2 fois plus éloigné du soleil, aurait un demi-diamètre apparent de moins de $2''$, le diamètre de la lune serait de $1''$, et le rayon de l'orbite lunaire serait vu sous un angle d'à peu près $2'$. La lune serait donc invisible à la vue simple ; et en supposant même les satellites de Jupiter et leurs orbites deux fois plus grands que la lune et que son orbite, ils paraîtraient sous un angle de $1''$, et éloignés de Jupiter de $4'$ ou de six fois le diamètre de leur planète. La petitesse de leur diamètre et de leur distance au disque luisant de Jupiter, les rendrait invisibles à l'oeil nu sur la terre, et l'on ne pouvait pas espérer de les voir avant la découverte des téléscopes. Les satellites de Saturne ne seraient visibles qu'avec de très bons téléscopes.

L'expérience a parfaitement confirmé tout cela. La vue la plus perçante de l'homme n'est peut-être pas capable de reconnaître les satellites de Jupiter, encore moins ceux de Saturne; mais à peine les téléscopes étaient-ils inventés, que les satellites de Jupiter furent découverts, et avec la perfection des téléscopes le nombre des satellites connus s'est considérablement accru. Au commencement de l'an 1610, un an après l'invention des téléscopes, Galilée et Simon Mayer (*Marius*) découvrirent *quatre satellites de Jupiter*, et il est certain qu'il n'y en a pas davantage. On les distingue l'un de l'autre, ainsi que les satellites des autres planètes, par la dénomination du *premier, second*, etc. suivant leur distance à la planète principale, de sorte que le *premier* en est le plus près.

Dans la seconde moitié du même siècle cinq *satellites de Saturne* furent découverts, et pendant cent ans on n'en connaissait pas d'autres. Le *quatrième*, étant le plus grand, fut découvert le premier par Huyghens en 1655. Les quatre autres furent découverts longtems après par Cassini, le V en 1671, le III en 1672, le I et le II en 1684. Le I, étant plus près de Saturne que $44''$, est très-difficile à voir. Comme il est toutefois deux fois plus éloigné de Saturne que l'anneau, il était à présumer, qu'entre son orbite et l'anneau il y avait encore des satellites, qu'on ne pourrait voir qu'avec des téléscopes plus parfaits. L'an 1789 M. Herschel découvrit *deux nouveaux satellites de*

Saturne, dont les orbites sont entourées par les cinq premières, mais plus éloignées de Saturne que l'anneau: ce sont donc proprement le I et le II, et le III est celui qu'on avait nommé jusqu'alors le I, et ainsi de suite. Nous connaissons donc actuellement *sept satellites de Saturne.*

Deux ans auparavant M. Herschel avait découvert *deux satellites d'Uranus*, et depuis ce tems il en a encore observé quatre. On connaît donc *six satellites d'Uranus*, et *dix-huit satellites dans le système solaire;* jusqu'à présent on n'en a pas aperçu d'autres. Un satellite de Vénus que Cassini et Montaigne crurent avoir observé, n'était apparemment qu'une illusion qui provenait de la forte lumière de Vénus, réfléchie de la surface convexe de l'oeil sur le verre oculaire, et renvoyée de celui-ci à l'oeil; car quoique les astronomes l'aient cherché avec soin, ils ne l'ont vu ni sur le soleil dans les passages de Vénus en 1761 et 1769, ni dans d'autres parties de son orbite.

CHAPITRE II.

Théorie de leurs orbites.

§. 307. La théorie du mouvement des satellites exige d'autres méthodes que celle de la lune, par deux raisons: parcequ'il n'est ni nécessaire ni possible d'atteindre la même précision, et que l'observateur ne se trouve pas au centre du mouvement. Il suffira de développer ces méthodes relativement à Jupiter, parceque la plupart en est applicable aux autres planètes. Les *élémens* des orbites des satellites, dans l'ordre suivant lequel l'un est dérivé de l'autre, sont:

1. Durée d'une *révolution*, et *mouvement moyen*;
2. *Distance* à la planète principale;
3. *Inégalités* et *mouvement vrai*;
4. *Inclinaison* et *noeuds*;
5. *Grosseur*.

Il était aisé de déterminer les élémens principaux, et de s'apercevoir que les satellites circulent autour de Jupiter suivant la même direction que les planètes autour du soleil, d'occident en orient. Leur mouvement est si rapide que, dans l'espace de quelques heures, on les voit des deux côtés de Jupiter; et leurs éclipses sont si fréquentes qu'elles fournissent un moyen bien simple de déterminer leur mouvement. Quant au premier élément, il est indifférent lequel des deux on détermine par observation, la révolution *synodique* ou *périodique*, parceque le mouvement de Jupiter étant connu, il est aisé de dériver l'une de l'autre. Il serait inutile de déterminer la différence entre les révolutions périodiques et *sidérales*, arcequ'elles ne durent que peu de jours. Nous appellerons donc révolution *périodique*, le tems au

bout duquel le satellite est vu de Jupiter suivant une direction, parallèle à celle où il était au commencement de la période, ou le tems qu'il emploie à revenir à la même longitude jovicentrique.

§. 308. En observant l'instant où le satellite est en conjonction supérieure ou inférieure avec la planète, leur longitude géocentrique étant la même, et en faisant la même observation dans la conjonction prochaine, les mouvemens connus de Jupiter et du Soleil donneront les révolutions périodique et synodique. Soient (*Fig.* 85.) T*t*, IM, LNM ou *lnm*, les directions des mouvemens de la terre, de Jupiter, et du satellite; supposons que d'une conjonction supérieure à la prochaine, la terre soit allée de T à *t*, Jupiter de I à *i*, et que le satellite soit revenu à la conjonction en *l* sur la droite *t i l*; et tirons $\lambda i\tau$ et *t*K parallèles à TIL: cela posé le satellite aura fait autour de Jupiter, une révolution entière plus l'angle λil. Connaissant par observation les deux longitudes géocentriques de Jupiter, $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$, l'angle $li\lambda$ sera $= lt\mathrm{K} = \mathfrak{D}' - \mathfrak{D} = \omega$. Si l'on veut employer les lieux héliocentriques, la theorie de Jupiter et de la terre donnera

$$1\mathrm{S}i = i,\ \mathrm{IST} = \alpha,\ i\mathrm{S}t = \beta,\ \mathrm{ST} = a,\ \mathrm{S}t = b,\ \mathrm{SI} = c,\ \mathrm{S}i = e,$$

d'où l'on tirera

$$\text{tang SIT} = \frac{a \sin \alpha}{c - a \cos \alpha}, \qquad \text{tang S}it = \frac{b \sin \beta}{e - b \cos \beta},$$

après quoi on aura $\lambda il = \tau it = \tau i\mathrm{S} - \mathrm{S}it$, et $\tau i\mathrm{S} = \mathrm{TOS} = \mathrm{TIS} + \mathrm{IS}i$, donc

$$\omega = \mathrm{SIT} + i - \mathrm{S}it.$$

En nommant τ le tems entre les deux observations, on aura

la durée d'une *révolution périodique*, $t = \frac{360^\circ}{360^\circ + \omega}\,\tau$,

où ω peut avoir une valeur négative, si S*it* est plus grand que SIT + *i*, ou si Jupiter est rétrograde.

§. 309. On trouvera de la même manière la *révolution synodique* T, par le moyen des éclipses des satellites, qui présentent un moyen très-facile de les observer dans leurs conjonctions héliocentriques supérieures avec Jupiter, et qui, à cause de la petite inclinaison de leurs orbites relativement à celle de Jupiter, sont si fréquentes, que les trois premiers satellites, et à quelques exceptions près le quatrième aussi, traversent l'ombre de Jupiter dans chaque

conjonction supérieure. Si Jupiter n'est pas opposé au soleil, l'oeil, placé de côté, verra le satellite disparaître ou reparaître à quelque distance de la planète. Si l'on peut observer et le tems de l'immersion dans l'ombre et celui de l'émersion, le milieu entre ces deux tems sera l'instant de la conjonction héliocentrique du satellite avec Jupiter. Les satellites de Saturne sont observés dans leurs conjonctions géocentriques avec la planète, lorsqu'elle est opposée au soleil, de sorte que ce sont en même tems les conjonctions héliocentriques. Si donc le satellite N a été vu de la terre Q en conjonction supérieure avec Saturne ou Jupiter I, et que la conjonction suivante arrive en n, la terre étant en P, Saturne en i, soit il parallèle à SIN. Connaissant la durée d'une révolution périodique t (§. 308.), on verra, combien de fois l'intervalle entre les deux oppositions τ renferme le tems t: soit donc $\tau = nt + \theta$. Pendant ce tems le satellite a fait n révolutions périodiques plus l'angle $lin = ISi = i$, et n révolutions synodiques. On a donc l'équation $n\mathrm{T} = \tau$, d'où il suit la

durée d'une *révolution synodique*, $\mathrm{T} = \frac{\tau}{n}$.

Les premières déterminations ne donneront pas les valeurs exactes de T et t, parce qu'on a supposé le mouvement uniforme. Deux conjonctions consécutives donneront la révolution affectée de toutes les inégalités du mouvement des satellites. Cela suffit cependant, pour qu'on ne puisse pas se tromper sur le nombre des révolutions entières que le satellite a faites dans un tems considérable. On se servira donc du même procédé qui a servi à déterminer le mouvement moyen de la lune, en comparant successivement des conjonctions plus éloignées. Ainsi n sera connu, de quelque grandeur que soit l'intervalle τ, et l'on aura très-exactement $\mathrm{T} = \frac{\tau}{n}$.

§. 310. Les durées des révolutions donnent immédiatement le mouvement moyen des satellites, vu de Jupiter. Suivant M. Delambre, les révolutions synodiques sont,

du I. Satellite =	1 jour	18 heur.	28 m.	35,94537481	sec.
— II. — — —	3 —	13 —	17 —	53,73010606	—
— III. — — —	7 —	3 —	59 —	35,82511281	—
— IV. — — —	16 —	18 —	5 —	7,02098440	—

En nommant i le mouvement moyen de Jupiter durant une révolution synodique du satellite, ce dernier parcourra dans une révolution synodique T l'angle $360° + i$, et 360° seulement dans une révolution périodique t, d'où il suit

$$t = \frac{360°}{360° + i} \text{ T.}$$

Les valeurs précédentes donneront donc ce qui suit:

	Révolution périodique	Mouvement moyen jovicentrique en un jour	en une heure
I	1 jour 18 heur. 27 m. 33 s.	203°. 29'. 20'',4	8°. 28'. 43'',3
II	3 — 13 — 13 — 42 —	101. 22. 29, 1	4. 13. 26, 2
III	7 — 3 — 42 — 33 —	50. 19. 3, 5	2. 5. 47, 7
IV	16 — 16 — 32 — 8 —	21. 34. 16, 0	0. 53. 55, 7

§. 311. Quand le satellite, avant et après sa conjonction géocentrique, parvient à sa plus grande élongation ou *digression* de Jupiter, la corde de cet angle est le demi-diamètre de son orbite, supposée circulaire. Mais quand même l'orbite serait elliptique, il est aisé de voir, que l'excentricité devrait être excessivement grande, pour être sensible à une si grande distance: du moins le milieu entre plusieurs mesures de la plus grande digression donnera la distance moyenne à la planète. Les observations avec le micromètre donnent immédiatement l'angle, sous lequel le rayon de l'orbite est vu de la terre, et qui doit nécessairement changer à proportion de la distance de Jupiter à la terre: il faudra donc le déterminer pour la distance moyenne. Or le diamètre apparent de Jupiter changeant dans le même rapport, on n'a qu'à mesurer en même tems ce diamètre, pour avoir le diamètre de l'orbite du satellite par rapport à celui de Jupiter. Si l'on fait cette comparaison en différens tems, on trouvera ce rapport invariable, d'où il suit, que les orbites des satellites ne s'écartent pas sensiblement du cercle. En multipliant ce quotient par le demi-diamètre apparent de Jupiter, réduit à la distance du soleil à la terre, $= 1' 33'',41$ (§. 153.), et en divisant ce produit par le rayon de l'orbite de Jupiter $= 5,2$; c'est-à-dire, en multipliant le nombre qui exprime le rayon de l'orbite du satellite en demi-diamètres de Jupiter, par $\frac{1'33'',41}{5,2} = 18''$; on aura en secondes le rayon de l'orbite, tel qu'il paraît à la distance moyenne de Jupiter au soleil et à la terre. Le rapport des dia-

mètres de Jupiter et de la terre (§. 153.) donnera donc les rayons des orbites par rapport au demi-diamètre de la terre, et par conséquent en lieues. La table suivante renferme les distances des satellites par rapport au demi-diamètre de Jupiter, que Cassini a déterminées immédiatement par les observations. Les distances du III. et du IV. satellites en secondes ont été mesurées par Pound avec le micromètre, d'où l'on a déduit celles des autres suivant la troisième loi de Kepler. En divisant ce nombre de secondes par le demi-diamètre apparent de Jupiter à sa distance moyenne, $= 18\frac{5''}{8}$, Newton a calculé les nombres qu'on trouvera dans la table, ainsi que ceux qui résultent des observations de M. Delambre. En prenant pour base le premier nombre de Cassini, 5,667, pour en calculer les autres suivant la troisième loi de Kepler, au moyen des révolutions périodiques bien connues, on trouvera 9,017; 14,384; 25,299; ce qui est parfaitement d'accord avec les observations. Le système des satellites de Jupiter fournit donc une preuve frappante de la généralité de la *troisième* loi de Kepler (1). Si l'on suppose l'excentricité des satellites égale à celle de la lune $= 0,05$; la différence entre la distance la plus grande et la plus petite sera la dixième partie de la distance moyenne, ce qui fait 11″ pour le I satellite, et 50″ pour le IV: cette différence n'est pas insensible, et celle du IV a été en effet aperçue. Il en résulte que les orbites des satellites sont peu excentriques; or leur mouvement étant aussi à peu près uniforme, ils décrivent des secteurs circulaires égaux en tems égaux; d'où il suit que les aires des secteurs sont proportionnelles au tems dans lequel ils sont décrits: ce qui prouve la généralité de la *seconde* loi de Kepler. Il en est de même des satellites de Saturne.

Distances des Satellites à Jupiter

A la moyenne distance	I	II	III	IV	
de Jupiter à la terre	1′.51″,1	2′.56″,8	4′. 42″.	8′. 16″	suivant Pound
En demi-diamètres de Jupiter	5,965	9,494	15,141	26,63	—— Newton
	5,667	9,000	14,383	25,30	—— Cassini
	5,6985	9,0665	14,4619	25,4359	—— Delambre

(1) Voy. *Newt. Phil. Nat. Princ. Math. Lib. III. Phaenom. I.*

On peut aussi conclure la distance du satellite de la révolution synodique, au moyen de la plus longue durée des éclipses, et réciproquement. Parmi un grand nombre d'éclipses il s'en trouvera sans doute une qui est arrivée dans le noeud de l'orbite du satellite; et c'est celle dont la durée a été la plus longue. Soient (*Fig.* 86.) AB, CD, les disques du soleil et de Jupiter, EF l'orbite d'un satellite, traversant l'ombre de Jupiter: l'arc EF sera dans un plan passant par les centres S, I, si l'on a choisi parmi tous les intervalles entre l'immersion E et l'émersion F le plus long. On a donc

$$SI : GI :: SA - IC : IC - GE ;$$

et en nommant $SA = r$, $IC = \varrho$, $SI = a$, $IG = x$,

$$IC - GE = \frac{x(r-\varrho)}{a}, \quad \text{et} \quad GE = \frac{a\varrho - x(r-\varrho)}{a},$$

GE étant la droite, parallèle à SA, IC, et perpendiculaire à AE ou IG. On a donc

$$\text{tang}\, EIG = \frac{EG}{IG} = \frac{a\varrho - x(r-\varrho)}{ax},$$

et en nommant

la durée d'une révolution synodique $= T$,

la plus longue durée des éclipses $EF = \tau$,

$T : \tau :: 360° : 2\,EIG$, ou $EIG = \frac{\tau}{T}\,180° = \Phi$; d'où l'on tirera

$$-ax\,\text{tang}\,\Phi = a\varrho - x(r-\varrho),$$

et le rayon de l'orbite, $x = \dfrac{a\varrho}{r - \varrho + a\,\text{tang}\,\frac{\tau}{T}\,180°}$.

Si x est donné, on a

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{a\varrho - x(r-\varrho)}{ax}, \quad \text{et} \quad T = \frac{180°}{\Phi}\,\tau.$$

Comme AE et SG sont à peu près parallèles, on peut faire $GE = IC = \varrho$: en effet, on trouvera pour tous les quatre satellites, $GE = \varrho . 0,99$. Cela posé, on aura

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{\varrho}{x}, \quad x = \varrho\,\text{cot}\,\frac{\tau}{T}\,180°, \quad \text{et} \quad T = \frac{180°}{\Phi}\,\tau.$$

§. 312. Le troisième élément (§. 307.) concerne les corrections ou équations du mouvement moyen, qui donneront, pour un tems quelconque, le mouvement et le lieu vrai. Il faut distinguer les inégalités *réelles* de celles qui ne sont qu'*apparentes*. Si le mouvement vrai d'un satellite était con-

stamment égal au mouvement moyen, la durée de chaque révolution périodique serait aussi égale à la durée moyenne. Si donc les revolutions *périodiques* se trouvent avoir une durée variable, cela ne peut venir que d'une inégalité réelle du mouvement du satellite; et réciproquement. Mais quand même le mouvement vrai serait toujours égal au mouvement moyen, les révolutions *synodiques* ne seraient pas de la même durée, parcequ'elles dépendent du mouvement de Jupiter, qui n'est pas uniforme. Pour achever une révolution synodique, le satellite doit parcourir, outre le cercle entier de la révolution périodique, l'angle que Jupiter a décrit autour du soleil pendant ce tems. Or ces angles étant différens en tems égaux, les intervalles entre une conjonction avec le soleil et la suivante ne pourront pas être égaux. Ces inégalités de la révolution synodique ne sont donc pas l'effet de l'inégalité du mouvement du satellite, mais de Jupiter: elles ne sont qu'apparentes. Ainsi l'excentricité des orbites des satellites, et les effets de l'attraction, ou les perturbations qui proviennent de causes étrangères, sont des inégalités réelles; l'équation du centre, et toutes les autres inégalités de Jupiter, ainsi que l'équation de la lumière, sont des inégalités apparentes. Quand il s'agit des lieux géocentriques, il faut aussi tenir compte des inégalités du mouvement de la terre. Les éclipses des satellites, étant le meilleur moyen d'observer les conjonctions synodiques, nous apprendront de la manière la plus sure les inégalités apparentes. Comme ces éclipses sont l'objet principal des observations, on a découvert les inégalités apparentes avant les autres qui sont aussi moins considérables.

§. 313. En déterminant la durée moyenne d'une révolution synodique, on suppose le mouvement de Jupiter uniforme: en effet, on compare, pour plus de précision, un intervalle si grand, que toutes les inégalités du satellites et de Jupiter se compensent, ou deviennent insensibles; ou bien on réduit le lieu de Jupiter au lieu moyen. Ainsi, en prenant pour base une conjonction synodique, arrivée dans l'aphélie de Jupiter, et en y comparant une autre où l'anomalie de Jupiter était 90°, le mouvement vrai de Jupiter a été pendant ce tems, plus petit que le mouvement moyen, de la plus grande équation du centre: la conjonction vraie, ou le milieu de l'éclipse,

sera donc arrivée avant la conjonction moyenne, du tems que le satellite employe à décrire, par son mouvement synodique, un arc égal à l'*équation du centre de Jupiter*: ce qui est la plus grande correction qui peut en résulter. Elle a lieu environ trois ans après la conjonction dans l'aphélie de Jupiter, dont la révolution est à peu près douze ans. Au bout de six ans Jupiter arrive au périhélie, son lieu vrai est le même que le lieu moyen, et la correction est nulle. Au bout de neuf ans l'anomalie de Jupiter est 270°, son lieu vrai est plus avancé que le lieu moyen, de la plus grande équation, et le satellite doit parcourir cet arc, pour revenir à la conjonction: la correction est de même grandeur que celle qui eut lieu après trois ans, mais de nature opposée.

Les tables de Jupiter présentent l'équation du centre, qui répond à une anomalie donnée. Or le but principal de la théorie des satellites étant le calcul de leurs éclipses, on a arrangé les tables ensorte que chaque équation est exprimée par le *tems* qu'il faut ajouter à la conjonction ou éclipse moyenne, pour trouver l'instant de la conjonction vraie. Ainsi, après avoir trouvé l'équation du centre de Jupiter $= \Phi$, la durée connue d'une révolution synodique T donnera la correction de la conjonction du satellite, ou du milieu de l'éclipse $= \frac{\Phi}{360^\circ}$ T: elle est positive ou négative, selon que l'anomalie de Jupiter, comptée de l'aphélie, est plus ou moins grande que 180°. Suivant les tables de M. Delambre, la plus grande équation de Jupiter était en 1750 $= 5^\circ 30' 38''$, avec un accroissement annuel de $0'',66$; ce qui donne les plus grandes corrections, pour le I satellite $=$ 39 m. pour le II $=$ 1 h. 18 m. 20 s. pour le III $=$ 2 h. 38 m. 26 s. pour le IV $=$ 6 h. 9 m. 23 s. L'argument de cette équation est l'anomalie de Jupiter, A, comptée du périhélie, et exprimée en dix-millièmes de 90°, ce qui fait $32'',4$. Elle a été réunie aux équations de la lumière qui ont le même argument.

§. 314. M. Delambre a fait, relativement à la conversion des inégalités en tems, une remarque essentielle qu'on avait ordinairement négligée. T est le tems, moyen ou vrai, solaire ou sidéral, que le satellite emploie, à raison de son mouvement moyen, à revenir à la ligne droite qui joindrait les centres du soleil et de Jupiter, si le mouvement de cette planète était

uniforme; la vraie révolution synodique T′ est le tems, moyen ou vrai, etc. que le satellite emploie à revenir, par son vrai mouvement, à la ligne qui joint actuellement les deux centres. L'angle, formé par ces deux lignes, est égal aux inégalités E′ de Jupiter au moment de la conjonction vraie; et si l'inégalité du satellite dans le même instant est $-e'$, il doit parcourir de plus l'angle e'. Ainsi l'angle parcouru pendant une révolution synodique vraie est $= 360° + (E' - E'') - (e' - e'')$, E″, e'', étant les inégalités au moment de la conjonction précédente. La correction de chaque conjonction moyenne, ∂T, sera donc le tems que le satellite met à parcourir $E' - e'$; et comme il parcourt 360° dans le tems T, on aura $\partial T = \frac{E' - e'}{360°} T$, ce qu'il faut ajouter à l'époque de la conjonction moyenne, donnée par les tables, pour avoir l'instant de la conjonction vraie. Dans les tables on trouve, avec l'argument P, l'inégalité E pour la conjonction moyenne; si donc on employait, au lieu de P, l'argument $P + \partial P$ qui répond à la conjonction vraie, on trouverait dans les mêmes tables l'inégalité E′ au lieu de E. Mais ∂P est l'accroissement de l'argument P dans le tems ∂T: ainsi en nommant μ, ν, les mouvemens des argumens P, Q, pendant une seconde, on aura $\partial P = \mu \partial T$, $\partial Q = \nu \partial t$, Q étant l'argument de l'inégalité e. En substituant la valeur précédente de ∂T, on aura $\partial P = \frac{E' - e'}{360°} \mu T$, où l'on peut mettre, sans erreur sensible, E, e, à la place de E′, e'; ce qui donnera $\partial P = \frac{\mu (E - e)}{360°} T$, $\partial Q = \frac{\nu (E - e)}{360°} T$. Le problème se réduit donc à corriger les argumens P, Q, en y ajoutant ∂P, ∂Q, et à prendre dans les tables, avec ces argumens corrigés, $P + \partial P$, $Q + \partial Q$, les inégalités, E′, e': alors on aura la correction de la conjonction moyenne, $\partial T = \frac{E' - e'}{360°} T$; c'est-à-dire on convertira les inégalités, trouvées avec les argumens corrigés, en tems synodique moyen. Il faut donc commencer par corriger les argumens, et l'on trouve ces corrections dans les tables de M. Delambre, qui suivent immédiatement celles des perturbations de Jupiter.

Prenons pour exemple l'équation du centre de Jupiter, qui est $E = 5°30'38''.\sin A$, l'argument A étant l'anomalie moyenne de Jupiter, dont le mouvement pendant une seconde est $\mu = 0'',00347$; ce qui donne pour le I satellite, $\frac{\mu T}{360°} = 0,00041$; donc $\partial P = 0,00041 . 5°30'38''.\sin A$, puisque e

est insensible. Sa plus grande valeur est $0,00041 . 5° 30' 38'' = 8'',1336$; ce qui fait, en divisant la circonférence en 40000 parties, $\frac{8'',1336}{360°}\ 40000 = 0,245$; ou un quart d'une de ces parties par lesquelles l'argument A est exprimé. On n'a donc pas jugé nécessaire de corriger l'argument A, mais on a ajouté à l'équation E ou A sa correction qui est $5° 30' 38'' . \cos A . \partial A = (5° 30' 38'')^2\ 0,00041 . \sin A \cos A = 1908''. 0,000205 . \sin 2A = 0'',39 . \sin 2A$. Pour les autres satellites on trouvera $0'',78 . \sin 2A$; $1'',58 . \sin 2A$; $3'',68 . \sin 2A$. Ces corrections ont été réunies à l'équation A.

§. 315. En ajoutant la correction précédente avec la durée moyenne, les conjonctions synodiques ainsi corrigées devraient être d'accord avec les observations, s'il n'y avait pas d'autres inégalités: la différence entre le calcul et les observations servira donc à déterminer ces dernières. C'est de cette manière qu'on découvrit l'*équation de la lumière* par le moyen des éclipses. Quelle que soit la corde du cône d'ombre, décrite par le satellite, le milieu entre le commencement et la fin de l'éclipse sera à très-peu près l'instant de la conjonction synodique. D'après ce principe on ne tarda pas à s'apercevoir, que les observations s'accordaient bien avec le calcul, lorsque Jupiter était en quadrature ou 90° du soleil; mais que dans les syzygies, le milieu de l'éclipse arrivait de plus de 8 minutes après ou avant le milieu calculé, selon que Jupiter était en conjonction ou opposé au soleil. La différence entre les conjonctions et les oppositions de Jupiter monte donc à plus de 16 minutes; et comme elle dépend uniquement de la situation de Jupiter relativement au soleil, c'est-à-dire de sa distance à la terre, il est nécessaire de chercher une explication de cette inégalité, qui, étant indépendante des orbites de Jupiter et des satellites, se fonde seulement sur la distance plus ou moins grande de Jupiter à la terre. C'est ainsi que Roemer découvrit la vitesse de la lumière (§. 14.). Jupiter est le plus et le moins éloigné de la terre dans la conjonction et l'opposition: la différence des deux distances est le diamètre de l'orbite de la terre. Si donc la lumière emploie un certain tems à parcourir ce diamètre, et qu'on imagine deux éclipses qui commencent et finissent en même tems, et dont l'une arrive dans l'opposition, l'autre dans la conjonction de Jupiter; le dernier rayon de lu-

mière au moment de l'immersion du satellite, et le premier à son émersion, arrivera à la terre plutôt dans l'opposition que dans la conjonction, du tems que la lumière emploie à parcourir le diamètre de l'orbite de la terre: d'où il suit que les éclipses de l'opposition et de la conjonction arriveront plutôt et plus tard de la moitié de ce tems, que d'après le calcul qui est fondé sur des observations très éloignées, et par conséquent sur la distance moyenne de Jupiter. Dans d'autres aspects la différence sera moindre; elle sera nulle dans les quadratures, où la distance de Jupiter à la terre est égale à la moyenne. On pouvait d'autant moins douter de la vérité de cette hypothèse qui satisfaisait parfaitement aux observations, qu'elle était intimement liée avec l'aberration des étoiles. Suivant cette hypothèse la lumière emploie un peu plus de 16 min. pour parcourir le diamètre de la terre, ce qui détermine sa vitesse. Bradley s'en servit pour expliquer l'aberration, et il détermina plus exactement la vitesse de la lumière par l'aberration (§. 15. 16.); car quoique ces deux phénomènes donnent la même vitesse, et que par conséquent il mettent hors de doute la vérité de l'hypothèse, les observations délicates de l'aberration sont plus propres que celles des éclipses des satellites, à déterminer la vitesse de la lumière avec une parfaite précision, et à donner même une valeur plus exacte de l'équation de la lumière. Cependant M. Delambre, en comparant ses tables des satellites avec un grand nombre d'observations, a trouvé la même vitesse de la lumière, que celle qui résulte de l'aberration $= 20''$: ce qui est une preuve de la grande précision de ces tables.

§. 316. On sait que la lumière emploie 8 m. 13, 2 s. à parcourir le rayon de l'orbe terrestre. Si donc les conjonctions étaient calculées pour les distances moyennes dans les quadratures, l'équation de la lumière serait $= +$ 8 m. 13, 2 s. dans les conjonctions, et $-$ 8 m. 13, 2 s. dans les oppositions. Pour éviter la subtraction, on a construit les tables de manière qu'elles donnent immédiatement le tems des éclipses pour les oppositions de Jupiter, où l'équation de la lumière est par conséquent supposée nulle: de là jusqu'à la conjonction elle va en croissant, son *maximum* étant $= +$ 16 m. 26, 4 s.; et de la conjonction jusqu'à l'opposition elle va en décroissant. Son argument est

donc la distance de Jupiter à l'opposition, ou son angle de commutation C: l'argument dans les tables de M. Delambre est $B = 180° + C$, ou distance de Jupiter à la conjonction, exprimée en dix-milliémes de 360°, ce qui fait 2′9″,6. Il est aisé de voir, que les équations de la lumière ont la même valeur pour tous les satellites, parceque la différence de leurs distances est ici insensible.

Soit (*Fig.* 87.) S le soleil, t la terre, i le lieu de Jupiter réduit à l'écliptique, $St = r$, $Si = R$, $ti = D$: on pourra prendre, sans erreur sensible, D au lieu de la distance vraie, et l'on aura

$$D = \sqrt{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos C)} = R\sqrt{\left(1 + \frac{2r}{R}\cos B + \frac{r^2}{R^2}\right)},$$

d'où l'on tirera, en exprimant les puissances des cosinus par les cosinus des angles multiples, et en développant jusqu'à la troisième puissance de $\frac{1}{R}$, ce qui suffit,

$$D = R + \frac{r^2}{4R}\left(1 + \frac{r^2}{16R^2}\right) + r\cos B\left(1 - \frac{r^2}{8R^2}\right) - \frac{r^2\cos 2B}{4R}\left(1 - \frac{r^2}{4R^2}\right) + \frac{r^2\cos 3B}{8R^2} - \frac{5r^4\cos 4B}{64R^3}.$$

Si l'on nomme α et γ les excentricités de Jupiter et de la terre, A, S, les anomalies comptées du périhélie, a, 1, leurs distances moyennes au soleil, on aura, en négligeant les carrés des excentricités,

$$R = a(1 - \alpha\cos A), \quad r = 1 - \gamma\cos S \text{ (§. 138.)}.$$

En substituant ces valeurs, il viendra

$$\begin{aligned} D = {} & a + \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{64a^3} - \alpha\cos A\left(a - \frac{1}{4a} - \frac{1}{32a^3}\right) \\ & + \cos B\left(1 - \frac{1}{8a^2}\right) - \frac{\cos 2B}{4a}\left(1 - \frac{1}{4a^2}\right) + \frac{\cos 3B}{8a^2} - \frac{5\cos 4B}{64a^3} \\ & - \frac{\alpha}{4a^2}\cos A\cos B - \frac{\alpha}{4a}\left(1 - \frac{3}{4a^2}\right)\cos A\cos 2B \\ & + \frac{\alpha}{4a^2}\cos A\cos 3B - \frac{15\alpha}{64a^3}\cos A\cos 4B \\ & - \frac{\gamma}{2a}\left(1 + \frac{1}{16a^2}\right)\cos S - \gamma\left(1 - \frac{3}{8a^2}\right)\cos S\cos B \\ & + \frac{\gamma}{2a}\left(1 - \frac{1}{2a^2}\right)\cos S\cos 2B - \frac{3\gamma}{8a^2}\cos S\cos 3B + \frac{5\gamma}{16a^3}\cos S\cos 4B. \end{aligned}$$

Or D, converti en tems de la lumière, est l'équation dont les éclipses à la distance D sont vues plus tard que si le mouvement de la lumière était instantané: donc, D et a étant donnés en parties du rayon de l'orbe terrestre que la lumière parcourt en 8 m. 13, 2 s. = 493″, 2; on n'a qu'à multiplier tous les termes précédens par 493″, 2; ce qui donnera, en rejettant les termes insensibles, l'*équation de la lumière*,

$$l = 2566'',02 - 122'',54 \cdot \cos A$$
$$+ 23'',75 + 490'',92 \cdot \cos B - 23'',48 \cdot \cos 2B + 2'',28 \cdot \cos 3B - 0'',27 \cdot \cos 4B$$
$$- 0'',22 \cdot \cos A \cos B - 1'',11 \cdot \cos A \cos 2B + 0'',22 \cdot \cos A \cos 3B$$
$$- 0'',80 \cdot \cos S - 8'',17 \cdot \cos S \cos B + 0'',80 \cdot \cos S \cos 2B$$
$$- 0'',11 \cdot \cos S \cos 3B.$$

Les termes qui se trouvent dans la première ligne, sont renfermés dans l'équation A des tables de M. Delambre. Ceux dans la seconde ligne forment l'équation B, autrefois appelée la *grande équation de la lumière*. Les autres termes composent les équations A.B, et B.S. Pour rendre toutes ces équations additives, on a retranché de chaque époque une constante qui est pour le I satellite $44' 16'',5$; pour le II $1^h 39' 0'',3$; pour le III $2^h 54' 38'',79$; et pour le IV $7^h 25' 55''$.

De cette manière on satisfait au mouvement elliptique de Jupiter et de la terre; mais les perturbations de Jupiter sont trop considérables, pour pouvoir être négligées dans le calcul des éclipses: elles sont converties en tems dans la table qui, sous le titre „Perturbations", vient immédiatement après les mouvemens moyens. Les perturbations du rayon vecteur de Jupiter, δR, doivent nécessairement altérer la distance de Jupiter à la terre, et par conséquent influer sur l'équation de la lumière: elles ont été réunies à l'équation A qui a le même argument.

Le parfait accord qui se trouve entre la théorie des équations de la lumière et les observations, donne lieu à des réflexions importantes concernant le mouvement de la lumière. L'aberration annuelle prouve que la vitesse de la lumière est la même dans toute la circonférence de l'orbe terrestre; la grande équation de la lumière B nous apprend, que cette vitesse est la même suivant tous les diamètres de cette orbite; et l'équation l fait voir, qu'elle est encore la même suivant tous les diamètres de l'orbite de Jupiter: d'où l'on peut conclure, qu'en général la vitesse de la lumière est sensiblement constante, et qu'il n'y a pas de différence sensible entre la lumière du soleil et celle des étoiles.

§. 317. La comparaison du calcul des éclipses, corrigé par les équations précédentes, avec les observations, a fait découvrir les inégalités *réelles*.

*

On aperçut des différences qui nécessitaient de nouvelles corrections qu'on se proposa de déterminer par les observations; mais pour diriger ces observations, il fallait avoir une idée de la cause des corrections, afin de connaître, si non leur grandeur, au moins leur argument et leur période. La première idée qui pouvait se présenter, était l'excentricité des orbites des satellites; mais elle est trop inconsidérable, pour pouvoir être regardée comme la seule cause des inégalités, indiquées par les observations. La théorie de la lune avait fait voir, que ce satellite éprouve des perturbations fort considérables; et il était aisé de voir que les perturbations des satellites de Jupiter devaient être encore plus considérables, puisqu'ils forment un système de quatre corps, qui agissent l'un sur l'autre à une petite distance. Comme cette action dépend des positions relatives des satellites, sa période sera le tems au bout duquel tous les salellites reviennent à la même situation par rapport au soleil, parcequ'on n'observe ordinairement que les éclipses: c'est donc la période, dans laquelle chaque satellite a fait un nombre entier de révolutions synodiques. Au moyen des valeurs précédentes (§. 310.) on trouvera, que la plus courte période qui remplit cette condition pour les trois premiers satellites, est de 437 jours, dans laquelle le I fait à très-peu près 247 révolutions synodiques, le II 123, et le III 61: le IV faisant 26 révolutions en 435 jours 14 h. 13 m. la période est moins exacte par rapport au IV. Mais comme son action est la moins considérable, à cause de sa distance et de la petitesse de sa masse, et que la différence est moindre qu'un jour et demi, on s'est tenu à la période de 437 jours. On s'en servit pour former des équations empiriques, auxquelles on a enfin substitué des équations, fondées sur la théorie de la gravitation, que M. le Marquis de Laplace a données dans sa mécanique céleste. Leurs argumens sont composés des situations de chaque satellite relativement aux autres, aux apsides du III et du IV, et au noeud de leurs orbites. On les trouve dans les tables de M. Delambre sous les dénominations, C, D, E, F, G, H, I, K, L.

§. 318. Les quatre orbites sont sans doute elliptiques; mais celles des deux premiers satellites sont trop petites, pour qu'on ait pu apercevoir leur excentricité. Le mouvement des satellites doit être le plus et le moins

rapide dans le périjove et dans l'apojove: les éclipses seront donc observées plutôt dans le premier cas, et plus tard dans le second cas, que d'après le calcul; et ces observations serviront à déterminer la position des apsides. Suivant Maraldi l'apside supérieure du IV satellite était dans $10^s\ 29°\ 22'$ en 1700, avec un mouvement annuel de $+44'\ 15''$. La plus grande équation du centre se trouve, comme celle du soleil, par le moyen de la plus grande différence entre les mouvemens moyen et vrai: suivant M. Delambre, celle du IV, convertie en tems, est $= 55'\ 29''$; c'est l'équation C des tables. La plus grande équation du III, convertie en tems, est $= 4'\ 23'',7$; elle forme l'équation D des tables.

CHAPITRE III.

Eclipses des satellites.

§. 319. Le plus grand usage que l'astronomie pratique tire de la théorie des satellites, est l'observation de leurs éclipses, pour déterminer la longitude géographique. La théorie doit donc avoir le but, de fournir le moyen de calculer les éclipses avec précision. Ce qui précède, suffit pour calculer la conjonction synodique, ou le milieu de l'éclipse. Mais pour en déduire l'instant de l'immersion et de l'émersion, il faut connaître la durée, ce qui suppose les mêmes élémens que ceux qui sont employés pour calculer les éclipses de lune, dont les principaux sont le rayon de l'ombre de Jupiter dans la région du satellite, l'inclinaison de l'orbite du satellite sur celle de Jupiter, et le lieu de ses noeuds. Si Ss, Ji, (*Fig.* 38.) sont les demi-diamètres du soleil et de Jupiter, SCs sera la moitié du cône d'ombre, et l'on connaît

$$Ss = s, \quad Ji = i, \text{ et } SJ = a.$$

Soit donc VM une partie de l'orbite du satellite, $Vv = u$ le rayon de l'ombre, et $JV = c$ la distance connue du satellite à Jupiter: cela posé on aura

$$JC = \frac{\sigma i . Ji}{s\sigma} = \frac{a.i}{s-i}, \quad CV = \frac{ai}{s-i} - c = \frac{(a+c)i - cs}{s-i}, \text{ et}$$

$$u = \frac{Ji . CV}{CJ} = \frac{(a+c)i - cs}{a}.$$

Comme les angles sont très-petits, il viendra

Rayon jovicentrique de l'ombre, $VIv = u = \frac{u}{JV} = \frac{(a+c)i - cs}{ac}$,

Rayon héliocentrique de l'ombre, $VSv = v = \frac{u}{SV} = \frac{(a+c)i - cs}{a(a+c)}$.

L'angle au sommet C est $\frac{Ji}{CJ} = \frac{s-i}{a}$, et en nommant r le rayon de l'orbite

de la terre, on aura (§. 153.) $s = 16'' 1''' . r$, $i = 1' 33'',4 . r$, $C = \frac{r}{a} . 14' 27'',6$. Or a étant $= 5,2 . r$, il vient

$$C = 2' 47''.$$

§. 320. En nommant

ν l'inclinaison de l'orbite du satellite sur celle de Jupiter,

α la distance jovicentrique du satellite au ☊, ou l'argument de latitude,

β la latitude jovicentrique du satellite au dessus de orbite de Jupiter, on aura

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin \nu,$$

ce qui donnera aussi la latitude héliocentrique b. En effet, les sinus des angles visuels étant en raison inverse des distances, on aura $\sin b = \frac{c \sin \beta}{S\upsilon}$. La différence entre $S\upsilon$ et $SJ = a$ est insensible: on aura donc

$$\sin b = \frac{c}{a} \sin \beta = \frac{c}{a} \sin \alpha \sin \nu,$$

et la plus grande latitude ou inclinaison héliocentrique n sera donnée par l'équation

$$\sin n = \frac{c}{a} \sin \nu.$$

Dans les éclipses la longitude héliocentrique de Jupiter est la même que la longitude jovicentrique du satellite: α sera donc la distance héliocentrique de Jupiter au noeud de son satellite.

Soit (*Fig.* 89.) AVRB la demi-section de l'ombre dans la région du satellite, C son centre, NAB le plan de l'orbite de Jupiter, NVR l'orbite du satellite: la ligne droite qui joint les centres du soleil et de Jupiter, sera en C perpendiculaire au plan AVRB, N sera le noeud du satellite, et $CA = CV = u$. Ayant donc mené les perpendiculaires CM à NR, et Cm à NB, Cm sera le sinus de la latitude jovicentrique du satellite en conjonction, le rayon de l'orbite du satellite étant pris pour unité; d'où il viendra

$$Cm = c \sin \beta = a \sin b = c \sin \alpha \sin \nu.$$

Le mouvement de Jupiter durant une éclipse étant insensible, on aura

$$CNM = MC m = \nu, \text{ donc } CM = Cm \cos \nu = Cm,$$

parceque ν est environ 3°. En faisant l'angle $MCV = \Phi$, on aura (§. 318.)

$$\cos \Phi = \frac{c \sin \alpha \sin \nu}{u} = \frac{a\,c \sin \alpha \sin \nu}{(a+c)i - cs}, \text{ et } MV = e = u \sin \Phi:$$

MV étant converti en tems synodique du satellite, donnera la demi-durée

de l'éclipse. Ce sont les équations fondamentales de toute la théorie des éclipses; elles serviront à déterminer l'une ou l'autre des quantités qu'elles renferment.

§. 321. Si le lieu du noeud et l'inclinaison de l'orbite sont connus, les formules précédentes donneront la *durée* de l'éclipse, et par conséquent l'instant de l'immersion et de l'émersion, le milieu de l'éclipse étant donné par les tables. Les quantités a, c, i, s, α, ν, donnent

$$u = \frac{(a+c)\,i - c\,s}{a}, \quad \cos\Phi = \frac{c \sin\alpha \sin\nu}{u}, \quad e = u \sin\Phi,$$

et la révolution synodique T donnera le tems que le satellite emploie à parcourir la corde $2e$, et par conséquent la durée de l'éclipse, τ. En effet, le satellite parcourt le rayon de l'ombre u, ou l'angle jovicentrique ϑ (§. 318.) dans le tems $\frac{\vartheta}{360^\circ}$ T, qui est à τ comme u est à la corde $2e$; on a donc

$$\tau = \frac{2e}{u} \cdot \frac{\vartheta}{360^\circ} T = \frac{\vartheta T \sin\Phi}{180^\circ},$$

et ϑ étant $= \frac{u}{c}$,

$$\tau = \frac{u \sin\Phi}{\pi c} T.$$

En retranchant τ du tems de la vraie conjonction synodique, et en l'y ajoutant, on aura l'instant de l'immersion et de l'émersion, qui serait d'accord avec les observations, si le satellite disparaissait et reparaissait au moment où son centre est sur la circonférence de l'ombre. Mais la pénombre et le diamètre du satellite le font disparaître peu à peu: d'où il résulte nécessairement, que la durée dépendra de la bonté de l'oeil et du téléscope. Il faudra donc recourir aux observations, pour déterminer la durée et principalement le tems $\frac{\vartheta}{360^\circ}$ T que le satellite met à parcourir le rayon u de l'ombre, dans les éclipses qui arrivent dans le noeud même, parceque ce tems est la base du calcul de toute autre éclipse. Si l'on a un grand nombre d'éclipses, observées en différens points de l'orbite de Jupiter, on choisira celles qui ont duré le plus longtems, et l'on peut supposer qu'elles sont arrivées dans le noeud, parceque suivant la nature des *maxima*, les cordes changent insensiblement près du centre ou du noeud. Si donc *la plus longue demi-durée*, trouvée ainsi par expérience, ou le tems que le satellite emploie à parcourir u, est appellé μ, on aura

$\mu = \frac{\vartheta}{360^\circ} T$, et $\vartheta = \frac{\mu}{T} 360^\circ$, d'où il viendra

$$u = c\vartheta = \frac{2\mu\pi c}{T}, \quad \cos\phi = \frac{T \sin\alpha \sin\nu}{2\pi\mu}, \quad \text{et } \tau = \frac{2e}{u}\mu = 2\mu \sin\phi.$$

§. 322. La détermination de la durée par observation suppose qu'on a observé l'immersion et l'émersion; ce qui arrive souvent dans les éclipses du III et du IV satellite, rarement dans celles du II, et jamais dans celles du I, à cause de sa petite distance à la planète qui cachera l'immersion ou l'émersion, quelle que soit la situation de la terre. Mais il est aisé de voir que, si peu avant l'opposition de Jupiter les immersions seules ont été visibles, on verra les émersions après l'opposition, la terre ayant passé de l'autre côté. Si donc le tems écoulé entre les observations des immersions et des émersions avant et après l'opposition n'est que d'un ou de deux mois, de sorte que Jupiter n'a décrit dans l'intervalle qu'un arc de 4°, on peut supposer que les immersions et les émersions sont arrivées à la même distance du noeud; ce qui est exact, si l'opposition est arrivée dans le noeud du satellite. Soit (*Fig.* 65.) $s S \sigma$ le soleil, $t T \tau$ Jupiter, $p P q$ l'orbite de la terre, OW celle du I satellite dont l'immersion arrive en d, l'émersion en l: PQ sera l'arc que la terre décrit, pendant que les éclipses sont invisibles; mais plus loin de l'opposition, de P vers p on ne verra que les immersions d, l étant caché par Jupiter, et après l'opposition de Q en q les émersions seront visibles. Le demi-arc Pf répond à l'angle héliocentrique PSF = SPσ — SCσ, SPσ étant le demi-diamètre apparent du soleil = 16′ 1″, et SCσ = C = 2′ 47″ (§. 318.); d'où il suit PSF = 13′ 14″, angle que la terre parcourt en $5^b 22' 15''$. Quand on a donc observé en P une immersion $5^b 22'$ avant l'opposition, au bout de $10^b 45'$ la terre sera déjà en Q, où les émersions sont visibles. Or la révolution synodique du I satellite étant de deux jours à peu près, on pourra observer l'immersion le jour de l'opposition, et peu après l'opposition on verra l'émersion qui appartient à l'éclipse consécutive, de manière que la distance de Jupiter au noeud n'a changé que de 9′. On peut donc regarder l'émersion comme la fin de la même éclipse dont on a observé le commencement, et le tems écoulé entre les deux observations, τ', est égal à une révolution synodique T plus la durée de l'éclipse τ, la-

quelle sera par conséquent, $\tau = \tau' - T$. Si le tems τ' renferme n révolutions, on aura $\tau = \tau' - nT$. La plus grande valeur de τ, trouvée par ce procédé, donnera la demi-durée μ des éclipses qui arrivent dans le noeud.

§. 323. Les éclipses des satellites de Jupiter ne sont pas seulement utiles relativement à la détermination de la théorie de ces astres et des longitudes géographiques des lieux de la terre; mais elles peuvent encore servir à vérifier la théorie de Jupiter. Soit (*Fig.* 90.) le soleil en S, Jupiter en I, la terre en T, le satellite en L au milieu de l'éclipse qui arrive dans le noeud, ensorte que SIL est une ligne droite. Le milieu entre les deux digressions du satellite de Jupiter, qu'on a observées au moment de l'immersion et de l'émersion, donne la digression $ITL = \delta$ dans la conjonction L. Si donc le satellite est observé après dans sa plus grande digression $ITD = \varepsilon$, on a $IDT = 90°$, donc

$$ID = IT \sin \varepsilon = IL; \quad \sin ILT = \frac{IT}{IL} \sin \delta = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}.$$

Connaissant donc $STI = \gamma$ et $ST = r$, on aura dans le triangle ITS,

$$SIT = ILT + \delta, \quad SI = \frac{r \sin \gamma}{\sin SIT}, \quad \text{et} \quad IST = 180° - SIT - \gamma,$$

ce qui donne le rayon vecteur de Jupiter SI, et sa longitude héliocentrique $= 180° + \odot - IST = \odot + \gamma + \delta + ILT$.

CHAPITRE IV.

Les autres élémens des satellites.

§. 324. La méthode ordinaire qui consiste à déterminer l'inclinaison ν par la plus grande latitude, n'est guères applicable ici, parcequ'il est difficile de convertir la latitude géocentrique du satellite en jovicentrique; les éclipses présentent un moyen plus simple. Les éclipses dont la durée est la plus longue $= 2\mu$, donnent à peu près le noeud du satellite (§. 320.); le résultat sera plus exact, si l'on a observé deux éclipses de même durée avant et après le noeud, le milieu entre les deux longitudes héliocentriques de Jupiter donnant celle du noeud. On connaît donc la distance du satellite au noeud, α, dans toute autre éclipse dont on aura observé la durée $= \tau$, d'où l'on tirera (§. 321).

$$\sin\Phi = \frac{\tau}{2\mu}, \quad \text{et} \quad \sin\nu = \frac{2\pi\mu\cos\Phi}{T\sin\alpha}.$$

Les éclipses les plus favorables à cet effet sont celles des limites, où τ et Φ ont leurs plus petites valeurs, α étant $= 90°$, ce qui donne $\sin\nu = \frac{\pi\sqrt{(4\mu^2-\tau^2)}}{T}$.

Dès que l'inclinaison a été déterminée par les éclipses qui arrivent près des limites, le noeud se trouvera plus exactement au moyen des éclipses près du noeud, où $\sin\Phi$ est à peu près $= 1$: on trouvera l'angle α qui donne le noeud, par l'équation

$$\sin\alpha = \frac{2\pi\mu\cos\Phi}{T\sin\nu}.$$

Suivant les observations de Maraldi, les inclinaisons du I et du IV satellites sont constantes, la première de 3° 18′ 38″, la seconde de 2° 36′; l'inclinaison du II est variable de 2° 46′ à 3° 46′, dans une periode de 30 ans; celle du III varie de 3° 2′ à 3° 25′ 57″ dans la période de 132 ans.

Suivant les observations de Wargentin, les noeuds ascendans des quatre satellites ont été en 1760 renfermés entre $10^s\ 13°\ 45'$ et $10^s\ 16°\ 39'$. Les noeuds du II, du III, et du IV, paraissent avoir un mouvement annuel de $+2'\ 3'', +3'$, et $+4'\ 15''$. Il résulte de tout cela, que les plans des quatre orbites coïncident à peu près avec l'équateur de Jupiter (§. 166.).

Quelque petite que soit l'inclinaison des orbites, elle ne laisse pas d'altérer sensiblement la durée des éclipses. La plus grande durée dans les noeuds ne dépend pas de l'inclinaison, mais seulement de la distance et du mouvement des satellites, c'est à dire de la section de l'ombre et de la vitesse avec laquelle les satellites la traversent. *La plus grande demi-durée* des éclipses est

pour le I,	pour le II,	pour le III,	pour le IV,
1 h. 7 m. 52 s.	1 h. 26 m. 3 s.	1 h. 46 m. 50 s.	2 h. 22 m. 25 s.

Dans les autres positions la durée dépend de l'inclinaison et de la distance au noeud. Aux limites la durée est un *minimum*, variable pour le II et le III à cause des variations de l'inclinaison, et nulle pour le IV qui n'est pas éclipsé à une distance considérable des limites. Les demi-durées aux limites sont

pour le I,	pour le II,	pour le III,
1 h. 3 m. 45 s.	1 h. 2 m. 21 s. à 1 h. 16 m. 5 s.	41 m. 57 s. à 1 h. 2 m. 21 s.

Pour trouver la distance au noeud, α, à laquelle le IV n'est plus éclipsé, on n'a qu'à faire $\tau = 0$, ce qui donne $\sin \Phi = 0$, et $\sin \alpha = \frac{2\pi\mu}{T \sin \nu}$. En faisant $T = 16\text{j}.\ 18\text{h}.\ 5\text{m}.\ 7\text{s}.$ $\mu = 2\text{h}.\ 22'\ 25''$, $\nu = 2°\ 36'$, on trouvera $\alpha = 55°\ 11$. Pour les trois premiers satellites on trouvera $\sin \alpha > 1$, d'où il suit qu'ils sont éclipsés dans chaque révolution.

§. 325. Il nous reste à déterminer les *époques*. Toutes les inégalités étant maintenant connues, chaque observation exacte peut servir à cet effet. Si l'on applique au lieu vrai, trouvé par l'observation, toutes les équations précédentes avec le signe opposé, on aura pour le même instant la longitude moyenne ou l'époque. Comme les éclipses sont l'objet principal de cette théorie, l'époque sera l'instant d'une conjonction moyenne. Ces époques sont renfermées dans la première table de chaque satellite, depuis 1705 jusqu'à 1840.

En comparant les époques et les moyens mouvemens des trois premiers satellites, M. Laplace a découvert une loi si simple, qu'elle est peut-être unique dans l'astronomie. En nommant I, II, III, les longitudes moyennes de ces satellites, A, B, C, leurs moyens mouvemens périodiques ou synodiques dans un tems donné, on trouvera constamment

$$A + 2C = 3B, \text{ et } I + 2 . III = 3 . II + 180°.$$

Ces équations sont si exactes, que les petites différences qui pourront se trouver, doivent être attribuées aux erreurs d'observation, ou aux oscillations que les valeurs actuelles font des deux côtés de ces valeurs moyennes. Il faut donc croire que cette parfaite égalité a une cause physique qui la conservera, malgré les petites oscillations qui peuvent y avoir lieu. D'après cette belle découverte, les trois premiers satellites de Jupiter forment un système isolé qui servira à expliquer les circonstances principales de leurs mouvemens. Il en suit d'abord que les trois satellites ne pourront jamais être éclipsés à la fois, parcequ'alors il serait $I = II = III$, ou $I + 2 . III = 3 . II$, ce qui est impossible en vertu de la seconde équation. Il en suit encore que les inégalités réelles de ces trois satellites auront à peu près les mêmes loix et les mêmes périodes, ainsi qu'on l'a vu (§. 317.). Du reste on voit que, si la seconde équation a eu lieu une fois, la première est le garant, qu'elle aura toujours lieu.

§. 326. Puisque les diamètres apparens des satellites sont trop petits, pour être mesurés avec des micromètres, il a fallu chercher d'autres moyens pour déterminer leur grosseur. Si l'on pouvait observer exactement les deux instans, quand le satellite commence à perdre sa lumière, et quand il disparaît tout-à-fait, on connaîtrait le tems que son diamètre met à entrer dans l'ombre, ou son centre à décrire une corde de son orbite, égale à son diamètre, d'où l'on conclurait la grandeur jovicentrique de ce diamètre. Mais il est aisé de voir, que ces observations donneront le diamètre trop petit: les conjonctions géocentriques du satellite avec Jupiter offrent un moyen plus sûr. Ayant observé, dans les passages du satellite, les instans du contact intérieur et extérieur, tant dans l'immersion que dans l'émersion, on aura le tems que le satellite emploie a décrire, par son mouvement géocentrique, une corde égale à son diamètre. Pour en déduire la corde, il faudrait calculer, par

le moyen des mouvemens de Jupiter, de son satellite, et de la terre, la vitesse relative du satellite par rapport à Jupiter. Mais on parviendra plus facilement au but, en observant encore l'intervalle entre l'immersion et l'émersion, ou le tems que le satellite a employé a parcourir une corde du disque de Jupiter, ce qui étant comparé au tems écoulé entre les contacts extérieur et intérieur, donnera le rapport de cette corde au diamètre du satellite. Le plus souvent les satellites passent à peu près par le centre de Jupiter, ensorte qu'on a immédiatement le rapport des diamètres de Jupiter et du satellite. En d'autres cas, il faudrait connaître la distance de la corde au centre de Jupiter, ce qui n'est pas facile. Ordinairement le satellite va le long d'une des bandes, parallèles à l'équateur de Jupiter, dont la distance au centre se trouvera plus facilement. Le moyen le plus simple et le plus sûr paraît le suivant: on choisira d'un grand nombre de pareilles observations, celles qui donnent le plus grand rapport de la durée du passage à celle de l'immersion ou de l'émersion, et l'on prendra cela pour un passage par le centre. On conçoit qu'en général on ne peut pas s'attendre à une grande précision, et l'on ne sera pas étonné du peu d'accord qui se trouve entre les diamètres mesurés par Cassini et autres astronomes. Suivant Schröter les diamètres par rapport à Jupiter sont,

$$\text{celui du I} = \frac{1}{34},\quad \text{du II} = \frac{1}{42},\quad \text{du III} = \frac{1}{24},\quad \text{du IV} = \frac{1}{34};$$

ainsi le II serait le plus petit, le III le plus grand, le IV un peu plus grand que le I. Le diamètre apparent de Jupiter à sa moyenne distance étant $37''$, l'angle sous lequel nous voyons les satellites, serait environ $1''$; et le vrai diamètre de Jupiter étant onze fois plus grand que celui de la terre, les diamètres des satellites par rapport à la terre seraient, $\text{I} = \frac{1}{3}$, $\text{II} = \frac{1}{4}$, $\text{III} = \frac{1}{2}$, $\text{IV} = 1$, et leurs volumes par rapport à la lune, $\text{I} = 1,7$; $\text{II} = 1$; $\text{III} = 5,3$; $\text{IV} = 1,8$. En combinant ces valeurs avec les distances des satellites à leur planète principale (§. 311.), on trouvera que leurs diamètres, vus de Jupiter, sont, $\text{I} = 33'16''$, $\text{II} = 17'13''$, $\text{III} = 18'59''$, $\text{IV} = 7'32''$; le I paraissant égal à la lune, le II et le III un peu plus grand que la moitié, et le IV presque un quart de la lune. Ces quatre lunes présentent aux habitans de Jupiter des spectacles d'une variété prodigieuse, à cause de la rotation rapide de Jupiter,

de la courte durée des périodes des satellites, et des éclipses qui arrivent presque tous les jours.

§. 327. Le satellite, en passant entre Jupiter et le soleil, projette sur Jupiter une ombre qui se voit distinctement avec de bonnes lunettes, et qui doit nécessairement être plus petite que le satellite. Si Jupiter est en même tems près de son opposition, le satellite cachera à la terre son ombre. On sait que la lumière des satellites est très-variable, d'où il faut conclure, qu'ils tournent sur un axe, et que leur surface est couverte de taches, dirigées tantôt vers la terre, tantôt de l'autre côté. Une autre expérience ne laisse aucun doute sur cette rotation. Lorsqu'un satellite passe sur le disque de Jupiter, sa lumière se confond avec celle de la planète, et il est difficile de le distinguer par son éclat un peu plus fort. Cependant le IV satellite, dans chaque passage sur Jupiter, paraît comme une tache noire dont on ne voit rien dans d'autres situations de ce satellite (1). Il s'en suit que le IV satellite tourne constamment le même côté vers Jupiter, et que par conséquent, à l'instar de la lune, il tourne sur son axe dans le même tems où il fait une révolution autour de Jupiter.

Le V satellite de Saturne offre un phénomène tout semblable. Il est toujours visible, quand il se trouve à l'occident de Saturne; mais du côté oriental il disparaît entièrement, comme s'il était éclipsé ou couvert par un nuage, ou du moins sa lumière devient extrèmement faible (2). Il serait difficile d'expliquer ce phénomène autrement, qu'en supposant que la moitié de sa surface est de nature à réfléchir très-peu de lumière, et que ce côté est constamment dirigé vers la terre et le soleil, pendant qu'il décrit la partie orientale de son orbite, et qu'il tourne vers le soleil le côté opposé qui est plus lumineux, dans la partie occidentale de l'orbite: d'où il suit le même résultat, que ce satellite a une rotation parfaitement égale à sa révolution; résultat qui a été entièrement confirmé par les observations de M. Herschel. Schröter a découvert des taches sur tous les satellites de Jupiter, et des variations périodiques de la lumière des cinq anciens satellites de Saturne; et après avoir suivi cet objet avec le plus grand soin, il a trouvé le résultat remarquable, que

(1) *Neuton. Phil. Nat. Princ. Math. Lib. III. Prop. XVII.*

(2) *Ibidem.*

ces neuf satellites, ainsi que la lune, tournent sur un axe précisement dans le tems d'une révolution autour de leur planète (1). Parmi les 18 satellites que nous connaissons, il y a donc dix qui suivent cette loi: quant aux huit autres, leur rotation nous est inconnue. Il ne paraît donc admettre aucun doute, que c'est une loi de la nature, commune à tous les satellites du système solaire.

(1) Voy. *Allgem. geogr. Ephemer. von Zach, I. Band, I. St. pag.* 131.

CHAPITRE V.

Les Satellites de Saturne et d'Uranus.

§. 328. Les périodes et les moyens mouvemens des autres satellites sont déterminés de la même manière que ceux des satellites de Jupiter, avec cette différence, qu'on ne peut pas se servir des éclipses qui, à cause de leur grande distance, sont invisibles. Ayant observé deux fois de suite la plus grande digression du satellite à l'orient ou à l'occident de Saturne, on connaît sa période assés, pour pouvoir la déterminer plus exactement par la comparaison d'observations fort éloignées l'une de l'autre. Cette méthode ne donne que les mouvemens *moyens;* leurs inégalités et les mouvemens vrais dans chaque partie de l'orbite sont encore inconnus. En mesurant avec le micromètre les distances à la planète dans les plus grandes digressions, on a les rayons des orbites en parties d'un degré, ou de Saturne, ou de son anneau. Jusqu'à présent on connaît les élémens suivans.

	Révolution périodique	Révolution synodique	Mouvement diurne	Mouvement horaire
I	$0^j.22^h.37'.32'',9$		$381°.51'.53''.$	$15°.54'.40''.$
II	1. 8. 53. 8, 9		262. 43. 38.	10. 56. 49.
III	1. 21. 18. 26, 222	$1^j.21^h.18'.54'',778$	190. 41. 52.	7. 56. 45.
IV	2. 17. 44. 51, 177	2. 17. 45. 51, 013	131. 24. 42.	5. 28. 32.
V	4. 12. 25. 11, 100	4. 12. 27. 55, 239	79. 41. 25.	3. 19. 14.
VI	15. 22. 41. 13, 052	15. 23. 15. 20, 175	22. 34. 38.	0. 56. 27.
VII	79. 7. 53. 42, 778	79. 22. 3. 12, 883	4. 32. 17.	0. 11. 21.

	Epoque pour 1788	Rayons des orbites en secondes	demi diam. de l'anneau suivant Bradley	Cassini	la théorie	demi diam. de ♄ suiv. Bradley
I	2ˢ. 5°. 1′. 12″	28″,669				
II	10. 7. 28. 48.	36, 789				
III	7. 22. 32. 4	43, 5	2,097	1,95	1,93	4,893
IV	8. 2. 2. 39.	56, 0	2,666	2,50	2,49	6,26
V	4. 15. 34. 18.	78, 0	3,752	3,50	3,47	8,764
VI	5. 1. 2. 41.	180, 0	8,698	8,00	8,00	20,295
VII	6. 18. 5. 52.	322, 5	25,348	24,00	23,22	59,154

Le I satellite paraît à M. Herschel beaucoup plus petit que le II, et les deux orbites sont à peu près dans le plan de l'anneau (1).

Les nombres de la 2. et 5. colonne de la dernière table, savoir 43″,5 etc. 1,93 etc. ont été calculés sur la troisième loi de Kepler. On a pris pour base la distance du VI satellite, qui a été trouvée par observation = 8, d'où l'on a conclu, par le moyen des périodes dans la 1. colonne de la première table, les distances 1,93 etc. qui ont été converties en secondes, en supposant le diamètre de l'anneau = 45″. L'accord qui se trouve entre les nombres de la 4. et de la 5. colonne, sont une nouvelle preuve de la généralité des lois de Kepler.

§. 329. Pour déterminer l'*inclinaison* des orbites, on peut se servir de la méthode suivante, au lieu des éclipses. Lorsque le plan d'une orbite passe par l'oeil, la terre étant dans la commune section de cette orbite et de l'écliptique, le satellite paraîtra décrire une ligne droite. A mesure que la terre s'éloigne du plan de l'orbite, elle prendra la formo d'une ellipse qui s'élargit de plus en plus pendant trois mois: alors, la terre étant à 90° du noeud de l'orbite sur l'écliptique, l'ellipse sera la plus ouverte, et le petit axe sera au grand, comme le sinus de l'inclinaison v de l'orbite sur l'écliptique est à l'unité. Ayant donc mesuré, à cette époque, la plus grande et

(1) *Account of the discovery of a sixth and seventh satellite of the planet Saturn*, dans les *Philos. Transact. Vol. LXXX. no.* 1.

la plus petite distances du satellite à Saturne, a et b, on aura $\sin v = \frac{b}{a}$. Puisque l'orbite de Saturne est inclinée sur l'écliptique sous l'angle de deux degrés et demi, l'inclinaison de l'orbite du satellite relativement à l'orbite de Saturne ne peut pas différer sensiblement de v. Les observations donnent pour le III, IV, V, et VI, à très-peu près $b = \frac{1}{2} a$, d'où il suit $v = 30°$; l'inclinaison du VII est suivant Cassini $= 15°$. Un moyen plus simple est de comparer les satellites avec l'anneau de Saturne. On a trouvé que les six premiers satellites circulent dans le plan de l'anneau; que leurs orbites sont des lignes droites en même tems que l'anneau; qu'elles deviennent ensuite des ellipses qui s'ouvrent et se rétrécissent exactement comme l'anneau: d'où il suit, non-seulement que leurs inclinaisons sont égales à celle de l'anneau, mais que leurs noeuds coïncident aussi avec les noeuds de l'anneau. Cette coïncidence est remarquable: elle doit nécessairement avoir une cause physique, et peut jetter de la lumière sur le phénomène dont il a été parlé précédemment, que les satellites, ainsi que l'anneau, tournent constamment le même côté vers Saturne. Suivant Lalande l'inclinaison du VII satellite est sur l'orbite de Saturne $= 22°42'$, sur l'écliptique $= 24°45'$, et sur le plan de l'anneau $= 12°14'$.

§. 330. On vient de voir que les noeuds des six premiers satellites coïncident avec ceux de l'anneau dans $5^s\,20°$ (§. 161.). La position de l'orbite du VII peut être déterminée de la manière suivante. Puisque chaque ligne droite coupe une ellipse en deux points, et une autre droite en un seul point, et que le grand axe de l'anneau passe constamment par le centre de Saturne et de l'orbite du satellite, il est évident que le satellite, dans chaque révolution, traversera deux fois la prolongation du grand axe de l'anneau, quand son orbite paraîtra elliptique. Ces deux points d'intersection, étant situés des côtés opposés de Saturne, approcheront du centre de Saturne, à mesure que l'ellipse de l'orbite se rétrécit; et ils finiront par coïncider au centre, lorsque l'orbite deviendra une ligne droite. Comme il est souvent impossible d'observer les points d'intersection, il suffira de mesurer, quelques jours avant et après le passage par l'axe de l'anneau, la distance du satellite à l'axe et au centre de Saturne, pour déterminer, au moyen d'une interpo-

lation, l'instant du passage et la distance du point d'intersection au centre de Saturne. Ayant répété ces observations pendant plusieurs révolutions, on trouvera enfin l'instant où la distance des points d'intersection était nulle, et que par conséquent la terre était dans le plan de l'orbite. En ajoutant 180° à la longitude géocentrique de Saturne, qu'on pourra aisément calculer pour cette époque, on aura la longitude saturnocentrique de la terre. Soient (*Fig.* 91.) SR, AB, EL, les plans des orbites de Saturne, du satellite, et de la terre: la terre a été au tems de l'observation en T, et N est le noeud ascendant de l'orbite du satellite sur celle de Saturne. Connaissant la longitude saturnocentrique des points T et C, le dernier étant le noeud ascendant de l'orbite de Saturne sur l'écliptique, et par conséquent l'arc CT, l'angle DCT = 2° 30′, DNT = 22° 42′ (§. 329.), on calculera CN. Ayant élevé la perpendiculaire TD sur l'orbite de Saturne, on aura

$$\text{tang CD} = \text{tang CT cos DCT}, \quad \text{et} \quad \sin \text{DT} = \sin \text{CT} \sin \text{DCT},$$

d'où l'on tirera

$$\sin \text{DN} = \frac{\text{tang DT}}{\text{tang DNT}}, \quad \text{et} \quad \text{CN} = \text{CD} + \text{DN};$$

en ajoutant CN à la longitude du noeud de Saturne C, on aura la longitude saturnocentrique du noeud N. Suivant Lalande, en 1773 la longitude du noeud ascendant du VII satellite sur l'orbite de Saturne était $= 4^s\,28°\,20'$, sur l'écliptique $= 4^s\,25°\,5$, sur le plan de l'anneau $= 7^s\,5°\,31'$, avec un mouvement annuel de $-\,4'\,47''$.

§. 331. Les révolutions synodiques des satellites d'Uranus sont suivant M. Herschel.

$$\text{I} = 5^j\,21^h\,25'; \quad \text{II} = 8^j\,16^h\,56'\,5'',2, \quad \text{III} = 10^j\,23^h\,4';$$
$$\text{IV} = 13^j\,11^h\,8'\,59''; \quad \text{V} = 38^j\,1^h\,49'; \quad \text{VI} = 107^j\,16^h\,40'.$$

Le demi-diamètre apparent de l'orbite du IV dans la moyenne distance d'Uranus au soleil est suivant le même observateur $= 44'',23$; d'où l'on calculera, avec les périodes précédentes, suivant la troisième loi de Kepler, les demi-diamètres apparens des autres orbites,

I = 25″,5; II = 33″,09; III = 38′,57; IV = 44″,23; V = 88″,46; VI = 172″,92.

Conséquemment les rayons de leurs orbites sont en demi-diamètres d'Uranus,

I = 13; II = 16,5; III = 19,25; IV = 22; V = 44,25; VI = 86,5.

L'orbite du IV satellite est sensiblement allongée, ensorte que sa plus grande distance à Uranus ne va par fois qu'à 34″ ou 35″ au lieu de 44″.

L'inclinaison du IV est de 89° 30′ ou 90° 30′, le noeud ascendant à $5^s 21^\circ$ ou $8^s 9^\circ$, suivant qu'on supposera le satellite direct ou rétrograde. L'orbite du II paraît avoir la même position. Ces deux satellites sont selon toute apparence aussi ou plus grands que ceux de Jupiter, et ils ont été éclipsés en 1799 ou 1818 (1).

(1) *Philos. Transact. Vol. LXXVIII. pag.* 378. *suiv.*

LIVRE VIII.

DES COMÈTES.

CHAPITRE. I.

Propriétés générales des Comètes.

§. 332. Ce qui a été jusqu'ici le sujet de cet ouvrage, comprend un plus grand nombre de corps célestes, que ceux qui composaient naguère tout le système solaire connu. Pendant longtems on ne connut que le soleil, la lune, et cinq planètes; et les plus grands efforts de l'esprit humain, des observations innombrables, des calculs et des découvertes étaient nécessaires, pour acquérir dans l'espace de deux mille ans, une connaissance assés juste et exacte du vrai mouvement de ce petit nombre de corps célestes. Et quel est le fruit de ce travail d'une suite de siècles, dont le commencement se perd dans la nuit des tems, d'un travail auquel les sages de tous les ages et de tous les climats se sont empressés de participer? Une partie à peine sensible de notre système solaire qui n'est qu'un élément infiniment petit de l'univers. Si cette réflexion est d'un côté humiliante pour l'esprit humain, elle nous donne en même tems la garantie, que la plus sublime des sciences ne sera jamais épuisée. Quiconque a étudié l'histoire de l'astronomie, reconnaîtra que ceux qui nous ont précédés, ont beaucoup fait, considérant les

difficultés contre lesquelles ils avaient à lutter, mais peu de chose par rapport à ce qui reste encore à faire. Ce que nous savons de l'immensité et de la mécanique du ciel, suffit pour nous donner des idées dignes de l'auteur de la nature, et pour nous inspirer des sentimens d'une profonde admiration et adoration. Mais l'astronome ne doit ni s'imaginer de connaître maintenant l'ouvrage du très-sage, ni craindre que le tems de la récolte ne soit passé; les fruits ne manqueront jamais, pourvu que les moissonneurs ne manquent pas. C'est dans la nature des choses, que chaque découverte en astronomie, loin de diminuer le nombre des découvertes futures, en ouvre un nouveau champ; et l'histoire de l'astronomie nous apprend, que chaque découverte donna lieu à plusieurs autres. On peut comparer cette immense science à un vaste pays, dont le centre a été cultivé avec grand soin, et dont la surface qui s'étend à l'infini, renferme un grand nombre de champs fertiles, mais inconnus, qui ne sont accessibles qu'aux plus grands efforts de l'industrie. Chaque pièce que l'activité de l'homme est parvenue à défricher, ouvre une vue plus ample sur l'étendue entière; et à mesure que la partie cultivée s'agrandit, les découvertes dans tous les sens deviennent plus faciles.

L'état actuel de nos connaissances suffit pour nous faire voir, combien c'est peu de chose, que nous connaissons de l'univers, et même du système solaire. En réfléchissant sur la distribution des planètes, et en comparant l'espace qu'elles occupent, avec la distance des étoiles fixes, on est étonné de voir qu'elles ne remplissent qu'une petite portion du système solaire, dont la plus grande partie paraît être déserte. On ne peut pas se persuader, que la nature n'ait point employé l'espace immense qui n'est pas occupé par les planètes, et qui suffirait pour des millions de corps célestes auxquels le soleil pourrait communiquer de la lumière, de la chaleur, et du mouvement. On est encore plus frappé de cette idée, en faisant attention aux circonstances particulières. Les orbites planétaires sont renfermées dans la zone étroite du zodiaque, et toutes les planètes se meuvent dans le même sens; et l'on ne conçoit pas que cette zone seule soit propre aux mouvemens de corps célestes. La force centrale du soleil doit nécessairement se répandre suivant toutes les directions, dans un espace sphérique: il est donc à presumer qu'elle

rencontrera partout des objets qu'elle peut animer. Il n'est pas moins difficile de concevoir, par quelle raison tous les corps célestes suivraient la même direction, toute direction étant également possible.

Il faut convenir que ces raisonnemens doivent nous persuader, qu'outre les planètes il y a peut-être des millions de corps célestes qui remplissent le vide du système solaire, relativement à l'espace, et à la disposition et direction des orbites.

§. 333. Quand, après avoir fait ces réflexions, ont voit de tems à autre des corps inconnus paraître dans le ciel, des corps qui, à l'instar des planètes, avancent suivant toutes les directions d'une étoile à l'autre; quand on trouve par le calcul de leur mouvement, que leur distance au soleil est égale à celle des planètes, que leur mouvement se courbe autour du soleil, qu'il devient plus rapide, à mesure qu'ils approchent du soleil, et qu'il suit en général les mêmes lois que le mouvement des planètes; on ne peut pas douter que ces corps n'appartiennent au système planétaire, du moins à l'époque où ils se font voir. Dans les tems les plus anciens on trouve des rélations de ces astres qui, à cause de l'atmosphère, semblable à une chevelure, et de la queue lumineuse qui environnent ordinairement le corps même, furent appelés *Comètes;* et l'on sait que les Chaldéens avaient des idées très-justes de ces astres, en les prenant pour des planètes qui ne sont visibles qu'à une petite distance de la terre. Les philosophes grecs, principalement les Pythagoréens, avaient les mêmes idées, et l'on est étonné de la justesse et de la précision, avec laquelle Séneque en parle dans le *Liv. VII.* de ses *Quaest. Nat.* Mais à ces exceptions près, la plupart des philosophes de ce tems et des tems suivans en avaient des idées très-imparfaites. On prit les comètes pour des météores, ou pour des exhalaisons du soleil et des planètes, ou bien pour des ouvrages instantanés de la Toute-puissance, produits pour prévenir le genre humain de la vengeance qui le menaçait. Au commencement du dix-septième siècle les plus grands astronomes pensèrent, que les comètes étaient des météores passagers, produits de tems à autre entre la terre et la lune. Tycho fut le premier qui détruisit cette opinion, et fonda de nouveau des idées plus justes sur ces corps. Il montra que leur parallaxe diurne était

beaucoup moins grande que celle de la lune, mais que leur parallaxe annuelle était très-sensible, et que par conséquent leur distance devait être à peu près égale à celle des planètes. Lorsqu'on eut commencé à calculer leurs orbites, et qu'on eut vu la même comète revenir en décrivant toujours la même orbite, on ne pouvait plus douter que les comètes, ainsi que les planètes, ne fussent des corps célestes destinés à une longue existence.

§. 334. Les comètes se distinguent au premier coup d'oeil d'avec les étoiles *variables* qui paraissent de tems à autre, par leur mouvement propre, sur lequel les astronomes ont eu autant d'opinions différentes que sur la nature des comètes. Kepler supposa leurs orbites rectilignes, Cassini pensa que c'étaient des cercles fort excentriques. Tycho, après avoir eu la même opinion, trouva que l'hypothèse du cercle ne satisfaisait pas aux observations de la comète de 1577. Hévélius fut le premier qui trouva par une construction, que l'orbite devait être *parabolique*, et Dörfel fonda le premier le calcul des comètes, pour le simplifier, sur l'hypothèse parabolique, ce qui lui a donné la réputation d'être l'inventeur de cette hypothèse. Depuis que les lois de Kepler avaient été généralement adoptées dans l'astronomie, et qu'on eut aperçu que les orbites des comètes étaient des courbes, concaves vers le soleil; mais principalement, quand on eut vu des comètes qui revenaient au soleil dans la même orbite; il fallut regarder comme certain, que les comètes décrivaient, conformément aux lois de Kepler, des *Ellipses* dont le foyer est le centre du soleil. Les plus grands géomètres se mirent donc à calculer le mouvement des comètes suivant cette hypothèse, et Newton s'en servit pour calculer l'orbite de la comète remarquable de 1680. Depuis ce tems plus de cent orbites ont été calculées suivant l'hypothèse parabolique, et leurs élémens ont été déterminés de manière à satisfaire à toutes les observations. Ainsi l'hypothèse de l'ellipse, ou celle de la parabole qui revient au même, est entièrement prouvée par les loix de la nature et par l'expérience.

§. 335. Sous ce rapport les comètes ressemblent donc parfaitement aux planètes, et leur mouvement est soumis aux mêmes lois; mais elles se distinguent d'une manière frappante, par les phénomènes qu'elles présentent à un observateur placé sur la terre ou le soleil. Les orbites des planètes étant

à peu près circulaires, ces corps ne s'éloignent jamais assés de la terre, pour que nous les perdions de vue. Nous les voyons dans toute l'étendue de leurs orbites (au peu de tems près où elles s'enfoncent dans les rayons du soleil), soit dans l'aphélie soit dans le périhélie; au lieu que les comètes ne sont visibles que dans un petit arc de leurs orbites, peu avant et après le passage par le périhélie. Au bout de quelque tems leur grosseur apparente diminue considérablement, il est plus difficile de les voir, et elles finissent par disparaître parmi les étoiles, à cause de leur grande distance. La petitesse de leur diamètre et la faiblesse de leur lumière font que, pour être visibles, elles doivent être très-près de la terre et du soleil: c'est pourquoi la plupart des comètes qu'on a aperçues, ont approché du soleil plus que la terre et même plus que Mercure (1); bientôt après, leur distance devient si grande, qu'elles sont invisibles pendant des siècles. Il s'en suit que leurs orbites sont des ellipses très-allongées, ce qui fait la différence essentielle entre les comètes et les planètes. Le calcul de leur mouvement donne le résultat, que la portion de leur orbite, dans laquelle elles sont visibles, comprend un très-petit arc autour du périhélie.

§. 336. Les comètes se distinguent encore d'avec les planètes, parceque leurs orbites ne sont pas situées à peu près dans le même plan, et que leur mouvement héliocentrique n'a pas une seule direction de droite à gauche. Elles coupent l'écliptique sous tous les angles depuis zéro jusqu'à 90°; elles se meuvent suivant toutes les directions qui sont aussi bien rétrogrades que directes.

Leur extérieur est aussi tres-différent de celui des planètes. Quoiqu'empruntant la lumière du soleil, elles paraissent avoir une lumière propre, et moins de solidité que les planètes, attendu que leur lumière est beaucoup plus faible, et leur disque moins rond et terminé, tandis que le côté opposé au soleil est lumineux, et qu'on ne leur a jamais vu de phases. Elles sont souvent accompagnées d'une *queue* très-brillante, dont la longueur apparente va quelquefois à 70°, et qui est constamment dirigée vers le côté opposé au soleil. Cette forme singulière a probablement porté les anciens à les pren-

(1) La comète de 1680 approcha du soleil 64 fois plus que Mercure.

dre pour des corps non-planétaires, parcequ'il leur manquait la forme sphérique qui parut aux anciens une qualité essentielle des corps célestes. Avec les téléscopes on aperçoit dans la lumière nébuleuse un disque rond qu'on appelle le *noyeau*, et qui est apparemment le véritable corps de la comète, entouré de son atmosphère. Avant qu'on puisse les voir à l'oeil nu, elles paraissent rondes dans les lunettes, et la queue se forme à mesure qu'elles approchent du soleil. Cette queue est si peu solide, que les plus petites étoiles se voient très-bien au travers d'elle. On a même vu des comètes avec de très grandes queues, qui n'en avaient aucune, lorsqu'elles faisaient une seconde révolution autour du soleil. Tout cela prouve, que la queue n'est pas une partie essentielle de la comète, mais qu'elle provient de son atmosphère, échauffée par le soleil.

CHAPITRE II.

Calcul Parabolique des orbites des Comètes.

§. 337. Les méthodes dont on se sert pour déterminer les orbites planétaires, ne sont pas applicables aux comètes qui ne sont visibles que dans une petite portion de leurs orbites, parceque ces méthodes supposent que la planète a été observée plus d'une fois dans le même point de son orbite, pour pouvoir en déduire la durée de sa révolution, et sa distance au soleil. Il manque donc ici un ou deux élémens de l'orbite, le moyen mouvement et la distance; ce qui doit être compensé par les loix de Kepler. Si le soleil est en S (*Fig.* 92.), et que la comète, dans trois points de son orbite, A, B, C, ait été observée de la terre en T, E, R, on ne connaît dans les triangles STA, formés par le soleil, la terre, et la comète, que l'angle à la terre STA et la distance de la terre au soleil TS, ce qui ne suffit pas pour résoudre ces triangles. Mais les lois de Kepler donnent non-seulement le rapport des aires ASB, BSC, qui doit être le même que celui des tems observés, mais ces aires mêmes, en supposant l'orbite connue, qu'on sait être une parabole ou ellipse: en combinant duement ces données, on parviendra à déterminer l'orbite. On se sert ordinairement d'une méthode indirecte qui est moins compliquée que la méthode directe, et qui, à cause des erreurs d'observation, donne plus de précision. Pour cet effet on suppose arbitrairement deux des quantités inconnues, en les combinant ensorte qu'elles satisfassent à l'une des observations; on calcule avec ces élémens hypothétiques d'autres observations: alors la comparaison du calcul avec les observations indiquera la correction dont les élémens ont besoin. Comme la seconde loi de Kepler, qui donne les aires des secteurs, se réduit à la qua-

drature de la courbe, on emploie la *parabole*, dont la quadrature est extrêmement simple. Il y a encore une autre raison: c'est que, toutes les paraboles étant des courbes *semblables* comme le cercle, on peut calculer une table générale pour toutes les orbites.

§. 338. Ce qui nous autorise de substituer la parabole à l'ellipse, c'est la grande excentricité des orbites, et le peu d'éloignement des observations du périhélie: car, près du sommet, une ellipse très-allongée ne s'écarte qu'insensiblement de la parabole qui a la même distance périhélie. En effet, si l'on veut faire cette comparaison relativement à l'orbite d'une comète, il faut se rappeler que le foyer est le centre du soleil, et que la distance du sommet au foyer est l'élément le plus important des orbites; de sorte que ces deux points doivent nécessairement coïncider dans la parabole et l'ellipse.

Soit donc (*Fig.* 93.) PB une ellipse, PC une parabole, P, S, le commun sommet et foyer. Ayant éleve d'un point A du grand axe PS la perpendiculaire ABC, soit

l'abscisse $PA = x$, les ordonnées $AC = y$, $AB = z$,

le paramètre de la parabole $= p$,

le grand demi-axe de l'ellipse $= a$, le petit $= b$.

Cela posé on aura

$$y^2 = px, \text{ et } z^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Or on a dans la parabole $PS = \frac{1}{4}p$, et dans l'ellipse $PS = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$, d'où il suit $b^2 = \frac{p}{2}\left(a - \frac{p}{8}\right)$; ce qui étant substitué dans la valeur de z^2, donnera

$$z^2 = px\left(1 - \frac{p}{8a}\right) - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Dans toutes les orbites de comètes x et b sont très-petits par rapport à a: on peut donc négliger le dernier terme, et l'on aura à très-peu près

$$z = \sqrt{px}\cdot\left(1 - \frac{p}{16a}\right), \text{ et } y - z = BC = \frac{p\sqrt{px}}{16a}.$$

Cette différence est d'autant plus petite, que a est plus grand par rapport à p ou à PS, c'est à dire que l'ellipse est plus allongée. Il est donc permis d'employer la parabole au lieu de l'ellipse, ce qui facilite singulièrement le calcul. En nommant P le paramètre de l'ellipse, on aura $b^2 = \frac{1}{2}Pa =$

$\frac{1}{2}p\left(a-\frac{p}{8}\right)$, d'où il suit $P=p-\frac{p^2}{8a}$, ou parceque p est très-petit par rapport a a, $P=p$ à peu près.

§. 339. Toutes les méthodes indirectes suivant l'hypothèse parabolique exigent *trois* observations, et elles diffèrent l'une de l'autre selon les élémens qu'on suppose connus. En supposant, par exemple, l'angle au soleil, on procèdera de la manière suivante. En comparant d'abord deux observations, c'est-à-dire deux lieux géocentriques, réduits à l'écliptique, A et B (*Fig.* 92.), et en prenant arbitrairement les angles de commutation AST, BSE, on calculera avec ces angles, et avec les quantités données ATS et TS, BES et ES, les distances accourcies de la comète au soleil, SA, SB, et le mouvement héliocentrique sur l'écliptique ASB. Les angles à la terre et au soleil, et les latitudes géocentriques, donnent les latitudes héliocentriques et les rayons vecteurs SA, SB, A et B étant maintenant les lieux dans l'orbite (§. 84.); et avec les latitudes et longitudes héliocentriques on calculera l'inclinaison, le lieu du noeud, et les longitudes sur l'orbite, ou le mouvement vrai ASB. On a donc deux rayons vecteurs, SA, SB, avec l'angle compris ASB, d'où l'on conclura, en vertu de la nature de la parabole, la distance périhélie SP, la longitude du périhélie ou l'angle ASP, et l'aire du secteur ASB, ainsi que le tems que la la comète emploie à parcourir PA, PB, et AB, d'où il résulte le tems du passage par le périhélie. Si le tems qu'on a ainsi calculé pour l'arc AB, n'est pas le même que le tems écoulé entre les deux observations, les angles de commutations AST, BSE, ne peuvent pas avoir lieu en même tems: on changera donc l'un de ces angles, sans changer l'autre, jusqu'à ce que le tems calculé pour AB se trouve d'accord avec le tems observé. Maintenant, tous les élémens de l'orbite étant déterminés, on calculera pour le tems de la troisième observation C, ou pour le tems de P à C, l'anomalie vraie PSC qui est conforme à l'hypothèse parabolique, et par conséquent la longitude sur l'orbite, et le rayon vecteur SC. Le lieu du noeud et l'inclinaison donneront alors la latitude et la longitude héliocentriques du point C, et la distance accourcie SC. Les longitudes de C et de la terre en R feront connaître l'angle CSR: connaissant donc dans le triangle CSR cet angle et les côtés SR, SC, on calculera

l'angle SRC qui doit être égal à l'élongation observée. Autrement le premier angle de commutation est aussi défectueux: on lui donnera donc une autre valeur, et l'on changera la seconde commutation, jusqu'à ce que la première et la seconde observations s'accordent avec le calcul. On opèrera sur la troisième observation de la manière précédente, et si elle ne se trouvera pas encore d'accord avec le calcul, le premier angle de commutation sera encore changé. Après avoir fait deux hypothèses pour le premier angle de commutation, les erreurs de ces deux hypothèses indiqueront, par la méthode des interpolations, la correction dont cet angle a besoin, pour que l'hypothèse satisfasse aux trois observations. Avec ces élémens on pourra réduire une observation quelconque au lieu héliocentrique; d'où il est aisé de calculer, avec l'anomalie vraie, le tems d'une observation quelconque: ce qui fournit le moyen de vérifier les élémens par toutes les observations qui ont été faites, et de les corriger, en prenant le milieu. Cet aperçu général servira à jetter du jour sur la marche de tous les calculs suivans.

§. 340. Le calcul précédent donne tous les élémens de l'orbite, savoir:

la longitude du *noeud* et l'*inclinaison*, qui déterminent le *plan* de l'orbite;

la *distance périhélie* ou le *paramètre*, et

la longitude du *périhélie*, qui donnent l'*orbite* dans ce plan; enfin

l'instant du *passage par le périhélie*, et la *direction* directe ou rétrograde de la comète, qui déterminent le *mouvement* dans cette orbite.

L'*anomalie* des comètes est la distance héliocentrique au périhélie, seule partie de leurs orbites où elles sont visibles. Or le périhélie étant un point de l'orbite et non de l'écliptique, il faudra indiquer sa longitude sur l'orbite; ce qui se fait de la même manière que relativement aux planètes: on compte sur l'écliptique la longitude du noeud, et ensuite sur l'orbite l'arc intercepté entre le noeud et le périhélie; il suffit donc d'indiquer l'angle que fait le grand axe avec la ligne des noeuds. Dans la parabole il n'y a ni axe ou distance moyenne, ni excentricité qui est remplacée par le paramètre, ni révolution ou mouvement moyen. La durée d'une révolution ne peut se trouver que par le calcul elliptique: l'élément qui, relativement aux planètes, est le premier et le plus facile à déterminer, est ici le dernier et le plus dif-

ficile; il n'y a qu'un très-petit nombre de comètes, dont on connaisse les révolutions.

Le calcul exposé dans le §. précédent, est singulièrement simplifié, en employant les tables paraboliques, qui donnent, pour un tems quelconque avant ou après le périhélie, l'anomalie vraie, et réciproquement. D'ailleurs le calcul rigoureux serait inutile dans les premiers essais; on pourrait même se contenter de résoudre les triangles par construction. Le plus souvent on fera bien de déterminer arbitrairement la distance au soleil ou à la terre, parceque les variations de la grandeur apparente de la comète ou de sa queue indiqueront celles de sa distance à la terre ou au soleil. Le calcul qui suppose la distance à la terre connue, sera exposé ici en détail; et il faut se rappeler, que dans les premiers essais on peut se contenter d'une approximation. Pour ne pas interrompre l'exposition du calcul, il sera bon de commencer par rassembler, comme des Lemmes, toutes les propriétés de la parabole, dont nous aurons besoin.

§. 341. *Lemme. Les tems que différentes planètes ou comètes emploient à parcourir des arcs donnés de leurs orbites, sont entre eux comme les surfaces des secteurs décrits, divisées par les racines carrées des paramètres de leurs orbites.*

La démonstration générale de ce Lemme, fondée sur la loi de la force centrale du soleil, découverte par Newton, appartient à l'astronomie physique; mais les loix de Kepler en donnent une démonstration très-simple pour les ellipses, et par conséquent aussi pour les orbites paraboliques des comètes qui remplacent l'ellipse. Appelons

le grand et le petit axe d'une ellipse, $2a$, $2b$, le paramètre, p,
l'aire de l'ellipse entière, e, la durée d'une révolution, r,
le secteur, s, décrit dans le tems t;

et désignons par des lettres majuscules les mêmes élémens qui se rapportent à une autre ellipse. On aura, en vertu de la seconde et de la troisième loi de Kepler,

$$t = \frac{rs}{e} \text{ et } \frac{r^2}{a^3} = \frac{R^2}{A^3}, \text{ d'où il suit}$$

$$t : T :: rsE : RSe, \text{ et } rA^{\frac{3}{2}} = Ra^{\frac{3}{2}}.$$

Mais la nature de l'ellipse fournit les équations, $b^2 = \frac{ap}{2}$, et $e = ab\pi = a\pi\sqrt{\frac{ap}{2}}$, d'où il suit

$$e : E :: a\sqrt{ap} : A\sqrt{AP}, \text{ donc } t : T :: rsA^{\frac{3}{2}}\sqrt{P} : RSa^{\frac{3}{2}}\sqrt{p},$$

et en substituant $rA^{\frac{3}{2}} = Ra^{\frac{3}{2}}$,

$$t : T :: \frac{s}{\sqrt{p}} : \frac{S}{\sqrt{P}}, \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

Il s'en suit $t = \frac{Ts\sqrt{P}}{S\sqrt{p}}$. En mettant à la place de T l'année sidérale $= J$, il faut faire $S = E$; donc, A étant l'unité, on aura $S = E = \pi\sqrt{\frac{P}{2}}$, et $t = \frac{Js\sqrt{2}}{\pi\sqrt{p}}$, ou si l'on veut employer la distance périhélie de la comète $SP = q = \frac{p}{4}$, il viendra

$$t = \frac{Js}{\pi\sqrt{2q}}.$$

L'année sidérale est $J = 365,2563835$ jours, et $\frac{J}{\pi\sqrt{2}} = 82,211577 = m$: donc

$$t = \frac{ms}{\sqrt{q}}.$$

Cette formule donne, pour une orbite parabolique dont la distance périhélie est q, le tems t exprimé en jours, que la comète emploie à décrire le secteur s; et réciproquement, le secteur, parcouru dans t jours, est $s = \frac{t\sqrt{q}}{m}$, le rayon de l'orbite de la terre étant l'unité des quantités q et s.

§. 342. PROBLÈME. *Etant données deux distances et deux longitudes héliocentriques de la comète, trouver le lieu du périhélie, la distance périhélie, et le tems écoulé.*

Soit (*Fig.* 92.) S le foyer, P le sommet ou périhélie de la parabole, A, B, les deux lieux donnés de la comète: on connaît

$$SA = r, \quad SB = r', \quad ASB = v, \text{ et l'on cherche}$$

$$PSA = \Phi, \quad PS = q, \text{ et le tems } t \text{ écoulé entre A et B.}$$

Ayant mené les ordonnées Aa, Bb, le paramètre étant $p = 4q$, on aura

$$Aa^2 = 4q \cdot Pa = 4q(q - Sa), \text{ et } Bb^2 = 4q(q - Sb), \text{ donc}$$

$$SA^2 = 4q^2 - 4q \cdot Sa + Sa^2, \quad SB^2 = 4q^2 - 4q \cdot Sb + Sb^2,$$

$$SA = r = 2q - Sa, \; SB = r' = 2q - Sb, \; r' - r = Sa - Sb = ab.$$

Si b ou b et a tombent de l'autre côté de S, Sb, ou Sb et Sa, seront négatifs. On a d'ailleurs

$Sa = r\cos\Phi$, $Sb = r'\cos(\Phi+v)$, d'où il viendra $r = 2q - r\cos\Phi$, ou

$$r = \frac{2q}{1+\cos\Phi} = \frac{q}{(\cos\frac{1}{2}\Phi)^2}, \text{ et } r' = \frac{q}{\left(\cos\frac{\Phi+v}{2}\right)^2}, \text{ donc}$$

$$\sqrt{\frac{r}{r'}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\Phi+v)}{\cos\frac{1}{2}\Phi} = \cos\frac{1}{2}v - \sin\frac{1}{2}v\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\Phi, \text{ et}$$

$$\text{tang}\,\frac{\Phi}{2} = \cot\frac{v}{2} - \frac{\sqrt{\frac{r}{r'}}}{\sin\frac{v}{2}}.$$

Avec l'anomalie vraie Φ, et la longitude héliocentrique donnée du point A, on trouvera la *longitude du périhélie*, et la

$$\textit{distance périhélie},\ q = r\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)^2.$$

Pour trouver le tems t écoulé entre A et B, il faut chercher la surface du secteur $ASB = s$. Or on a dans la parabole, la surface

$$PaA = \frac{2}{3}Pa.Aa = \frac{2}{3}(q - r\cos\Phi)\sqrt{4q(q-r\cos\Phi)} = \frac{4}{3}(q-r\cos\Phi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{q},$$

le triangle $SaA = \frac{1}{2}Sa.Aa = r\cos\Phi.\sqrt{q(q-r\cos\Phi)}$, donc

$$\text{le secteur } PAS = \frac{4q - r\cos\Phi}{3}.\sqrt{q(q-r\cos\Phi)}.$$

En substituant $r = \frac{2q}{1+\cos\Phi}$, on aura $q - r\cos\Phi = \frac{q(1-\cos\Phi)}{1+\cos\Phi} = q\left(\text{tang}\,\frac{\Phi}{2}\right)^2$,

$$PAS = q^2\,\text{tang}\,\frac{\Phi}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(\text{tang}\,\frac{\Phi}{2}\right)^2\right), \text{ et le secteur}$$

$$PBS = q^2\,\text{tang}\,\frac{v+\Phi}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(\text{tang}\,\frac{v+\Phi}{2}\right)^2\right); \text{ d'où l'on tirera}$$

$$ABS = s = q^2\left\{\text{tang}\,\frac{v+\Phi}{2} - \text{tang}\,\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{3}\left(\text{tang}\,\frac{v+\Phi}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\text{tang}\,\frac{\Phi}{2}\right)^3\right\}.$$

En substituant $2q - r$ au lieu de $r\cos\Phi$, on pourra exprimer s par r, r', et q. En effet

$$q - r\cos\Phi = r - q, \text{ d'où il viendra}$$

$$PAS = \frac{2q+r}{3}\sqrt{q(r-q)},\ PBS = \frac{2q+r'}{3}\sqrt{q(r'-q)}, \text{ donc}$$

$$s = \frac{\sqrt{q}}{3}\left\{(2q+r')\sqrt{(r'-q)} - (2q+r)\sqrt{(r-q)}\right\}.$$

Ainsi le tems écoulé entre A et B sera (§. 34ii.) $t = \frac{m\,s}{\sqrt{q}}$, ou

$$t = \frac{m}{3}\left\{(2q+r')\sqrt{(r'-q)} - (2q+r)\sqrt{(r-q)}\right\}.$$

On a supposé les deux observations A, B, *après* le périhélie; si l'une a été

faite *avant* le périhélie, son secteur sera négatif, et l'on prendra la somme au lieu de la différence. On trouvera pareillement le tems écoulé de P à A,

$$\theta = \frac{m}{3}(2q + r)\sqrt{(r - q)},$$

ou en introduisant l'anomalie vraie Φ,

$$\theta = mq^{\frac{3}{2}}\left\{\text{tang}\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{3}\left(\text{tang}\frac{\Phi}{2}\right)^3\right\}.$$

Avec θ et le tems de l'observation A on trouvera

l'instant du passage par le périhélie $= T$.

§. 343. On peut exprimer d'une manière fort simple le tems écoulé entre A et B, par le triangle au soleil, sans calculer le paramètre $4q$. En nommant (*Fig.* 94.)

$SA = r$, $SB = r'$, $ASB = v$, $AB = k$, $Aa = y$, $Bb = y'$, on aura

$k = \sqrt{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos v)} = \sqrt{\left\{(r' - r)^2 + 4rr'\left(\sin\frac{v}{2}\right)^2\right\}}$, $Pa = \frac{y^2}{4q}$, $Pb = \frac{y'^2}{4q}$, d'où l'on tirera les surfaces

$$PAa = \frac{y^3}{6q}, \quad PBb = \frac{y'^3}{6q}, \quad A\alpha Bba = \frac{y'^3 - y^3}{6q}.$$

Le rectangle Ab est $= y(Pb - Pa)$, et le triangle $AB\beta = \frac{y' - y}{2}(Pb - Pa)$, donc le trapèze $ABba = \frac{y' + y}{2}(Pb - Pa) = \frac{(y' + y)(y'^2 - y^2)}{8q}$, ce qui étant retranché de la surface parabolique $A\alpha Bba$, donnera

$$\text{le segment } A\alpha BA = \frac{(y' - y)^3}{24q}.$$

Mais $y' - y = B\beta = \sqrt{(k^2 - ab^2)}$, et $ab = r' - r$ (§. 342.); d'où il vient

$A\alpha BA = \frac{(k^2 - (r' - r)^2)^{\frac{3}{2}}}{24q}$, et le triangle $ABS = \frac{1}{2}r'r\sin v$, donc

$$\text{le secteur } ASB = s = \frac{(k^2 - (r' - r)^2)^{\frac{3}{2}}}{24q} + \frac{1}{2}r'r\sin v.$$

Mais on a $\cos v = \frac{r'^2 + r^2 - k^2}{2r'r}$, donc en faisant pour abréger, $r' + r = c$,

$$\cos\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{c^2 - k^2}{4r'r}}, \quad \sin\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{k^2 - (r' - r)^2}{4r'r}},$$

$$\sin v = 2\sin\frac{v}{2}.\cos\frac{v}{2} = \frac{\sqrt{(c^2 - k^2)(k^2 - (r' - r)^2)}}{2r'r}, \text{ donc}$$

$$s = \frac{\sqrt{(k^2 - (r' - r)^2)}}{4}\left\{\frac{k^2 - (r' - r)^2}{6q} + \sqrt{(c^2 - k^2)}\right\}.$$

*

Or (§. 342.) $\text{tang}\frac{\Phi}{2} = \frac{\cos\frac{v}{2} - \sqrt{\frac{r}{r'}}}{\sin\frac{v}{2}}$, partant $\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)^2 = \frac{\left(\sin\frac{v}{2}\right)^2}{1 + \frac{r}{r'} - 2\cos\frac{v}{2}\sqrt{\frac{r}{r'}}}$

$= \frac{k^2 - (r'-r)^2}{4r(c - \sqrt{(c^2-k^2)})}$; en substituant donc $q = r\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)^2$, on aura

$$s = \frac{\sqrt{(k^2 - (r'-r)^2)}}{12}(2c + \sqrt{(c^2-k^2)}), \text{ et (§. 342.)}$$

$$\frac{6t}{m} = \frac{6s}{\sqrt{q}} = (2c + \sqrt{(c^2-k^2)})\sqrt{(c - \sqrt{(c^2-k^2)})},$$

ou en faisant pour abréger, $\sqrt{(c^2-k^2)} = e$,

$$\frac{6t}{m} = c\sqrt{(c-e)} + (c+e)\sqrt{(c-e)} = c\sqrt{(c-e)} + k\sqrt{(c+e)}.$$

Faisons $\sqrt{(c \pm e)} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$: en prenant les carrés, on aura $\alpha + \beta = c$, $4\alpha\beta = e^2$, donc $(\alpha - \beta)^2 = c^2 - e^2 = k^2$ ou $\alpha - \beta = k$, d'où il vient

$$\alpha = \frac{c+k}{2}, \beta = \frac{c-k}{2}, \text{ et}$$

$$\frac{6t}{m} = \frac{(c+k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{(c-k)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}. \text{ En faisant donc}$$

$$\frac{r'+r+k}{2} = f, \frac{r'+r-k}{2} = g, \text{ on aura}$$

$$t = \frac{m}{3}(f^{\frac{3}{2}} - g^{\frac{3}{2}} = 27,4038599(f^{\frac{3}{2}} - g^{\frac{3}{2}}) \text{ jours (§. 341.).}$$

Cette formule, donnée par Lambert (1), est extrêmement simple, parcequ'elle ne suppose que la somme de deux rayons vecteurs et l'angle compris, ou la corde décrite par la comète. On a construit sur cette formule une table (2) qui renferme le tems, les trois côtés du triangle au soleil étant donnés. Ces trois côtés, r, r', k, donnent aussi les élémens paraboliques de l'orbite, la distance périhélie q, et l'anomalie Φ ou la longitude du périhélie, par le moyen des équations

$$4q = \frac{k^2 - (r'-r)^2}{c - \sqrt{(c^2-k^2)}}, \text{ et } \text{tang}\frac{\Phi}{2} = \frac{\sqrt{(c^2-k^2)} - 2r}{\sqrt{(k^2-(r'-r)^2)}}.$$

§. 344. Les deux propositions précédentes (§. 341. 342.) suffisent pour le calcul parabolique qui consiste à trouver, dans une parabole quelconque, le secteur décrit, ou l'anomalie traversée, dans un tems donné, et réciproquement. L'équation $\theta = mq^{\frac{3}{2}}\left(\text{tang}\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{3}\left(\text{tang}\frac{\Phi}{2}\right)^3\right)$ (§. 342.) fait connaître θ,

(1) *Insigniores orbitae cometarum proprietates.* §. 83.

(2) *Tab. astron. publ. par l'Acad. de Berlin, T. III. page* 15 — 21.

Φ étant donné, et réciproquement, q étant déterminé arbitrairement, ou conformément à des essais précédens. Si l'on cherche les tems θ, Θ, qui répondent à la même anomalie Φ en différentes paraboles, dont les distances périhélies sont q, Q; m et Φ ont la même valeur dans les deux paraboles, et les tems θ, Θ, sont entre eux comme $q^{\frac{3}{2}}$ et $Q^{\frac{3}{2}}$; c'est-à-dire les carrrés des tems, employés dans différentes paraboles à décrire la même anomalie, sont en raison des cubes des distances périhélies. Ayant donc construit une table, renfermant l'anomalie qui répond à un tems quelconque, pour une certaine distance périhélie Q, elle donnera pour le même tems l'anomalie dans une autre parabole dont la distance périhélie est q, en multipliant le tems tiré de la table par $\sqrt{\frac{q^3}{Q^3}}$. Le calcul sera plus simple, si $Q = 1$, c'est-à-dire, si la table est construite pour la distance périhélie, égale au rayon de l'orbite de la terre: alors la table sera calculée sur la formule $\Theta = m\left(\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}\right)^3\right)$, et pour une autre parabole on aura $\theta = \Theta q^{\frac{3}{2}}$.

Si l'on veut déterminer l'anomalie Φ, le tems θ étant donné, on aura à résoudre l'équation du troisième degré, $\left(\operatorname{tang}\frac{\Phi}{2}\right)^3 + 3\operatorname{tang}\frac{\Phi}{2} = \frac{3\theta}{m q^{\frac{3}{2}}}$. C'est par la solution de cette équation, que la table a été calculée, qui a θ pour argument. A l'aide de cette table on trouvera aisément l'anomalie Φ.

La table dont les astronomes se servent ordinairement, est celle de Barker, qui a été réimprimée dans l'*Astronomie de M. Delambre*, et dans un traité de M. Olbers (1). Elle donne, pour toutes les anomalies vraies Φ, de 5′ à 5′, depuis zéro jusqu'à 179° 55′ (parceque l'anomalie de 180° n'a pas lieu dans la parabole), le logarithme du nombre $N = 75\left(\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\Phi}{2}\right)$. Le secteur qui, dans la parabole dont la distance périhélie $Q = 1$, répond à l'anomalie Φ de 90°, est $= \frac{1}{3} = S$: en nommant dons s le secteur de la même parabole, qui convient à une anomalie quelconque Φ, s est $= \operatorname{tg}\frac{\Phi}{2} + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}\right)^3$, et le nombre $N = 75s = \frac{100}{S}s$, ou $S : 100 :: s : N$, c'est-à-dire N est le secteur s exprimé en centièmes de S. Or le tems θ qu'une comète, décrivant une parabole dont la distance périhélie $= q$, emploie à traverser l'anomalie Φ, est $= m q^{\frac{3}{2}} s$ (§. 342.): donc $\theta = \frac{m q^{\frac{3}{2}}}{75} N$. Halley appelle le nombre N qui

(1) *Über die leichteste Méthode die Bahn eines Cometen zu berechnen.*

répond à θ jours, le *mouvement moyen* pour le tems θ, et Barker appelle $\frac{N}{\theta}$ le *moyen mouvement diurne*. En nommant donc

$$\log \frac{75}{m} = 9,9601283 = b,$$

on déterminera le mouvement diurne n par la formule

$$\log n = b - \tfrac{3}{2} \log q;$$

après quoi on tirera de la table log N, pour l'anomalie donnée Φ, et l'on trouvera, en jours et en fractions du jour, le tems θ qui est employé à décrire Φ, par la formule

$$\log \theta = \log N - \log n.$$

Le problème inverse est de déterminer l'anomalie Φ qui est traversée dans le tems θ depuis le périhélie. Après avoir exprimé θ en jours et en fractions décimales du jour, on ajoutera ensemble log θ et log n, ce qui donnera

$$\log N = b - \tfrac{3}{2} \log q + \log \theta;$$

et il est aisé de trouver par interpolation, l'anomalie Φ qui, dans la table, répond à log N. Comme les comètes emploient $\frac{4}{3} m q^{\frac{3}{2}}$ jours à décrire l'anomalie de 90°, ce tems sera, pour la comète dont la distance périhélie $= 1$, $\frac{4}{3} m = 109,615436$ jours: c'est pourquoi on l'a appelée *la comète de* 109 *jours*. Après avoir trouvé Φ, on connaît aussi le rayon vecteur $r = \frac{q}{\left(\cos \frac{\Phi}{2}\right)^2}$ (§. 342.).

§. 345. Si l'on a trois observations d'une comète, très-peu éloignées l'une de l'autre, ensorte que la courbure de l'orbite pendant ce tems est peu sensible, on peut exprimer d'une manière fort simple le rapport entre les trois distances de la terre. Soit (*Fig.* 95.) S le soleil, T, E, R, les trois lieux de la terre, d'où la comète a été observée en A, B, C, et AO, BP, CQ, perpendiculaires à l'écliptique, donc O, P, Q, les lieux *réduits* de la comète. Si le rayon vecteur SB et la distance accourcie SP rencontrent les cordes AC, OQ, en b et p, les secteurs ASB, BSC, sont proportionnels aux tems. Mais les observations étant très-près l'une de l'autre, les segmens AB, CB, seront si petits, qu'ils ne pourront altérer sensiblement le rapport des triangles ASB, BSC (§. 170.). Ces triangles seront donc à très-peu près en raison des secteurs et des tems; et comme, ayant même base SB, ils sont comme les hauteurs $Ab \sin b$, $Cb \sin b$, et par conséquent comme les cordes Ab, Cb,

celles-ci seront comme les tems pendant lesquels ces cordes ou les arcs AB, BC, sont parcourus. Il en est de même des cordes T*e*, *e*R. Si les prolongations de CA, QO, se rencontrent en N, SN étant la ligne des noeuds, *bp* sera dans les plans CNQ, BSP, perpendiculaires à l'écliptique; d'où il suit que *bp* est perpendiculaire à l'écliptique, ou parallèle à AO, CQ. Il en résulte la proportion $A\beta : \beta C :: Op : pQ$, d'où il suit que les cordes Op, pQ, sont aussi proportionnelles aux tems. On peut encore, pour une première approximation, supposer *ep* parallèle à EP, ensorte que la longitude de la comète, observée de E, est déterminée par la position de la droite *ep*.

Dans la *Fig.* 96. où les lettres O, *p*, Q, T, *e*, R, désignent les mêmes points que dans la *Fig.* 95. les trois longitudes observées sont, d'après ce qui précède, déterminées par les droites TO, *ep*, RQ. En nommant donc *t*, *t'*, *t''*, les tems écoulés entre les observations I et II, II et III, I et III, μ, μ', μ'', les angles géocentriques que la comète à traversés sur l'écliptique pendant les tems *t*, *t'*, *t''*, et en tirant $e\varepsilon$, R*r*, parallèles à TO, et Rϱ parallèle à *ep*, on aura

$$\varepsilon ep = \mu, \quad \varrho RQ = \mu', \quad rRQ = \mu'', \text{ et dans le triangle ABC,}$$

$$A = \mu, \quad B = \mu', \quad C = 180° - \mu''.$$

Les triangles OA*p*, OCQ, donneront

$$\sin O = \frac{Ap \sin \mu}{Op} = \frac{QC \sin \mu''}{OQ},$$

et à cause de $Op : OQ :: t : t''$,

$$\text{I.} \quad Ap = \frac{t \sin \mu''}{t'' \sin \mu} QC.$$

Les triangles TA*e*, TCR, donnent également $\sin T = \frac{eA \sin \mu}{Te} = \frac{RC \sin \mu''}{RT}$, et $Te : RT :: t : t''$, d'où l'on tire

$$\text{II.} \quad eA = \frac{t \sin \mu''}{t'' \sin \mu} RC.$$

On a de plus dans les triangles RB*e*, RCT, $\sin R = \frac{eB \sin \mu'}{Re} = \frac{TC \sin \mu''}{TR}$, et dans les triangles QB*p*, QCO, $\sin Q = \frac{Bp \sin \mu'}{Qp} = \frac{OC \sin \mu''}{OQ}$. Or $Re : TR :: Qp : OQ :: t' : t''$; on aura donc les équations

$$\text{III.} \quad eB = \frac{t' \sin \mu''}{t'' \sin \mu'} TC, \qquad \text{IV.} \quad pB = \frac{t' \sin \mu''}{t'' \sin \mu'} OC.$$

En faisant les trois distances accourcies de la terre

$TO = \varrho$, $ep = \varrho'$, $RQ = \varrho''$, on aura

$$(I+II),\ \varrho' = \frac{t \sin \mu''}{t'' \sin \mu} \varrho'', \qquad (III+IV),\ \varrho' = \frac{t' \sin \mu''}{t'' \sin \mu'} \varrho,$$

d'où il résulte la proportion

$$\varrho : \varrho'' :: \frac{t}{\sin \mu} : \frac{t'}{\sin \mu'},$$

c'est-à dire, *les distances accourcies de la comète à la terre sont en raison directe des tems écoulés entre chaque observation et la troisième, et en raison inverse des sinus des mouvemens géocentriques de la comète pendant ces tems.* Ayant pris arbitrairement une distance de la terre, la proportion précédente servira à déterminer les deux autres (1).

Le calcul est singulièrement simplifié par ce moyen. La méthode précédente (§. 339.) consiste à adopter arbitrairement deux angles de commutation, indépendans l'un de l'autre. Il est donc nécessaire d'essayer, pour chaque valeur du premier angle, différentes hypothèses, jusqu'à ce que les deux angles satisfassent à deux observations: ensuite il faut former diverses suites de pareilles hypothèses, pour rendre les deux angles conformes à trois observations. En vertu de la proportion que nous venons de prouver, une distance est déterminée par l'autre: au lieu d'une suite d'hypothèses on ne formera donc qu'une seule hypothèse pour la première distance, et l'on sera ainsi dispensé de tout le calcul qui était nécessaire pour examiner, si les deux distances sont d'accord entre elles.

§. 346. Le lieu d'une comète ou planète *rèduit à l'écliptique* est le point, où la perpendiculaire abaissée de l'astre, vient rencontrer l'écliptique. La réunion de ces points formera une courbe qui est la même que la *projection ortographique* de l'orbite sur l'écliptique, et qu'on peut appeler l'*orbite réduite* de la comète. Cette projection sera d'un grand usage, pour obtenir une approximation sans beaucoup de calcul.

Soit (*Fig.* 97.) PA l'orbite parabolique, S son foyer ou le soleil, P le sommet ou le périhélie, PSQ le grand axe, SNυ la ligne des noeuds, donc υ le noeud, et abaissons d'un point quelconque de l'orbite A, les perpendiculaires AO à l'écliptique, AM, et par conséquent OM, à la ligne des

(1) Voy. *Boscovich, Nouveaux Ouvrages, Tome III, Opusc. I.* §. 5.

noeuds: on aura donc l'inclinaison de l'orbite AMO = J. Le point O est dans la projection, et si l'on joint tous ces points par la courbe Op, elle sera l'orbite réduite. Soit AQ perpendiculaire à PS, PS = q, SQ = X, QA = Y; on aura

$$Y^2 = 4q(X + q).$$

Soit pour la projection, SM = r, MO = s; AM = $\frac{s}{\cos J}$ et AQ seront dans le plan de l'orbite. Appelons ϕ l'angle MSQ = PSn que la ligne des noeuds fait avec l'axe, et soit q le point où AQ coupe SN: on aura AqM = SqQ = 90° — ϕ, d'où, en faisant pour abréger, $\sin\phi = m$, $\cos\phi = n$, $\cos J = \frac{1}{k}$, on aura

$$AM = ks, \quad Aq = \frac{ks}{n}, \quad Mq = \frac{mks}{n}, \quad Sq = r - \frac{mks}{n}, \quad Qq = mr - \frac{m^2 ks}{n},$$

$$SQ = nr - mks = X, \quad QA = mr + nks = Y.$$

Il en résulte pour la projection cette équation entre r et s,

$$\text{I.} \quad 0 = m^2 r^2 + 2mnkrs + n^2 k^2 s^2 - 4qnr + 4qmks - 4q^2;$$

ce qui est la forme générale pour les sections coniques; mais les constantes dépendent l'une de l'autre ensorte que la parabole seule satisfait à cette équation; ce qu'on verra aisément, en transformant les coordonnées.

Qu'on tire dans l'écliptique par S la droite SR, faisant avec la ligne des noeuds SN l'angle RSN = ψ dont la tangente est $\frac{m}{nk}$, qu'on abaisse la perpendiculaire OR sur SR, et qu'on prenne les coordonnées SR = t, RO = u; en nommant $\sin\psi = \mu$, $\cos\psi = \nu$, on aura

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{m}{nk} \text{ ou } m\nu - nk\mu = 0, \quad Sr = \frac{t}{\nu}, \quad Rr = \frac{\mu t}{\nu}, \quad Or = u - \frac{\mu t}{\nu},$$

$$OM = s = \nu u - \mu t, \quad Mr = \mu u - \frac{\mu^2 t}{\nu}, \quad SM = r = \mu u + \nu t.$$

En substituant ces valeurs au lieu de r et s dans l'équation I. on aura

$$0 = (m\mu + n\nu k)^2 u^2 + (m\nu - n\mu k)^2 t^2 + 2(m\nu - nk\mu)(m\mu + nk\nu)ut$$
$$+ 4q(m\nu k - n\mu)u - 4q(mk\mu + n\nu)t - 4q^2,$$

ou à cause de $m\nu - nk\mu = 0$,

$$\text{II.} \quad 0 = A^2 u^2 + 4Bqu - 4Cqt - 4q^2,$$

A étant = $m\mu + nk\nu$, B = $mk\nu - n\mu$, C = $mk\mu + n\nu$. Comme t n'a qu'une seule valeur pour chaque valeur de u, il s'en suit que la *projection* est aussi une *parabole*, dont le grand axe est parallèle à SR, faisant avec la ligne des noeuds un angle ψ dont la tangente est = tang ϕ cos J, et tombant du même

côté que l'axe de l'orbite. L'axe de la projection est la ligne VT, parallèle à SR à la distance $RT = SV = e = \frac{2Bq}{A^2}$. En effet, si l'on nomme les ordonnées prises sur VT, $TO = y$, on aura $SR = VT = t$, et $RO = u = y - e$, ce qui étant substitué en II, donnera l'équation

$$o = A^2 y^2 + 2(2Bq - A^2 e)y - 4Cqt + A^2 e^2 - 4Bqe - 4q^2,$$

et à cause de $2Bq - A^2 e = o$,

$$\text{III.} \quad o = A^2 y^2 - 4Cqt - \frac{4q^2(A^2 + B^2)}{A^2}.$$

Soit $Vp = g = \frac{q(A^2 + B^2)}{A^2 C}$, et $pT = x$, ou $t = x - g$: la dernière équation deviendra,

$$o = A^2 y^2 - 4Cqx + 4Cqg - \frac{4q^2(A^2 + B^2)}{A^2},$$

et à cause de $Cg - \frac{q(A^2 + B^2)}{A^2} = o$,

$$o = A^2 y^2 - 4Cqx.$$

Or on a $k = \frac{m\nu}{n\mu} = \frac{\text{tang}\,\Phi}{\text{tang}\,\psi}$, $A = \frac{m}{\mu}$, $B = \frac{m^2 - \mu^2}{n\mu}$, $C = \frac{\nu}{n}$: la dernière équation se changera donc en

$$\text{IV.} \quad y^2 = \frac{4\mu^2 \nu q}{m^2 n} x,$$

ce qui est l'équation de la parabole, les abscisses x étant prises sur l'axe principal depuis le sommet p. Le paramètre de l'orbite *réduite* est $\frac{4\mu^2\nu}{m^2 n} q$, qui est au paramètre de l'orbite $4q$ comme $\mu^2\nu$ est à $m^2 n$, ou $\sin\psi \sin 2\psi$ à $\sin\Phi \sin 2\Phi$; et sa distance périhélie est $= \frac{q \sin\psi \sin 2\psi}{\sin\Phi \sin 2\Phi}$.

Ainsi, l'orbite ayant été construite d'après les élémens Φ, J, q, on calculera $\text{tg}\,\psi = \text{tg}\,\Phi \cos J$; on prendra sur la ligne des noeuds NSn, $Sn = \frac{SV}{\sin\psi} = \frac{e}{\mu} = \frac{2q(m^2 - \mu^2)}{m^2 n} = \frac{4q \sin(\Phi + \psi)\sin(\Phi - \psi)}{\sin\Phi \sin 2\Phi}$, on fera $SnV = \psi$, $np = nV - Vp = Sn \cos\psi - g = \frac{q(m^2 - \mu^2 - \mu^2\nu^2)}{m^2 n \nu} = \frac{Sn}{2\nu} - \frac{q\mu^2\nu}{m^2 n}$, ou

$$np = \frac{Sn}{2\cos\Phi} - \frac{q \sin\psi \sin 2\psi}{\sin\Phi \sin 2\Phi}, \quad \text{et } pF = \frac{q \sin\psi \sin 2\psi}{\sin\Phi \sin 2\Phi},$$

ce qui suffit pour connaître le sommet p et le foyer F, et par conséquent pour construire la parabole entière $pO\nu$. Il faut distinguer le sommet p de la projection du sommet P de l'orbite. Ayant abaissé sur l'écliptique et sur la ligne des noeuds les perpendiculaires Po, et om, Pm, on a

$Pmo = J$, $PSm = \Phi$, donc $Sm = q \cos \Phi$, $Pm = q \sin \Phi$, $mo = q \sin \Phi \cos J$, et la projection o du périhélie P est donnée par Sm et mo.

§. 347. Pour vérifier les élémens par la comparaison avec les observations, il ne suffit pas de connaître l'orbite; il est nécessaire qu'on puisse indiquer pour un tems donné, le lieu occupé par la comète, pour en déduire son lieu géocentrique. Dans une première hypothèse on peut se dispenser du calcul, en employant la construction de l'orbite et de sa projection, qui vient d'être développée. Si l'on a tracé de plus l'orbite terrestre, on trouvera pour un tems quelconque, le lieu géocentrique de la comète, pourvu qu'on puisse déterminer les lieux occupés par la comète dans la projection, et par la terre dans son orbite. Pour cet effet il est nécessaire de diviser les deux orbites en jours et heures, suivant les préceptes qui seront donnés ci-après.

Comme il est plus que suffisant, de substituer à l'orbe terrestre un cercle excentrique, il s'agit seulement de la placer dans la situation juste relativement à l'orbite de la comète. Soit (*Fig.* 98.) AP l'orbite de la comète, Sn la ligne des noeuds: la longitude supposée du noeud, et la longitude connue de l'aphélie de la terre SI, donneront les angles ΥSn, ΥSI, nSI, et nSP. Ayant donc pris sur SI une ligne SH égale à l'excentricité de la terre, sur la même échelle sur laquelle on a fait $SP = q$, on décrira du centre H et du rayon $HI = 1$ le cercle ITR qui représente l'orbite de la terre, sur laquelle on pourra déterminer, pour un tems donné, les lieux de la terre T, R, par le moyen des angles ΥST, ΥSR. Si donc AP est l'orbite réduite, et divisée en jours etc. on n'a qu'à chercher deux lieux T, A, sur les orbites de la terre et de la comète, qui répondent à un tems donné: cela posé, ΥTA sera la longitude géocentrique de la comète, ΥSA la longitude héliocentrique, STA l'élongation, et TSA la commutation.

Deux observations suffisent pour diviser l'orbite de la comète. Puis donc que le passage par le périhélie est un des élémens les plus importans, il sera bon de prendre ce passage pour l'une des observations.

§. 348. *Lemme. Imaginés dans chaque instant un cercle passant par le lieu de la comète* C (*Fig.* 98.), *le périhélie* P, *et le foyer ou le soleil* S; *le cen-*

tre de ce cercle sera constamment dans la droite KL, *perpendiculaire à la distance périhelie* PS *par son milieu* F, *et le centre avancera sur cette ligne d'un mouvement uniforme.*

La première proposition est évidente, parceque le cercle est supposé passer constamment par les points S, P. Soit la comète en C, G le centre du cercle décrit par C, S, P, et CM perpendiculaire à l'axe. En nommant $PM = x$, $MC = y$, $PS = q$, $PF = \frac{1}{2}q$, on aura

$y^2 = 4qx$, la surface $PCM = \frac{2}{3}xy$, le triangle $SMC = \frac{1}{2}(x-q)y$, donc

le secteur $PCS = \frac{1}{2}y(q + \frac{1}{3}x) = S$.

En abaissant sur CM la perpendiculaire GD, et en joignant GS, on aura

$$GS^2 = DM^2 + FS^2 = y^2 - 2y \cdot DC + DC^2 + \frac{q^2}{4}, \text{ et}$$

$$GC^2 = FM^2 + DC^2 = x^2 - qx + \frac{q^2}{4} + DC^2.$$

Mais $GS = GC$, d'où l'on tirera

$$DC = \frac{y^2 - x^2 + qx}{2y}, \quad FG = y - DC = \frac{y^2 + x^2 - qx}{2y} = \frac{xy(3q+x)}{2y^2} = \frac{y(3q+x)}{8q},$$

et en substituant $y(3q+x) = 6S$, $FG = \frac{3S}{4q}$. Or S étant proportionnel au tems suivant les lois de Kepler, le mouvement du centre FG est uniforme. Au moment où la comète passe par le périhélie, le centre est en F. En exprimant donc le tems t depuis le périhélie en jours, on a (§. 341.)

$S = \frac{t}{m}V q$, et $FG = \frac{3t}{4m\sqrt{q}}$ en rayons de l'orbite de la terre.

Cette propriété des orbites paraboliques, aussi élégante qu'importante, est une des nombreuses découvertes de Newton (1).

§. 349. Le lemme précédent offre un moyen très-simple de diviser l'orbite parabolique en tems. Comme les élémens doivent nécessairement donner le tems T du passage par le périhélie, et la distance périhélie q, on marquera en P le tems T, et pour un tems quelconque t depuis le périhélie, on fera $FE = \frac{3t}{4m\sqrt{q}}$, t étant exprimé en jours, et l'on décrira du centre E et du rayon $ES = EP$ un cercle qui coupera la parabole dans un point B qui sera le lieu de la comète dans l'instant t. On peut obtenir le même résultat sans calcul, et sans connaître T. Si A et C sont deux lieux de la

(1) *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Prop. XXX.* §. 187.

comète, observés de la terre en T et R, on connaît les élongations de la comète sur l'écliptique, η et θ, et l'on trouvera avec η et la latitude géocentrique β, l'élongation sur l'orbite STA, par l'équation $\cos STA = \cos\eta\cos\beta$. Ayant calculé de la même manière l'angle SRC, on peut tirer les droites TA, RC, qui donnent deux lieux de la comète avec le tems qui leur convient. Soit O le milieu de SC, OG perpendiculaire à SC, qui rencontre FK en G: cela posé, G sera le cercle du centre passant par C, S, P. On trouvera par le même procédé le centre K du cercle décrit par A, S, P: ayant donc marqué en G et K les tems qui conviennent à C et A, on connaît le tems qui répond à la ligne GK; elle servira donc d'échelle pour diviser la ligne entière FK en tems, et par conséquent aussi la parabole, en prenant de chaque point E de la ligne FK, $EB = ES = EP$. Le tems qu'on trouvera par ce procédé pour le point F, servira en même tems à vérifier le tems T, et à juger si la valeur supposée de T est d'accord avec les autres élémens.

§. 350. Soit (*Fig.* 97.) AP l'orbite élevée sur l'écliptique, N*n* la ligne des noeuds, AO, et AM, OM, perpendiculaires à l'écliptique et à N*n*; et imaginons que la parabole AP tourne sur l'axe N*n*, jusqu'à coïncider avec l'écliptique. Pendant cette rotation AM reste constamment dans le plan AMO perpendiculaire à N*n*, elle finira par coïncider avec MO, et le point A tombera en *a*, M*a* étant = MA et $MO = MA\cos J = Ma\cos J$. Si donc la véritable orbite AP a été tracée dans le plan de l'écliptique, et que *a* soit le même point que le point A dans la situaion élevée de l'orbite, on trouvera la projection O de *a*, en abaissant la perpendiculaire *a*M sur N*n*, et en faisant $MO = Ma\cos J$. Il est aisé de voir, que l'angle $PSn = \Phi$ que faît la ligne des noeuds avec l'axe n'est pas changé, pendant que le triangle PS*m* tourne sur l'axe S*m*. Or les points *a*, O, répondant au même instant, on procèdera de la manière suivante: après avoir divisé la parabole *a*P suivant les préceptes du §. 349, on abaissera de chaque point de division *a* la perpendiculaire sur la ligne des noeuds *a*M, et l'on fera $MO = Ma\cos J$: alors O sera le point correspondant de l'orbite réduite qui sera ainsi construite et divisée en tems.

Cela posé, on pourra vérifier les élémens par chaque observation, en joignant les points A, T (*Fig.* 98.), où le tems de l'observation se trouve

marqué, ce qui donne l'angle STA qui doit être le même que la différence observée entre les longitudes du soleil et de la comète.

§. 351. Dès qu'une comète a paru, il faut chercher une valeur approchée de ses élémens, afin qu'on puisse la retrouver, si les observations ont été interrompues par sa conjonction avec le soleil, ou par le mauvais tems. Les premières observations seront donc très-près l'une de l'autre, ensorte qu'on pourra se servir de la méthode exposée ci-dessus (§. 345.), qui sera corrigée par une méthode semblable à celle de M. Gauss (§. 171.) (1). Soient

α, α', α'', et β, β', β'', les longitudes et latitudes géocentriques dans les trois observations, ϱ, ϱ', ϱ'', les distances accourcies de la comète à la terre qui sont encore inconnues, $\odot$, $\odot'$, $\odot''$, les longitudes du soleil, R, R', R'', les rayons vecteurs de la terre, t, t', les tems écoulés entre la I et la II, et entre la II et la III observations.

On a trouvé (§. 345.)

$$\varrho'' = \frac{t' \sin(\alpha' - \alpha)}{t \sin(\alpha'' - \alpha')} \varrho,$$

équation qui a besoin de deux corrections. On avait supposé 1) les lignes EP, ep, parallèles (*Fig.* 95.), et 2) les cordes Op, pQ, Te, eR, proportionnelles au tems. Il est aisé de voir que la première supposition se réduit à substituer le point b' au lieu de B' (*Fig.* 47.): car si l'on suppose l'oeil au centre de la sphère, sur laquelle tous les points sont projétes, A, A', A'', seront les lieux du soleil, b' sera le point d'intersection du grand cercle passant par les lieux géocentriques de la comète dans la I et la III observation, B, B'', avec le grand cercle passant par les lieux géocentriques de la comète et du soleil dans la II observation, B', A'; b' est donc la projection du point d'intersection de la corde AC (*Fig.* 95.) avec le rayon vecteur SB, ou du point b qui a la même longitude que le point p. La première supposition sera donc corrigée, en substituant la longitude de b' (*Fig.* 47.) que je désignerai par $'\alpha$, au lieu de celle de B' $= \alpha'$. On a vu (§. 171. *suiv.*), comment se trouvent

(1) Voy. le traité de M. Olbers, cité §. 344.

$B'b' = \sigma'$, $A'B' = d'$, $B'A'a' = \delta'$, et $A'b' = d' - \sigma'$, d'où l'on tire

$$\text{tang } A'\beta' = \text{tang}(d' - \sigma')\cos\delta', \text{ et } {}'\alpha = \odot' \pm A'\beta'.$$

En faisant donc pour abréger,

$$\frac{t' \sin({}'\alpha - \alpha)}{t \sin(\alpha'' - {}'\alpha)} = M,$$

la première correction donnera

$$\varrho'' = M\varrho.$$

Soit (*Fig.* 99.) le soleil en S, la terre en T, la comète en C, sa latitude géocentrique $CTE = \beta$, et nommons r, r', r'', ses rayons vecteurs dans les trois observations; cela posé on aura $TC = \varrho \sec\beta$, $ST = R$, $SC = r$, et dans le triangle rectiligne TSC,

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 \sec^2\beta - 2R\varrho \sec\beta \cos STC.$$

Dans le triangle sphérique SCE, dont le centre est T, les deux côtés perpendiculaires sont $CTE = \beta$, $STE = \odot - \alpha$, et l'hypothénuse STC: on a donc

$$\cos STC = \cos\beta \cos(\odot - \alpha),$$

ce qui étant substitué dans la dernière équation, donnera

$$(1) \ldots\ldots r^2 = R^2 - 2R\varrho\cos(\odot - \alpha) + \varrho^2 \sec^2\beta.$$

On trouvera de la même manière pour la troisième observation, en substituant $\varrho'' = M\varrho$,

$$(2) \ldots\ldots r''^2 = R''^2 - 2MR''\varrho\cos(\odot'' - \alpha'') + M^2\varrho^2\sec^2\beta''.$$

Déterminons le lieu de la comète C par les trois coordonnées perpendiculaires

$$CE = z, \quad EA = y, \quad SA = x,$$

SA étant la droite dirigée vers le point vernal, ACT l'ordre des signes, et EC étant supposée au nord de l'écliptique. En abaissant les perpendiculaires Tt, $T\tau$, sur SA, AE, on aura

$$\tau TE = \alpha, \quad AST = \text{☊} = 180° + \odot, \quad T\tau = \varrho\cos\alpha, \quad \tau E = \varrho\sin\alpha,$$

$$Tt = R\sin\text{☊} = -R\sin\odot, \quad St = R\cos\text{☊} = -R\cos\odot, \text{ donc}$$

$$x = \varrho\cos\alpha - R\cos\odot, \quad y = \varrho\sin\alpha - R\sin\odot, \quad z = \varrho\,\text{tang}\,\beta,$$

et pour la troisième observation,

$$x'' = M\varrho\cos\alpha'' - R''\cos\odot'', \quad y'' = M\varrho\sin\alpha'' - R''\sin\odot'', \quad z'' = M\varrho\,\text{tang}\,\beta''.$$

En nommant k la corde entre le premier et le troisième lieu de la comète, on aura

$$k^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2,$$

et à cause de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$,

$$k^2 = r^2 + r''^2 - 2xx' - 2yy'' - 2zz''.$$

Si l'on substitue les valeurs de x, y, z, x'', y'', z'', il viendra

$$k^2 = r^2 + r''^2 - 2RR'' \cos(\odot'' - \odot) + 2R''\varrho\cos(\odot'' - \alpha) + 2MR\varrho\cos(\odot - \alpha'')$$
$$- 2M\varrho^2\cos(\alpha'' - \alpha) - 2M\varrho^2 \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\beta'',$$

ou en nommant les quantités données

$$2RR''\cos(\odot'' - \odot) = F, \quad 2R''\cos(\odot'' - \alpha) + 2MR\cos(\odot - \alpha'') = G,$$
$$2M\cos(\alpha'' - \alpha) + 2M\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\beta'' = H,$$
$$(3) \ldots\ldots k^2 = r^2 + r''^2 - F + G\varrho - H\varrho^2.$$

Les équations (1) (2) (3) renferment quatre inconnues, r, r'', ϱ, k. En attribuant à l'une, par ex. ϱ, une valeur arbitraire, les équations (1) (2) donneront r, r'', d'ou l'on trouvera k par l'équation (3). Mais toutes ces valeurs sont fondées sur l'hypothèse qu'on a adoptée pour ϱ: ainsi il faut les vérifier, ce qui se fera par le moyen du tems écoulé entre la I et la III observation, qui est $= t + t' = t''$.

En exprimant les tems en jours, et en faisant $\frac{m}{\beta} = 27,403859 = n$, on aura suivant la formule de Lambert (§. 343.)

$$t'' = n\left(\frac{r + r'' + k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - n\left(\frac{r + r'' - k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Il faudra donc changer la valeur supposée de ϱ, jusqu'à ce qu'elle satisfasse à cette équation; et deux hypothèses pour ϱ suffiront, pour en trouver par interpolation la valeur qui satisfait aux trois observations. Avec cette valeur on calculera par (1) et (2), r et r'', d'où l'on conclura les latitudes et les longitudes héliocentriques λ, λ'', et L, L''. En effet on a (*Fig.* 99.) $CE = \varrho\operatorname{tang}\beta = r\sin\lambda$, d'où il suit

$$\sin\lambda = \frac{\varrho}{r}\operatorname{tang}\beta, \quad \sin\lambda'' = \frac{M\varrho}{r''}\operatorname{tang}\beta'', \quad \sin TSE = \frac{\varrho\sin STE}{SE},$$

et en nommant les angles de commutation, γ, γ'',

$$\sin\gamma = \frac{\varrho\sin(\odot - \alpha)}{r\cos\lambda}, \quad \sin\gamma'' = \frac{M\varrho\sin(\odot'' - \alpha'')}{r''\cos\lambda''}, \quad L = \mathfrak{F} + \gamma, \text{ ou}$$
$$L = 180° + \odot + \gamma, \quad L'' = 180° + \odot'' + \gamma''.$$

Avec $\lambda, \lambda'', L, L''$, on trouvera (§. 177.) (p) (q) (r) la longitude du noeud ascendant $= \Omega$, l'inclinaison $= J$, et les longitudes héliocentriques sur l'or-

bite, C, C″. En nommant u, u'', les anomalies vraies, on connaît l'angle au soleil $u'' - u = C'' - C$, et les rayons vecteurs adjacens, r, r'', d'où l'on conclura (§. 342.)

la longitude du périhélie $= P$, la distance périhélie $= q$, et

le tems du passage par le périhélie $= \Theta$,

ensorte que tous les élemens sont connus.

§. 352. Considérons maintenant la correction de la seconde supposition (§. 351.). Pour cet effet on se servira du tems de la seconde observation, en calculant pour cet instant, avec les élémens trouvés par la méthode précédente, l'anomalie vraie u'. Cela posé on a (*Fig.* 95.)

$$\sin AbB = \sin CbB = \frac{AS.\sin ASb}{Ab} = \frac{CS.\sin CSb}{Cb},$$

$$\sin SeT = \sin SeR = \frac{ST.\sin TSe}{Te} = \frac{SR.\sin RSe}{Re}, \text{ d'où il suit}$$

$$Ab : Cb :: r\sin(u' - u) : r''\sin(u'' - u'), \text{ et}$$

$$Te : Re :: R\sin(\odot' - \odot) : R''\sin(\odot'' - \odot').$$

Mais les projections Op, Qp, sont entre elles comme Ab, Cb: en faisant donc

$$\frac{r''\sin(u'' - u')}{r\sin(u' - u)} = m, \quad \frac{R''\sin(\odot'' - \odot')}{R\sin(\odot' - \odot)} = n,$$

on aura $\frac{Qp}{Op} = m$, $\frac{Re}{Te} = n$. Comme ces rapports doivent être à très-peu près égaux à $\frac{t'}{t} = \tau$, supposons $m = \tau + p$, $n = \tau + q$,

$$p = \frac{r''\sin(u'' - u')}{r\sin(u' - u)} - \frac{t'}{t}, \text{ et } q = \frac{R''\sin(\odot'' - \odot')}{R\sin(\odot' - \odot)} - \frac{t'}{t},$$

étant donnés. Or on a (*Fig.* 96.)

$$\sin p = \frac{OA\sin A}{Op} = \frac{QB\sin B}{Qp}, \quad \sin e = \frac{TA\sin A}{Te} = \frac{RB\sin B}{Re}, \text{ donc}$$

$$OA + TA = \varrho = \frac{Op\sin p + Te\sin e}{\sin A}, \text{ et}$$

$$QB + RB = \varrho'' = \frac{Qp\sin p + Re\sin e}{\sin B} = \frac{(\tau + p)Op\sin p + (\tau + q)Te\sin e}{\sin B} =$$

$$\frac{\tau\varrho\sin A + p.Op\sin p + q.Te\sin e}{\sin B}.$$

En substituant $Op\sin p = OA\sin A = (\varrho - TA)\sin A$, et $TA\sin A = Te\sin e$, il viendra

$$\varrho'' = \frac{(\tau + p)\varrho.\sin A + (q - p)Te\sin e}{\sin B},$$

et l'on a dans le triangle TS*e* (*Fig.* 95.) $Te \sin e = ST \sin TSe$. Mais $ST = R$, $TSe = \odot' - \odot$, et A, B (*Fig.* 96.), sont les angles que le rayon visuel dirigé vers le lieu réduit de la comète dans la II observation fait avec les rayons visuels dans la I et la III observation, donc $A = {}'\alpha - \alpha$, $B = \alpha'' = {}'\alpha$, et

$$\varrho'' = \frac{(\tau + p)\,\varrho \sin({}'\alpha - \alpha) + (q - p)\,R \sin(\odot' - \odot)}{\sin(\alpha'' - {}'\alpha)}.$$

En faisant donc $\varrho'' = N\varrho$, N étant la valeur corrigée de M (§. 351.), on aura

$$N = \frac{m \sin({}'\alpha - \alpha) + (n - m)\frac{R}{\varrho} \sin(\odot' - \odot)}{\sin(\alpha'' - {}'\alpha)},$$

où l'on peut, sans erreur sensible, substituer au lieu de ϱ la valeur trouvée par le premier calcul (§. 351.), que je désignerai par (ϱ). On aura donc

$$N = \frac{\{(\varrho)\sin({}'\alpha - \alpha) - R\sin(\odot' - \odot)\}\, r''.\sin(u'' - u') + R'r\sin(\odot'' - \odot')\sin(u' - u)}{(\varrho)\, r \sin(\alpha'' - {}'\alpha)\sin(u' - u)},$$

et la valeur corrigée de $\varrho'' = N\varrho$. On mettra donc dans les équations (2) (3) (§. 351.) N à la place de M, et l'on changera ϱ, jusqu'à ce qu'on trouvera $\left(\frac{r + r'' + k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r + r'' - k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{t + t'}{27,403859}$. Avec ces dernières valeurs de r, r'', etc. on calculera tous les élémens paraboliques de l'orbite, d'après les formules du §. 351.

353. Quand les élémens ont été corrigés, par la méthode précédente, de manière à satisfaire parfaitement à trois observations, on ne peut pourtant pas les regarder comme exacts, à cause des erreurs d'observation; car il est impossible, que les véritables élémens soient d'accord avec des observations défectueuses. Pour être exacts, ils ne doivent être *parfaitement* d'accord avec aucune observation, mais ils doivent satisfaire *à peu près* à toutes les bonnes observations, en donnant tantôt trop, tantôt trop peu. Pour les rendre tels, il faut les vérifier par un grand nombre d'observations, aussi éloignées que possible des trois observations qui ont servi à déterminer les élémens. Il est aisé de voir que cette vérification consiste à calculer avec les élémens supposés, d'autres observations. Mais comme on n'a pas besoin de tous les élémens, pour faire ce calcul, il y a deux méthodes principales de vérification, d'ont l'une est fondée sur les élémens paraboliques, et l'autre sur la position de l'orbite relativement à l'écliptique.

Suivant la première méthode qui est de M. Laplace (1), les élémens supposés sont le tems du passage par le périhélie $= T$, et la distance périhélie $= q$; et il s'agit de les vérifier par trois autres observations, dont les époques soient t, t', t''. Avec $t - T$, $t' - T$, $t'' - T$, et q, on trouvera (§. 342 — 344.) les anomalies vraies Φ, Φ', Φ'', et les rayons vecteurs $r = \frac{q}{(\cos \frac{1}{2}\Phi)^2}$, etc. Nommons les longitudes et les latitudes géocentriques dans les trois observations, α, α', α'', et β, β', β'', et les longitudes du soleil, $\odot$, $\odot'$, $\odot''$; et soit (*Fig.* 100.) S le soleil, T la terre, C la comète, Cc perpendiculaire à l'écliptique, donc pour la première observation, $STc = \alpha - \odot$, $CTc = \beta$, et $\cos STC = \cos\beta \cos(\alpha - \odot)$. Connaissant donc dans le triangle rectiligne CST, l'angle STC et les côtés $ST = R$, $CS = r$, on aura $\sin SCT = \frac{R}{r} \sin STC$, $CST = 180° - (STC + SCT)$, et $CT = \frac{r \sin CST}{\sin CTS}$, d'où l'on tirera $Cc = CT \sin\beta$, et $\sin CSc = \frac{CT \sin\beta}{r}$, ce qui est la latitude héliocentrique. Maintenant on connaît dans le triangle sphérique dont le centre est S, le côté perpendiculaire CSc et l'hypothénuse CST, d'où l'on tirera $\cos TSc = \frac{\cos CST}{\cos CSc}$, ce qui donne la longitude héliocentrique. De cette manière on trouvera pour les trois observations, les latitudes et les longitudes héliocentriques, λ, λ', λ'', et L, L', L''. Soit (*Fig.* 101.) E le pole de l'écliptique, A, C, les lieux de la comète dans la I et la III observations, et nommons v, v', les angles au soleil, traversés par la comète entre la I et la II, et entre la I et la III observation; cela posé on aura $EA = 90° - \lambda$, $EC = 90° - \lambda''$, $AEC = L'' - L$, donc

$$\cos v' = \sin\lambda \sin\lambda'' + \cos\lambda \cos\lambda'' \cos(L'' - L),$$

$$\cos v = \sin\lambda \sin\lambda' + \cos\lambda \cos\lambda' \cos(L' - L);$$

et il doit être $v = \Phi' - \Phi$, $v' = \Phi'' - \Phi$. Si donc les élémens T, q, ont besoin de correction, il se trouvera une différence entre ces valeurs. Supposons donc

$$(\Phi' - \Phi) - v = m \quad \text{et} \quad (\Phi'' - \Phi) - v' = n.$$

En mettant T' au lieu de T, sans changer q, on trouvera par le procédé précédent d'autres différences, savoir

$$(\Phi' - \Phi) - v = \mu, \quad \text{et} \quad (\Phi'' - \Phi) - v' = \nu.$$

Supposons enfin qu'avec T et q', on ait trouvé

$$(\Phi' - \Phi) - v = M, \quad \text{et} \quad (\Phi'' - \Phi) - v' = N.$$

(1) *Mém. de Paris, Ann.* 1780. et *Théorie du mouv. et de la fig. ellipt. des Planètes.* 1784.

Ces trois hypothèses donneront la véritable par une règle de fausse position. La variation de l'hypothèse, $T' - T$, a produit les changemens des erreurs, $\mu - m$ et $\nu - n$. Puisque les élémens sont à peu près exacts, on peut supposer qu'une variation peu différente, $T'' - T$, produira des changemens des erreurs, qui seront à $\mu - m$ et à $\nu - n$, comme $T'' - T$ est à $T' - T$; et il en sera de même de q. Nommons donc les véritables élémens qui ne donnent aucune erreur, T'', q'', et faisons $T'' - T = x(T' - T)$ et $q'' - q = y(q' - q)$: cela posé, les changemens des erreurs qui résultent de T' et de q', seront

$$\frac{T'' - T}{T' - T}\{(\mu - m) + (\nu - n)\} \quad \text{et} \quad \frac{q'' - q}{q' - q}\{(M - m) + (N - n)\}.$$

Le changement total de l'erreur, qui résulte de T'' et q'' à la fois, sera donc

$$x(\mu - m) + x(\nu - n) + y(M - m) + y(N - n) = e + \varepsilon,$$

e étant la variation de l'erreur $m = (\mu - m)x + (M - m)y$, et ε celle de l'erreur $n = (\nu - n)x + (N - n)y$; ainsi qu'on le verra plus clairement dans le tableau suivant.

Hypothèse	T et q	T′ et q	T et q	T″ et q''
Erreur	m et n	μ et ν	M et N	o et o
Variation de l'hypothèse	o et o	$T' - T$	$q' - q$	$T'' - T$; $q'' - q$
Variation de l'erreur	o et o	$\mu - m$; $\nu - n$	$M - m$; $N - n$	e ; ε

Pour que les deux erreurs, m, n, résultant de la combinaison de la I observation avec la II et la III, soient nulles, il faut que m diminue de m, et n de n, c'est-à-dire que $e = -m$ et $\varepsilon = -n$; d'où résultent ces deux équations:

$$(m - \mu)x + (m - M)y = m, \quad \text{et} \quad (n - \nu)x + (n - N)y = n,$$

dont la solution donne

$$x = \frac{mN - nM}{n(\mu - M) - \nu(m - M) + N(m - \mu)}, \qquad y = \frac{n\mu - m\nu}{n(\mu - M) - \nu(m - M) + N(m - \mu)}.$$

Après cela on aura

le tems corrigé du passage par le périhélie, $T'' = T + x(T' - T)$,

et la distance périhélie, $q'' = q + y(q' - q)$.

Avec ces valeurs corrigées on calculera les longitudes et les latitudes héliocentriques de la comète, d'où l'on conclura (§. 151.) les autres élémens, savoir l'inclinaison, la longitude du noeud, et l'angle que la ligne des noeuds fait avec l'axe.

§. 354. La position de l'orbite relativement à l'écliptique est l'élément le plus facile à déterminer par des observations géocentriques, parceque la terre et le soleil étant constamment dans ce dernier plan, le cas est en quelque façon semblable aux conjonctions et oppositions des planètes. Suivant la seconde méthode, cette position, ou la longitude du noeud $= N$, et l'inclinaison $= J$, sont les élémens supposés connus, qu'il s'agit de corriger par trois observations éloignées. Pour cela il faut d'abord réduire les observations au soleil, au moyen des élémens supposés; ce qui se fera de la manière suivante.

Soit (*Fig.* 99.) S le soleil, T la terre, C la comète, ON la position supposée de la ligne des noeuds. Ayant abaissé les perpendiculaires, CE sur l'écliptique, CA, EA sur ON; on aura $CAE = J$, et l'observation donne l'élongation $STE = \theta$, et la latitude géocentrique $CTE = \beta$; enfin on connaît $AST = \eta$ par les longitudes du noeud et du soleil, et $ST = R$ par les tables. Si la prolongation de ST rencontre AE en B, on commencera par calculer l'angle $CBE = \psi$ par ces formules: $CE = ET \text{ tang } \beta = EB \text{ tang } \psi$, $\text{tang } \psi = \frac{ET}{EB} \text{ tg } \beta = \frac{\sin ABS}{\sin ETB} \text{ tg } \beta$, ou $\text{tang } \psi = \frac{\cos \eta}{\sin \theta} \text{ tang } \beta$. En nommant la distance héliocentrique de la comète au noeud sur l'orbite, ou l'angle $ASC = \phi$, on aura

$$AS = AB \cot \eta = AC \cot \phi, \text{ d'où il suit}$$

$$\text{tang } \phi = \frac{AC}{AB} \text{ tang } \eta = \frac{\sin \psi \text{ tg } \eta}{\sin (J + \psi)}.$$

On a de plus dans les triangles AOE, CAE,

$$AE = AO \text{ tang } AOE = AC \cos J, \text{ donc en faisant } AOC = \zeta,$$

$$\text{tang } \zeta = \frac{AC}{AO} = \frac{\text{tang } AOE}{\cos J}.$$

Or $AOE = AST - STO = \eta - (180° - \theta)$, $\text{tang } AOE = \text{tang } (\eta + \theta)$, d'où il vient

$$\text{tang } \zeta = \frac{\text{tg } (\eta + \theta)}{\cos J}.$$

Dans les triangles SOT, SOC, on a

$$SO = \frac{R \sin\theta}{\sin AOE} = \frac{SC \cdot \sin SCO}{\sin\zeta} = \frac{-R \sin\theta}{\sin(\eta+\theta)}, \text{ et } SCO = ASC - AOC = \Phi - \zeta,$$

d'où résulte le rayon vecteur

$$SC = r = \frac{-R \sin\theta \sin\zeta}{\sin(\eta+\theta)\sin(\Phi-\zeta)}.$$

En rassemblant ces formules, on aura

$$1)\ \text{tang}\,\psi = \frac{\cos\eta\, \text{tg}\,\beta}{\sin\theta}, \qquad 2)\ \text{tang}\,\Phi = \frac{\sin\psi\, \text{tang}\,\eta}{\sin(J+\psi)},$$

$$3)\ \text{tang}\,\zeta = \frac{\text{tg}\,(\eta+\theta)}{\cos J}, \qquad 4)\ r = \frac{R \sin\theta \sin\zeta}{\sin(\eta+\theta)\sin(\zeta-\Phi)}.$$

Les angles β, et $\theta = \alpha - \odot$, sont donnés par l'observation; mais $\eta = \mathfrak{F} - N$, et J dépendent des élémens supposés: ψ, Φ, ζ, r, changeront donc avec l'hypothèse, mais $\frac{\text{tg}\,\beta}{\sin\theta}$ et $R \sin\theta$ conservent, pour chaque observation, la même valeur. Par ce procédé on trouvera, pour les trois observations, les distances héliocentriques de la comète au noeud, Φ, Φ', Φ'', et les rayons vecteur, r, r', r''.

Les angles au soleil, v, v', traversés depuis la I observation jusqu'à la II et la III, sont $v = \Phi' - \Phi$; $v' = \Phi'' - \Phi$; et avec r, r', v, et r, r'', v', on trouvera les tems t, t', écoulés entre la I et la II observation, et entre la I et la III (§. 342–344.), qui sont conformes aux élémens N, J. En formant une autre hypothèse, N et $J+i$, on trouvera $t+k$ et $t'+\varkappa$ au lieu de t et t'. Une troisième hypothèse, $N+n$ et J, donnera $t+l$ et $t'+\lambda$ au lieu de t et t'. En nommant les tems observés, $t+e = T$, $t'+\varepsilon = T'$, et les véritables valeurs du noeud et de l'inclinaison, $N+x$ et $J+y$; on pourra supposer comme ci-dessus, que les variations des tems calculés sont proportionnelles aux variations des élémens. Or i produisant la variation du tems $t = k$, et du tems $t' = \varkappa$, y changera le tems t de $\frac{ky}{i}$, et t' de $\frac{\varkappa y}{i}$. On trouvera pareillement les variations des tems t et t', qui résultent de x, $\frac{lx}{n}$ et $\frac{\lambda x}{n}$. Les vrais élémens $N+x$ et $J+i$ ensemble, donneront donc

les véritables tems, $T = t + \frac{ky}{i} + \frac{lx}{n}$, $T' = t' + \frac{\varkappa y}{i} + \frac{\lambda x}{n}$.

En substituant $T = t + e$, $T' = t' + \varepsilon$, on aura

$$e = \frac{lx}{n} + \frac{ky}{i}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda x}{n} + \frac{\varkappa y}{i}, \text{ d'où il résulte}$$

$$x = \frac{n(\varepsilon k - e\varkappa)}{k\lambda - \varkappa l}, \quad y = \frac{i(e\lambda - \varepsilon l)}{k\lambda - \varkappa l},$$

θ et ε étant les excès des tems écoulés entre les observations, T, T', sur les tems t, t', calculés d'après la première hypothèse. On aura ainsi les valeurs corrigées

$$\text{du noeud} = N + x, \text{ et de l'inclinaison} = J + y.$$

En calculant avec ces élémens corrigés, les rayons vecteurs de la comète et les angles compris, on trouvera (§. 342—344.) la distance, le tems et la position du périhélie: on aura donc corrigé tous les élémens.

Cette méthode qui est de Newton (1), ainsi que la précédente, s'étend seulement à trois observations. Pour profiter de toutes les observations, il faudra répéter le calcul qui vient d'être développé, autant de fois qu'on peut combiner les observations trois à trois, ce qui n'est pas commode. M. Laplace a donné une méthode analytique, qui sert à corriger les élémens par les longitudes et les latitudes géocentriques, et leurs premières et secondes différences: cette méthode remédie à l'inconvénient dont il vient d'être parlé, en permettant d'employer un grand nombre d'observations à la fois (2).

---

(1) *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. III. pag.* 42.

(2) *Mécanique céleste, Tome I. pag.* 198.

CHAPITRE III.

Calcul Elliptique.

§. 355. Le calcul parabolique, exposé dans le chapitre précédent, donnera les élémens avec assés de précision, si l'orbite est réellement aussi excentrique qu'on l'a supposé; mais il peut y avoir des raisons particulières qui nécessitent le calcul elliptique; c'est le cas où le calcul parabolique ne satisfait pas aux observations, d'où il faut conclure que l'orbite n'est pas aussi allongée que les orbites des comètes le sont ordinairement. Mais dans tous les autres cas la parabole se confond avec l'ellipse dans la partie visible de l'orbite, et il serait inutile de la regarder comme elliptique, d'autant qu'on ignore absolument, si c'est effectivement une ellipse ou une autre section conique. Il est vrai que, pour connaître la durée de la *révolution*, il faut recourir au calcul elliptique; mais pour se convaincre, combien peu ce calcul est sûr, on n'à qu'à se rappeller, qu'on peut sans erreur sensible regarder l'orbite comme parabolique, ce qui revient à lui attribuer une révolution d'une durée infinie. Il est encore vrai que le calcul elliptique donnera d'autres valeurs des élémens; mais la différence est auprès du périhélie si inconsidérable, que pour peu qu'on altère les observations, une révolution de cent ans peut devenir infinie. Les comètes n'étant ordinairement visibles que peu de tems, et les observations étant sujettes à des erreurs graves, ces erreurs peuvent défigurer entièrement la révolution, parcequ'il s'agit ici de conclure d'un très-petit segment, la nature de l'orbite entière, et la longueur de l'axe. De plus, la comète, en passant auprès des grandes planètes, peut avoir éprouvé des perturbations si considérables, que la portion de l'orbite qu'il nous est permis d'observer, est tellement défigurée quelle n'est plus d'accord avec l'orbite originaire. Le calcul

elliptique a donné, par exemple, pour la grande comète de 1811, qu'on avait observée dans un segment de plus de 180°, une révolution de 3056 ans, et une autre de 2301 ans; et cette différence de 755 ans n'a pas altéré sensiblement les élémens paraboliques. Il est donc clair, qu'on peut trouver une multitude d'ellipses qui satisfont à toutes les observations, tant qu'elles ne sont pas exemptes d'erreurs, attendu que même le calcul parabolique, ou une révolution infinie, y satisfait le plus souvent. Pour que le calcul elliptique soit permis et utile, il faut que ces conditions aient lieu: 1) qu'aucuns élémens paraboliques ne satisfassent aux observations; 2) que la comète ait été observée dans une portion considérable de son orbite, avant et après le périhélie; 3) que les observations soient plus exactes que les comètes ne le comportent ordinairement, et pour cet effet il est nécessaire que la comète ait un noyeau bien terminé; 4) que la révolution et l'excentricité ne soient pas très-grandes, afin que l'orbite s'écarte plus sensiblement de la parabole; 5) que la comète n'ait pas passé trop près de Jupiter et de Saturne, parce que l'attraction de ces grosses masses peut tellement défigurer la partie de l'orbite que nous observons, qu'elle paraîtra appartenir à une ellipse toute autre que l'originaire. Les conditions 1) 2) 4) ont eu lieu relativement à la comète de 1770: c'est la seule dont le mouvement ne peut pas être expliqué par l'hypothèse parabolique; on a observé un arc de son orbite de plus de 170°; et son excentricité n'est pas plus grande que 0,7855; sa révolution est de 5 ans et demi. Mais cette comète a passé si près de Jupiter et de Saturne, que c'est peut-être la cause de ce phénomène extraordinaire, que la comète, malgré la courte durée de sa révolution, n'a été aperçue qu'une fois.

§. 356. La seule méthode sure pour déterminer la révolution des comètes, est la même qui est employée pour les planètes, et qui consiste à observer la comète deux fois dans le même point de son orbite. Quand une comète qui a déjà été observée, revient au soleil, on peut calculer, par les méthodes précédentes, les époques des deux passages par le périhélie, et l'intervalle est la période de sa révolution. L'excentricité de l'orbite n'y a aucune influence, parceque l'équation du centre est nulle dans le périhélie; mais les

perturbations auxquelles la comète a été exposée dans sa longue route, peuvent altérer considérablement la période, ensorte qu'on ne peut pas s'attendre à une grande précision. Après avoir déterminé les élémens d'une comète par la théorie parabolique, on les compare avec ceux d'autres comètes, observées longtems auparavant; et si l'on trouve deux comètes, dont les élémens sont à peu près les mêmes, on peut conclure que c'est la même comète, vue dans différentes révolutions autour du soleil. La probabilité augmente, si la comète a été observée trois fois ou plus souvent dans son périhélie, après des intervalles à peu près égaux. Si la différence entre les élemens n'est pas grande, elle peut être attribuée aux erreurs d'observation, ou aux perturbations de la comète. Les élémens qui donnent la plus forte preuve de l'identité de deux comètes, sont le noeud et l'inclinaison; car il est très-improbable que deux comètes se meuvent dans le même plan, et le plan de l'orbite est moins défiguré par les perturbations, que les élémens paraboliques. Ces deux élémens doivent donc être fort peu différens, pour qu'on puisse supposer l'identité de deux comètes.

Le catalogue des comètes qui ont été observées et calculées fait voir, que les élémens des comètes de 1456, 1531, 1607, 1682, et 1759, sont à fort peu près les mêmes, et que ceux des comètes de 1264 et 1556, ainsi que de celles de 1532 et 1661 ne diffèrent pas beaucoup les uns des autres. Halley s'aperçut le premier de l'identité de la première comète, dont la période paraît être de 75 à 76 ans. D'après cette période la même comète doit avoir paru en 1380, 1305, et 1230, où les historiens font effectivement mention d'une grande comète. Cette comète parut en 1759, ainsi que Halley l'avait prédit, mais un peu plus tard: sa dernière période était d'à peu près 600 jours plus longue que la précédente; effet des attractions de Jupiter et de Saturne que Clairaut avait calculé d'avance. Le seconde comète aurait une période de 292 ans, on pourrait donc l'attendre vers l'an 1848. La troisième dont la période serait de 129 ans, aurait du paraître en 1790; en effet on a observé dans cette année trois comètes, mais leurs élémens étaient très-différens de ceux de la comète attendue; aussi Méchain a trouvé par un calcul rigoureux, que les comètes de 1532 et de 1661 ne sont pas identiques.

Une des comètes, dont le mouvement elliptique autour du soleil est le plus sûr, est celle de 1805 et de 1819, dont l'identité ne peut pas être révoquée en doute. Son orbite, qui a été calculée avec le plus grand soin, est une ellipse, dont les deux axes sont 4, 4386 et 2, 3628, et qui est inclinée sur l'écliptique sous un angle de 13° 42′: son périhélie tombe donc entre le Soleil et Mercure, son aphélie entre les orbites des quatre nouvelles planètes et de Jupiter, et sa révolution est de 1208 jours ou de 3 ans et 112 jours, de sorte que la comète fait trois révolutions en dix ans: en effet elle a été observée en 1786 et 1795, donc dans quatre divers passages par le périhélie: et depuis 1786 elle a déjà fait dix révolutions. Dans ses prochains passages en 1822 et 1825 les circonstances seront peu favorables à sa visibilité, et il est probable, qu'on ne la verra qu'à la fin de l'an 1828.

§. 357. Après avoir trouvé la période de la comète par ses apparitions réitérées, on connaît aussi le grand axe de son orbite, en vertu de la troisième loi de Kepler. Cet axe, combiné avec les élémens paraboliques, servira à calculer son mouvement plus exactement suivant la théorie elliptique. Dans le calcul parabolique il suffit de connaître le triangle au soleil, ou la distance périhélie, le paramètre étant donné par là. Dans l'ellipse le rapport entre le paramètre et la distance périhélie est indéterminé; par conséquent il faut connaître un élément de plus, par exemple, le grand axe. Avec ces élémens on fera le même calcul qui a été développé pour la parabole; et l'on se rappellera que tout se réduit à trouver le tems que la comète emploie à traverser une anomalie quelconque, la distance périhélie étant donnée, ou à trouver le tems que la comète emploie à décrire un secteur donné. C'est sur ces deux problèmes que roule tout le calcul elliptique. Pour généraliser la méthode, il sera bon de prendre pour base l'équation générale des sections coniques, qui est, comme on sait

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a},$$

les abscisses x étant prises du sommet sur le grand axe $= 2a$, et p étant le paramètre. Dans le foyer on a $x = q$, $y = \frac{p}{2}$, ce qui étant substitué dans l'équation générale, donne $p = 4q - \frac{2q^2}{a}$, d'où il suit $a = \frac{2q^2}{4q - p}$. En éliminant donc a, on aura l'équation générale

$$\text{I.}\quad y^2 = px\left(1 - \frac{4q-p}{4q^2}\,x\right),$$

qui est pour la *parabole*, si $a = \infty$ ou $p = 4q$, pour l'*hyperbole*, si a est négatif ou $p > 4q$, pour l'*ellipse*, si $p < 4q$, et pour le *cercle*, si $p = 2q$.

Soit (*Fig.* 102.) S le foyer, P le sommet, $Pa = x$, $aA = y$, le rayon vecteur $SA = r$, l'anomalie vraie $PSA = \Phi$; on aura

$$y^2 = r^2 - (q-x)^2 = px\left(1 - \frac{4q-p}{4q^2}\,x\right), \text{ d'où il suit}$$

$$r^2 = (q-x)^2 + \frac{2(q-x)px}{2q} + \frac{p^2x^2}{4q^2}, \text{ donc } r = q - x + \frac{px}{2q}, \text{ ou}$$

$$\text{II.}\quad r = q + \frac{p-2q}{2q}\,x.$$

Mais on a $Sa = r\cos\Phi$, $x = q - r\cos\Phi$, donc $r = r\cos\Phi + \frac{p}{2} - \frac{pr\cos\Phi}{2q}$; ou

$$\text{III.}\quad r = \frac{pq}{2q + (p-2q)\cos\Phi}.$$

§. 358. La théorie des comètes consiste, à conclure des élémens supposés de l'orbite, le tems qui répond à une anomalie donnée, et réciproquement, ou à dériver les élémens du triangle au soleil, c'est-à-dire des observations. La solution du premier problème se réduit à calculer la surface du secteur qui répond à chaque anomalie. Si donc la comète à décrit le secteur $PBS = s$, et l'anomalie $PSB = \Phi$, et que dans l'instant suivant, elle décrive le petit arc BC, et le secteur $BCS = \partial s$, on aura $SB = r$, $BSC = \partial\Phi$, et Bb étant perpendiculaire a SC,

$$\partial s = \tfrac{1}{2}r^2\,\partial\Phi = \frac{\frac{1}{2}p^2q^2\,\partial\Phi}{(2q + (p-2q)\cos\varphi)^2} \text{ (§. 357. III.).}$$

En faisant $\tang\frac{\Phi}{2} = z$, on aura $\tang\Phi = \frac{2z}{1-z^2}$, $\cos\Phi = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $\partial z = \frac{\partial\Phi}{2}\left(\sec\frac{\Phi}{2}\right)^2 = (1+z^2)\frac{\partial\Phi}{2}$, et $\frac{\partial\Phi}{2} = \frac{\partial z}{1+z^2}$, d'où il viendra

$$\partial s = \frac{p^2q^2(1+z^2)\,\partial z}{(p + (4q-p)z^2)^2}.$$

Dans la *parabole* on a $p = 4q$, donc $\partial s = q^2(1+z^2)\,\partial z$, et $s = q^2\left(z + \frac{z^3}{3}\right)$ (§. 342.). Dans le *cercle*, $p = 2q$, $\partial s = \frac{q^2\,\partial z}{1+z^2}$, $s = q^2$. Arc tang $z = \frac{1}{2}q^2\Phi$. Dans les autres sections coniques, on aura

$$\partial s = \frac{2pq^3\,\partial z}{(4q-p)(p + (4q-p)z^2)} - \frac{pq^2(p-2q)(p-(4q-p)z^2)}{(4q-p)\,(p+(4q-p)z^2)^2}\,\partial z, \text{ et en intégrant}$$

$$\text{IV.}\quad s = \frac{2pq^3}{4q-p}\int\frac{\partial z}{p + (4q-p)z^2} - \frac{pq^2(p-2q)z}{(4q-p)(p+(4q-p)z^2)}.$$

Quant au premier terme, il faut se rappeler que $4q-p$ est positif dans l'ellipse, et négatif dans l'hyperbole (§. 357.). En faisant donc $4q-p=n$, on aura pour l'ellipse $\int\frac{\partial z}{p+nz^2}=\frac{1}{\sqrt{np}}$. Arc tang $z\sqrt{\frac{n}{p}}$, ou en faisant $z\sqrt{\frac{n}{p}}=\text{tang}\,\frac{\omega}{2}$, c'est-à-dire $n\left(\text{tg}\,\frac{\Phi}{2}\right)^2=p\left(\text{tg}\,\frac{\omega}{2}\right)^2$, $\int\frac{\partial z}{p+nz^2}=\frac{\frac{1}{2}\omega}{\sqrt{np}}$. Il en résulte $\text{tang}\,\omega=\frac{2z\sqrt{np}}{p-nz^2}$, et $\sin\omega=\frac{2z\sqrt{np}}{p+nz^2}$, ce qui étant substitué dans l'équation IV, donnera

$$s=\frac{q^3\sqrt{p}}{n\sqrt{n}}\omega-\frac{q^2(p-2q)\sqrt{p}}{2n\sqrt{n}}\sin\omega=\frac{q^3\sqrt{p}}{(4q-p)^{\frac{3}{2}}}\left(\omega-\frac{p-2q}{2q}\sin\omega\right),$$

l'arc ω étant donné par la formule $\text{tang}\,\frac{\omega}{2}=\text{tang}\,\frac{\Phi}{2}\cdot\sqrt{\frac{4q-p}{p}}$. Or le tems, pendant lequel l'arc PB est parcouru, est $t=\frac{2ms}{\sqrt{p}}$ (§. 341.), d'où il viendra $t=\frac{2mq^3}{(4q-p)^{\frac{3}{2}}}\left(\omega-\frac{p-2q}{2q}\sin\omega\right)$, t étant exprimé en jours, et à cause de $p=4q-\frac{2q^2}{a}$ (§. 357.),

$$\text{V.}\quad t=\frac{ma^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\omega-\frac{a-q}{a}\sin\omega\right),$$

$a-q$ étant la distance du foyer au centre de l'ellipse, et par conséquent $\frac{a-q}{a}=\varepsilon$ l'excentricité. On a de plus $\frac{4q-p}{p}=\frac{2q^2}{ap}$, et $p=\frac{2b^2}{a}$, $2b$ étant le petit axe de l'ellipse, d'où il suit $\frac{4q-p}{p}=\frac{q^2}{b^2}$. Tout le calcul est donc fondé sur les formules suivantes:

$$(1)\ldots.b^2=q(2a-q),\quad (2)\ldots.\text{tang}\,\frac{\omega}{2}=\frac{q}{b}\,\text{tang}\,\frac{\Phi}{2},$$

$$(3)\ldots.t=\frac{\text{J}}{2\pi}a^{\frac{3}{2}}(\omega-\varepsilon\sin\omega)\ (\text{§. 341.}).$$

On peut se dispenser de calculer b, en déterminant ω par la formule $\text{tang}\,\frac{\omega}{2}=\text{tang}\,\frac{\Phi}{2}\cdot\sqrt{\frac{q}{2a-q}}$. Puisque a est ordinairement conclu de la durée d'une révolution de la comète $=\Theta$, on peut substituer suivant la troisième loi de Kepler, $\text{J}a^{\frac{3}{2}}=\Theta$, ce qui donnera

$$t=\frac{\Theta}{2\pi}(\omega-\varepsilon\sin\omega),$$

où l'on verra aisément que ω est l'anomalie excentrique. En comparant ces valeurs de $\frac{\Theta}{2\pi}(\omega-\varepsilon\sin\omega)$ avec les tems t, donnés par les observations, il sera facile de juger comment il faut changer Θ, pour le rendre conforme autant que possible à toutes les observations.

Dans l'*hyperbole* n est négatif. En faisant donc $p - 4q = n$, on aura $\int \frac{\partial z}{p - n z^2} = \frac{1}{2\sqrt{np}} \log \frac{\sqrt{p} + z\sqrt{n}}{\sqrt{p} - z\sqrt{n}}$, et le secteur entier

$$s = \frac{p q^2 (p - 2q) z}{n (p - n z^2)} - \frac{q^3 \sqrt{p}}{n \sqrt{n}} \log \frac{\sqrt{p} + z\sqrt{n}}{\sqrt{p} - z\sqrt{n}}.$$

En faisant comme ci-dessus, $\text{tang} \frac{\omega}{2} = z\sqrt{\frac{n}{p}}$, ou $\text{tang}\,\omega = \frac{2z\sqrt{np}}{p - nz^2}$, il viendra

$$s = \frac{q^2 \sqrt{p}}{n\sqrt{n}} \left(\frac{p - 2q}{2q} \text{tang}\,\omega - \log \frac{1 + \text{tg}\frac{1}{2}\omega}{1 - \text{tg}\frac{1}{2}\omega} \right),$$

et en substituant $\frac{1 + \text{tg}\frac{1}{2}\omega}{1 - \text{tg}\frac{1}{2}\omega} = \text{tang}\left(45° + \frac{\omega}{2}\right)$, et $t = \frac{2ms}{\sqrt{p}}$,

$$t = \frac{2mq^3}{(p - 4q)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{p - 2q}{2q} \text{tang}\,\omega - \log \text{tang}\left(45° + \frac{\omega}{2}\right) \right),$$

et à cause de $p = 4q + \frac{2q^2}{a}$ (§. 357.),

$$\text{VI.} \quad t = \frac{m a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{a + q}{a} \text{tang}\,\omega - \log \text{tang}\left(45° + \frac{\omega}{2}\right) \right).$$

Puisque les intégrales V. et VI. s'évanouissent, lorsque ω ou Φ est nul, on n'ajoutera aucune constante, si les anomalies Φ et les tems t sont comptés du périhélie.

§. 359. Quand on aura déterminé le triangle au soleil par le moyen des observations géocentriques et d'un élément supposé, et que l'orbite n'est pas regardée comme parabolique, il faut connaître un élément de plus, par exemple, le paramètre p (§. 357.). Si donc B, C (*Fig.* 102.) sont les lieux héliocentriques de la comète, on connaît $SB = r$, $SC = r'$, $BSC = \alpha$: l'équation III (§. 357.) donnera donc

$$\cos \Phi = \frac{q(p - 2r)}{r(p - 2q)}, \quad \cos(\Phi + \alpha) = \frac{q(p - 2r')}{r'(p - 2q)}.$$

En divisant la seconde par la première on aura

$$\cos\alpha - \sin\alpha \,\text{tang}\,\Phi = \frac{r(p - 2r')}{r'(p - 2r)}, \text{ d'où il vient}$$

$$\text{tang}\,\Phi = \cot\alpha - \frac{r(p - 2r')}{r'(p - 2r)\sin\alpha}.$$

Après avoir trouvé ainsi les anomalies Φ et $\Phi + \alpha$, la première équation donnera

$$q = \frac{p r \cos\Phi}{p - 2r(1 - \cos\Phi)}, \text{ et le demi grand axe } a = \frac{2q^2}{4q - p}.$$

On connaît ordinairement à peu près le noeud et l'inclinaison, ou l'on suppose ces élémens connus: alors chaque observation géocentrique donnera

la distance héliocentrique au noeud et le rayon vecteur (§. 354.); trois observations donneront donc trois rayons vecteurs et les angles compris. Dans un pareil cas on n'a besoin d'aucun autre élément, et trois observations suffiront pour calculer tous les élémens de l'ellipse, le paramètre ou le grand axe, la position, la distance, et l'époque du périhélie (§. 176.).

§. 360. Quand on a trouvé ainsi les anomalies Φ et $\Phi+\alpha$, et les élémens elliptiques par le moyen des rayons vecteurs r, r', et de l'angle compris α, on calculera d'après la formule V. (§. 358.) les tems t, t', qui sont employés à parcourir PB, PC, et par conséquent le tems $t'-t$ dans lequel l'arc BC est parcouru. On peut aussi trouver ce tems immédiatement, sans connaître l'anomalie Φ.

Pour cet effet il faut exprimer $\partial\Phi$ par le rayon vecteur r. L'équation III. ou $\cos\Phi = \frac{q(p-2r)}{r(p-2q)}$ donne, en faisant

$$p-2q=k, \quad \text{et} \quad 4q-p=n,$$

$$\partial\Phi = \frac{pq\,\partial r}{kr^2\sin\Phi}, \quad \text{et} \quad \sin\Phi = \frac{\sqrt{p}\,(-nr^2+4q^2r-pq^2)}{kr}, \quad \text{donc}$$

$$\partial\Phi = \frac{q\,\partial r\cdot\sqrt{p}}{r\cdot\sqrt{(-nr^2+4q^2r-pq^2)}}.$$

En faisant donc $\sqrt{(-nr^2+4q^2r-pq^2)}=u$, on aura (§. 358.)

$$\partial s = \frac{r^2}{2}\,\partial\Phi = \frac{q\,r\cdot\sqrt{p}}{2u}\,\partial r, \quad \text{et} \quad u^2 = n\left(\frac{pq}{n}-r\right)(r-q).$$

Supposons $u=\left(\frac{pq}{n}-r\right)v\sqrt{n}$, ensorte que $u^2=nv^2\left(\frac{pq}{n}-r\right)^2=n\left(\frac{pq}{n}-r\right)(r-q)$, d'où il suit $v^2(pq-nr)=n(r-q)$, et $r=\frac{q(n+pv^2)}{n(1+v^2)}$. On a donc

$$\partial r = \frac{2q(p-n)v\,\partial v}{n(1+v^2)^2} = \frac{4kqv\,\partial v}{n(1+v^2)^2}, \quad \frac{pq}{n}-r = \frac{2kq}{n(1+v^2)}, \quad u=\frac{2kqv}{(1+v^2)\sqrt{n}}, \quad \text{donc}$$

$$\partial s = \frac{h(n+pv^2)\partial v}{(1+v^2)^2}, \quad h \text{ étant} = \frac{q^2\sqrt{p}}{n\sqrt{n}}.$$

Dans l'ellipse, où n est positif, l'intégration donnera

$$s = -\frac{khv}{1+v^2} + 2hq.\ \text{Arc tang } v.$$

En substituant $v=\sqrt{\frac{n(r-q)}{pq-nr}}$, $1+v^2=\frac{2kq}{pq-nr}$, il viendra

$$s = -\frac{q\sqrt{p}}{2n}\sqrt{(r-q)(pq-nr)} + \frac{2q^3\sqrt{p}}{n\sqrt{n}}\cdot\text{Arc tang}\sqrt{\frac{n(r-q)}{pq-nr}}.$$

Puisque l'intégrale doit être prise depuis $r=r$ jusqu'à $r=r'$, il faut ajouter

une constante qui la rende nulle, si $r = r$, et ensuite mettre $r = r'$. Or le tems t qui répond au secteur s, étant $= \frac{2ms}{\sqrt{p}}$ (§. 341.), on aura le tems dans lequel l'arc BS est parcouru,

$$t = \frac{4mq^3}{n\sqrt{n}}\left\{\text{Arc tang}\sqrt{\frac{n(r'-q)}{pq-nr'}} - \text{Arc tang}\sqrt{\frac{n(r-q)}{pq-nr}}\right\}$$
$$+ \frac{mq}{n}\left\{\sqrt{(r-q)(pq-nr)} - \sqrt{(r'-q)(pq-nr')}\right\}.$$

La distance périhélie q est donnée, ou on la trouvera par r, r', α, et p (§. 359.), ce qui donnera aussi $n = 4q - p$.

Pour disposer les formules plus favorablement à l'usage des logarithmes, on peut calculer d'abord deux angles, μ, ν, par les équations

$$\text{tang}\frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{n(r-q)}{pq-nr}}, \quad \text{tang}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{n(r'-q)}{pq-nr'}},$$

ce qui donnera $\text{tang}\,\mu = \frac{\sqrt{n(r-q)}\,(pq-nr)}{2q^2-nr}$, ou

$$\sin\mu = \frac{\sqrt{n(r-q)}\,(pq-nr)}{q(p-2q)}, \quad \sin\nu = \frac{\sqrt{n(r'-q)}\,(pq-nr')}{q(p-2q)};$$

d'ou il viendra

$$t = \frac{2mq^2}{(4q-p)^{\frac{3}{2}}}(\nu-\mu) - \frac{mq^2(p-2q)}{(4q-p)^{\frac{3}{2}}}(\sin\nu - \sin\mu), \text{ ou}$$
$$t = \frac{2mq^2}{(4q-p)^{\frac{3}{2}}}\left\{q(\nu-\mu) - (p-2q)\sin\frac{\nu-\mu}{2}\cos\frac{\nu+\mu}{2}\right\}.$$

§. 361. Une des comètes les plus remarquables sous plusieurs rapports, est celle de 1770, dont l'orbite a été calculée par Lexell, suivant la théorie elliptique, parcequ'on ne pouvait la calculer dans une parabole (1). D'après ce calcul qui a été fait avec le plus grand soin, et qui a été confirmé par les recherches de M. Burckhardt (2), le périhélie est dans $11^s\,26°\,16'$, entre les orbites de Vénus et de Mercure, et l'aphélie est très-peu au delà de l'orbite de Jupiter. Le plan de l'orbite coupe l'écliptique en $4^s\,12°$ sous le petit angle de $1°\,34'$, et cette comète est peut-être celle qui s'est le plus approchée de la terre, savoir de 0,0154, ensorte qu'elle n'était que six fois plus éloignée que la lune. Comme on avait observé un arc de son orbite de plus de 170°, il était à prévoir, que les observations ne s'accorderaient pas avec la parabole, et qu'on pourrait calculer les élémens elliptiques avec assés de précision. En effet, toutes les observations, calculées suivant la

(1) *Acta Acad. Scient. Imp. Petrop. pro anno 1777. P. I.*

(2) *Mém. de l'Institut de France*, 1806.

théorie elliptique, donnent le résultat remarquable, que la comète fait une révolution autour du soleil en cinq ans et demi. Il est donc bien étonnant, que cette comète qui, tous les cinq ou six ans, devrait être très-près de la terre, n'ait jamais reparu. Pour résoudre cette énigme, il se présente plusieurs réflexions. 1) La révolution de la comète étant peu différente de celle de Cérès et Pallas, on pourrait croire qu'on a pris une de ces planètes pour la comète; ou plutôt, son mouvement étant beaucoup plus excentrique que celui de ces planètes, on pourrait la regarder comme un de ces fragmens dont quatre ont conservé le mouvement planétaire (§. 178.). 2) Comme la parabole est la limite entre les ellipses et les hyperboles, l'orbite peut avoir été hyperbolique; cependant les recherches de M. Burkhardt ont fait voir, que les observations sont parfaitement d'accord avec l'ellipse. 3) Lexell s'est servi de la seconde méthode (§. 354.) qui est peu sure, quand l'inclinaison est aussi petite que celle de la comète, 1°34′: car il est aisé de voir, qu'une petite erreur commise sur les latitudes peut produire une erreur grave sur les longitudes (1). Dans un pareil cas il faut employer la première méthode (§. 353.); et c'est ce que M. Burckhardt a fait, qui a pourtant trouvé le même résultat.

La véritable cause qui a empeché la comète de reparaître, est apparemment l'attraction de Jupiter, dont la comète était si peu éloignée dans son aphélie, qu'elle traversa les orbites de ses satellites. M. Burckhardt, ayant calculé les effets des perturbations de Jupiter sur la comète, a trouvé que le grand axe de son orbite doit avoir été considérablement augmenté, ensorte que la comète sera toujours trop loin de la terre pour être visible, à moins que, dans une autre révolution, elle n'éprouve des perturbations d'un effet contraire.

Les *lettres cosmologiques de Lambert*, roulant principalement sur les comètes, renferment des idées aussi sublimes que réfléchies, dont plusieurs ont été confirmées par des découvertes et des observations postérieures. Je vais terminer ce second Tome par des réflexions générales sur l'arrangement du système solaire, ou sur la disposition des comètes et des planètes.

(1) Voici ce qu'en dit Euler dans sa *Theoria motuum Planet. et Com. pag.* 140: „Si inclinatio „plane evanesceret, tum hinc nihil prorsus concludi posset: ex quo facile colligitur, quo minor sit orbitae inclinatio, eo minus tuto hanc méthodum adhiberi posse".

CHAPITRE IV.

Réflexions générales sur la construction du système solaire.

§. 362. Un des plus puissans instincts de nôtre ame, et qui est un vrai besoin même pour l'homme le moins cultivé, c'est de généraliser nos idées. C'est à cette simple opération qu'on doit toutes les découvertes et toutes les sciences. Elle est une espèce d'*induction* qui, pour être complète, exigerait des expériences sans nombre; mais l'esprit de l'abstraction devance la marche lente de l'induction, et va au devant des observations par des raisonnemens fondés sur l'*analogie*. Il est impossible de déterminer le nombre des faits qui sont nécessaires pour justifier l'analogie dans chaque cas particulier: il faut un tact fin et exercé, pour saisir le vrai moment. Il n'y a peut-être aucune science, dans laquelle les raisonnemens analogiques soient plus nécessaires, et où ils aient été employés avec plus de précaution et de succès, que dans l'astronomie, dont le but est de développer le plan d'un édifice immense dont on ne connaît qu'une très-petite partie. Sans le secours de ces raisonnemens, nous ne pourrions seulement nous faire une idée du coin que nous appelons le nôtre, c'est-à-dire du système solaire. Après avoir examiné tous les faits isolés qui ont été découverts par les observations de vingt siècles, il est permis de faire la somme du calcul, et de demander, quel est l'arrangement, non de l'univers, mais de nôtre système solaire, qui a la plus grande probabilité d'après les observations et les règles de l'analogie.

Le premier objet qui mérite notre attention, est le *nombre* des corps qui composent le système solaire, ou plutôt celui des comètes, qui sont beaucoup plus nombreuses que les planètes. Pour juger du nombre de toutes les comètes par celles qui ont été observées, il faut d'abord déterminer,

par la nature des choses et par l'expérience, les circonstances qui peuvent contribuer à rendre une comète plus ou moins visible. Dans l'espace de mille ans, depuis 837 jusqu'à 1816, on a observé et calculé 120 orbites de comètes; de ce nombre il n'y a que dix ou la douzième partie, qui appartiennent à la première moitié de cet espace; on a observé 2 comètes dans le sixième siècle de cet espace, autant dans le septième, 12 dans le huitième, 22 dans le neuvième, et plus de 70 dans le dernier siècle. La rapidité avec laquelle le nombre des comètes augmente, est frappante, et il est aisé de voir que cela ne peut venir que de l'attention avec laquelle on cherche actuellement les comètes, et de l'usage des téléscopes avec lesquels on les trouve à des distances où elles sont invisibles à la vue simple. Dans les siècles passés on ne s'occupa que des comètes qui se distinguaient par leur grosseur, ou par des queues d'un grand éclat. Mais actuellement il se passe rarement une année, dans laquelle on ne découvre une ou plusieurs comètes. Il faut encore observer, que le nombre de 120 ne renferme que les comètes dont les orbites ont été calculées, et qu'il y a apparemment beaucoup de comètes qui ne sont pas parvenues à leurs périhélies dans cet espace, parce que leur révolution dure plusieurs milliers d'années. Le moyen le plus sûr sera donc, de se borner aux comètes qui se sont assés approchées du soleil, pour devoir être vues de la terre.

Il est aisé de voir, que le seul élément dont la visibilité dépend généralement parlant, est la distance périhélie. Sous ce rapport, la comparaison des 85 dernières comètes donne le résultat suivant. Parmi ces 85 comètes il y en a 14 dont le périhélie est plus près du soleil que Mercure, 29 dont le périhélie est entre les orbites de Mercure et de Vénus, 22 entre Vénus et la terre, 15 entre la terre et Mars, et 5 entre Mars et Jupiter; ensorte qu'il y a 65 périhélies entre le soleil et la terre, ce qui fait à peu près $\frac{4}{5}$ de la totalité. On peut donc supposer en général que, pour être vues de la terre, les comètes doivent s'approcher du soleil plus que Mars, et que le *maximum* de la visibilité a lieu dans la région de Vénus. On verra cela plus clairement, en exprimant les distances périhélies par le rayon de l'orbite de la terre: alors on trouvera 2 comètes dont la distance périhélie est entre 0 et 0,1;

2 entre 0,1 et 0,2; 5 entre 0,2 et 0,3; 5 entre 0,3 et 0,4;
5 entre 0,4 et 0,5; 11 entre 0,5 et 0,6; 11 entre 0,6 et 0,7;
10 entre 0,7 et 0,8; 7 entre 0,8 et 0,9; 7 entre 0,9 et 1,0;
9 entre 1,0 et 1,1; 2 entre 1,1 et 1,2; 2 entre 1,2 et 1,3;
1 entre 1,4 et 1,5; 4 entre 1,5 et 1,6; ce qui est la distance de Mars;
1 à la distance 2,2; et 1 à la distance 4.

Il y a donc plus que la moitié des périhélies qui tombent entre 0,4 et 0,9; il y a un tiers entre 0,5 et 0,7; et la distance 0,6 est la plus riche en comètes visibles. Il est clair qu'en général, plus les comètes approchent du soleil et de la terre, et plus il sera facile de les voir, parceque leur lumière et leur grosseur augmente à proportion de cette proximité. Mais il est aussi aisé de voir, que la visibilité, dépendant de deux élémens, les distances du soleil et de la terre, doit avoir un *maximum* qui aura lieu à peu près à égale distance du soleil et de la terre, ainsi que les observations précédentes l'ont prouvé.

§. 363. En prenant pour base les 14 comètes observées, dont les périhélies sont plus près du soleil que Mercure, on doit d'abord en déduire le nombre total des comètes qui probablement ont leurs périhélies dans l'orbite de Mercure. Pour qu'une comète soit visible, il faut que ces conditions soient remplies: 1) elle doit paraître de nuit, c'est-à-dire le périhélie doit être assés loin de sa conjonction avec le soleil; 2) les nuits doivent être sereines; 3) la comète doit être assés loin du pole austral, pour s'élever considérablement sur l'horison des lieux septentrionaux où l'on fait des observations. La première condition dépend de la situation de la terre, ou de la saison, et de la position du périhélie, la seconde dépend du tems qu'il fait, et la troisième de la position de l'orbite relativement à l'écliptique ou à l'équateur. Comme les jours avec les crépuscules font plus que la moitié de l'année, et que les nuits entièrement claires sont rares, il faut doubler le nombre observé à cause de la première et de la seconde condition, et par conséquent multiplier par 4. Ce produit devrait être encore doublé à cause de la troisième condition et de ce qui a été dit plus haut (§. 362.). En multipliant donc 14 par 7, on aura 100 périhélies en dedans de l'orbite de Mercure.

§. 364. Si l'on connaissait la loi, suivant laquelle les périhélies sont distribués dans l'espace du système solaire, il serait aisé de trouver le nombre total des comètes. Si les périhélies étaient distribués d'une manière uniforme, leur nombre augmenterait comme les espaces sphériques, ou en raison cubique des distances. Mais comme chaque périhélie occupe un plan, il est plus naturel de supposer une distribution uniforme des axes, ensorte que leur nombre augmentera comme les surfaces sphériques où les axes aboutissent, c'est-à-dire en raison du carré des distances. Ce rapport est confirmé par le nombre des comètes qui sont à peu près également visibles, c'est-à-dire dont les périhélies sont en dedans de l'orbite de Vénus. En effet, puisque 14 périhélies sont en dedans de l'orbite de Mercure, et que les distances de Mercure et de Vénus au soleil sont comme 0,3871 et 0,7233, on aura

$$3871^2 : 7233^2 = 14 : 48,$$

ce qui est peu différent du nombre observé (§. 362.) $14 + 29 = 43$. En supposant de plus, que les périhélies des comètes peuvent être aussi loin du soleil que la planète Uranus, dont la distance est 19, ou 50 fois plus grande que celle de Mercure, le nombre des comètes qui s'approchent du soleil plus qu'Uranus, sera

$$50.\ 50.\ 100 = 250000.$$

On pourrait augmenter prodigieusement ce nombre, en prenant pour base la comète de 1680, dont la distance périhélie était $= 0,006$ ce qui est à peine la 64me partie de la distance de Mercure. Le calcul précédent donnerait donc 64^2 ou 4100 comètes dans l'orbite de Mercure, et plus de dix millions qui s'approchent du soleil plus qu'Uranus. Ajoutons à cela, qu'il peut y avoir une multitude de comètes qui ont leurs périhélies au delà de l'orbite d'Uranus. Mais il faut observer d'un autre côté, que peut-être la plupart des comètes qu'on a observées, sont des corps étrangers qui arrivent d'un autre système solaire, ou que le soleil ramasse dans sa route: ces comètes ne peuvent pas être regardées comme des parties intégrantes de nôtre système, et le calcul précédent n'y est pas applicable; mais il s'en suit en même tems, que leur nombre ne peut pas être soumis au calcul, et qu'il peut s'accroître à l'infini.

§. 365. En tout cas l'expérience seule nous apprend, que les comètes forment une partie du système solaire, beaucoup plus considérable que les planètes. Il est donc naturel de demander, par quelle raison presque toutes les orbites sont extrèmement excentriques, tandis qu'il n'y a qu'un très-petit nombre d'orbites circulaires. Comme il paraît être une loi de la nature, de disposer de l'espace avec économie, ensorte que dans un espace donné le plus grand nombre de corps soit placé; la question se réduit à celle-ci, si dans une sphère de grandeur donnée autour du soleil, on peut placer plus d'orbites excentriques ou d'orbites circulaires; et il est évident que, sous ce rapport, les premières ont un grand avantage. Si les orbites sont circulaires, il faut suivant les lois de Kepler, que le soleil soit leur commun centre; mais deux cercles concentriques de même rayon doivent nécessairement se couper en deux points, quelle que soit l'inclinaison des orbites: les deux corps qui décrivent ces cercles, pourraient donc finir par se choquer l'un l'autre; c'est par cette raison que la nature paraît avoir évité avec soin les points de rencontre ou d'intersection de deux orbites. Il en est tout autrement des ellipses, dont un grand nombre de même axe et de même distance périhélie peut être disposé autour du commun foyer, sans qu'elles se coupent, pourvu que les axes ou les périhélies soient placés suivant toutes les directions possibles; et il est clair, que les points dangereux, où deux ellipses s'approchent le plus l'une de l'autre, seront d'autant plus éloignés, que les ellipses sont plus allongées. D'après cette disposition des orbites, les comètes seront toujours très-éloignées l'une de l'autre dans la plus grande partie de leurs orbites, les périhélies étant les seuls points où elles se rapprochent l'une de l'autre; mais les comètes y reviennent rarement, et à différentes époques, à cause de la longue durée de leurs révolutions. Le nombre d'ellipses excentriques qui pourraient être placées de cette manière autour du commun foyer, sérait infini, si l'on pouvait regarder les orbites comme des lignes géométriques; mais il est limité, parcequ'il faut les regarder comme des anneaux, dont l'épaisseur est déterminée par leur sphère d'activité.

§. 366. Les mêmes réflexions peuvent servir à éclaircir le phénomène extraordinaire, que toutes les orbites planétaires ou circulaires sont pla-

cées presque dans le même plan, tandis que les orbites des comètes sont inclinées l'une à l'autre de toutes les manières possibles. Pour éviter les points dangereux, qui sont les intersections, non des plans, mais des orbites mêmes, il est nécessaire qu'une comète qui s'approche du soleil plus qu'une planète, ne se meuve pas dans le plan de l'orbite de cette planète; il n'y a que les comètes dont le périhélie est au-delà de l'orbite de la planète, qui puissent se mouvoir dans ce plan, parcequ'alors leurs orbites entourent celle de la planète, sans la couper. Il s'en suit, que les comètes dont la distance périhélie est moindre que dix-neuf rayons de l'orbite de la terre, ne peuvent pas se mouvoir dans le plan de l'orbite d'Uranus. Ainsi ce plan étant rendu inutile aux comètes par Uranus seul, il sera épargné beaucoup d'espace, si les orbites des autres planètes sont placées dans le même plan; alors le mouvement des comètes ne sera pas plus gêné par toutes les planètes, que par Uranus seul.

Un autre phénomène est plus difficile à expliquer: c'est que le plan de toutes les orbites planétaires est à peu près celui de l'équateur solaire. Lambert en donne la raison suivante. Le mouvement circulaire des planètes fait croire, que ces corps ont besoin d'une chaleur à peu près constante. Or les taches du soleil prouvent que sa lumière, ainsi que la chaleur qu'il communique aux corps qui l'environnent, est sujette à des variations considérables. Cela posé, l'uniformité de chaleur est rétablie pour les planètes qui se meuvent dans le plan de l'équateur solaire, parce que le soleil, en tournant sur son axe, leur présente toutes les parties de sa surface; au lieu que la rotation du soleil serait inutile aux planètes, dont les orbites approcheraient des poles du soleil. Ce qui vient à l'appui de ce raisonnement, c'est que la lumière zodiacale paraît prouver, que l'atmosphère, et probablement aussi la chaleur du soleil, se répand principalement dans le sens de son équateur. Alors les planètes dans le plan de l'équateur solaire jouiraient d'une chaleur uniforme, et les autres corps seraient plus ou moins échauffés, à mesure qu'ils s'approcheraient des noeuds de leurs orbites sur l'équateur solaire.

§. 367. Il y a dans le système solaire cinq phénomènes, difficiles à expliquer: 1) les mouvemens des planètes dans le même sens, et dans un

même plan qui est celui de l'équateur solaire; 2) les mouvemens des satellites dans le même sens que ceux des planètes; 3) les mouvemens de rotation des planètes, des satellites, et du soleil, dans le même sens que leurs mouvemens de translation; 4) le peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites; 5) la grande excentricité des orbites des comètes qui n'offrent point de nuances intermédiaires entre une grande et une petite excentricité, quoique leurs inclinaisons et directions aient été abandonnées au hasard. La solution que M. le Marquis Laplace a donnée de ce problème (1), est si ingénieuse et satisfaisante, que je ne puis m'empêcher d'orner cet ouvrage d'un précis de l'hypothèse de ce grand géomètre.

Il n'est pas improbable qu'en vertu d'une chaleur excessive, qui peut avoir eu lieu par des causes semblables à celle qui fit briller, pendant plusieurs mois en 1572, la fameuse étoile dans la constellation de Cassiopée (§. 60.), l'atmosphère du soleil s'est primitivement étendue au-delà des orbes de toutes les planètes, et qu'il lui a fallu beaucoup de tems, pour se refroidir, et pour se resserrer jusqu'à ses limites actuelles. Imaginons donc une époque où l'espace sphérique autour du soleil, à une distance d'au moins vingt rayons de l'orbe de la terre, était rempli d'un fluide qui entoura le soleil comme une atmosphère, et où il n'y avait point d'autres corps dans le système solaire, que les comètes qui circulaient autour du soleil dans tous les sens, conformément aux règles de la probabilité. Toutes les orbites des comètes peuvent être rédigées en deux ou trois classes: I. celles dont le périhélie est au-delà de l'espace que l'atmosphère du soleil remplissait alors, et par conséquent au-delà de toutes les planètes actuelles; II. celles dont le périhélie était renfermé entre ces limites. Ces deux classes peuvent être subdivisées en deux espèces d'orbites: 1. celles qui sont presque circulaires, 2. celles qui sont très-alongées. L'atmosphère solaire ne pouvait avoir aucune influence sur les corps de la classe I: ils continuaient librement leurs mouvemens, et existent encore comme des planètes ou des comètes, qui nous seront toujours invisibles à cause de leur distance immense. Les orbites de la classe II. 1. étaient entièrement renfermées dans l'atmosphère solaire,

(1) *Exposit. du Syst. du Monde. Liv. V. Chap. VI.*

dont la résistance leur fit perdre de plus en plus leur mouvement, ensorte que ces corps devaient finir par se précipiter dans le soleil. Le même sort attendait ceux des corps de la classe II. 2. qui se trouvaient, pendant cette catastrophe, auprès de leurs périhélies, et par conséquent dans l'atmosphère solaire. Les autres corps de cette classe, qui se trouvaient auprès de leurs aphélies, furent sauvés, et ceux qui n'arrivèrent au périhélie que lorsque l'atmosphère solaire s'était déjà resserrée, continuaient leur mouvement aussi librement que les corps de la classe I. De tous ceux qui sont sortis de cette catastrophe, ce sont les seules qui puissent nous paraître de tems en tems dans leurs ellipses alongées; et leurs orbites, n'étant modifiées ou dérangées par aucune cause physique, doivent avoir toutes les positions et directions possibles. Il s'en suit qu'il ne doit présentement exister que les comètes placées au-delà de l'atmosphère solaire. Leurs excentricités offrent apparemment toutes les nuances possibles; mais comme nous ne pouvons voir que celles qui approchent assés près du soleil, les orbites que nous observons, doivent nécessairement être très-alongées. Ainsi le phénomène 5) est entièrement expliqué.

L'atmosphère solaire devait prendre, en peu de tems, le même mouvement de rotation que celui du soleil, à cause du frottement des différentes couches, les unes contre les autres et contre la surface du soleil. Mais lorsque, par une cause quelconque, l'atmosphère vint à se resserrer, les couches, s'étant approchées du centre, devaient prendre, en vertu de la troisième loi de Kepler, un mouvement de rotation d'autant plus rapide, qu'elles étaient plus près du soleil: les couches inférieures se séparèrent donc des supérieures dont le mouvement était plus lent. Les couches supérieures dans l'équateur solaires furent retenues, parceque la force centrifuge balançait la pesanteur; mais la force centrifuge des couches hors de l'équateur étant trop faible pour résister à la pesanteur, elles se réunissaient à l'atmosphère du soleil, qui se condensait de plus en plus. Chaque nouveau degré de condensation produisit une separation semblable, d'où il résulta de nouvelles zones équatoriales. Ces zones ont du, par leur refroidissement, se

réunir en plusieurs globes, et quand l'un ou plusieurs d'eux on été assés puissans pour attirer tous les autres, leur réunion a formé une ou plusieurs planètes à la meme distance du soleil. De cette manière les phénomènes 1) et 4) sont expliqués, ainsi que les quatre nouvelles planètes.

Puisque chaque zone a le même mouvement de rotation dans toute son étendue, il est visible que la vitesse réelle des parties supérieures était originairement plus grande que celle des parties inférieures; par conséquent, les globes produits par leur agrégation, ont du tourner sur eux-mêmes, dans le sens de leurs mouvemens de révolution: ce qui explique le phénomène 3).

Il est aisé de voir que les satellites peuvent avoir été formés d'une manière semblable, par les atmosphères dont les planètes étaient entourées, ainsi que le soleil dans son état primitif, et qu'elles ont dû prendre un mouvement de rotation dans le sens du mouvement de translation: ce qui explique le phénomène 2).

Parmi les zones qui se sont formées successivement par la condensation de l'atmosphère d'une planète, il peut y en avoir eu une dont la distance à la planète était telle, qu'un satellite à la même distanse ferait, suivant la troisième loi de Kepler, une révolution autour de la planète, dans le même tems que la planète emploie à tourner sur elle-même. Or la zone ayant le même mouvement de rotation au moment de sa séparation de la planète, le mouvement de toutes ses parties était en équilibre, et la force centrifuge balançait la pesanteur: cette zone pouvait donc librement continuer sa rotation, et forma ainsi un anneau qui se maintient par son équilibre. La rotation de cet anneau doit être la même que celle de la planète au moment de leur séparation, et par conséquent un peu plus lente que sa rotation actuelle qu'elle a prise après son dernier resserrement. Il en résulte pour la distance de l'anneau de Saturne, une rotation de 10 heures 24 min. ce qui est exactement conforme aux observations (§. 166.). Dans les couches, moins éloignées de la planète que l'anneau, la force centrifuge n'était pas assés forte pour balancer la pesanteur: ces couches se condensaient donc

avec le reste de l'atmosphère. Les couches plus éloignées, n'étant plus accélérées par l'atmosphère après leur séparation, devaient prendre un mouvement plus lent; et cette retardation devait faciliter l'agrégation des molécules, ce qui forma les satellites hors de l'anneau. Si la zone même qui avait la distance nécessaire pour former un anneau, était trop près de la planète, pour résister à la condensation de l'atmosphère, elle dut en former une partie, au lieu d'un anneau. Tel est le cas de Jupiter, dont la rotation est de 9 h. 55 min. (§. 166.), et dont le I satellite, à la distance de 5, 667 demi-diamètres de Jupiter (§. 311.), fait une révolution en 42 h. 27 m. et demie (§. 310.). La distance x de la zone qui aurait pu former un anneau de Jupiter, se trouve donc, suivant la troisième loi de Kepler, par la proportion,

$$(42\text{ h. }27,\ 5\text{ m.})^2 : (9\text{ h. }55\text{ m.})^2 = (5, 667)^3 : x^3, \text{ donc } x = 2, 1.$$

L'anneau qui aurait pu se former autour de Jupiter, n'était donc distant de la surface de la planète que d'un de ses demi-diamètres, et il paraît que dans cette proximité, il doit avoir été entrainé par l'atmosphère.

§. 368. Si l'on fait sur les autres élémens des réflexions semblables à celles que nous avons faites sur les périhélies, on verra encore plus clairement, que les orbites des comètes sont disposées de manière à pouvoir placer le plus grand nombre qui soit possible, sans qu'elles se dérangent mutuellement.

Parmi les 85 comètes il y en a 44 directes et 41 rétrogrades, et la valeur moyenne de toutes les inclinaisons est à peu près l'angle droit qui est la limite entre les mouvemens directs et rétrogrades; il est donc évident qu'il n'y a aucune direction, plus favorable ou plus fréquente que les autres.

Le noeud ascendant de 48 orbites est dans les six premiers signes, et de 37 dans les six derniers signes: la différence est trop peu considérable, pour être le résultat d'une cause physique.

Dans la plupart des orbites, les lignes des noeuds et du périhélie font des angles très-aigus; ce qui était nécessaire, pour éviter les dérangemens. Si la ligne des noeuds est perpendiculaire à l'axe, les deux points

d'intersection sont trop peu éloignés du périhélie et de l'orbite de la terre. Mais si ces deux lignes se coupent sous un petit angle, l'un des points d'intersection tombe près de l'aphélie, au delà de toutes les orbites planétaires. Cet arrangement permettait donc de placer deux orbites au lieu d'une.

Plus les comètes s'approchent du soleil, plus les inclinaisons sont grandes: d'où il résulte qu'elles s'éloignent plus vite des planètes.

L'expérience a prouvé que le calcul parabolique s'accorde mieux avec les observations, à mesure que la distance périhélie diminue: d'où il faut conclure, que les orbites sont d'autant plus alongées, que les comètes s'approchent plus du soleil. Par cet arrangement, les comètes qui se rapprochent le plus l'une de l'autre dans les périhélies, y reviennent moins souvent.

§. 369. Quoique la théorie physique des *queues des comètes* soit étrangère à l'astronomie, on attendra peut-être ici une explication des différentes formes sous lesquelles elles se présentent à l'observateur placé sur la terre. On a imaginé une foule d'hypothèses pour expliquer ces phénomènes, dont l'exposition ne serait pas ici en sa place. Je me bornerai à exposer les idées de Newton sur cet objet.

Selon lui, la queue des comètes est composée des vapeurs qui se sont détachées de la comète, par la chaleur à laquelle elle est exposée dans le périhélie. Cette fumée, extrêmement raréfiée par la chaleur, s'élèvera suivant les loix d'hydrostatique, c'est à-dire elle s'éloignera du centre de sa pesanteur, jusqu'à ce qu'elle parviendra à une région remplie de matière de la même rareté ou légèrete. Ce centre n'est pas le centre de gravité du soleil et de la comète, parceque l'attraction n'est pas seulement en raison des masses, mais aussi en raison inverse du carré des distances; mais il sera toujours entre la comète et le soleil, et il sera peu différent du centre de la comète, relativement aux vapeurs qui sont très-prés de la comète, et qui par conséquent formeront une atmosphère sphérique autour de la comète, comme celle de la terre. Mais à mesure que les vapeurs s'eloignent de la comète, l'attraction du soleil augmente par rapport à celle de la comète, et le centre de la

pesanteur s'approche du soleil: les vapeurs plus élevées s'éloigneront donc plutôt du soleil que de la comète. Il doit en résulter, que la comète sera entourée à une petite distance de couches sphériques de vapeurs qui, à une plus grande distance, formeront une queue dirigée vers le côté opposé au soleil. Il en suit encore, que les comètes qui n'approchent pas assés du soleil, n'auront point de queue, et qu'elle sera plus grande après le passage par le périhélie, par la même raison qui fait que la plus grande chaleur sur la terre arrive ordinairement quelques heures après midi. Tout cela est conforme aux observations. Kepler pensa que la queue était formée par les parties de l'atmosphère solaire, que la comète attire à elle, et qui sont poussées vers le côté opposé par les rayons de lumière qui partent du soleil avec une vitesse excessive. Il résulte de ces deux hypothèses, qu'il est imprimée aux vapeurs de la queue une vitesse suivant la prolongation de la droite qui passe par le soleil et la comète.

Cette vitesse est combinée avec celle que les vapeurs ont de commun avec la comète, et qui, dans le périhélie, est perpendiculaire à la première; l'une et l'autre étant dans le plan de l'orbite. Si la comète se trouve plongée dans l'atmosphère solaire, sa résistance ne peut pas altérer la direction du premier mouvement qui fait monter les vapeurs suivant les loix de l'hydrostatique; mais le second mouvement sera diminué par cette résistance, d'autant plus que les vapeurs sont moins denses, ou plus loin de la comète. Si donc le soleil est en S (*Fig.* 103.), et que la comète se meuve de C en *c*, pendant que les vapeurs s'élèvent de C à D, E, etc. en avançant en même tems suivant D*d*, E*e*, F*f*, parallèlement à C*c*; on vient de voir que D*d* sera plus petit que C*c*; E*e* plus petit que D*d*, et ainsi de suite. La queue prendra donc la forme de la courbe *c d e f*, qui est concave du côté d'où vient la comète, et dont la convexité est dirigée vers la droite S*c s* qui joint le soleil et la comète. Si l'observateur en T se trouve dans le plan de l'orbite de la comète, la queue lui paraîtra comme la ligne droite *c s*; mais dès que la terre T sort de ce plan, ou que la comète sort de l'écliptique, la courbure de la queue sera visible. Il s'en suit que la queue paraîtra comme

une droite opposée au soleil, si la comète passe par le noeud près du périhélie; et qu'en d'autres cas elle paraîtra d'autant plus courbée, que la latitude de la comète est plus grande. La courbure étant l'effet de la résistance qu'éprouve le mouvement D*d*, E*e*, elle serait nulle, si C*c* coïncidait avec CS; d'où il suit que la courbure augmentera avec l'angle S C*c*, et qu'elle sera la plus grande là où SC*c* est un angle droit, c'est-à-dire dans le périhélie. Comme la résistance agit suivant *d*D, *e*E, etc. elle serrera les parties antérieures ou extérieures du côté convexe de la queue *c d e f*, qui par conséquent seront plus denses et brillantes que celles du côté concave. Ces résultats sont confirmés par les observations.

Mais il est moins facile d'expliquer d'autres phénomènes. Tels sont la séparation de la queue en plusieurs branches, et les changemens qui s'y font de tems en tems avec une rapidité inconcevable, etc. Ce qui est le plus frappant, c'est l'immense étendue de l'atmosphère des comètes, comparée à la petitesse extrême du noyeau. Peut-être aucun astronome n'est encore parvenu à observer exactement le véritable noyeau, et l'on est porté à croire que la comète entière n'est composée que de vapeurs, du moins auprès du périhélie: car on aperçoit sans difficulté les plus petites étoiles à travers le milieu de la masse de la comète, qu'on avait prise pour le noyeau. Il est probable que les vapeurs, après avoir été décomposées par les rayons du soleil, se condensent de nouveau, à mesure que la comète retourne à son aphélie. Du reste, il semble que ces vapeurs ont une lumière propre, parce qu'on n'a jamais ou très-rarement vu de phases dans les comètes.

§. 370. Les comètes qui, après s'être plongées dans l'atmosphère du soleil, s'en éloignent jusqu'aux limites extrémes, et peut-être au-delà du système solaire, en traversant successivement les orbites de toutes les planètes, sont, selon Newton, le moyen qui maintient la circulation éternelle de la nature. Les idées d'un philosophe comme Newton méritent toujours nôtre attention, quand-même nous ne les approuverions pas. Les mers de la terre étant échauffées par le soleil, leurs eaux se transforment en vapeurs qui s'élèvent aux régions plus froides, où elles s'amassent en nuages qui sont

distribués par des vents bienfaisans sur des pays fertiles: alors elles découlent en gouttes de pluie, ou elles déscendent des montagnes en torrens, pour aider à la végétation des plantes, et finissent par se changer en matière terreuse. Il doit en résulter, à ce qui paraît, que la terre perdra en parties aqueuses, ce qu'elle gagne en parties solides; et cette perte pourra être réparée par les comètes. Quand ces corps se sont emparés d'une partie de l'atmosphère solaire dans le périhélie, il est probable qu'ils en perdent une partie dans leur longue route, principalement en s'approchant des planètes qui, en attirant à elles ces vapeurs, ramassent des matériaux pour une nouvelle végétation. C'est ainsi que les comètes enrichissent les planètes, en s'appauvrissant, jusqu'à ce qu'après avoir achevé une révolution, elles reviennent au soleil, pour lui dérober de nouveaux matériaux avec lesquels elles vont recommencer leur route bienfaisante. Cette hypothèse explique d'une manière satisfaisante l'observation qu'on a faite sur les comètes qui sont revenues plusieurs fois à leur périhélie, sous des formes très-différentes, en présentant de longues queues dans une révolution, et n'en ayant aucune dans la révolution suivante. Une suite nécessaire de cela, ainsi que de l'écoulement continuel de lumière, est la diminution de la masse du soleil qui, selon Newton, pourra être réparée de la manière suivante. La résistance de l'atmosphère solaire, qu'éprouve la comète, en la traversant auprès de son périhélie, doit nécessairement retarder son mouvement perpendiculaire au rayon vecteur, tandis que le soleil l'attire suivant ce rayon vecteur avec une force qui ne s'affaiblit jamais. Il en résulte que chaque révolution rapprochera la comète du soleil de plus en plus, et que la comète finira par se réunir au soleil, pour réparer la masse qu'elle lui avait dérobée (1).

On regardera sans doute avec bien de la satisfaction les comètes comme le commun lien qui embrasse tout le système solaire, et qui établit un rapport plus intime entre les planètes et le soleil, peut-être même entre divers systèmes solaires. Mais il est plus satisfaisant de voir, que les élémens du sys-

(1) *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. III. Prop.* 42. „Singulis revolutionibus accedendo ad solem, „incidet is tandem in corpus solis.

tème planétaire sont ordonnés de manière qu'il doit jouir de la plus grande stabilité (2). Il est difficile de réfléchir sur la distribution des planètes et des comètes, et sur la disposition de leurs orbites, sans être pénétré de sentimens semblables à ceux par lesquels Newton termine son immortel ouvrage: que l'univers est soumis à l'autorité souveraine d'un seul dominateur, et qu'il a été construit suivant le plan d'un être infiniment sage et puissant (3).

---

(2) *Expos. du Syst. du Monde par M. Laplace, Trois. Edit. pag.* 392.

(3) „Elegantissima haecce solis, planetarum et cometarum compages nonnisi consilio et dominio „entis intelligentis et potentis oriri potuit. Et si stellae fixae sint centra similium systematum, „haec omnia simili consilio constructa suberunt *Unius dominio*". (Voy. *Scholium generale* à la fin des *Phil. Nat. Princ. Math.*).

FIN DU TOME SECOND.

Astr. Rationn. Tab. I.

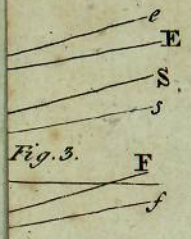


Fig. 3.

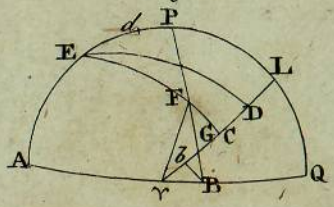


Fig. 4.

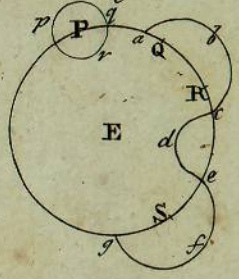


Fig. 5.

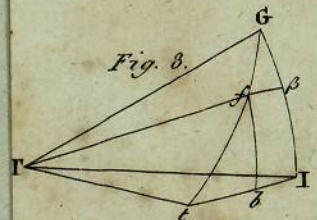


Fig. 8.

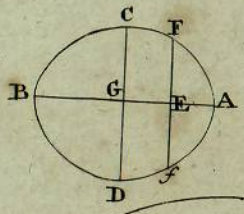


Fig. 9.

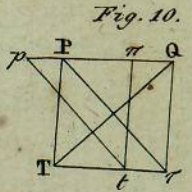


Fig. 10.

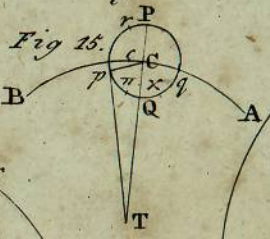


Fig. 15.

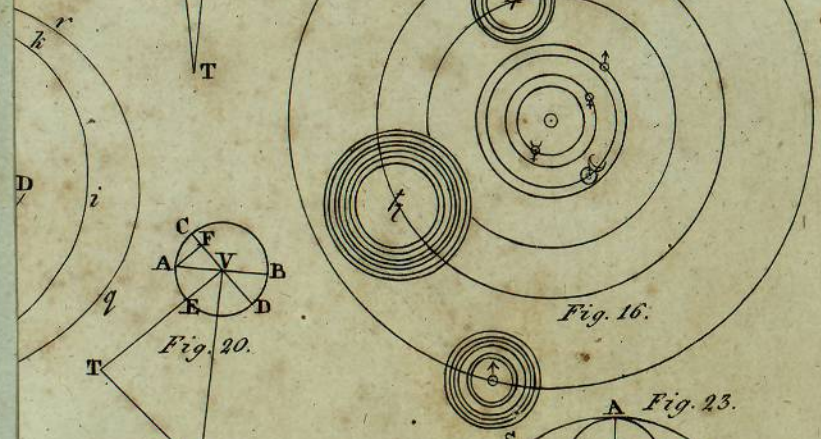


Fig. 16.

Fig. 20.



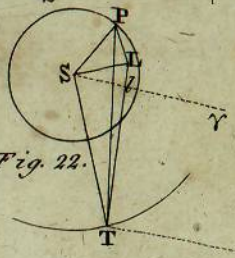
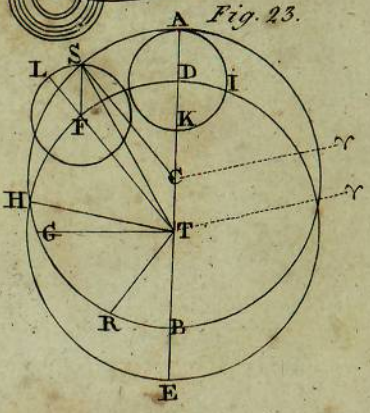
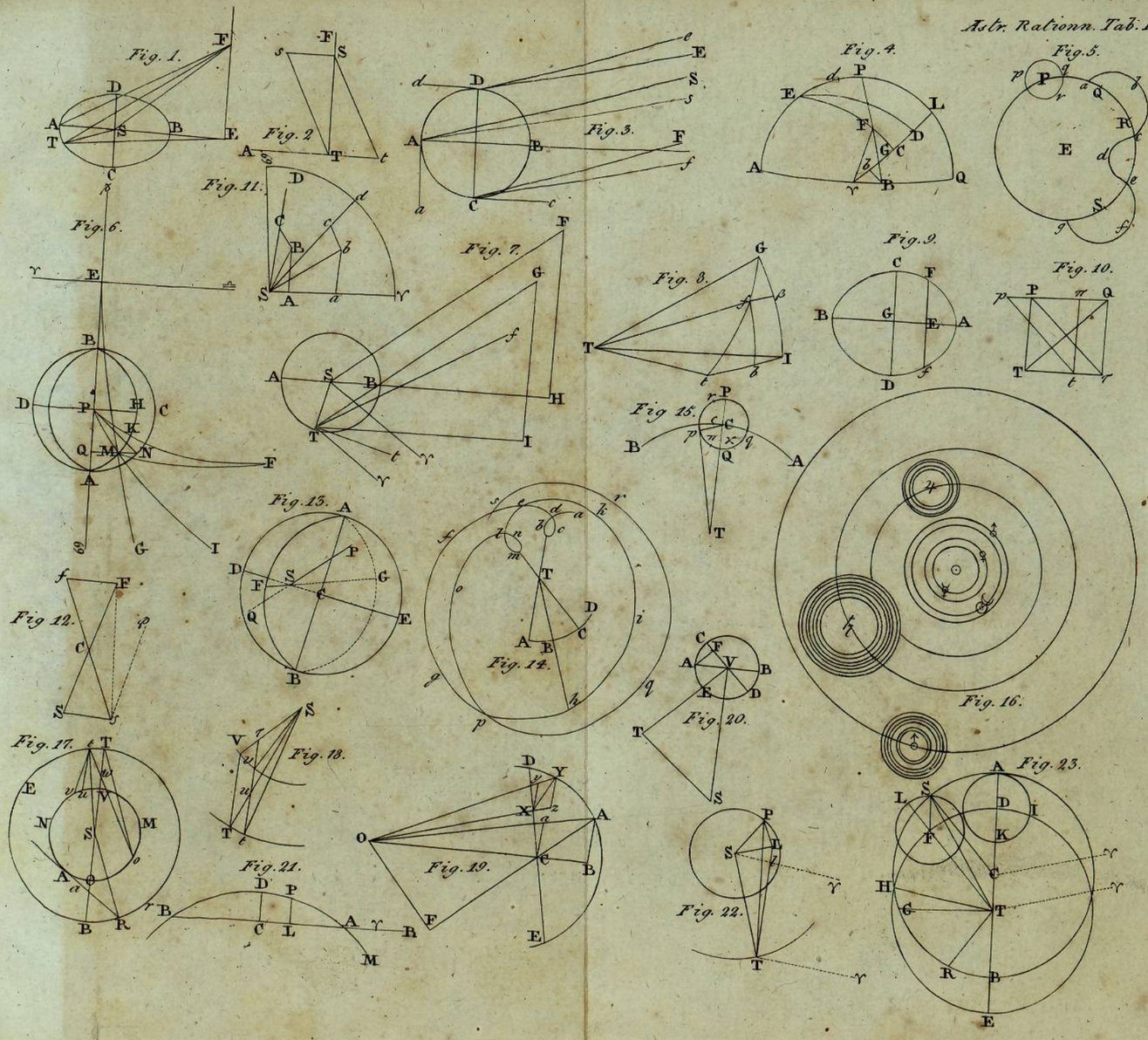


Fig. 22.

Fig. 23.



Astr. Rationn. Tab. I.



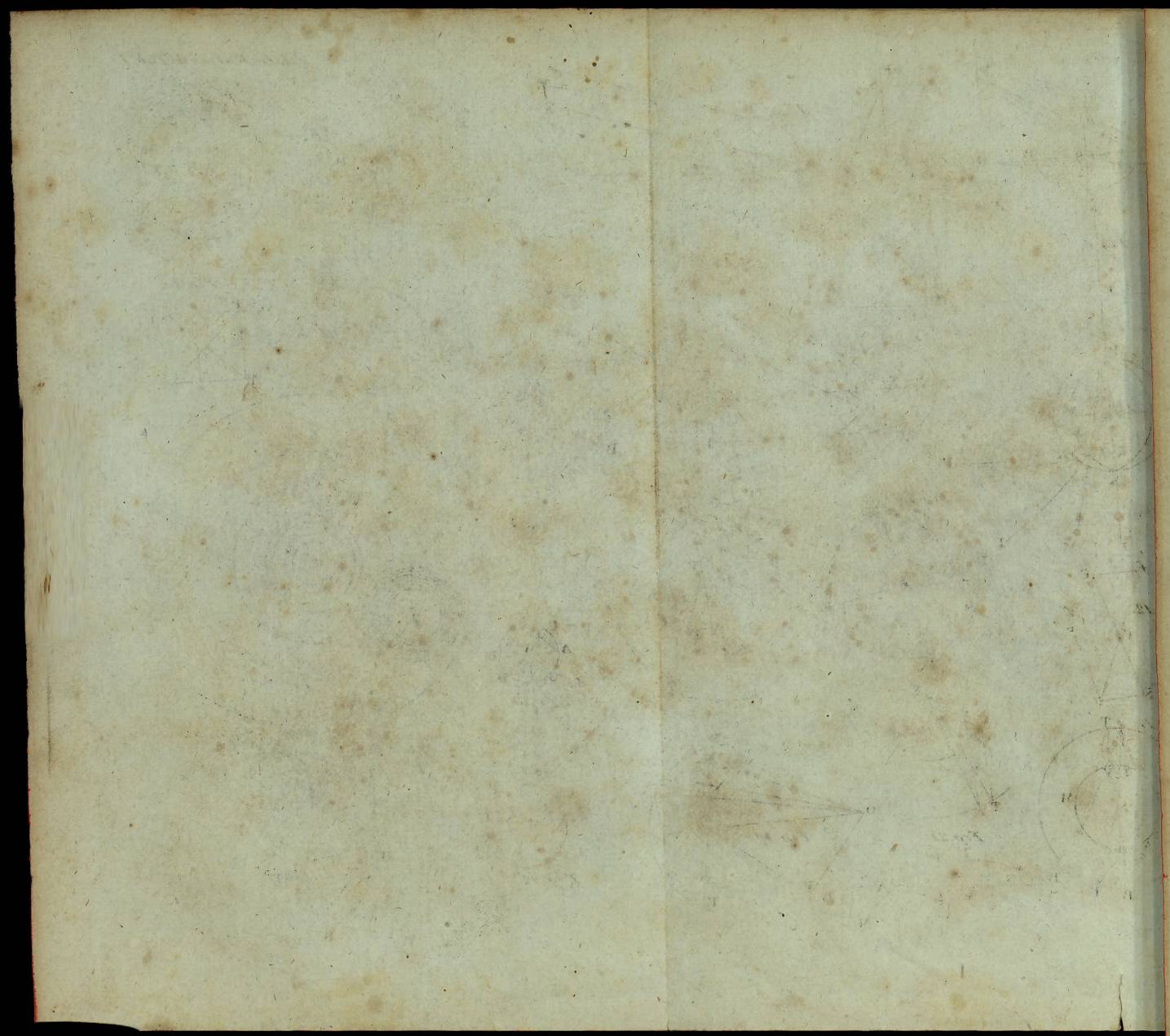


Fig. 27.

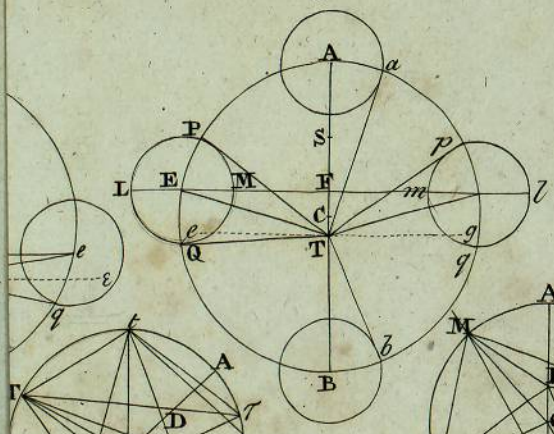


Fig. 28.

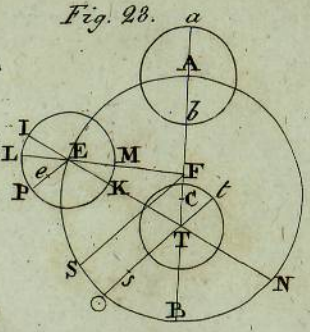


Fig. 33.

Fig. 34.

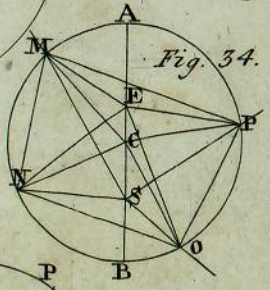


Fig. 35.

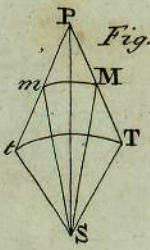


Fig. 40.



Fig. 42.

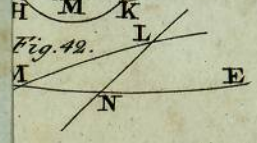
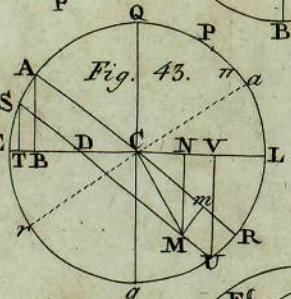


Fig. 43.



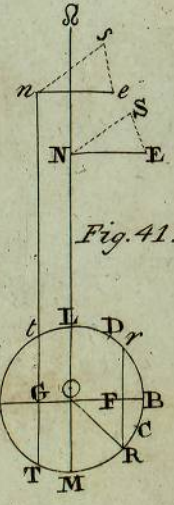
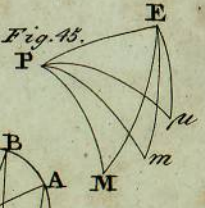


Fig. 41.

Fig. 45.



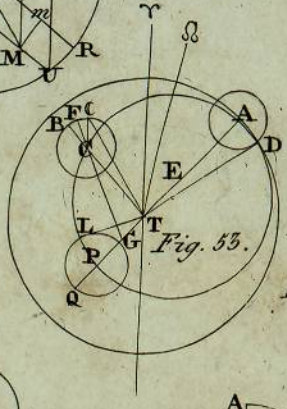
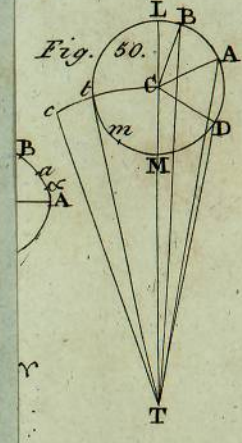


Fig. 53.

Fig. 50.



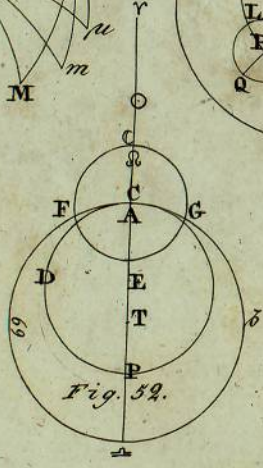


Fig. 52.

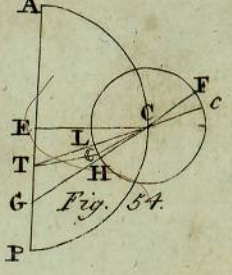


Fig. 54.

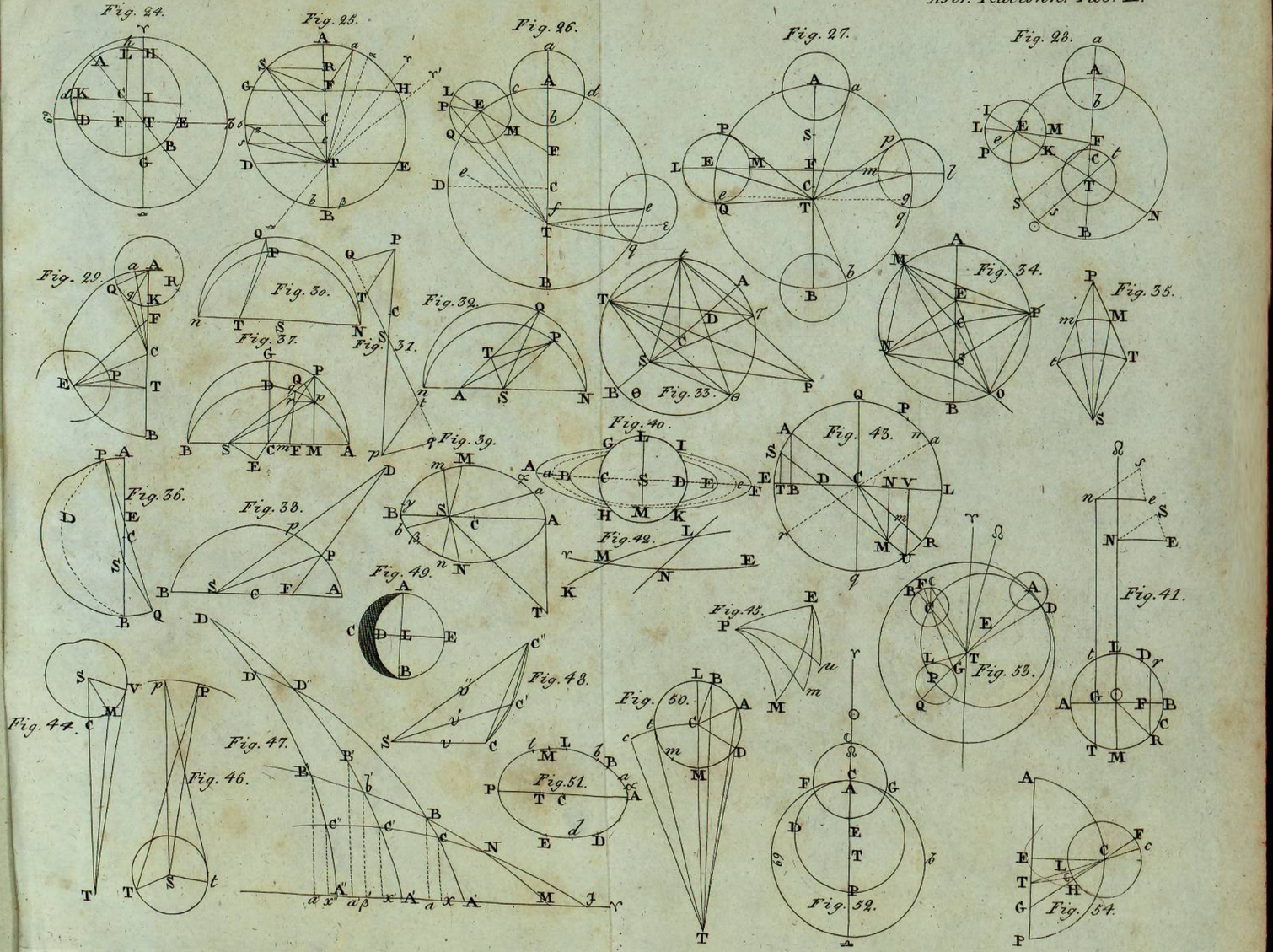


Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.

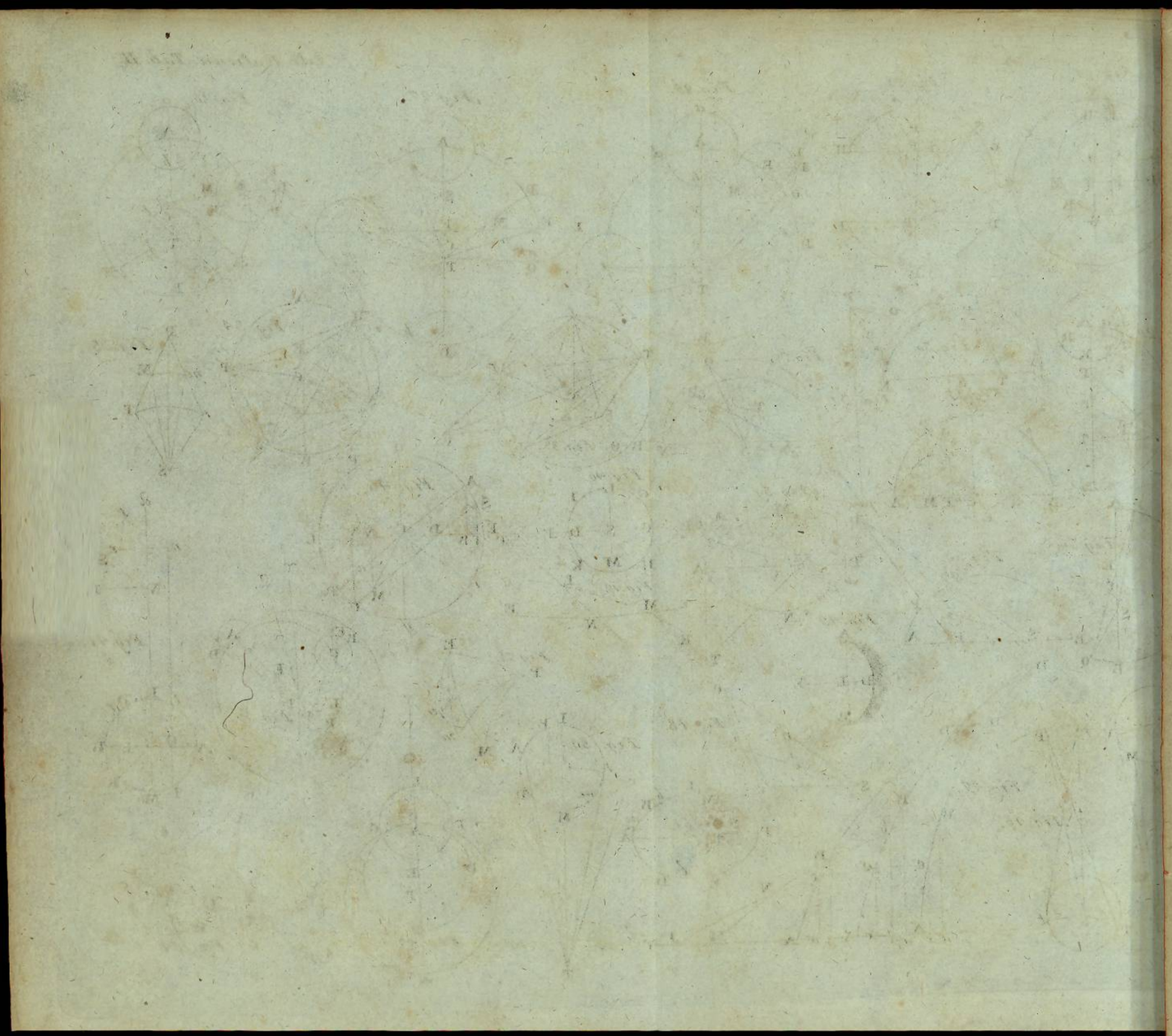


Fig. 58.

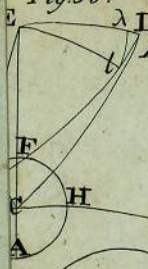


Fig. 59.

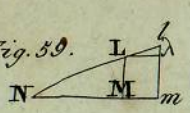


Fig. 60.

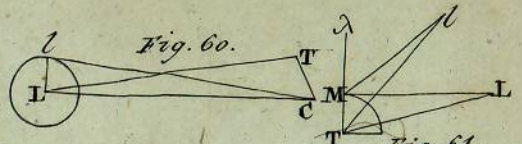


Fig. 61.

Fig. 67.

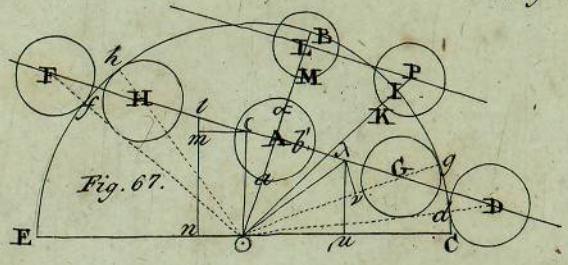


Fig. 68.

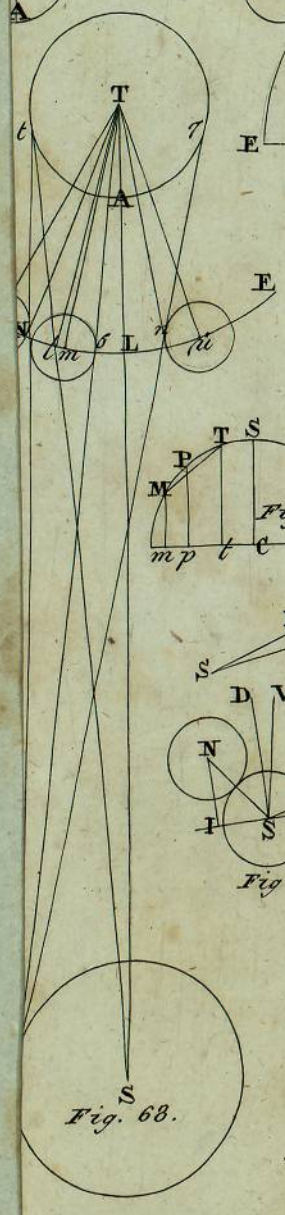


Fig. 69.

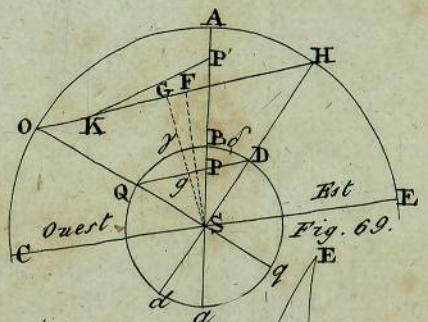


Fig. 70.

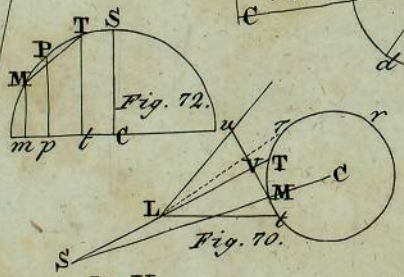


Fig. 72.

Fig. 78.

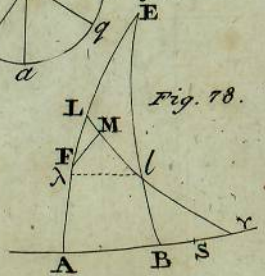


Fig. 76.

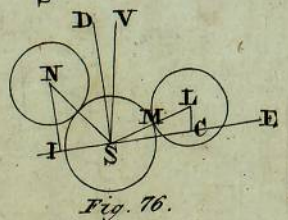


Fig. 71.

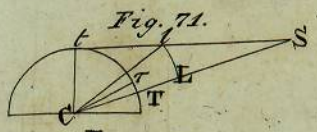
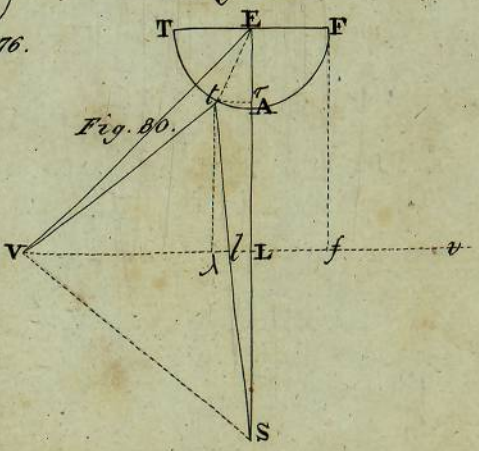


Fig. 80.



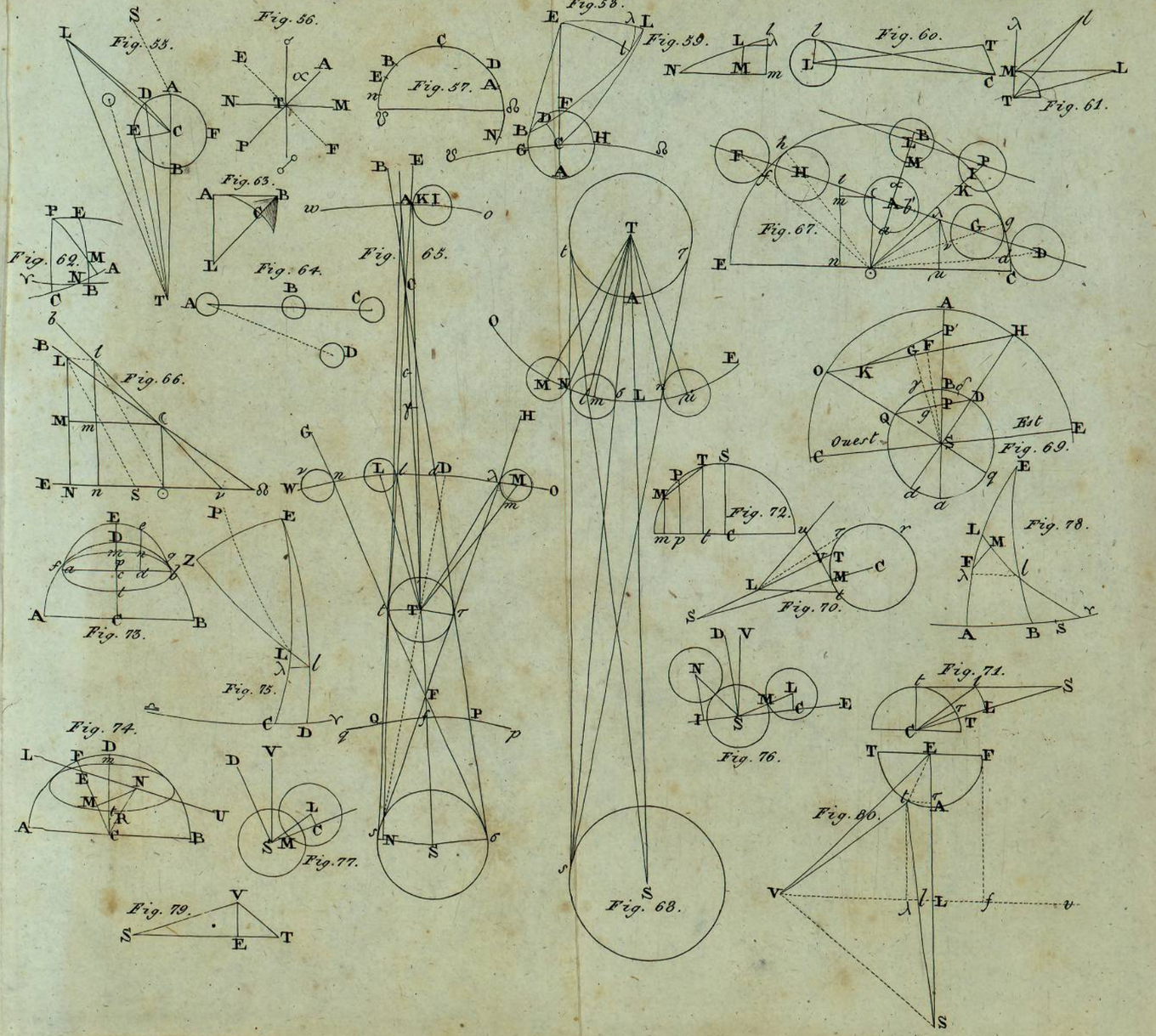
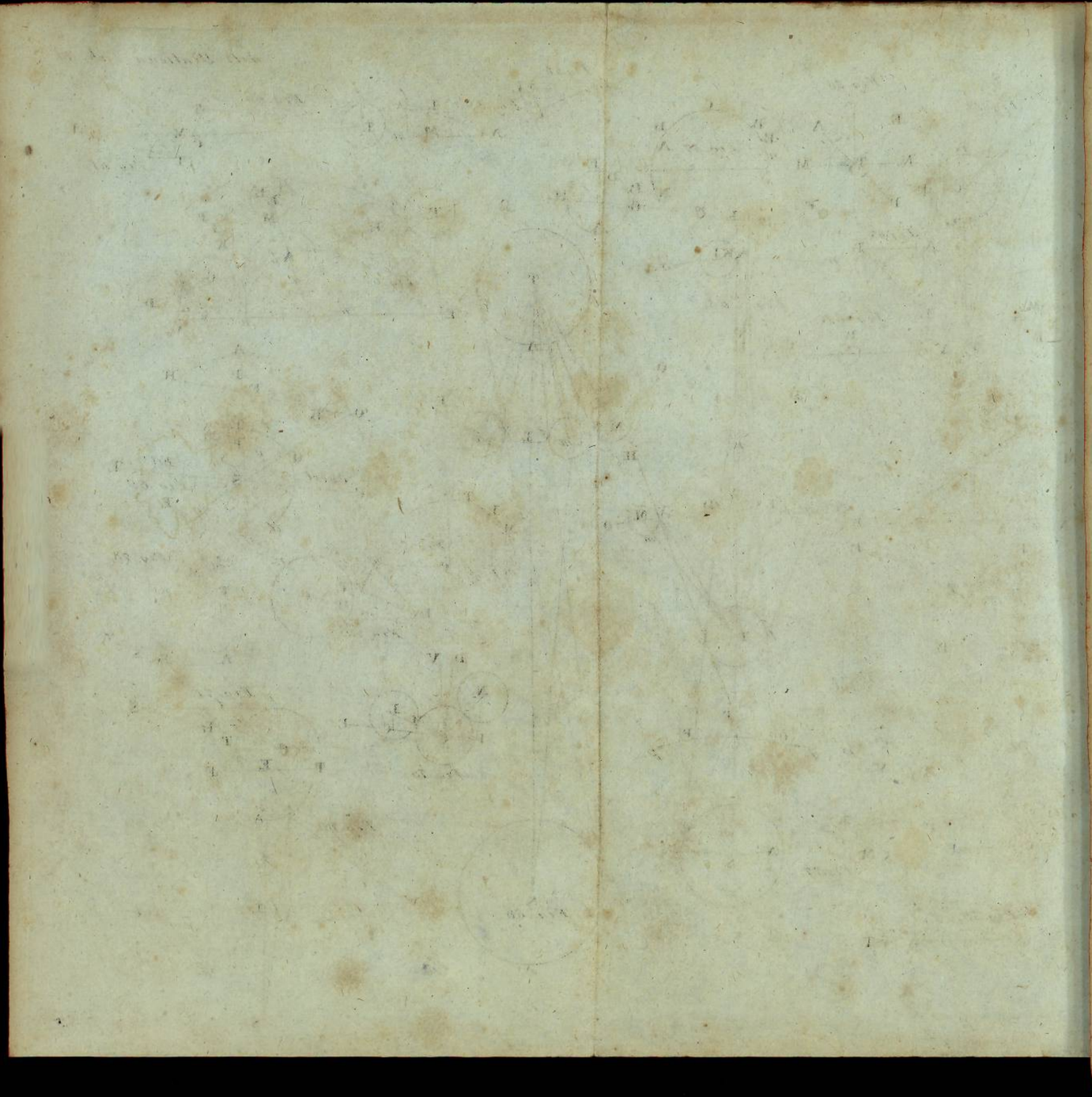


Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 67.
Fig. 69.
Fig. 66.
Fig. 73.
Fig. 75.
Fig. 74.
Fig. 77.
Fig. 79.
Fig. 68.
Fig. 72.
Fig. 70.
Fig. 78.
Fig. 71.
Fig. 76.
Fig. 80.
Ouest
Est



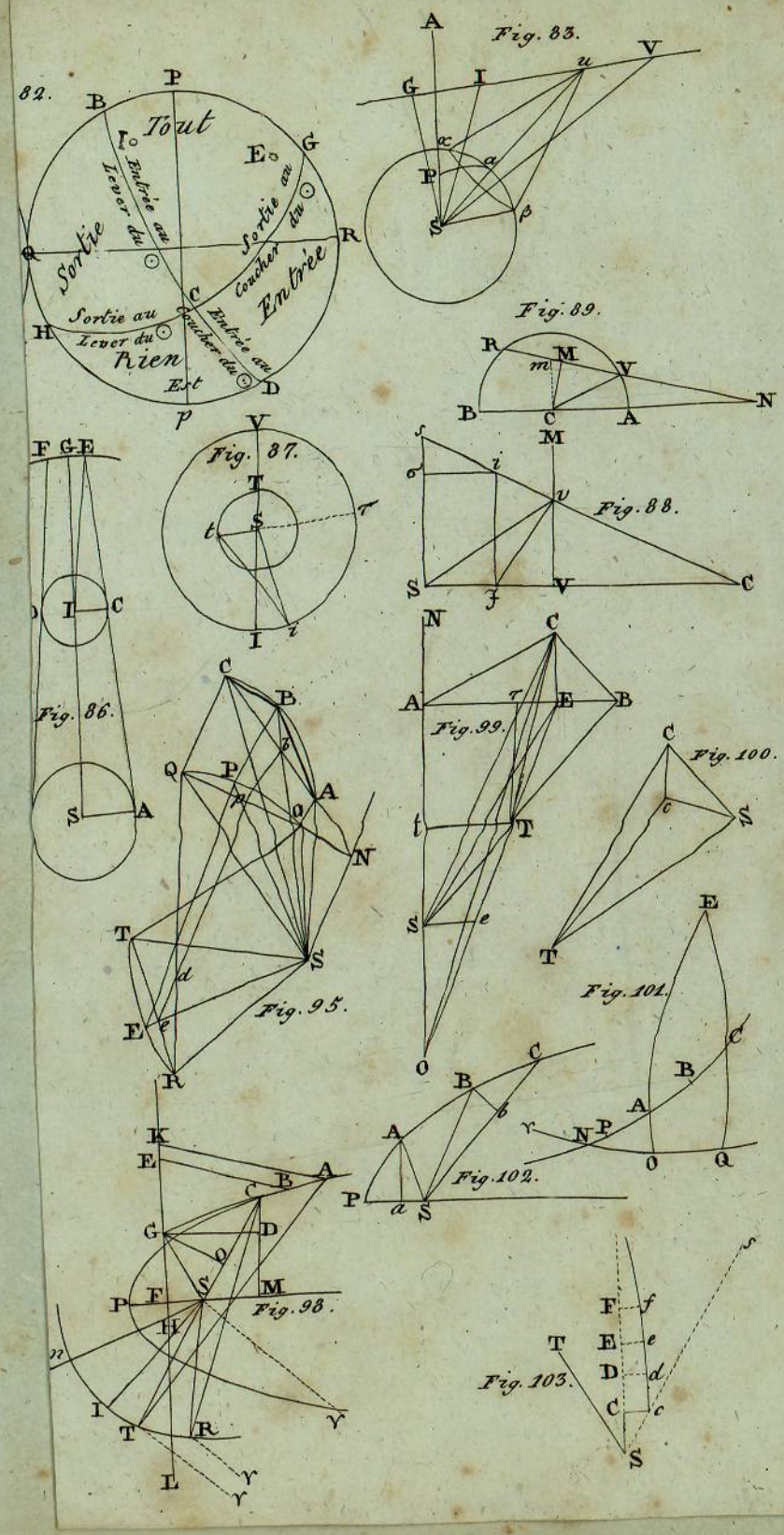

82.
Tout
Entrée au Lever du ☉
Sortie au Coucher du ☉
Sortie
Entrée
Sortie au Lever du ☉
Entrée au Coucher du ☉
Rien
Est
Fig. 83.
Fig. 89.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 86.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 95.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 98.
Fig. 103.

Fig. 81.

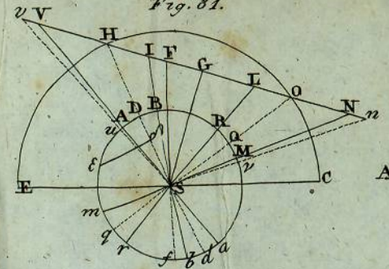
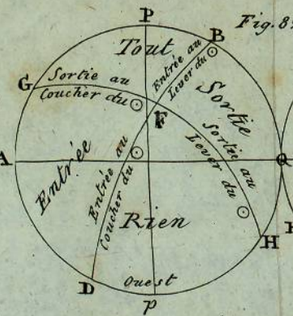


Fig. 82.



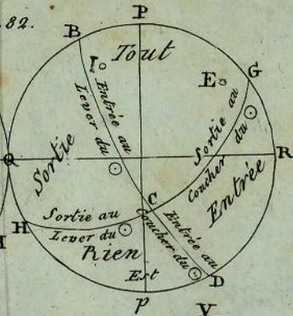


Fig. 83.

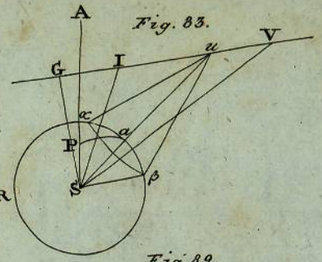
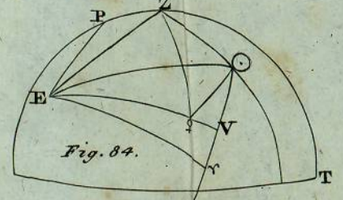


Fig. 84.



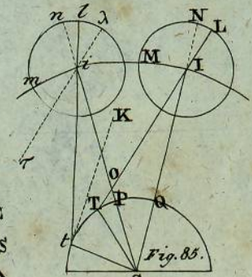




Fig. 87.

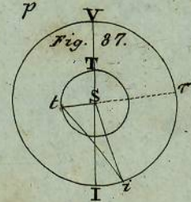


Fig. 89.



Fig. 88.

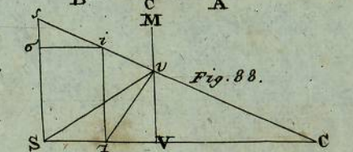


Fig. 90.



Fig. 91.



Fig. 85.

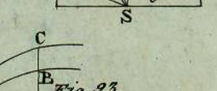


Fig. 86.

Fig. 93.

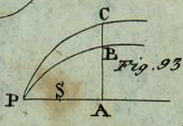


Fig. 94.

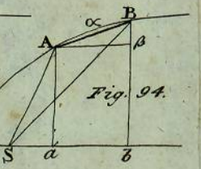


Fig. 95.

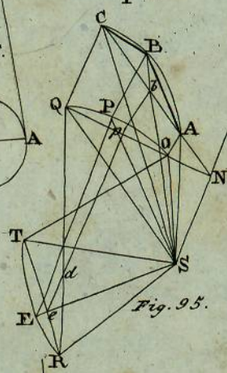


Fig. 99.

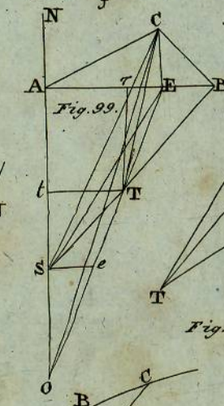


Fig. 100.

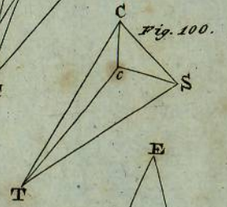


Fig. 92.

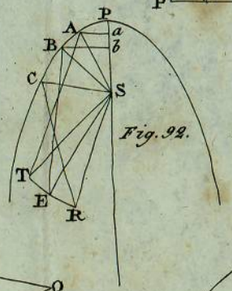


Fig. 96.

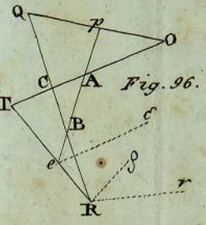


Fig. 97.

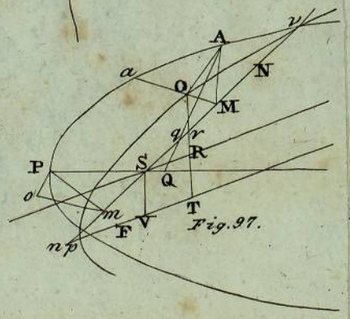


Fig. 98.

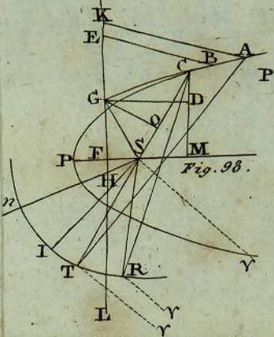


Fig. 101.

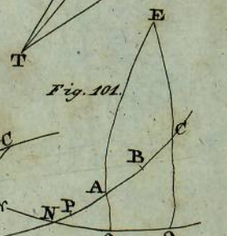


Fig. 102.

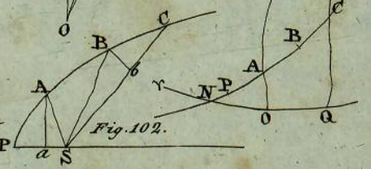


Fig. 103.



